Bulletin de la Classe des sciences

Sur le système canonique des surfaces algébriques triples

Lucien Godeaux

Résumé
Construction du système canonique des surfaces algébriques images d'involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à des surfaces algébriques.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur le système canonique des surfaces algébriques triples

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction du système canonique des surfaces algébriques images d'involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à des surfaces algébriques.

Nous avons démontré que si une surface algébrique régulière F contient une involution cyclique d'ordre premier p, privée de points unis, et si la surface Φ image de l'involution possède des courbes canoniques, le système canonique de F contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution et celui de dimension minimum est le transformé du système canonique de Φ, les autres systèmes ayant la même dimension égale au genre arithmétique de Φ [1]. On peut se demander s'il existe un théorème analogue lorsque l'involution possède un nombre fini de points unis. Le but de cette note est d'apporter une contribution à la solution de cette question.

Nous nous limiterons au cas où l'involution est du troisième ordre ($p = 3$) et nous considérons un exemple où le système canonique de la surface F contient trois systèmes linéaires appartenant à l'involution. Dans cet exemple, le système canonique de la surface considérée F est multiple d'un système linéaire contenant trois systèmes composés

(1) *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1932, pp. 672-679). *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Éditions Cremonese, 1963) pp. 127-130.

au moyen de l'involution, chacun de ces systèmes ayant pour points-base des points unis de l'involution. Nous avons considéré trois cas suivant la dimension de ces systèmes linéaires. Dans chaque cas, le système canonique de F contient trois systèmes linéaires appartenant à l'involution. L'un est le transformé du système canonique de Φ. Les deux autres ont la même dimension inférieure à celle du premier et la différence dépend de la dimension du système sous-multiple du système canonique (ou si l'on préfère de la dimension de l'espace ambiant de F).

Comme nous le montrerons à la fin de la note, on peut construire des surfaces F dont le système canonique ne contient que deux systèmes linéaires appartenant à l'involution ou en contenant trois qui n'obéissent pas à la propriété précédente.

Rappelons que les points unis d'une involution cyclique du troisième ordre sont de deux espèces (1). Dans le domaine d'un point uni de première espèce, l'involution coïncide avec l'identité tandis qu'il en est autrement dans celui d'un point uni de seconde espèce. Dans le premier cas examiné ici, l'involution ne possède que des points unis de seconde espèce. Dans les autres cas, elle possède des points unis des deux espèces.

Rappelons que si l'involution possède α_1 points unis de première espèce et α_2 points unis de seconde espèce, entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de Φ, on a la relation (2)

$$12(p_a + 1) = 36(p'_a + 1) - 4\alpha_1 - 8\alpha_2.$$

1. Soient dans un espace S_{r+2} à $r + 2$ dimensions trois espaces ξ, η, ζ respectivement de dimensions r_1, r_2, r_3 deux à deux gauches. On suppose

$$r = r_1 + r_2 + r_3.$$

Nous désignerons par x_i les coordonnées des points de ξ ($i = 0, 1, \ldots, r_1$), par y_i celles d'un point de η ($i = 0, 1, \ldots, r_2$) et enfin par z_i celles d'un point de ζ ($i = 0, 1, \ldots, r_3$) de telle sorte que les coordonnées d'un point de S_{r+2} soient x, y, z.

(1) *Théorie des involutions cycliques..., loc. cit.* pp. 110 et suiv.

(2) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1919, pp. 1-16). *Théorie des involutions cycliques..., loc. cit.* pp. 112 et suiv.

Soit H l'homographie cyclique de période trois de S_{r+2} dont les équations sont

$$\frac{x_i'}{x_i} = \frac{y_i'}{\varepsilon y_i} = \frac{z_i'}{\varepsilon^2 z_v}$$

où ε est une racine primitive cubique de l'unité. Elle a pour axes ponctuels les espaces ξ, η, ζ.

Considérons la surface F intersection complète des r hyperquadriques

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) + \psi_i(y,z) &= 0, \qquad && (i = 1,2,\ldots,r_1) \\ \varphi_i'(y) + \psi_i'(z,x) &= 0, && (i = 1,2,\ldots,r_2) \\ \varphi_i''(z) + \psi_i''(x,y) &= 0, && (i = 1,2,\ldots,r_3) \end{aligned}$$

où les φ sont des formes quadratiques et les ψ des formes bilinéaires de leurs arguments. Nous supposerons ces différentes formes linéairement indépendantes les unes des autres. Nous désignerons par Q_i les hyperquadriques de la première ligne, par Q_i', Q_i'' celles des seconde et troisième lignes.

Lorsque l'on effectue l'homographie H, les équations de Q_i, Q_i', Q_i'' se reproduisent multipiiées respectivement par $1, \varepsilon^2, \varepsilon$.

Sur F l'homographie H engendre une involution I du troisième ordre possédant 2^{r_1} points unis dans ξ, 2^{r_2} points unis dans η et 2^{r_3} points unis dans ζ. Nous allons rechercher dans quelles conditions ces points unis sont simples pour la surface. Nous supposerons $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$.

2. Soient $\bar{x}, y = 0, z = 0$ les coordonnées d'un point uni de I situé dans l'espace ξ. Le plan tangent à F au point $\bar{x}$ a pour équations

$$\Sigma X \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0, \qquad \Sigma Z \frac{\partial \psi_i'}{\partial z} = 0, \qquad \Sigma Y \frac{\partial \psi_i''}{\partial y} = 0.$$

Dans l'espace ζ à r_3 dimensions, les r_2 secondes des équations précédentes représentent un espace à $r_3 - r_2$ dimensions. Trois cas peuvent se présenter:

a) $r_2 = r_3$. Il y a une seule tangente à F en $\bar{x}$ qui s'appuie sur ζ.

b) $r_3 = r_2 + 1$. Alors le plan tangent à F en $\bar{x}$ rencontre ζ suivant une droite.

c) $r_3 > r_2 + 1$. Alors les droites qui rencontrent F en deux points confondus en $\bar{x}$ appartiennent à un espace ayant plus de deux dimensions et le point $\bar{x}$ est au moins double pour la surface F [1]. Ce cas est à exclure.

Un raisonnement analogue peut être fait pour les points unis situés dans les espaces η et ζ. Si tous les points unis sont simples pour F, trois cas peuvent se présenter:

1) $r_1 = r_2 = r_3$.

2) $r_1 = r_2, r_3 = r_1 + 1$.

3) $r_2 = r_3 = r_1 + 1$.

Nous examinerons successivement ces trois cas.

3. Supposons en premier lieu $r_1 = r_2 = r_3 = \alpha$.

La surface F est d'ordre $2^{3\alpha}$ et appartient à un espace $S_{3\alpha+2}$ à $3\alpha + 2$ dimensions.

Reprenons le raisonnement précédent. Si $\bar{x}$ est un point uni appartenant à l'espace ξ, le plan tangent à F en ce point a pour équations

$$\Sigma X \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 0, \qquad \Sigma Z \frac{\partial \psi_i'}{\partial z} = 0, \qquad \Sigma Y \frac{\partial \psi_i''}{\partial y} = 0.$$

$(i = 1, 2, \ldots, \alpha)$.

Ce plan rencontre les espaces η, ζ chacun en un point et H détermine dans ce plan tangent une homographie non homologique. Il en résulte que le point $\bar{x}$ est un point uni de seconde espèce. Il en est de même des points unis appartenant aux espaces η, ζ et l'involution I possède donc 3.2^{α} points unis de seconde espèce.

La surface F étant l'intersection de 3α hyperquadriques est régulière et son système canonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre $3\alpha - 3$ qui ne la contiennent pas. Ses genres sont donnés par [2]

$$p_g = p_a = (9\alpha^2 - 15\alpha + 8)2^{3\alpha-3} - 1.$$

Le genre arithmétique p_a' d'une surface Φ image de l'involution I est donné par

$$12(p_\alpha + 1) = 36(p_\alpha' + 1) - 8.3.2^\alpha.$$

---

(1) On pourrait le voir en projetant la surface F de l'espace ξ sur l'espace de dimension minimum contenant η et ζ.

(2) Voir notre note *Sur les courbes et surfaces intersections d'hyperquadriques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1944, pp. 262-269).

Observons que l'expression $2^{2\alpha-1}+1$ est multiple de 3 quel que soit α. Supposons en effet que l'on ait

$$2^{2\alpha-3}+1=3a.$$

On a

$$2^{2\alpha-1}+1=4(3a-1)+1=3(4a-1).$$

Or, la condition est vérifiée par $\alpha = 1, 2$, donc elle est vraie quelque soit α.

Cela étant, on a

$$p'_a=\alpha(3\alpha-5)2^{3\alpha-3}+2^{\alpha+1}a-1.$$

Le système canonique $|\,K\,|$ de F contient trois systèmes linéaires partiels composés avec l'involution I. L'un, $|\,K_0\,|$, est le transformé du système canonique de Φ, les autres, $|\,K_1\,|$, $|\,K_2\,|$, ont la même dimension à cause de la symétrie de la question. Cette dimension ρ est donnée d'après la théorie des homographies par

$$2\rho+2+p'_a=p_a,$$

d'où

$$\rho=\alpha(3\alpha-5)2^{3\alpha-3}+2^{\alpha+1}a-2^{\alpha}-1.$$

On a donc

$$p'_a-1-\rho=2^{\alpha}-1.$$

La différence dépend donc de la dimension du système des sections hyperplanes de la surface F.

4. Supposons en second lieu $r_1 = r_2 = \alpha$, $r_3 = \alpha + 1$.

La surface F est d'ordre $2^{3\alpha+1}$ et appartient à un espace $S_{3\alpha+3}$ à $3\alpha+3$ dimensions. L'involution I possède $2^{\alpha+2}$ points unis, 2^{α} dans chacun des espac ⌄ ξ, η et $2^{\alpha+1}$ dans ζ.

En reprenant le raisonnement fait plus haut, on voit que le plan tangent à F en un point uni $\bar{x}$ appartenant à ξ, dont les équations sont

$$\Sigma X\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}=0, \qquad \Sigma Z\frac{\partial\psi'_i}{\partial z}=0, \qquad \Sigma Y\frac{\partial\psi''_k}{\partial y}=0$$

$(i = 1, 2, \ldots, \alpha; k = 1, 2, \ldots, \alpha + 1)$

rencontre l'espace ζ suivant une droite et ne rencontre plus l'espace η. On en conclut que H détermine dans ce plan tangent une homologie et que le point $\bar{x}$ est uni de première espèce.

Le plan tangent à F en un point uni $\bar{y}$ de l'espace η a pour équations

$$\Sigma Z \frac{\partial \psi_i}{\partial z} = 0, \qquad \Sigma Y \frac{\partial \varphi_i'}{\partial y} = 0, \qquad \Sigma X \frac{\partial \psi_k''}{\partial x} = 0,$$

$(i = 1, 2, \ldots, \alpha; k = 1, 2, \ldots, \alpha + 1)$

Ce plan rencontre l'espace ζ suivant une droite et ne rencontre pas l'espace ξ. On en conclut comme plus haut que le point $\bar{y}$ est un point uni de première espèce.

Le plan tangent à F en un point uni $\bar{z}$ appartenant à l'espace ζ a pour équations

$$\Sigma Y \frac{\partial \psi_i}{\partial y} = 0, \qquad \Sigma X \frac{\partial \psi_i'}{\partial x} = 0, \qquad \Sigma Z \frac{\partial \varphi_k''}{\partial z} = 0$$

$(i = 1, 2, \ldots, \alpha; k = 1, 2, \ldots, \alpha + 1)$
et rencontre les espaces ξ, η chacun en un point. Donc, dans ce plan, H détermine une homographie non homologique et $\bar{z}$ est un point uni de seconde espèce.

L'involution I possède donc $2^{\alpha+1}$ points unis de première espèce et $2^{\alpha+1}$ points unis de seconde espèce.

La surface F est régulière et son système canonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre $3\alpha - 1$ et les genres de la surface sont

$$p_g = p_a = (9\alpha^2 - 9\alpha + 4)2^{3\alpha-2} - 1.$$

Si p_a' est le genre arithmétique d'une surface Φ image de l'involution I, on a

$$12(p_a + 1) = 36(p_a' + 1) - 4.2^{\alpha+1} - 8.2^{\alpha+1},$$

d'où

$$p_a' = 3\alpha(\alpha - 1)2^{3\alpha-2} + 2^{\alpha+1}a - 1.$$

Le système canonique de F contient trois systèmes linéaires appartenant à l'involution. L'un est le transformé du système canonique de Φ et les autres ont la même dimension ρ à cause de la symétrie de la question. D'après la théorie des homographies, on

$$\rho = 3\alpha(\alpha - 1)2^{3\alpha-2} + 2^{\alpha+1}a - 1$$

et par conséquent

$$p_a' - 1 - \rho = 2^\alpha - 1.$$

Comme dans le premier cas, cette différence dépend de la dimension de l'espace ambiant de F.

5. Envisageons maintenant le troisième cas: $r_1=\alpha$, $r_2=r_3=\alpha+1$.

La surface F a l'ordre $2^{3\alpha+2}$ et appartient à un espace $S_{3\alpha+4}$ à $3\alpha+4$ dimensions. L'involution I possède 2^α points unis dans ξ et $2^{\alpha+1}$ points unis dans chacun des espaces η, ζ, donc en tout 5.2^α points unis.

Le plan tangent à F en un point $\bar{x}$ uni appartenant à l'espace ξ a pour équations

$$\Sigma X\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}=0, \qquad \Sigma Z\frac{\partial\psi'_k}{\partial z}=0, \qquad \Sigma Y\frac{\partial\psi''_k}{\partial y}=0.$$

$(i=1,2,\ldots,\alpha;\, k=1,2,\ldots,\alpha+1)$.

Il rencontre les espaces η, ζ chacun suivant un point et par conséquent le point $\bar{x}$ est uni de seconde espèce.

Le plan tangent en un point uni $\bar{y}$ de l'espace η est donné par les équations

$$\Sigma Z\frac{\partial\psi_i}{\partial z}=0, \qquad \Sigma Y\frac{\partial\varphi'_k}{\partial y}=0, \qquad \Sigma X\frac{\partial\psi''_k}{\partial x}=0$$

$(i=1,2,\ldots,\alpha;\, k=1,2,\ldots,\alpha+1)$.

Il rencontre l'espace ζ suivant une droite mais ne rencontre pas l'espace ξ, donc le point $\bar{y}$ est uni de première espèce.

On arrive à la même conclusion pour les points unis appartenant à l'espace ζ.

Les courbes canoniques de F sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $3\alpha-1$ et les genres de cette surface sont

$$p_g=p_a=(9\alpha^2-3\alpha+2)2^{3\alpha-1}-1.$$

Le genre arithmétique p'_a de la surface Φ image de l'involution I est donné par

$$12(p_a+1)=36(p'_a+1)-4.2^{\alpha+2}-8.2^\alpha,$$

d'où

$$p'_a=\alpha(3\alpha-1)2^{3\alpha-1}+2^{\alpha+1}a-1.$$

Aux courbes canoniques de Φ correspondent sur F des courbes canoniques passant simplement par les $2^{\alpha+2}$ points unis de première espèce. Elles sont donc découpées par les hypersurfaces d'ordre $3\alpha - 1$ passant par les espaces η et ζ. Le système canonique de F contient encore deux systèmes linéaires composés au moyen de l'involution I. Ils ont la même dimension

$$\rho = \alpha(3\alpha - 1)2^{3\alpha-1} + 2^{\alpha+1}a - 2^{\alpha} - 1$$

et on a

$$p'_a - 1 - \rho = 2^{\alpha} - 1.$$

Comme dans les autres cas, cette différence dépend de la dimension du système sous-multiple du système canonique, c'est-à-dire de la dimension de l'espace contenant F.

6. Observons que dans l'espace S_4 à quatre dimensions, la surface F intersection de deux hypersurfaces cubiques a pour système canonique celui de ses sections hyperplanes.

Soit dans S_4 une homographie cyclique d'équations

$$x'_0 : x'_1 : y'_0 : y'_1 : y'_2 = x_0 : x_1 : \varepsilon y_0 : \varepsilon y_1 : \varepsilon y_2$$

dont les axes sont la droite $\xi\ (y_0 = y_1 = y_2 = 0)$ et le plan $\eta\ (x_0 = x_1 = 0)$.

Considérons la surface F d'équations

$$\varphi(x) + \psi(y) = 0, \qquad \varphi'(x) + \psi'(y) = 0,$$

où les φ et les ψ sont des formes cubiques de leurs arguments.

L'homographie H transforme F en elle-même et détermine sur cette surface une involution I possédant neuf points unis dans le plan η.

Le plan tangent en un de ces points unis passe par la droite ξ et par conséquent ils sont unis de première espèce.

Le genre arithmétique de F est $p_a = 5$ et celui p'_a de la surface Φ image de I est $p'_a = 2$.

Dans le système canonique de F, le transformé du système canonique de Φ est découpé par les hyperplans passant par le plan η. Il existe en outre un réseau de courbes appartenant à l'involution I, découpé par les hyperplans passant par la droite ξ.

7. Considérons dans S_4 l'homographie cyclique H d'équations

$$x'_0 : x'_1 : y'_0 : y'_1 : y'_2 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^2 y_0 : \varepsilon^2 y_1 : \varepsilon^2 y_2,$$

dont les axes sont les points 0_0, 0_1 et le plan $\eta\ (x_0 = x_1 = 0)$.

Envisageons la surface F dont les équations sont

$$ax_0^3 + bx_1^3 + \varphi(y) + x_0x_1\psi(y) = 0,$$
$$a'x_0^3 + b'x_1^3 + \varphi'(y) + x_0x_1\psi'(y) = 0,$$

où les φ sont des formes cubiques et les ψ des formes linéaires.

Dans le plan η, l'involution déterminée sur la surface F par l'homographie H possède neuf points unis. En un de ces points le plan tangent à la surface F passe par les points 0_0, 0_1 et H détermine dans ce plan une homographie non homologique et par conséquent le point est uni de seconde espèce.

Le genre arithmétique de la surface Φ image de l'involution I est $p'_a = 3$.

Dans le système canonique de F, les transformées des courbes canoniques de Φ forment un réseau découpé par les hyperplans passant par la droite 0_00_1. Il existe encore deux courbes canoniques appartenant à l'involution I. Ce sont les courbes découpées sur F par les hyperplans passant par le plan η et par un des points $0_0, 0_1$.

Liège, le 3 août 1970.