# SOBRE LAS RECTAS COMUNES A VARIAS CUÁDRICAS DE UN SISTEMA LINEAL

Hace una docena de años, la lectura de un trabajo en que, con el nombre de *complejo de Grassmann*, analizaba J. Neuberg el lugar de las rectas que encuentran a tres parejas de planos en pares de puntos en involución (*), nos condujo al estudio de ciertos complejos y congruencias de rectas que se pueden representar por la anulación de algunas matrices de dos series de variables cogredientes (**). Esta representación da un medio cómodo para evaluar el orden y la clase de las congruencias y complejos considerados, utilizando los métodos expuestos por U. Stuyvaert y G. Giambelli (***), el primero de los cuales dedicó una interesante Memoria a las congruencias que nosotros habíamos encontrado y a otras que admiten análoga representación (****).

Los métodos empleados se pueden aplicar a otros problemas, como ya hicimos en dos casos particulares (*****), en los que se trataba de hallar la clase de las superficies alabeadas o desarrollables.

En esta nota, y aplicando dichos métodos, buscamos los números característicos relativos a los lugares de rectas situadas en un cierto número de hipercuádricas de un sistema lineal, y así determinaremos, por ejemplo, el orden de la reglada constituída por las rectas comunes a $\infty^2$ cuádricas que forman parte de un sistema lineal cuádruplemente infinito.

---

(*) J. Neuberg: *Sur le complexe de Grassmann* (Mathesis, 1902, (3), II).

(**) L. Godeaux: 1) *Sur quelques couples particuliers.* (Bull. Acad. R. de Belgique, 1907); 2) *Sur une extension à l'espace d'un théorème de Grassmann.* (Nouv. Annales de Math. 1907; (4), VII); 3) *Sur quelques congruences particulières de droites.* (Mém. Soc. Sc. du Hainant, 1908, (6), IX); 4) *Sur une classe de congruences de droites.* (Enseignement Math. 1909, XI.)

En el segundo de los artículos citados consideramos, en un espacio de $n$ dimensiones, el lugar de los espacios de $p$ dimensiones que encuentran grupos de espacios de $n-p-1$ dimensiones en grupos de puntos ligados entre sí por una relación lineal.

(***) U. Stuyvaert: *Cinq études de Géométrie Analytique.*—Gante, van Goethem, 1908.—G. Giambelli. Mem. Ist. Lomb., 1904. En este artículo utilizaremos los resultados de Giambelli.

(****) U. Stuyvaert: *Sur l'usage des matrices dans l'étude des congruences de droites.* (Enseignement Math., 1910, XII.)

(*****) L. Godeaux: *Sur l'emploi de certaines matrices de formes dans la résolution de problèmes de Géométrie.* (Enseignement Math., 1915, XVII.)

**1.** Consideremos en un espacio lineal $S_r$ de $r$ dimensiones, cuyas coordenadas homogéneas son $(x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_r)$, $k+1$ $(k > 1)$ hipercuádricas, linealmente independientes que tengan por ecuaciones:

$$(a_0)_x^2 \equiv \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} a_{0ij} x_i x_j = 0 \quad , \; (a_{0ij} = a_{0ji}),$$

$$(a_1)_x^2 \equiv \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} a_{1ij} x_i x_j = 0 \quad , \; (a_{1ij} = a_{1ji}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(a_k)_x^2 \equiv \sum_{1=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} a_{kij} x_i x_j = 0 \quad , \; (a_{kij} = a_{kji})$$

y sean $Y(y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_r)$, $Z(z_0, z_1, z_2, \ldots\ldots, z_r)$ dos puntos cualesquiera de $S_r$. Cada una de las hipercuádricas dadas encuentra a la recta $YZ$ en dos puntos, cuyas coordenadas

$$\mu\, y_i + \nu\, z_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots\ldots, r)$$

están determinadas por los valores de los parámetros $\mu$, $\nu$, dados por las ecuaciones

$$\mu^2 (a_j)_y^2 + 2\,\mu\,\nu\,(a_j)_y (a_j)_z + \nu^2 (a_j)_z^2 = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \ldots\ldots, k).$$

Para que estos $k+1$ pares de puntos pertenezcan a una misma involución $I_2^1$ de segundo orden, simplemente infinita, es necesario y suficiente que se tenga:

$$\left\| \begin{matrix} (a_0)_y^2 & (a_0)_y \cdot (a_0)_z & (a_0)_z^2 \\ (a_1)_y^2 & (a_1)_y \cdot (a_1)_z & (a_1)_z^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (a_k)_y^2 & (a_k)_y \cdot (a_k)_z & (a_k)_z^2 \end{matrix} \right\| = 0; \qquad [1]$$

es decir: que se anulen los determinantes de tercer orden contenidos en esta matriz.

La matriz que forma el primer miembro de la ecuación [1] goza de la propiedad de poderse reducir a la primera mediante adiciones y substracciones de columnas, sustituyendo $y_i$, $z_i$ por $\mu' y_i + \nu' z_i$, $\mu'' y_i + \nu'' z_i$, respectivamente. Por esta causa se puede decir que la ecuación [1] representa un lugar de rectas.

Las rectas de $S_r$ son $\infty^{2(r-1)}$, y como la cuación [1] equivale a $k-1$ ecuaciones linealmente independientes, representa un lugar formado por

$\infty^{2r-k-1}$ rectas. Lo designaremos brevemente por *complejo* $\infty^{2r-k-1}$ *de rectas:* $\Sigma_k$.

**2.** Por un grupo de dos puntos de la involución $I_2^1$ determinada sobre una recta $YZ$ que pertenece al complejo $\Sigma_k$, pasan $\infty^{k-1}$ hipercuádricas del sistema lineal $\infty^k$

$$\lambda_0 (a_0)_x^2 + \lambda_1 (a_1)_x^2 + \cdots\cdots + \lambda_k (a_k)_x^2 = 0. \qquad [2]$$

De estas $\infty^{k-1}$ hipercuádricas, $\infty^{k-2}$ pasan, además, por un punto arbitrario de $YZ$ y contienen a esta recta.

Inversamente, si una recta $YZ$ está situada en $\infty^{k-2}$ hipercuádricas del sistema [2], las hipercuádricas de este sistema determinarán en la recta una involución $I_2^1$; luego esta recta pertenece a $\Sigma_k$. Por tanto:

*El complejo* $\infty^{2r-k-1}$ $\Sigma_k$ *es el lugar de las rectas que pertenecen a* $\infty^{k-2}$ *hipercuádricas de un sistema lineal de* k *dimensiones.*

**3.** Antes de continuar, apliquemos a un caso particular, que más adelante utilizaremos, un teorema de Giambelli (*) relativo al orden de la variedad representada por la anulación de una matriz de formas.

Sean $a_{ij}$ formas homogéneas de grado $p_i$ con respecto a las incógnitas $(x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_d)$ consideradas como coordenadas ordinarias de un espacio de $d$ dimensiones $s_d$.

La ecuación

$$\| a_{ij} \| = 0 \qquad (i = 0, 1, 2; j = 0, 1, 2, \ldots\ldots, k)$$

representa, en $s_d$, una variedad de $d - k + 1$ dimensiones, cuyo orden $\gamma_k$ está definido por un determinante de orden $k-1$:

$$\gamma_k = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & s_0 & s_1 & s_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & s_0 & s_1 \end{vmatrix},$$

donde hemos puesto $s_0 = 1$, $s_1 = p_0 + p_1 + p_2$, $s_2 = p_0 p_1 + p_1 p_2 + p_2 p_0$, $s_3 = p_0 p_1 p_2$.

---

(*) G. Giambelli.—*Ordine di una varietà più ampia di quella rappresentata coll'annulare tutti i minori di dato ordine estratti da una data matrice generica di forme.* Mem. R. Ist. Lomb. 904, t. xx (véase pág. 28, fórmula IV').

Definamos dos números $\alpha_k$, $\beta_k$ por las condiciones:

$$\alpha_k = \gamma_k \text{ para } p_0 = 0, \ p_1 = 1, \ p_2 = 2;$$
$$\beta_k = \gamma_k \text{ para } p_0 = p_1 = p_2 = 2.$$

Tendremos:

$$\gamma_k = s_1 \gamma_{k-1} - s_2 \gamma_{k-2} + s_3 \gamma_{k-3}$$

y, en particular:

$$\alpha_k = 3\alpha_{k-1} - 2\alpha_{k-2}$$
$$\beta_k = 6\beta_{k-1} - 12\beta_{k-2} + 8\beta_{k-3},$$

y como, además, se tiene: $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 7$; $\beta_2 = 6$, $\beta_3 = 24$, $\beta_4 = 80$, podemos considerar conocidos los números $\alpha_k$, $\beta_k$.

**4**. Volviendo al complejo $\infty^{2r-k-1}\Sigma_k$, resulta que por un punto de $S_r$ pasan $\infty^{r-k}$ rectas de $\Sigma_r$. Suponiendo $k \leq r$, pongamos en la matriz de la ecuación [1]:

$$z_0 = z_1 = \cdots\cdots = z_{r-k} = 0 \qquad [3]$$

y fijemos el punto $Y$ de tal modo que no pertenezca al espacio lineal definido por las ecuaciones [3].

La ecuación [1], cuyas variables $z_{r-k+1}, z_{r-k+2}, \ldots\ldots, z_r$ se consideran como coordenadas ordinarias, representa $\alpha_k$ puntos.

En otros términos: *si* $k \leq r$, *las rectas de* $\Sigma_k$ *que pasan por un punto de* $S_r$, *engendran un cono de orden* $\alpha_k$.

En particular:

*Las rectas de* $S_r$ *que pertenecen a* $\infty^{r-3}$ *hipercuádricas de un sistema lineal de* $r-1$ *dimensiones forman un complejo* $\infty^2$ *de orden* $\alpha_{r-1}$.

Para $r = 3$ se tiene este teorema:

*Las rectas de una red de cuádricas forman un complejo de tercer orden.*

Este es el complejo encontrado por J. Neuberg (*) en el caso particular en que la red de cuádricas está definida por tres pares de planos.

De igual modo, para $r = 2$, resulta este otro teorema:

*Las rectas de* $S_r$ *que pertenecen a* $\infty^{r-2}$ *hipercuádricas de un sistema lineal* $\infty^r$, *engendran un complejo* $\infty^{r-1}$ *de orden* $\alpha_r$.

(*) Loc. cit.

5. Si suponemos $k = r$, obtenemos un complejo $\infty^{r-1}\Sigma_{r-1}$. Existe un número finito de rectas de este complejo que se apoya en un espacio lineal $S_p$ de $p$ dimensiones, y en otro $S_{r-p-1}$ de $r-p-1$ dimensiones, sin tener ningún punto común. Para determinar este número, hagamos recorrer al punto $Y$ el espacio $S_p$ y al $Z$ el $S_{r-p-1}$. En otros términos, pongamos:

$$y_0 - y_1 = y_2 = \cdots\cdots = y_{r-p-1} = 0,$$

$$z_{r-p} = z_{r-p+1} = \cdots\cdots = z_r = 0.$$

Haciendo

$$\frac{x'_0}{z_0} = \frac{x'_1}{z_1} = \cdots\cdots = \frac{x'_{r-p-1}}{z_{r-p-1}} \qquad [4]$$

y

$$\frac{x'_{r-p}}{y_{r-p}} = \frac{x'_{r-p+1}}{y_{r-p+1}} = \cdots\cdots = \frac{x'_{r-1}}{y_{r-1}} = \frac{x'_0}{y_r}, \qquad [5]$$

los elementos de la matriz [1] se convierten en formas enteras y homogéneas de segundo grado con respecto a las $r$ variables $x'_0, x'_1, \ldots\ldots, x'_{r-1}$; luego la ecuación [1] tiene $\beta_k$ soluciones.

Observemos que cada una de estas soluciones nos da, mediante las ecuaciones [4] y [5], una recta de $\Sigma_{z-1}$ que se apoya en $S_p$ y $S_{r-p-1}$. En efecto, si una de estas soluciones es

$$x'_0 = x'_1 = \ldots\ldots = x'_{r-p-1} = 0,$$

por ejemplo, debemos descartarla, puesto que, en virtud de la ecuación [4], se tiene:

$$z_0 = z_1 = \ldots\ldots = z_{r-p-1} = z_{r-p} = \ldots\ldots = z_r = 0$$

lo que es imposible; pero el número de dichas soluciones es $\alpha_k$. Del mismo modo, el número de soluciones que dan

$$x'_{r-p} = x'_{r-p+1} = \ldots\ldots = x'_{r-1} = x'_0 = 0;$$

es decir:

$$y_0 = y_1 = \ldots\ldots = y_r = 0$$

es $\alpha_k$; luego existen $\beta_r - 2\alpha_r$ soluciones aceptables.

Por tanto: *hay* $\beta_r - 2\alpha_r$ *rectas de* $S_r$, *pertenecientes a* $\infty^{r-2}$ *hipercuádricas de un sistema lineal* $\infty^r$ *que se apoyan en un* $S_p$ *y en un* $S_{r-p-1}$ *sin tener ningún punto común.*

Hagamos variar el espacio $S_p$ de una manera continua hasta que tenga un punto común $P$ con el espacio $S_{r-p-1}$. Las $\beta_k - 2\alpha_k$ rectas que se apoyan en estos dos espacios, se dividen, en virtud del principio de conservación del número, en $\alpha_k$ rectas que pasan por $P$ y $\beta_k - 3\alpha_k$ rectas situadas en el espacio $S_{r-1}$ que contiene actualmente a los espacios $S_p$ y $S_{r-p-1}$.

Observemos que las rectas de $\Sigma_{r-1}$ situadas en un hiperplano de $S_r$ son $\infty^{r-3}$, y, por consiguiente, forman una variedad de $r-2$ dimensiones, de orden $\beta_k - 3\alpha_k$. Luego:

*Las rectas de* $\mathrm{S_r}$ *que pertenecen a* $\infty^{\mathrm{r}-2}$ *hipercuádricas de un sistema lineal* $\infty^{\mathrm{r}}$ *engendran un complejo* $\infty^{\mathrm{r}-1}$; *por un punto de* $\mathrm{S_r}$ *pasan* $\alpha_{\mathrm{r}}$ *de estas rectas, y un hiperplano de* $\mathrm{S_r}$ *contiene* $\infty^{\mathrm{r}-3}$ *rectas, que forman una variedad de orden* $\beta_{\mathrm{r}} - 3\alpha_{\mathrm{r}}$, *de* $\mathrm{r}-2$ *dimensiones.*

En particular, si $r = 3$:

*Las rectas que pertenecen a la base de los haces de cuádricas de un sistema lineal triplemente infinito forman una congruencia de orden* 7 *y clase* 3.

Fano (*) ha encontrado esta congruencia, que presenta gran interés desde el punto de vista de la Geometría algebraica y ofrece el ejemplo de una variedad algebraica de dos dimensiones de género cero y bigénero uno.

**6.** Haciendo, ahora, en las fórmulas generales, $k = r + 1$, obtenemos un complejo $\infty^{r-2}$ $\Sigma_{r+1}$, cuyas rectas engendran una variedad puntual $V$ de $r-1$ dimensiones, y cuyo orden queda, realmente, calculado en el párrafo anterior.

Si en las fórmulas generales ponemos en vez de $r$, $r' = r + 1$, y en vez de $k$, $r + 1$, resulta un complejo $\infty^{r'-1}$, cuyas rectas, que pertenecen a un hiperplano genérico, formarán precisamente la variedad $V$, cuyo orden sabemos que es $\beta_{r'} - 3\alpha_{r'} = \beta_{r+1} - 3\alpha_{r+1}$. Luego:

*Las rectas comunes a* $\infty^{r-1}$ *hipercuádricas de un sistema lineal* $\infty^{r+1}$ *son* $\infty^{r-2}$, *y engendran una variedad de* $\mathrm{r}-1$ *dimensiones de orden* $\beta_{r+1} - 3\alpha_{r+1}$.

En particular:

*Las rectas comunes a las cuádricas de las redes de un espacio lineal cuádruplemente infinito, engendran una reglada de orden* 35.

---

(*) Fano: *Nuove ricerche sulle congruenze dirette del* 3° *ordine prive di linea singolare*. Mem. R. Accad. Torino, 1900, (2), t. L.