Extrait du Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres
Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles — Série *A*: Sciences Mathématiques
Janvier Décembre 1921

O teorji kongruencyj, tworzonych przez pewne krzywe.— Sur la théorie des congruences de courbes.

Mémoire

de M. ***LUCIEN GODEAUX,***

présenté, dans la séance du 2 Mai 1921, par M. St. Zaremba m. c.

Nous nous sommes occupé, à différentes reprises, de la détermination des congruences linéaires formées par certaines courbes: des courbes algébriques planes dépourvues de points multiples, ou des cubiques gauches; congruences possédant soit une, soit deux courbes singulières [1]). En cherchant à étendre nos considérations au cas où il s'agit de congruences formées par des courbes algébriques quelconques, nous avons rencontré quelques résultats qui ne nous paraissent pas dépourvus d'intérêt et que nous nous proposons d'exposer dans cette note.

Dans ses leçons classiques sur la théorie des surfaces [2]) Darboux considère les congruences de courbes intersections complètes de deux surfaces et la distribution des points focaux sur ces courbes. Nous commencerons par étendre les résultats de Darboux aux congruences formées de courbes algébriques quelconques. En particulier, nous établirons le théorème suivant:

Sur la courbe générique d'une congruence for-

[1]) *Recherches sur les systèmes de coniques de l'espace* (Mémoires de la Société R. des Sc. de Liége, 1911) — *Sulle congruenze lineari di curve piane dotate di una sola curva singolare* (Rend. del Circolo Matem. di Palermo, 1912, t. XXXIV) — *Sur les congruences linéaires de courbes planes* (Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie, 1912) — *Sur les congruences linéaires de cubiques gauches données d'une seule courbe singulière* (L'Enseignement Mathém., 1918).

[2]) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Tome II, Paris, Gauthier-Villars, 1889.

mée de courbes algébriques d'ordre γ et de genre p il y a $4\gamma+2(p-1)$ points focaux.

Considérant ensuite une congruence linéaire de courbes possédant une seule courbe singulière, nous démontrons que:

Si une congruence linéaire formée de courbes algébriques d'ordre γ et de genre p, en général dépourvues de points multiples, possède une seule courbe singulière, l'ordre de celle-ci est inférieur à $\left(\frac{4\gamma+2p-2}{\gamma}\right)^2$.

En particulier, si les courbes sont rationnelles ou elliptiques, cet ordre est au plus égal à 16.

Ce théorème fournit également une limite supérieure de l'ordre de la courbe singulière lorsque le genre des courbes de la congruence n'est pas spécifié. On trouve alors, pour cette limite, le nombre $\left(\frac{\gamma+4}{2}\right)^2$.

Lorsque l'on considère une congruence linéaire possédant deux courbes singulières, on peut trouver, en général, des limites supérieures pour les ordres de ces courbes, ou tout au moius pour l'ordre d'une de ces courbes. C'est ce que nous montrerons en nous limitant au cas d'une congruence linéaire de cubiques gauches.

1. Soit Σ une congruence algébrique de courbes algébriques Γ d'ordre γ et de genre p. En général, par un point de l'espace passent des courbes Γ en nombre fini.

Nous dirons qu'une surface F est une surface de la congruence Σ lorsque cette surface contiendra ∞^1 courbes de Σ.

Un point P sera dit *point focal* de la congruence Σ lorsque, par ce point, il passera une courbe Γ telle que toutes les surfaces de la congruence contenant cette courbe auront même plan tangent en P.

2. Considérons un nombre n suffisamment élevé pour que la série découpée sur une courbe Γ par les surfaces d'ordre n soit non-spéciale. Cette série a le degré γn et, d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension $\gamma n-p$. Par conséquent, la condition pour qu'une surface d'ordre n contienne une courbe Γ a la dimension $\gamma n-p+1$.

Choisissons, dans la totalité des surfaces d'ordre n de l'espace, deux systèmes linéaires de dimension $\gamma n-p+1$, n'ayant aucune surface commune (ce qui est toujours possible pourvu que n soit assez grand). Par chaque courbe Γ passera, en général, une surface de chacun de ces systèmes. Soient respectivement

$$(1) \qquad f(x, y, z; a, b) = 0, \quad \varphi(x, y, z; a, b) = 0$$

les équations de ces surfaces, les paramètres a, b dépendant de la position de la courbe Γ.

Désignons par Γ' la courbe, d'ordre $n^2 - \gamma$, formant, avec Γ, l'intersection complète des surfaces (1). Nous pourrons supposer avoir choisi les surfaces d'ordre n de manière à ce que, en un point commun aux deux courbes Γ, Γ', les deux surfaces (1) aient un point simple et que ces deux courbes ne se touchent pas. Observons que, dans ces conditions, les tangentes aux deux courbes Γ, Γ' en un de leurs points communs, sont situées dans les plans tangents en ce point aux deux surfaces (1). Ces deux plans sont donc confondus.

Lorsque a, b varient, les équations (1) représentent une congruence de courbes $\Gamma + \Gamma'$, que nous désignerons par Σ'.

Fixons l'attention sur une courbe $\Gamma + \Gamma'$, déterminée par les valeurs a_1, b_1 des paramètres a, b et désignons la par $\Gamma_1 + \Gamma'_1$. Considérons toutes les surfaces F' de la congruence Σ' contenant $\Gamma_1 + \Gamma'_1$. Chacune de ces surfaces s'obtiendra en éliminant a, b entre les équations (1) et une certaine relation $\psi(a, b) = 0$ satisfaite pour $a = a_1$, $b = b_1$.

Les points focaux de Σ', situés sur la courbe $\Gamma_1 + \Gamma'_1$, seront déterminés, suivant Darboux, par la surface, d'ordre $2n$,

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0.$$

Nous allons démontrer que cette surface passe:

1°) par les points communs aux courbes Γ_1, Γ'_1;

2°) par les points focaux de Σ, situés sur Γ_1.

3. Soit P_1 un point commun aux courbes Γ_1, Γ'_1 et désignons par x_1, y_1, z_1 ses coordonnées, par X, Y, Z les coordonnées courantes. De plus, posons

$$A = \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \psi}{\partial b} - \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \psi}{\partial a}, \quad B = \frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial \psi}{\partial b} - \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial \psi}{\partial a},$$

expressions dans les seconds membres desquelles on a fait $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, $a = a_1$, $b = b_1$.

L'équation du plan tangent à la surface F', correspondant à la relation $\psi(a, b) = 0$, est

$$(X - x_1)\left[B\frac{\partial f}{\partial x_1} - A\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right] + (Y - y_1)\left[B\frac{\partial f}{\partial y_1} - A\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right] +$$
$$+ (Z - z_1)\left[B\frac{\partial f}{\partial z_1} - A\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\right] = 0.$$

On peut l'écrire

$$(3) \qquad \frac{(X - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (Y - y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + (Z - z_1)\frac{\partial f}{\partial z_1}}{(X - x_1)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + (Y - y_1)\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + (Z - z_1)\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}} = \frac{A}{B}.$$

Les plans tangents aux deux surfaces (1) au point P_1 étant confondus, comme nous l'avons remarqué plus haut, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial y_1} : \frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} : \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} : \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}.$$

Soit k la valeur commune de ces trois rapports. Le premier membre de l'équation (3) se réduit à k. Par suite, on doit avoir, quelle que soit la fonction $\psi(a, b)$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial \psi}{\partial b_1} - \frac{\partial f}{\partial b_1}\frac{\partial \psi}{\partial a_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial \psi}{\partial b_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial b_1}\frac{\partial \psi}{\partial a_1}} = k.$$

Par conséquent, on doit avoir

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial \varphi}{\partial b_1} = \frac{\partial f}{\partial b_1}\frac{\partial \varphi}{\partial a_1},$$

c'est-à-dire que le point P_1 appartient à la surface (2). Il est d'ailleurs évident qu'en général, cette surface passera simplement par le point P_1.

4. Le second point s'établit immédiatement.

Une surface F', appartenant à Σ', c'est-à-dire lieu de ∞^1 courbes $\Gamma + \Gamma'$, et contenant $\Gamma_1 + \Gamma_1'$, peut être considérée comme appartenant à Σ, c'est-à-dire comme lieu de courbes Γ.

Inversement, à une surface F, appartenant à Σ, mais non à Σ', et contenant Γ_1, on peut adjoindre une surface, lieu de ∞^1 courbes Γ' et contenant Γ'_1. Par suite, un point focal de Σ', situé sur Γ_1 (mais non sur Γ'_1) est un point focal de Σ, et réciproquement.

5. De tout ce qui précède il résulte que les points de rencontre de la surface (2) avec la courbe Γ_1, en dehors de Γ'_1, sont des points focaux de Σ; ceci permet de déterminer le nombre de ces points.

Si ε désigne le nombre de points communs à Γ_1, Γ'_1, la surface (2) étant d'ordre $2n$, le nombre de points focaux de Σ, situés sur une de ses courbes, sera égal à $2n\gamma - \varepsilon$.

On sait que $\varepsilon = 2n\gamma - 4\gamma - 2(p-1)$ [1]. Le nombre des points focaux est donc

$$2n\gamma - \varepsilon = 2n\gamma - 2n\gamma + 4\gamma + 2(p-1) = 4\gamma + 2(p-1).$$

Ainsi se trouve démontré le premier théorème énoncé au début de ce travail.

6. Darboux a établi, pour les congruences de courbes intersections complètes de deux surfaces que, si les courbes d'une congruence s'appuient sur une courbe fixe, les points d'appui sont des points focaux. Pour qu'un point d'appui soit équivalent à un seul point focal, il faut et il suffit que les tangentes en ce point aux ∞^1 courbes de la congruence passant par ce point, ne forment pas un plan passant par la tangente à la courbe fixe au point considéré.

Ces résultats se transportent aisément à une congruence Σ formée de courbes quelconques Γ. En effet, si les courbes de Σ s'appuient sur une courbe fixe C, les points d'appui seront des points focaux de la congruence Σ' et seront, en général, distincts des points communs aux courbes Γ, Γ' intersections de deux surfaces (1).

Si les tangentes aux courbes Γ en un point d'appui sur C ne forment pas un plan tangent en ce point à C, ce point sera équivalent à un seul point focal de Σ' et par conséquent de Σ.

Si les courbes de la congruence Σ s'appuient sur une courbe fixe de manière que les tangentes aux ∞^1 courbes passant par un point d'appui en ce point ne forment pas un plan passant par la tangente à la

[1]) E. Pascal, *Repertorium der höheren Mathematik.* Vol. II. Teubner, 1902. On peut du reste calculer ce nombre en utilisant une formule très générale de M. Severi, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive* (Memorie R. Accad. Torino, 1902, 1. 2, t. III).

courbe fixe au point considéré, chaque point d'appui est équivalent à un et un seul point focal de Σ.

7. Considérons maintenant une congruence linéaire Σ formée de courbes Γ, d'ordre γ et de genre p, les courbes Γ étant, en général, dépourvues de points multiples. Les points focaux de Σ se réduisent à des points d'appui des courbes Γ sur une courbe fixe, irréductible ou non, appelée courbe singulière de Σ.

Supposons que la congruence Σ ne possède qu'une seule courbe singulière irréductible C et que cette congruence soit telle que les tangentes aux courbes Γ en un point d'appui sur C ne forment pas un plan tangent à C en ce point. Dans ces conditions, et d'après ce qui a été établi plus haut, les courbes Γ s'appuient en $4\gamma + 2(p-1)$ points sur C.

Envisageons la surface F formée par les courbes Γ de Σ s'appuyant sur une droite d ne rencontrant pas C. Soit m l'ordre de cette surface, q le nombre de fois qu'elle passe par la courbe C (les courbes Γ passant par un point de C engendrent donc une surface d'ordre q).

Une courbe Γ_1, de Σ, n'appartenant pas à F, ne peut rencontrer cette surface en dehors de C, sans quoi la congruence Σ ne serait plus linéaire.

Supposons les $4\gamma + 2(p-1)$ points d'appui de Γ_1 distincts et supposons de plus qu'en un de ces points, P_1, Γ_1 puisse toucher F. Cela implique l'existence, sur Γ_1, d'un point P', infiniment voisin de P_1, situé sur F. Mais ce point ne peut être en dehors de C, puisque la congruence est linéaire. Il est donc situé sur cette courbe et par suite, en P_1, Γ_1 touche la courbe C, contrairement à l'hypothèse faite plus haut. Donc Γ_1 ne touche pas la surface F. On en conclut que

$$\gamma m = (4\gamma + 2p - 2)\, q. \tag{4}$$

Considérons la surface F' lieu des courbes Γ s'appuyant sur une droite d', ne rencontrant pas C et distincte de d. Examinons l'intersection des surfaces F, F'.

Ces deux surfaces ne peuvent se toucher le long de C. En effet, si cela était, il y aurait, en dehors de C, des points infiniment voisins de cette courbe, communs aux deux surfaces F, F', donc à deux courbes de la congruence. Cela est impossible, puisque celle-ci est linéaire.

L'intersection des deux surfaces se compose donc de:

1°) la courbe C à compter q^2 fois,

2°) les m courbes Γ s'appuyant à la fois sur d et d',

3°) certaines courbes fixes (courbes exceptionnelles) formant, avec des courbes variables, des courbes Γ dégénérées.

Si λ est l'ordre de C et ϱ le terme provenant de la présence éventuelle de courbes exceptionnelles, on a

$$m^2 = m\gamma + \lambda q^2 + \varrho. \tag{5}$$

Eliminons q entre les équations (4) et (5). Il vient

$$m^2[(4\gamma + 2p - 2)^2 - \lambda\gamma^2] = (4\gamma + 2p - 2)^2(\gamma m + \varrho).$$

Le second membre de cette inégalité étant positif, il en est de même du premier, et on doit avoir

$$\lambda < \left(\frac{4\gamma + 2p - 2}{\gamma}\right)^2. \tag{6}$$

Ainsi donc, la courbe singulière C a l'ordre inférieur à $\left(\frac{4\gamma + 2p - 2}{\gamma}\right)^2$. C'est le second théorème énoncé au début de cet article.

8. Supposons que les courbes Γ soient rationnelles ($p = 0$). On a ($\gamma \geqslant 1$)

$$4 - \frac{2}{\gamma} < 4,$$

donc l'inégalité (6) donne $\lambda < 16$.

Si les courbes Γ sont elliptiques ($p = 1$), (6) donne de même $\lambda < 16$.

S i u n e c o n g r u e n c e l i n é a i r e d e c o u r b e s r a t i o n n e l l e s o u e l l i p t i q u e s p o s s è d e u n e s e u l e c o u r b e s i n g u l i è r e, c e l l e - c i a a u p l u s l'o r d r e 15.

Supposons que les courbes Γ soient gauches. Pour une valeur donnée de γ, la plus grande valeur du second membre de (6) sera atteinte pour la plus grande valeur de p. Une formule de M. C a s t e l n u o v o [1]) donne un maximum pour le genre d'une courbe

[1]) *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Atti R. Accad. di Torino, v. XXIV).

gauche d'ordre γ: si γ est pair, on a $p \leqslant \left(\frac{\gamma}{2} - 1\right)^2$; si γ est impair, $p \leqslant \frac{1}{4}(\gamma - 1)(\gamma - 3)$. Dans les deux cas, on trouve, pour second membre de la formule (6): $\left(\frac{\gamma + 4}{2}\right)^2$. Donc:

Si une congruence linéaire de courbes gauches d'ordre γ possède une seule courbe singulière, l'ordre de celle-ci est inférieur à $\left(\frac{\gamma + 4}{2}\right)^2$.

9. Considérons une congruence linéaire Σ_1 possédant deux courbes singulières C_1, C_2, respectivement d'ordres λ_1, λ_2, formée de courbes Γ d'ordre γ et de genre p. Nous supposerons que:

1°) les courbes Γ passant par un point de C_1 (ou de C_2) ne touchent pas en ce point un même plan passant par la tangente à C_1 (ou à C_2) au point considéré;

2°) il n'y a pas de courbes Γ, ou de parties de courbes Γ, infiniment voisines de C_1 ou de C_2 [1]).

Si m_1, m_2 sont les nombres de points d'appui des courbes Γ respectivement sur C_1, C_2, on a

$$m_1 + m_2 = 4\gamma + 2p - 2, \tag{7}$$

en vertu de la première hypothèse.

Si nous considérons la surface F, d'ordre m, engendrée par les courbes Γ s'appuyant sur une droite, le même raisonnement que plus haut nous permet d'écrire

$$\gamma m = m_1 q_1 + m_2 q_1,$$

q_1 et q_2 étant les multiplicités respectives de C_1, C_2 pour la surface F.

La considération de l'intersection de la surface F et d'une surface analogue F' nous oblige à faire usage de la seconde hypothèse. Si en effet il existait des courbes Γ ou des parties de courbes Γ infiniment voisines de C_1 (ou de C_2), les surfaces F et F'

[1]) L'existence de pareilles courbes a été démontrée, pour les congruences linéaires de coniques, par M. Montesano: *Su le congruence lineari di coniche nello spazio* (Rend. R. Ist. Lombardo, 1893) — *Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio* (Rend. R. Accad. di Napoli 1895).

se toucheraient le long de cette ligne singulière. Dans le cas où cette éventualité ne se présente pas, nous avons

$$m^2 = \gamma m + \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \varrho, \tag{9}$$

ϱ provenant, comme plus haut, de la présence éventuelle de courbes exceptionnelles.

Eliminons m entre les équations (8) et (9), il vient

$$(m_1^2 - \gamma^2 \lambda_1) q_1^2 + (m_2^2 - \gamma^2 \lambda_2) q_2^2 + \\ + 2 m_1 m_2 q_1 q_2 - \gamma^2 m_1 q_1 - \gamma^2 m_2 q_2 - \gamma^2 \varrho = 0.$$

Exprimons que q_1 est réel, nous obtenons

$$4(m_1^2 \lambda_2 + m_2^2 \lambda_1 - \gamma^2 \lambda_1 \lambda_2) q_2^2 + \gamma^2 (m_1^2 - 4 m_2 \lambda_1 q_2) + \\ + 4(m_1^2 - \gamma^2 \lambda_1) \varrho \geqslant 0. \tag{10}$$

Une au moins des parenthèses du premier membre de cette inégalité est positive. Ceci fournit des renseignements au sujet des nombres λ_1, λ_2. Nous allons examiner particulièrement le cas où les courbes Γ sont des cubiques gauches ($\gamma = 3$, $p = 0$).

10. Si $\gamma = 3$, $p = 0$, les expressions (7) et (10) deviennent

$$m_1 + m_2 = 10,$$

$$4(m_1^2 \lambda_2 + m_2^2 \lambda_1 - 9 \lambda_1 \lambda_2) q_2^2 + 9(m_1^2 - 4 m_2 \lambda_1 q_2) + \\ + 4(m_1^2 - 9 \lambda_1) \varrho \geqslant 0. \tag{11}$$

Nous supposerons $m_1 \leqslant m_2$, donc $m_1 \leqslant 5$.

Commençons par faire trois remarques:

a) On ne peut avoir $m_1^2 - 9 \lambda_1 \geqslant 0$. En effet, cela donnerait $\lambda_1 \leqslant \frac{m_1^2}{9}$, c'est-à-dire, dans le cas le plus favorable ($m_1 = 5$) $\lambda_1 \leqslant \frac{25}{9}$ ou $\lambda \leqslant 2$. C_1 serait une droite ou une conique, rencontrée en cinq points par les cubiques Γ, ce qui est absurde.

b) On ne peut avoir $m_1^2 - 4 m_2 \lambda_1 q_2 \geqslant 0$. Cela donnerait en effet $\lambda_1 \leqslant \frac{m_1^2}{4 m_2}$, puisque $q_2 \geqslant 1$. Dans le cas le plus favorable ($m_1 = m_2 = 5$), on aurait $\lambda_1 \leqslant \frac{5}{4}$ ou $\lambda_1 = 1$, ce qui est impossible.

c) Si l'on a $m_2^2 - 9 \lambda_2 \geqslant 0$, on a, à fortiori,

$$m_2^2 \lambda_2 + m_2^2 \lambda_1 - 9 \lambda_1 \lambda_2 > 0.$$

Cette remarque est évidente.

En vertu des remarques a), b), l'inégalité (11) n'est satisfaite que si l'on a

$$m_1^2 \lambda_2 + m_2^2 \lambda_1 - 9\, \lambda_1 \lambda_2 \geqslant 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\lambda_3 \leqslant \frac{m_2^2 \lambda_1}{9 \lambda_1 - m_1^2}. \tag{12}$$

La recherche des valeurs possibles de λ_1, λ_2 revient donc à l'étude de l'inégalité (12) et de l'inégalité

$$m_2^2 - 9\, \lambda_2 \geqslant 0 \tag{13}$$

1^er cas. $m_1 = 1$, $m_2 = 9$. — On a $\lambda_2 \geqslant 6$. En effet, les ∞^2 quadriques passant par une cubique Γ de Σ rencontrent C_2 en $2\lambda_2 - 9$ points variables. Si $\lambda_2 < 6$, C_2 appartient au moins à l'une de ces quadriques. Mais alors, cette quadrique étant rencontrée en 9 points par toutes les courbes de la congruence, les contient toutes, ce qui est absurde. Donc $\lambda_2 \geqslant 6$.

L'inégalité (13) est satisfaite pour $6 \leqslant \lambda \leqslant 9$. Pour ces valeurs, λ_1 peut être quelconque.

Pour $\lambda_1 = 1$, l'inégalité (12) donne la valeur possible $\lambda_2 = 10$. Pour $\lambda_1 > 1$, on a $\lambda_2 \leqslant 9$.

2^e cas. $m_1 = 2$, $m_2 = 8$. La courbe C_2 ne peut être située sur une quadrique, car celle-ci contiendrait toutes les cubiques de Σ, donc $\lambda_2 \geqslant 5$.

L'inégalité (13) est satisfaite pour $\lambda_2 = 5$, 6 et 7. Pour ces valeurs λ_1 peut être quelconque.

En dehors de ces cas, l'inégalité (12) fournit les cas suivants:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1, & \lambda_2 = 8,\ 9,\ 10,\ 11 \text{ ou } 12; \\ \lambda_1 = 2, & \lambda_2 = 8 \text{ ou } 9; \\ \lambda_1 = 3 \text{ ou } 4, & \lambda_2 = 8; \end{array}$$

3^e cas. $m_1 = 3$, $m_2 = 7$. — On a $\lambda_1 \geqslant 2$, $\lambda_2 \geqslant 5$.

L'inégalité (13) est satisfaite pour $\lambda_2 = 5$, λ_1 étant quelconque.

L'inégalité (12) fournit les cas suivants, pour $\lambda_2 > 5$:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2, & \lambda_2 = 6,\ 7,\ 8,\ 9 \text{ ou } 10; \\ \lambda_1 = 3, & \lambda_2 = 6,\ 7 \text{ ou } 8; \\ \lambda_1 = 4, & \lambda_2 = 6 \text{ ou } 7; \\ \lambda_1 = 5,\ 6,\ 7,\ 8 \text{ ou } 9, & \lambda_2 = 6. \end{array}$$

4[e] cas. $m_1 = 4$, $m_2 = 6$. — On a $\lambda_1 \geqslant 3$, $\lambda_2 \leqslant 4$.

L'inégalité (13) est satisfaite pour $\lambda_2 = 4$, λ_1 étant quelconque. L'inégalité (12) fournit en outre les cas suivants:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 3, & \lambda_2 = 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \text{ ou } 10; \\ \lambda_1 = 4, & \lambda_2 = 5,\ 6 \text{ ou } 7; \\ \lambda_1 = 5 \text{ ou } 6, & \lambda_2 = 5 \text{ ou } 6; \\ \lambda_1 = 7 \text{ ou } 9, & \lambda_2 = 5. \end{array}$$

5[e] cas. $m_1 = m_2 = 5$. — On a $\lambda_1 \geqslant 3$, $\lambda_2 \geqslant 3$ et on supposera, pour fixer les idées, $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$. L'inégalité (13) n'est jamais satisfaite et l'inégalité (13) fournit les cas suivants:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 3, & 3 \leqslant \lambda_2 \leqslant 37; \\ \lambda_1 = 4, & \lambda_2 = 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8 \text{ ou } 9; \\ \lambda_1 = 5, & \lambda_2 = 5 \text{ ou } 6. \end{array}$$

Plusieurs congruences linéaires de cubiques gauches ayant deux lignes singulières sont connues.

Nous avons rencontré autrefois la congruence formée par les cubiques gauches s'appuyant en $m_2 = 8$ points sur une sextique gauche de genre trois C_2 et en $m_1 = 2$ points sur une courbe rationnelle C_1, d'ordre λ_1 $(1 \leqslant \lambda_1 \leqslant 9)$ s'appuyant elle-même en $3(\lambda_1 - 1)$ points sur C_2 [1]).

Dans le cas $m_1 = m_2 = 5$, $\lambda_1 = 3$, C_1 est certainement une cubique gauche et nous avons démontré qu'alors C_2 est une courbe d'ordre 10, s'appuyant en 15 points sur C_1 [2]).

La détermination de tous les autres cas n'offrirait probablement pas de difficultés insurmontables, d'autant plus qu'on sait, par un théorème de M. Enriques [3]), qu'il existe une transformation birationnelle transformant les cubiques Γ en les droites d'une gerbe.

[1]) *Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1909).

[2]) *Détermination des congruences linéaires de cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche fixe* (Rendiconti Circ. Matem. di Palermo, 1911, t. XXXII).

[3]) *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'una equazione algebrica $f(x, y, z) = 0$ con funzioni razionali di due parametri* (Mathem. Annalen, Bd. 49). Voir aussi notre note *Sur les congruences d'ordres un ou deux de cubiques gauches* (L'Enseignement Mathématique, 1916).