Sur les surfaces algébriques de genre zéro et de genre linéaire un (seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination des surfaces non rationnelles de genres $p_a = p_g = o$, $p_{(1)} = 1$, contenant un certain nombre de courbes elliptiques isolées dont certains multiples appartiennent à un faisceau linéaire de courbes elliptiques.

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1970.61699

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les surfaces algébriques de genres zéro et de genre linéaire un

(seconde note)

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination des surfaces non rationnelles de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$, contenant un certain nombre de courbes elliptiques isolées dont certains multiples appartiennent à un faisceau linéaire de courbes elliptiques.

Nous considérons une surface algébrique F non rationnelle de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$ contenant un faisceau de courbes elliptiques $|\Gamma|$. Nous supposons qu'il existe sur la surface un certain nombre de courbes elliptiques isolées $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ dont des multiples sont des courbes de $|\Gamma|$. Dans notre première note [1], nous avons supposé que les adjointes aux courbes γ étaient des expressions linéaires des courbes γ. Nous supposerons actuellement que l'on connaît l'expression des adjointes aux courbes Γ en fonction linéaire des courbes γ. Nous établirons le théorème suivant:

Si une surface algébrique non rationnelle de genres $p_a = p_g = 0$ *contient* n *courbes elliptiques isolées* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *dont certains multiples sont des courbes d'un faisceau de courbes elliptiques* $|\Gamma|$ *de la surface, deux cas peuvent se présenter*:

---

[1] Voir ce Bulletin, mai 1970, pp. 560-564.

1° *Les doubles des courbes* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *sont des courbes du faisceau* $|\Gamma|$ *et on a* $P_2 = n - 1$, $P_3 = n - 2$, *le diviseur de Severi étant* $\sigma = 2$.

2° *on a* $n = 2$ *et les triples des courbes* γ_1, γ_2 *sont des courbes du faisceau* $|\Gamma|$. *On a* $P_2 = 1$, $P_3 = 2$ *et le diviseur de Severi est* $\sigma = 3$.

Les modèles de surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$ *construits* par M. Burniat ([1]) démontrent l'existence des surfaces de la première catégorie. La surface que nous avons *construite* autrefois ([2]) montre l'existence des surfaces de la seconde catégorie.

1. Soit F une surface non rationnelle de genres $p_a = p_g = 0, p^{(1)} = 1$ contenant un faisceau $|\Gamma|$ de courbes elliptiques, privé de points-base. Nous ferons les hypothèses suivantes:

1° La surface F contient n courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, elliptiques, isolées qui comptées respectivement $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ fois sont des courbes de $|\Gamma|$. On a donc

$$\mu_i \gamma_i \equiv \Gamma, \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

2° L'adjointe Γ' à une courbe Γ s'exprime par une combinaison linéaire des courbes γ. On supposera donc

$$\Gamma' \equiv \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \ldots + \lambda_n\gamma_n,$$

où $\lambda_i < \mu_i$ puisque F est dépourvue de courbe canonique.

De $\mu_1\gamma_1 \equiv \Gamma$, on déduit

$$(\mu_1 - 1)\gamma_1 + \gamma'_1 \equiv \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \cdots + \lambda_n\gamma_n$$

et

$$\gamma'_1 \equiv (\lambda_1 - \mu_1 + 1)\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \cdots + \lambda_n\gamma_n,$$

La surface F étant dépourvue de courbe canonique, on doit avoir

$$\mu_1 \geqslant \lambda_1 + 1$$

et par un raisonnement analogue

$$\mu_i \geqslant \lambda_i + 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

([1]) P. Burniat, *Surfaces algébriques de genre géométrique nul et de bigenre quelconque* (Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei, 1° sem. 1954, pp. 459-463).

([2]) *Sur une surface algébrique non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls et de genre linéaire un* (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège, 1934, pp. 184-187).

2. Supposons qu'il y ait au moins deux courbes γ pour lesquelles on a $\mu_i > \lambda_i + 1$ et précisément que l'on ait

$$\mu_1 > \lambda_1 + 1, \ \mu_2 > \lambda_2 + 1.$$

On a

$$\gamma_1'' \equiv (\lambda_1 - \mu_1)\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \cdots + \lambda_n\gamma_n + \gamma_1',$$
$$\gamma_1'' \equiv 2[(\lambda_1 - \mu_1)\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \cdots + \lambda_n\gamma_n] + \gamma_1$$

et

$$C_2 \equiv \gamma_1'' - \gamma_1 \equiv 2[(\lambda_1 - \mu_1)\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \cdots + \lambda_n\gamma_n].$$

On a de même

$$C_2 \equiv \gamma_2'' - \gamma_2 \equiv 2[\lambda_1\gamma_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 + \cdots + \lambda_n\gamma_n].$$

Les seconds membres de ces deux relations doivent être équivalents, d'où l'on a

$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_1, \ \lambda_2 - \mu_2 = \lambda_2 \quad \textit{et} \quad \mu_1 = \mu_2 = 0,$$

ce qui est absurde.

Il y a donc au plus une inégalité $\lambda_i > \mu_i + 1$ et on peut supposer que l'on a

$$\lambda_1 > \mu_1 + 1, \ \lambda_2 = \mu_2 + 1, \ldots, \lambda_n = \mu_n + 1.$$

Dans ces conditions on trouve

$$C_2 \equiv \gamma_2'' - \gamma_2 \equiv (2\lambda_1 - \mu_1)\gamma_1 + (\lambda_2 - 1)\gamma_2 + 2\lambda_3\gamma_3 + \cdots + 2\lambda_n\gamma_n$$

et on doit donc avoir $2(\lambda_1 - \mu_1) = 2\lambda_1 - \mu_1$ d'où $\mu_1 = 0$, ce qui est absurde. On a donc

$$\mu_i = \lambda_i + 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

3. Sous l'hypothèse $\mu_i = \lambda_i + 1$, on a

$$\Gamma' = n\Gamma - (\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n)$$

et par conséquent la courbe

$$(n - 1)\Gamma - (\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n)$$

ne peut exister sans quoi elle serait la courbe canonique de F.

Supposons $n > 2$. On a

$$\gamma_1' \equiv \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 + \cdots + \lambda_n\gamma_n,$$
$$\gamma_2' \equiv \lambda_1\gamma_1 + \lambda_3\gamma_3 + \cdots + \lambda_n\gamma_n,$$
$$\gamma_3' \equiv \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_4\gamma_4 + \cdots + \lambda_n\gamma_n.$$

On en déduit

$$C_2 \equiv \gamma_1'' - \gamma_1 \equiv (\lambda_1 - 1)\gamma_1 + (\lambda_2 - 1)\gamma_2 + 2\lambda_3\gamma_3 + \cdots + 2\lambda_n\gamma_n,$$

$$C_2 \equiv \gamma_1'' - \gamma_1 \equiv (\lambda_1 - 1)\gamma_1 + 2\lambda_2\gamma_2 + (\lambda_3 - 1)\gamma_3 + \cdots + 2\lambda_n\gamma_n.$$

Les seconds membres doivent être équivalents, ce qui exige, si $\lambda_2 \geqslant 2, \lambda_2 = -1$, ce qui est absurde. On a donc $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ et le système bicanonique de F est donc

$$|C_2| = |(\lambda_1 - 1)\gamma_1 + \Gamma + 2\lambda_4\gamma_4 + \cdots + 2\lambda_n\gamma_n|.$$

Le même raisonnement appliqué à trois courbes γ quelconques montre que tous les λ sont égaux à l'unité. Le système bicanonique de F est donc

$$|C_2| = |(n-2)\Gamma|$$

et le bigenre de F est $P_2 = n - 1$.

Le système tricanonique est

$$|C_3| = |(n-3)\Gamma + \Gamma'| = |(n-3)\Gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n|,$$

car on a

$$\Gamma' \equiv \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n,$$

ce qui est une courbe fixe. Le trigenre est $P_3 = n - 2$.

Quant au système tétracanonique, il est

$$|C_4| = |2(n-2)\Gamma|$$

car on a

$$\Gamma'' \equiv (n-1)\Gamma.$$

Le tétragenre est $P_4 = 2n - 3$.

4. Supposons maintenant $n = 2$. Nous avons

$$\gamma_1' \equiv \lambda_2\gamma_2, \; \gamma_2'' \equiv \lambda_1\gamma_1$$

et on retrouve le cas que nous avons examiné dans notre première note. On a

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \; C_2 \equiv \gamma_1 + \gamma_2, \; |C_3| = |3\gamma_1| = |3\gamma_2| = |\Gamma|.$$

et $P_2 = 1, P_3 = 2$.

Observons que l'on peut aussi avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. On rentre ainsi dans le premier cas, la surface ayant les genres $P_2 = 1, P_3 = 0$.

Il nous reste à examiner le cas $n = 1$. On a alors

$$\gamma_1' \equiv (\lambda_1 - \mu_1 + 1)\gamma_1$$

et $\mu_1 > \lambda_1 + 1$. On en déduit

$$\gamma_1'' - \gamma_1 \equiv 2(\lambda_1 - \mu_1)\gamma_1$$

et le système bicanonique n'existe pas.

5. Reprenons le cas où n est quelconque (supérieur à un) et considérons un système régulier $| K |$ de degré ν, de genre π et de dimension

$$r = \nu - \pi + 1 > 1.$$

Le système $| K + \gamma_1 - \gamma_2 |$ a le même degré, le même genre que $| K |$ et une dimension au moins égale à r. On a

$$|2(K + \gamma_1 - \gamma_2)| = |2K + 2\gamma_1 - 2\gamma_2| = |2K|$$

et le diviseur de Severi de la surface F est $\sigma = 2$.

Observons que l'on a

$$K + \gamma_i - \gamma_k \equiv K + \gamma_k - \gamma_i |.$$

Appelons $| K_{ik} |$ le système précédent. Deux systèmes $| K_{ik} |$, $| K_{jh} |$ sont évidemment distincts, car il ne peut exister une relation entre les courbes γ. On en conclut qu'il y a $1 + n(n - 1) : 2$ systèmes linéaires dont les doubles coïncident avec le système $| 2K |$ (1).

Liège, le 15 juin 1970.

(1) Voir *Sur les surfaces algébriques possédant un faisceau de courbes elliptiques* (Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei, en cours d'impression).