ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — Les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de diramation,

par LUCIEN GODEAUX (*).

L'un des problèmes que se pose la Géométrie algébrique est celui de déterminer, dans chaque classe de surfaces (ou variétés) algébriques, une surface (ou variété) particulière dont les sections planes ou hyperplanes sont des courbes (ou variétés) canoniques ou pluricanoniques. Une surface dont les sections planes ou hyperplanes sont des courbes i-canoniques est appelée brièvement surface i-canonique. Dans un mémoire récent sur la classification des surfaces algébriques, M. Enriques écrivait (**) :

« La determinazione dei casi in cui le superficie canoniche
» o bicanoniche, ecc. si riducano a superficie multiple, costi-
» tuisce un problema, che sembra ammettere un picolo
» numero di soluzioni, e che additiamo all' attenzione degli
» studiosi. »

Au cours de nos recherches sur les surfaces possédant des involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, nous avons rencontré des surfaces dont le système bicanonique est composé au moyen d'une telle involution, d'ordre 2; et nous avons pu déterminer toutes ces surfaces. L'objet de ce

---

(*) Présenté par MM. Neuberg et Stuyvaert.

(**) F. ENRIQUES, *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. (REND. R. ACCAD. LINCEI, 1° sem. 1914 [note au bas de la page 210].)

petit travail est donc de déterminer quelles sont les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de diramation. C'est donc une première contribution au problème signalé par M. Enriques.

Nous établissons le théorème suivant :

Les surfaces algébriques de genre géométrique supérieur à l'unité, dont le système canonique n'est pas formé au moyen des courbes d'un faisceau et dont le système bicanonique est composé avec une involution d'ordre 2, n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, ont les genres

$$p^{(1)} = 7, \qquad p_a = 0, \qquad p_g = 3, \qquad P_2 = 7, \qquad P_3 = 19, \ldots$$

On peut prendre, pour modèle projectif de ces surfaces, une surface bicanonique double, d'ordre 12, à sections hyperplanes de genre 10, de S_6, possédant vingt-huit points de diramation qui sont des points doubles coniques.

De pareilles surfaces existent certainement: l'une d'elles est la surface qui représente les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre 3.

Pour établir ce théorème, nous avons besoin d'une propriété des surfaces doubles, qui se déduit facilement des résultats obtenus dans un mémoire publié en 1914 (*), ainsi que nous le montrons dans le dernier paragraphe de cette note.

1. — Soit F une surface algébrique de genre géométrique $p_g > 1$, dont le système canonique $|C|$ n'est pas formé par les courbes d'un faisceau, et dont le système bicanonique $|2C|$ est composé au moyen d'une involution I_2, d'ordre 2, ayant α points de coïncidence. Désignons par Φ une surface image de cette involution I_2.

(*) Godeaux, *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.* (Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 1914.)

Entre les genres arithmétiques p_a, π_a et les genres linéaires $p^{(1)}$, $\pi^{(1)}$, respectivement de F et Φ, nous avons les relations (*)

$$p_a = 2\pi_a - \frac{\alpha}{4} + 1, \tag{1}$$

$$p^{(1)} - 1 = 2(\pi^{(1)} - 1). \tag{2}$$

Le système bicanonique $|2C|$ de F est adjoint au système canonique $|C|$ et, par hypothèse, C est apte à décrire un système continu qui n'est pas un faisceau irrationnel. Par suite, d'après le théorème de MM. Picard et Severi (**), $|2C|$ est régulier et le bigenre P_2 de F a pour valeur $P_2 = p_a + p^{(1)}$.

Le système $|2C|$ étant composé au moyen de I_2, une courbe canonique C de F contient nécessairement ∞^1 groupes de cette involution et il lui correspond, sur Φ, une courbe Γ qui est une courbe canonique de cette dernière surface. Par suite, Γ est apte à décrire un système continu qui n'est pas un faisceau irrationnel. Raisonnant sur le système bicanonique $|2\Gamma|$ de Φ comme on l'a fait sur $|2C|$, on trouve que le bigenre Π_2 de Φ est $\Pi_2 = \pi_a + \pi^{(1)}$.

Mais on a donc, puisque $|2C|$ est composé avec I_2, $P_2 = \Pi_2'$,

$$p_a + p^{(1)} = \pi + \pi^{(1)}. \tag{3}$$

2. — Pour la surface algébrique Φ, de genre géométrique π_g, on a l'inégalité de Noether :

$$\pi^{(1)} - 1 \geqslant 2\pi_g - 4.$$

(*) Godeaux, *loc. cit.*

(**) E. Picard, *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* (Journal de Crelle, 1905.) — Picard et Simart, *Traité des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* 1906, t. II. — Severi, *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica.* (Rend. R. Accad. Lincei, 2° sem. 1908.)

En combinant (2) et (3), on trouve

$$\pi^{(1)} - 1 = \pi_a - p_a;$$

donc l'inégalité précédente devient

$$\pi_a \geqslant 2\pi_g + p_a - 4. \tag{4}$$

Mais $\pi_a \leqslant \pi_g$; donc

$$\pi_g + p_a \leqslant 4. \tag{5}$$

Observons que

1° Le genre géométrique de F est égal à celui de Φ, parce que à une courbe C correspond une courbe Γ : $p_g = \pi_g$.

2° On a $p_g > 2$, puisque, par hypothèse, $|C|$ n'est pas composé avec un faisceau et, à fortiori, n'est pas un faisceau.

3° On a $p_a \geqslant 0$, car si $p_a < 0$, F est une réglée ($P_2 = 0$) ou une surface elliptique ($p_a = -1$). Dans ce dernier cas, le système canonique est composé au moyen d'un faisceau (Enriques).

4° On a $\pi_a \leqslant \pi_g$ et $\pi_g = p_g$; donc l'inégalité (4) fournit les valeurs possibles de π_a :

$$p_g \geqslant \pi_a \geqslant 2\pi_g + p_a - 4.$$

L'inégalité (5) donne, moyennant les observations 2° et 3°, les valeurs possibles de p_g et p_a, à savoir : $p_g = 4$, $p_a = 0$; $p_g = 3$, $p_a = 1$; $p_g = 3$, $p_a = 0$. Partant de chacun de ces couples de valeurs, on détermine $\pi_g = p_g$ et π_a par l'observation 4°. Les formules (1), (2) et (3) donnent alors les valeurs de $p^{(1)}$, $\pi^{(1)}$ et α.

En résumé, on trouve quatre cas possibles :

$$
\begin{array}{lllllll}
1^\circ & p_g = \pi_g = 4, & p_a = 0, & p^{(1)} = 9, & \pi_a = 4, & \pi^{(1)} = 5, & \alpha = 36; \\
2^\circ & p_g = \pi_g = 3, & p_a = 1, & p^{(1)} = 5, & \pi_a = 3, & \pi^{(1)} = 3, & \alpha = 24; \\
3^\circ & p_g = \pi_g = 3, & p_a = 0, & p^{(1)} = 5, & \pi_a = 2, & \pi^{(1)} = 3, & \alpha = 20; \\
4^\circ & p_g = \pi_g = 3. & p_a = 0, & p^{(1)} = 7, & \pi_a = 3, & \pi^{(1)} = 4, & \alpha = 28.
\end{array}
$$

Observons que dans les trois premiers cas on a

$$\pi^{(1)} = 2\pi_g - 3$$

et que, par suite, les courbes canoniques de Φ sont hyperelliptiques (Noether) (*).

3. — Examinons le premier cas. Si nous rapportons projectivement les courbes canoniques C de F aux plans d'un espace linéaire à $p_g - 1 = 3$ dimensions, nous obtenons un modèle projectif canonique de Φ (puisque $|C|$ est nécessairement composé avec I_2) qui se réduit comme on sait (**) à une quadrique Ψ double, possédant une courbe de diramation d'ordre 12.

Appliquons à cette quadrique double le second corollaire du théorème établi à la fin de ce travail. La courbe de diramation doit se décomposer en deux courbes ayant, soit α, soit $\alpha - 2$ points communs. Or $\alpha = 36$. On se rend aisément compte de ce qu'une courbe d'ordre 12, tracée sur une quadrique, ne peut dégénérer en deux courbes ayant soit 36, soit 34 points communs. (Il suffit, par exemple, de projeter la courbe sur un plan d'un point de la quadrique.) Le premier cas ne peut donc se présenter.

4. — Les deuxième et troisième cas s'éliminent de la même manière; nous les traiterons simultanément. En rapportant projectivement les courbes canoniques C de F aux droites d'un plan ($p_g = 3$), on obtient comme modèle projectif canonique de Φ un plan double dont la courbe de diramation D est d'ordre 8 (***).

(*) Les surfaces à courbes canoniques hyperelliptiques ont été déterminées par M. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche.* (Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem. 1896.)

(**) Enriques, *loc. cit.*

(***) Enriques, *loc. cit.*

D'après le premier corollaire du théorème établi à la fin de ce travail, cette courbe D doit se scinder en deux autres ayant soit $\alpha = 24$ (2e cas), soit $\alpha = 20$ (3e cas) points communs. Cela n'est pas possible; donc les deux cas étudiés ici ne peuvent se présenter.

5. — Passons au quatrième cas. Rapportons projectivement les courbes bicanoniques 2C de F aux hyperplans d'un espace linéaire à $P_2 - 1 = p_a + p^{(1)} - 1 = 6$ dimensions. Nous obtenons une surface bicanonique Φ, d'ordre $\frac{1}{2} \cdot 4(p^{(1)} - 1) = 12$, à sections hyperplanes 2Γ de genre 10 (on calcule celui-ci en appliquant la formule de Zeuthen à la correspondance existant entre une courbe 2C et la courbe 2Γ homologue).

Supposons que Φ se réduise à une surface Ψ n-uple, n étant naturellement un diviseur de 12. Désignons par i_n l'involution d'ordre n formée, sur Φ, par les groupes de points correspondant aux points de Ψ. Une courbe bicanonique 2Γ de Φ contient ∞^1 groupes de i_n par hypothèse; il en sera de même d'une courbe canonique Γ, puisque cette courbe, comptée deux fois, est une courbe bicanonique. Nous voyons donc que le système canonique $|\Gamma|$ est également composé avec i_n. Or, $|\Gamma|$ a le degré $\pi^{(1)} - 1 = 3$, donc $n = 3$. Mais alors, Φ se réduit à une surface Ψ triple d'ordre 4, située dans un espace linéaire à 6 dimensions S_6. Cela est absurde, car une surface d'ordre 4 est contenue dans un espace linéaire ayant au plus 5 dimensions. On en conclut que Φ est une surface simple.

Nous savons que la surface Φ possède 28 points doubles coniques qui correspondent aux 28 points de coïncidence de I_2 sur F (*).

Les plurigenres de F se calculent en remarquant que le système i-canonique $|iC|$ de cette surface est adjoint au système

(*) Godeaux, *loc. cit.*

$(i-1)$-canonique $|(i-1)\,C|$ et en appliquant le théorème de Picard-Severi déjà invoqué plus haut. On trouve facilement que le i-genre P_i de F est

$$P_i = p_a + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)}-1)+1 = 3i(i-1)+1.$$

De même, le i-genre Π_i de Φ est égal à

$$\Pi_i = \pi_a + \frac{i(i-1)}{2}(\pi^{(1)}-1)+1 = \frac{3}{2}i(i-1)+1.$$

En particulier, pour les trigenres, on a $P_3 = 19$, $\Pi_{i3} = 13$.

6. — Nous aurons complètement démontré le théorème énoncé dans le préambule lorsque nous aurons prouvé les deux théorèmes dont nous avons fait usage aux paragraphes 3 et 4. Nous démontrerons un théorème plus général dont les deux précédents ne sont que des corollaires.

Soit F′ une surface algébrique possédant une involution I_2, d'ordre 2, douée d'un nombre fini $\alpha > 0$ points de coïncidence. Soit Φ' une surface normale simple, de S_r, image de I_2.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont les coordonnées cartésiennes de S_r, soient

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_{r-2} = 0$$

les équations de Φ'. Comme nous le savons (*), la surface Φ' possède α points doubles coniques, correspondant aux points de coïncidence, et il existe au moins une hypersurface

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$$

passant par ces α points doubles et touchant Φ' en chaque point

(*) Godeaux, *loc. cit.*

d'intersection. Et les équations de la surface F', dans un S_{r+1}, peuvent se mettre sous la forme

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{r-2} = 0, \quad x_{r+1}^2 = f(x_1, x_2, \ldots, x_r).$$

Supposons que la surface Φ' possède une transformation birationnelle en elle-même, Θ, ayant une infinité de points invariants formant une courbe Δ et laissant invariant l'ensemble des α points de diramation. Soient

$$x_i' = \chi_i(x_1, x_2, \ldots, x_r), \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

les équations de cette transformation.

La surface F' possède trois transformations birationnelles involutives, deux-à-deux permutables, en elle-même, à savoir

$$\begin{array}{lll} (T) & x_i' = x_i, & x_{r+1}' = -x_{r+1}, \\ (T_1) & x_i' = \chi_i, & x_{v+1}' = -x_{r+1}, \\ (T_2) & x_i' = \chi_i, & x_{r+1}' = x_{r+1}, \end{array}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r),$$

dont la première engendre I_2.

Si P_1, P_2 sont deux points de Φ' homologues pour Θ, il leur correspond, sur F', quatre points, respectivement P_{11}, P_{12}; P_{21}, P_{22}. Si P_{11} coïncide avec P_{21}, P_{12} coïncide avec P_{22} et P_1 avec P_2; or P_{11} est transporté en P_{21} par l'une des transformations T_1, T_2; donc à un point invariant pour T_1 ou T_2 correspond un point de la courbe Δ. Inversement, si P_1 coïncide avec P_2, P_{11} coïncide soit avec P_{21}, soit avec P_{22} et, par suite, à un point de Δ correspondent des points invariants pour T_1 ou pour T_2.

En d'autres termes, si nous appelons D la courbe qui correspond à Δ sur F', les points de D sont invariants soit pour T_1, soit pour T_2.

Observons de plus que si les trois points P_{11}, P_{12}, P_{21} coïncident, P_{22} sera également confondu avec eux, c'est-à-dire que si l'un des α points de coïncidence de I_2 se trouve sur D, ce sera un point invariant pour T_1 et T_2 à la fois.

De tout ceci on conclut que la courbe D se scinde en deux courbes D_1, D_2 de coïncidence l'une pour T_1, l'autre pour T_2, et que les points d'intersection de D_1, D_2 sont les points de coïncidence de I_2.

Soit maintenant Ψ une surface normale, image de l'involution engendrée sur Φ' par Θ et telle que à ses sections hyperplanes correspondent, sur Φ', les courbes ne passant pas en général par les α points doubles coniques.

La surface Ψ possède une courbe de diramation Δ' (aux points de laquelle correspondent des couples de points coïncidents sur Φ') qui se scinde en deux courbes Δ'_1, Δ'_2 correspondant respectivement à D_1, D_2 (Δ' correspond donc à Δ qui se scinde évidemment, comme D, en deux courbes). Les α_2 points communs à Δ'_1, Δ'_2 correspondent à des points de coïncidence de I_2 sur F'. A chaque couple de points de coïncidence de I_2 non situés sur $D \equiv D_1 + D_2$, invariant pour T_2 et T_1, correspond un seul point de Ψ et ce point est un point double conique (*). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si une surface normale double Φ' ayant une courbe de diramation d'ordre supérieur à zéro est l'image d'une involution d'ordre 2 appartenant à une surface F' et possédant α points de coïncidence, cette surface double possède α_1 points doubles coniques, et la courbe de diramation (qui ne passe pas par ces points doubles) se scinde en deux courbes ayant $\alpha_2 = \alpha - 2\alpha_1$ points communs.

Remarquons que le raisonnement précédent n'exclut pas le cas où $\alpha_2 = 0$; mais ce cas ne nous intéresse pas ici.

(*) GODEAUX, *loc. cit.*

Supposons que la surface normale double Φ' soit un plan double (nous admettons donc que le système des droites doubles plan double Φ' est complet). Alors, on a nécessairement $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \alpha$; par suite

I. — ***Si un plan double normal est l'image d'une involution d'ordre 2 appartenant à une surface et possédant α points de coïncidence, sa courbe de diramation se scinde en deux courbes ayant α points communs.***

Supposons maintenant que Φ' soit une quadrique double normale. On peut avoir actuellement $\alpha_1 = 1$ ou $\alpha_1 = 0$, d'où $\alpha_2 = \alpha - 2$ ou $\alpha_2 = 0$; donc

II. — ***Si une quadrique double normale est l'image d'une involution d'ordre 2 appartenant à une surface et possédant α points de coïncidence, sa courbe de diramation se scinde en deux autres ayant soit $\alpha - 2$, soit α points communs.***

Nous avons ainsi énoncé les deux corollaires dont nous avons fait usage plus haut.

Polygone de Brasschaet, 30 mai 1919.