ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

Extrait des *Bulletins de la Classe des sciences*. Séance du 3 mai 1921, nº 5, pp. 244-252.

Géométrie. — Sur quelques congruences linéaires de cubiques gauches considérées par M. Stuyvaert,

par Lucien Godeaux, professeur à l'École militaire (*).

La lecture des intéressantes recherches de M. Stuyvaert sur les congruences de cubiques gauches, couronnées par l'Académie en 1913 (**), nous a remis en mémoire une courte note dans laquelle nous avons déterminé les types généraux de congruences linéaires formées de cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche fixe (***). Dans son *Mémoire*, M. Stuyvaert, après avoir exposé (chap. VII) une méthode de détermination des différents types de congruences linéaires de cubiques gauches, examine brièvement les premières congruences obtenues par cette méthode. Nous nous proposons de montrer que deux de ces congruences sont des cas particuliers de l'une de celles que nous avons rencontrées dans notre travail cité. Nous montrerons ensuite qu'une troisième congruence signalée par M. Stuyvaert rentre comme cas particulier dans une congruence que nous avons rencontrée autrefois dans un autre travail (IV).

(*) Présenté par M. Stuyvaert.

(**) *Congruences de cubiques gauches.* (Mémoires in-8º de l'Académie royale de Belgique, 2e série, t. IV, 1920, pp. 1-197.) La publication de ce mémoire, remis à l'Académie en août 1913, a été retardée par la guerre.

(***) *Détermination des congruences linéaires de cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche fixe.* (Rendiconti Circ. Matem. di Palermo, vol. XXXII, 1911, pp. 286-291.)

(IV) *Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches.* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 4e série, t. IX, 1909, pp. 260-266.)

1. — Considérons en premier lieu la congruence (*)

$$\left\|\begin{matrix} A_x & \alpha_1 l_x + \alpha_2 m_x & \alpha_1 l'_x + \alpha_2 m'_x \\ B_x & n_x & n'_x \end{matrix}\right\| = 0, \tag{1}$$

où

$$A_x \equiv \alpha_1^2 a_x + \alpha_1\alpha_2 b_x + \alpha_2^2 c_x + \alpha_1\alpha_3 d_x + \alpha_2\alpha_3 e_x,$$
$$B_x \equiv \alpha_1 f_x + \alpha_2 g_x + \alpha_3 h_x.$$

La courbe générique de la congruence fait partie de l'intersection de la quadrique

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} l_x & n_x \\ l'_x & n'_x \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} m_x & n_x \\ m'_x & n'_x \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

et de la surface cubique

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} a_x & 0 & f_x \\ l_x & m_x & n_x \\ l'_x & m'_x & n'_x \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} b_x & c_x & g_x \\ l_x & m_x & n_x \\ l'_x & m'_x & n'_x \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} d_x & e_x & h_x \\ l_x & m_x & n_x \\ l'_x & m'_x & n'_x \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

L'intersection de ces deux surfaces est complétée par la cubique gauche fixe

$$\left\|\begin{matrix} l_x & m_x & n_x \\ l'_x & m'_x & n'_x \end{matrix}\right\| = 0, \tag{4}$$

et cette cubique gauche (4) est par conséquent rencontrée en cinq points par la cubique générique de la congruence (1).

Si l'on fixe le rapport $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, la quadrique (2) est déterminée et la surface cubique (3) appartient à un faisceau déterminé par les surfaces

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} a_x & 0 & f_x \\ l_x & m_x & n_x \\ l'_x & m'_x & n'_x \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} b_x & c_x & g_x \\ l_x & m_x & n_x \\ l'_x & m'_x & n'_x \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

et

$$\begin{vmatrix} d_x & e_x & h_x \\ l_x & m_x & n_x \\ l'_x & m'_x & n'_x \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

(*) M. Stuyvaert, *loc. cit.*, nº 45, pp. 105, 106 et 107. — Nous utilisons les mêmes notations que M. Stuyvaert.

Sur chacune des quadriques (2), il y a donc un faisceau de courbes de la congruence (1). Ces quadriques forment un faisceau dont la base est constituée par la cubique gauche (4) et par la droite

$$(7) \qquad n_x = 0, \qquad n'_x = 0.$$

Les cubiques de la congruence (1) s'appuient évidemment en un point sur la droite (7). Si l'on se reporte à notre travail *Détermination...*, on voit que la congruence (1) est un cas particulier d'une congruence de la seconde catégorie. Pour compléter la configuration formée par les lignes singulières de la congruence (1), nous suivrons le raisonnement fait dans ce travail.

Le faisceau de cubiques gauches de la congruence situées sur une quadrique (2), où $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ est fixé, a comme points-base les intersections de cette quadrique avec la courbe d'ordre 6 et de genre trois qui, avec la cubique gauche (4), forme l'intersection des surfaces (5) et (6). Ces points-base sont des points singuliers de la congruence et, en général, aucun d'eux ne se trouve sur la droite (7). Le lieu de ces points est la courbe qui, avec la cubique (4), forme l'intersection de la surface (6) et de la surface obtenue en éliminant $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ entre (2) et (5) :

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} l_x & n_x \\ l'_x & n'_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_x & c_x & g_x \\ l_x & m_x & n_x \\ l'_x & m'_x & n'_x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_x & n_x \\ m'_x & n'_x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_x & 0 & f_x \\ l_x & m_x & n_x \\ l'_x & m'_x & n'_x \end{vmatrix} = 0.$$

La surface (8), d'ordre cinq, passe doublement par la cubique (4); elle rencontre donc la surface (6) en une courbe d'ordre $3 \times 5 - 3 \times 2 = 9$. Cette courbe s'appuie en un point (situé dans le plan $h_x = 0$) sur la droite (7). De plus, une quadrique (2) devant rencontrer cette courbe en 4 points variables, elle s'appuie encore en 13 points sur la cubique (4).

En résumé

La congruence (1) *est formée des cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche fixe, en un point sur une bisécante de cette cubique, et en quatre points sur une courbe d'ordre 9 s'appuyant elle-même en 13 points sur la cubique fixe et en un point sur la bisécante de celle-ci.*

L'ordre des courbes singulières était d'ailleurs déterminé par M. Stuyvaert dans son *Mémoire.*

2. — Considérons la congruence linéaire représentée par (*)

$$(9)\qquad \left\|\begin{matrix} \alpha\beta a_x & \alpha\beta a'_x & C_x \\ \alpha b_x + \beta c_x & \alpha b'_x + \beta c'_x & C'_x \end{matrix}\right\| = 0,$$

où

$$C_x \equiv \alpha^2 m_x + \alpha\beta n_x + \beta^2 p_x + \alpha q_x + \beta r_x,$$
$$C'_x \equiv \alpha s_x + \beta t_x + u_x.$$

La courbe générique de la congruence (9) est l'intersection partielle de la quadrique

$$(10)\qquad \alpha \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a'_x & b'_x \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_x & c_x \\ a'_x & c'_x \end{vmatrix} = 0$$

(décrivant un faisceau) et de la surface cubique

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 m_x + \alpha\beta n_x + \beta^2 p_x + \alpha q_x + \beta r_x & \alpha s_x + u_x & t_x \\ \alpha\beta a_x & \alpha b_x & c_x \\ \alpha\beta a'_x & \alpha b'_x & c'_x \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation de cette surface peut s'écrire

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha^2 \begin{vmatrix} m_x & 0 & 0 \\ a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} n_x & s_x & t_x \\ a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{vmatrix} + \beta^2 \begin{vmatrix} p_x & 0 & 0 \\ a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{vmatrix} \\ &+ \alpha \begin{vmatrix} q_x & 0 & 0 \\ a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} r_x & u_x & 0 \\ a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right.$$

(*) M. Stuyvaert, *loc. cit.*, n° 48, pp. 113 et 114.

L'intersection des surfaces (10) et (11) se complète par la cubique gauche fixe

$$(12) \qquad \left\| \begin{matrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{matrix} \right\| = 0,$$

sur laquelle les cubiques de la congruence (9) s'appuient donc en cinq points.

Les cubiques de la congruence (9) s'appuient de plus, comme on le voit aisément, en un point variable sur la bisécante

$$(13) \qquad a_x = 0, \qquad a'_x = 0$$

de la cubique (12).

Si l'on fixe le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$, les courbes de la congruence appartenant à la quadrique (10) sont découpées par les surfaces cubiques d'un faisceau déterminé par les surfaces

$$(14) \qquad \alpha^2 \mid m_x \quad 0 \quad 0 \mid + \alpha\beta \mid n_x \quad s_x \quad t_x \mid + \beta^2 \mid p_x \quad 0 \quad 0 \mid = 0,$$

$$(15) \qquad \alpha \mid q_x \quad 0 \quad 0 \mid + \beta \mid r_x \quad u_x \quad 0 \mid = 0,$$

Le lecteur complétera les déterminants figurant dans ces équations en se reportant à l'équation (11).

Ces courbes forment donc un faisceau ayant quatre points-base, points singuliers de la congruence, déterminés sur la quadrique (10) par la sextique de genre trois qui, avec la cubique (12), forme l'intersection des surfaces (14) et (15).

En se reportant à notre travail : *Détermination*..., on voit que la congruence (9) est une congruence de la seconde catégorie. Nous allons compléter la configuration des courbes singulières.

Remarquons tout d'abord que la sextique de genre trois dont il vient d'être question ne s'appuie pas, en général, sur la droite (13).

Le lieu des quatre points-base du faisceau de courbes de la congruence situé sur une quadrique (10), lorsque $\frac{\alpha}{\beta}$ varie, est une courbe singulière de la congruence. Cette courbe se trouve sur chacune des surfaces obtenues en éliminant α, β entre deux des trois équations (10) (14) et (15). En combinant (10) et (14), par exemple, on trouve une surface d'ordre 7, passant trois fois par la cubique gauche (12) et deux fois par la droite (13). En combinant (10) et (15), on trouve une surface d'ordre 5, passant deux fois par la cubique (12) et une fois par la droite (13). Les équations de ces deux surfaces sont données dans le *Mémoire* de M. Stuyvaert. Ainsi que celui-ci le remarque d'ailleurs, ces deux surfaces ont en commun, outre la cubique (12) et la droite (13), une courbe (ou un ensemble de courbes) singulière d'ordre 15.

Remarquons que la surface (14) rencontre la droite (13), en dehors de la cubique (12), au point

$$\alpha^2 m_x + \alpha\beta n_x + \beta^2 p_x = 0, \qquad a_x = a'_x = 0,$$

et que la surface (15) rencontre cette même droite au point

$$\alpha q_x + \beta r_x = 0, \qquad a_x = a'_x = 0.$$

On en conclut que la courbe singulière d'ordre 15 rencontre la droite (13) aux points

$$m_x r_x^2 - n_x r_x q_x + p_x q_x^2 = 0, \qquad a_x = a'_x = 0,$$

c'est-à-dire en trois points.

Une quadrique (10) doit rencontrer cette courbe d'ordre 15 à 4 points variables ; donc cette courbe s'appuie en $2 \times 15 - 4 - 3 = 23$ points sur la cubique gauche (12).

En résumé

La congruence (9) est formée par les cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche fixe, en un point sur une bisécante de celle-ci et en quatre points sur une courbe d'ordre 15 s'appuyant elle-même en 23 points sur la cubique fixe et en trois points sur la bisécante de celle-ci.

3. — Considérons enfin la congruence linéaire de cubiques gauches représentée par (*)

$$
(16) \qquad \begin{Vmatrix} \alpha^2 a_x + \alpha\beta b_x + \beta^2 d_x & \alpha c_x + d_x \\ \alpha^2 a'_x + \alpha\beta b'_x + \beta^2 d'_x & \alpha c'_x + d'_x \\ \alpha^2 a''_x + \alpha\beta b''_x + \beta^2 d''_x & \alpha c''_x + d''_x \end{Vmatrix} = 0.
$$

Comme M. Stuyvaert l'a remarqué, la courbe générique de cette congruence se trouve sur la surface cubique

$$
(17) \qquad \alpha \mid a_x \quad c_x \quad d_x \mid + \beta \mid b_x \quad c_x \quad d_x \mid =
$$

et sur la surface cubique

$$
\mid a_x \quad \alpha\beta b_x + \beta^2 d_x \quad \alpha c_x + d_x \mid = 0,
$$

dont nous écrivons l'équation sous la forme

$$
(18) \qquad \alpha \mid a_x \quad b_x \quad c_x \mid + \mid a_x \quad b_x \quad d_x \mid + \beta \mid a_x \quad d_x \quad c_x \mid = 0.
$$

L'intersection se complète par la sextique gauche de genre trois :

$$
(19) \qquad \| a_x \quad b_x \quad c_x \quad d_x \| = 0.
$$

On sait que, dans ces conditions, les cubiques de la congruence s'appuient nécessairement en 8 points sur la sextique (19).

Rapportons projectivement les surfaces cubiques passant par (19) aux plans d'un espace à trois dimensions, comme nous l'avons fait dans notre travail *Nouveaux types...*, en posant

$$
(20) \qquad \frac{y_1}{|a_x \quad b_x \quad c_x|} = \frac{y_2}{|a_x \quad b_x \quad d_x|} = \frac{y_3}{|a_x \quad c_x \quad d_x|} = \frac{y_4}{|b_x \quad c_x \quad d_x|}.
$$

(*) M. Stuyvaert, *loc. cit.*, n° 49, pp. 115 et 116.

Nous définissons ainsi une transformation birationnelle qui fait correspondre, à la surface (17), le plan

$$\alpha y_3 + \beta y_4 = 0,$$

et à la surface (18), le plan

$$\alpha y_1 + y_2 - \beta y_3 = 0.$$

A une courbe de la congruence (16) correspond donc une droite s'appuyant sur la droite $y_3 = y_4 = 0$ et sur la conique

$$y_1 y_4 + y_3^2 = 0, \qquad y_2 = 0. \tag{21}$$

On en conclut immédiatement, comme nous l'avons fait dans notre travail cité, que les courbes de la congruence (16) s'appuient en un point sur la cubique gauche

$$\left\| \begin{matrix} c_x & c'_x & c''_x \\ d_x & d'_x & d''_x \end{matrix} \right\| = 0 \tag{22}$$

et en un point sur une courbe rationnelle d'ordre 6 s'appuyant en 16 points sur la sextique (19) et en un point sur la cubique (22), transformée de la conique (21) par (20).

Cette courbe d'ordre 6 est représentée par les équations

$$| a_x \quad b_x \quad c_x | = 0, \qquad \left| \begin{matrix} | a_x \quad b_x \quad c_x | & -| a_x \quad c_x \quad d_x | \\ | a_x \quad c_x \quad d_x | & | b_x \quad c_x \quad d_x | \end{matrix} \right| = 0.$$

La transformation (20) permet d'étudier aisément la plupart des propriétés de la congruence (16).

En résumé

La congruence (16) *est engendrée par les cubiques gauches s'appuyant en 8 points sur une sextique de genre 3, en un point sur une courbe rationnelle d'ordre 6 s'appuyant 16 fois sur la première sextique, et en un point sur une cubique gauche s'appuyant elle-même 8 fois sur la première sextique, une fois sur la seconde.*

Qu'il nous soit permis, à propos du dernier de nos travaux cités, de répondre à une critique faite à son sujet par M. Stuyvaert (*). Celui-ci écrit que, dans notre énumération des types de congruences de cubiques gauches s'appuyant 8 fois sur une sextique de genre trois, nous en avons « laissé échapper un assez remarquable ». Nous nous sommes borné, dans notre travail, aux types *généraux* de congruences linéaires susceptibles d'être obtenus par notre procédé; celui auquel M. Stuyvaert fait allusion ne peut être qu'un cas limite de ceux-là.

(*) M. Stuyvaert, *Algèbre à deux dimensions*. (Subventionné par l'Académie royale de Belgique. Fondation Agathon De Potter.) Gand, Van Rysselberghe et Rombaut, 1920. Voyez chapitre III, n° 29, p. 46.