Sur les surfaces intersections complètes de variétés algébriques

Lucien Godeaux

Résumé

Détermination du genre arithmétique d'une surface complète intersection d'hypersurfaces algébriques.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les surfaces intersections complètes de variétés algébriques

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination du genre arithmétique d'une surface complète intersection d'hypersurfaces algébriques.

Dans une note publiée en 1944 (1), nous avons déterminé le genre arithmétique de la surface d'un espace à $n + 2$ dimensions, intersection complète de n hypersurfaces du même ordre. Dans ce nouveau travail, nous déterminons le genre arithmétique de la surface intersection complète dans un espace à $n + 2$ dimensions de n hypersurfaces d'ordres différents. Nous utiliserons dans ce but, comme dans notre note de 1944, un théorème de Severi donnant le genre arithmétique d'une surface somme de deux surfaces dont les genres arithmétiques sont donnés (2).

1. Soit dans un espace S_{n+2} à $n + 2$ dimensions une surface F intersection complète de n hypersurfaces algébriques $V_1, V_2, \ldots, V_n$ respectivement d'ordres $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Nous nous proposons de déterminer le genre arithmétique de la surface F mais auparavant, nous établirons un lemme sur le genre arithmétique de la section d'une variété algébrique W à trois dimensions par une hypersurface V dans l'espace S_{n+2}.

Désignons par μ l'ordre de la variété W, par m l'ordre de l'hypersurface V et par p_a le genre arithmétique de la surface $W \cap V$.

(1) *Sur les involutions appartenant à des variétés algébriques intersections complètes d'hypersurfaces* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1944, pp. 301-317).

(2) SEVERI, *Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1909, t. XXVIII, pp. 33-87).

Le nombre p_a est un nombre fini qui ne varie pas lorsque la variété V se déplace d'une manière continue et en particulier lorsque cette variété se réduit à l'ensemble de m hyperplans. Cela étant, désignons par p_a le genre arithmétique d'une section hyperplane de la variété W et par π_1 le genre de la courbe section de la même variété par un espace à n dimensions.

Si V^2 est une hyperquadrique de S_{n+2}, le genre arithmétique de la surface $W \cap V^2$ est d'après un théorème de Severi,

$$p_a'' = 2p_a' + \pi_1.$$

Le genre π_2 d'une section hyperplane de cette surface est

$$\pi_2 = 2\pi_1 + \mu - 1.$$

Si V^3 est une hypersurface cubique de S_{n+2}, le genre arithmétique de la surface $W \cap V^3$ est

$$p_a''' = p_a'' + p_a' + \pi_2 = 3p_a' + 3\pi_1 + \mu - 1$$

et le genre d'une section hyperplane de cette surface est

$$\pi_3 = \pi_1 + \pi_2 + 2\mu - 1 = 3\pi_1 + 3\mu - 2.$$

Le genre arithmétique de la section de W par une hypersurface du quatrième ordre est

$$p_a^{(4)} = p_a''' + p_a' + \pi_3 = 4p_a' + 6\pi_1 + 4\mu - 3$$

et le genre de la section hyperplane de cette surface est

$$\pi_4 = \pi_1 + \pi_3 + 3\mu - 1 = 4\pi_1 + 6\mu - 3.$$

Écrivons que le genre arithmétique de la section de W par une hypersurface d'ordre i est

$$p_a^{(i)} = ip_a' + \binom{i}{2}\pi_1 + \binom{i}{3}\mu - \binom{i-1}{2}$$

et que le genre d'une section hyperplane de cette surface est

$$\pi_2 = i\pi_1 + \binom{i}{2}\mu - (i-1).$$

Il est aisé de vérifier que si cette formule est exacte pour une valeur dc i, elle l'est également pour la valeur $i + 1$. Comme elle est vraie pour $i = 2, 3, 4$, elle est vraie pour toute valeur de i et en particulier pour $i = m$. On a donc

$$p_a = mp'_a + \binom{m}{2}\pi_1 + \binom{m}{3}\mu - \binom{m-1}{2}.$$

Le genre d'une section hyperplane de la surface F est

$$\pi = m\pi_1 + \binom{m}{2}\mu - (m-1).$$

Nous avons énoncé la première de ces relations en note dans notre travail de 1944, mais ne l'avons démontrée que lorsque W est intersection complète de $n - 1$ hypersurfaces, seul cas qui nous intéressait alors.

2. Revenons à la surface F et désignons par W_1 la variété à trois dimensions intersection des hypersurfaces $V_2, V_3, \ldots, V_n$. Dans ce cas, nous pouvons appliquer les formules précédentes, en remplaçant μ par $m_2 m_3 \ldots m_n$ et m par m_1. On obtient ainsi

$$p_a = m_1 p'_a + \binom{m_1}{2}\pi_4 + \binom{m_1}{3} m_2 m_3 \ldots m_n - \binom{m_1 - 1}{2},$$

$$\pi = m\pi_1 + \binom{m}{2}\mu - (m-1).$$

Nous définirons maintenant nos notations.

Nous désignerons par $W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}$ les intersections des hypersurfaces $V_2 \ldots V_n, V_3 \ldots V_n, \ldots, V_{n-1} V_n, W_{n-1} = V_n$,

$$W_1 = V_2 \cap V_3 \cap \ldots \cap V_n,$$

$$W_2 = V_3 \cap V_4 \cap \ldots \cap V_n,$$

....

$$W_{n-2} = V_{n-1} \cap V_n,$$

$$W_{n-1} = V_n.$$

Le genre arithmétique de la surface section de W_1 par un espace à $n + 1$ dimensions sera désigné par p_a^{n-1} et le genre de la section de cette surface par un espace à n dimensions par π_{n-1}. D'une manière générale, le genre arithmétique de la surface section de W_k par un espace à $n + 2 - k$ dimensions sera désigné par p_a^{n-k} et le genre de la section de cette surface par un espace à $n + 1 - k$ dimensions par π_{n-k}. Nous poserons en outre

$$\mu = m_1 m_2 \ldots m_n, \mu_1 = m_2 m_3 \ldots m_n, \mu_k = m_{k+1} m_{k+2} \ldots m_n, \mu_{n-1} = m_n,$$

$$\mathrm{M} = m_1 + m_2 + \ldots m_n, \mathrm{M}_1 = m_2 + m_3 + \ldots + m_n, \ldots,$$

$$\mathrm{M}_k = m_{k+1} + m_{k+2} + \ldots + m_n, \ldots, \mathrm{M}_{n-1} = m_n.$$

3. Avec ces notations, les relations établies plus haut s'écrivent

$$p_a = m_1 p_a^{n-1} + \binom{m_1}{2}\pi_{n-1} + \binom{m_1}{3}\mu_1 - \binom{m_1 - 1}{2},$$

$$\pi = m_1 \pi_{n-1} + \binom{m_1}{2}\mu_1 - (m_1 - 1).$$

Actuellement, nous pouvons calculer π_{n-1} qui est le genre d'une courbe d'ordre μ_1 section par S_n de W_1 section complète de $n - 1$ hypersurfaces d'un espace à n dimensions.

La série canonique de cette courbe est découpée par les hypersurfaces de S_n d'ordre $\mathrm{M}_1 - (n + 1)$ et par conséquent on a

$$2\pi_{n-1} - 2 = \mu_1(\mathrm{M}_1 - n - 1)$$

d'où

$$\pi_{n-1} = \frac{1}{2}\mu_1(\mathrm{M}_1 - n - 1) + 1.$$

En portant cette expression dans celle de p_a, on obtient

$$p_a = m_1 p_a^{n-1} + \frac{1}{12}(m_1 - 1)(2\mathrm{M} + \mathrm{M}_1 - 3n - 7)\mu + m_1 - 1.$$

4. Considérons les sections par un espace S_{n+1} à $n + 1$ dimensions des variétés W_2 et V_2. La première est une variété à trois dimensions et la seconde une hypersurface de S_{n+1}. Nous pouvons appliquer les raisonnements précédents et les formules établies en ramplaçant m_1 par m_2 et n par $n - 1$. On obtient ainsi

$$p_a^{n-1} = m_2 p_a^{n-2} + \frac{1}{12}(m_2 - 1)(2\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 - 3n - 7 + 3)\mu_1 + m_2 - 1,$$

donnant p_a^{n-1} en fonction de p_a^{n-2}.

On en déduit

$$m_1 p_a^{n-1} = m_1 m_2 p_a^{n-2} + \frac{1}{12}(m_2 - 1)(2M_1 + M_2 - 3n - 7 + 3)\mu$$
$$+ m_1(m_2 - 1).$$

5. D'une manière générale, en considérant les sections des variétés W_k et V_k par un espace à $n - k + 2$ dimensions, on peut appliquer les relations précédentes en remplaçant m_1 par m_k et n par $n - k$. On obtient ainsi

$$p_a^{n-k} = m_{k+1} p_a^{n-k-1}$$
$$+ \frac{1}{12}(m_{k+1} - 1)(2M_k + M_{k+1} - 3n - 7 + 3k)\mu_k + m_{k+1} - 1,$$

d'où

$$m_1 m_2 \ldots m_k p_a^{n-k} = m_1 m_2 \ldots m_{k+1} p_a^{n-k-1}$$
$$+ \frac{1}{12}(m_{k+1} - 1)(2M_k + M_{k+1} - 3n - 7 + 3k)\mu$$
$$+ m_1 m_2 \ldots m_k(m_{k+1} - 1). \tag{1}$$

En particulier on a

$$m_1 m_2 \ldots m_{n-2} p_a^2 = m_1 m_2 \ldots m_{n-1} p_a^1$$
$$+ \frac{1}{12}(m_{n-1} - 1)[2M_{n-2} + M_{n-1} - 3n - 7 + 3(n-2)]\mu$$
$$+ m_1 m_2 \cdots m_{n-2}(m_{n-1} - 1)$$

Observons que l'on a

$$m_1 m_2 \ldots m_{n-1} p_a^1 = \frac{1}{6}(m_n^2 - 6m_n + 11)\mu - m_1 m_2 \ldots m_{n-1}.$$

Additionnons membre à membre les relations (1) pour $k = 0, 1, \ldots, n - 2$. Il vient

$$p_a = \frac{1}{6}(m_n^2 - 6m_n + 11)\mu$$
$$+ \frac{1}{12}[(m_1 - 1)(2M + M_1) + (m_2 - 1)(2M_1 + M_2) + \ldots$$
$$+ (m_{n-1} - 1)(2M_{n-2} + M_{n-1})]\mu$$
$$- \frac{1}{12}(3n + 4)(M - m_n - n + 1)\mu$$

$$+\frac{1}{4}\left[m_2 + 2m_3 + \ldots + (n-2)m_{n-1} - \binom{n-1}{2}\right]\mu - 1,$$

la somme des derniers termes des relations (1) étant égale à

$$m_1 m_2 \ldots m_{n-1} - 1.$$

Pour abréger, posons

$$M_0 = m_1 m_2 + m_1 m_3 + \ldots + m_{n-1} m_n.$$

Tous calculs faits, on trouve [1]

$$p_a = \frac{1}{12}[2M^2 - M_0 - 3(n+3)M]\mu + \frac{1}{24}(3n^2 + 17m + 24)\mu - 1.$$

En posant $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, on retrouve la relation

$$p_a = \frac{1}{24}[3(m-1)^2 n^2 + (m-1)(m-17)n + 24]m^n - 1$$

que nous avions établie dans notre note de 1944.

Liège, le 19 août 1970.

[1] On sait que les courbes canoniques sont découpées sur F par les hypersurfaces d'ordre M-n-3.