Sur les surfaces algébriques de genre zéro et de genre linéaire un

Lucien Godeaux

Résumé

Détermination des surfaces algébriques de genres $p_a = p_g = 0$, $p(1) = 1$, contenant un faisceau de courbes elliptiques dont un certain nombre sont formées de courbes elliptiques isolées comptées plusieurs fois et dont les adjointes sont des fonctions linéaires de ces courbes.

Sur les surfaces algébriques de genre zéro et de genre linéaire un

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination des surfaces algébriques de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$, contenant un faisceau de courbes elliptiques dont un certain nombre sont formées de courbes elliptiques isolées comptées plusieurs fois et dont les adjointes sont des fonctions linéaires de ces courbes.

Parmi les surfaces algébriques de genres $p_a = p_g = 0, p^{(1)} = 1$, on trouve, outre la surface d'Enriques dont la courbe bicanonique est d'ordre zéro, une seule surface dont la courbe bicanonique est d'ordre supérieur à zéro. Cette surface contient un faisceau linéaire $|\,\Gamma\,|$ de courbes elliptiques dont deux sont formées de courbes elliptiques isolées γ_1, γ_2, La courbe bicanonique est la courbe $\gamma_1 + \gamma_2$ et les courbes tricanoniques sont les courbes Γ. Les adjointes aux courbes γ_1, γ_2 sont respectivement les courbes $_2\gamma_2$, $_2\gamma_1$ (1).

L'exemple précédent nous conduit à considérer une surface contenant un certain nombre de courbes elliptiques isolées $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ qui sont des morceaux de courbes Γ et dont les adjointes sont des combinaisons linéaires de ces courbes, et à voir si l'on peut obtenir ainsi de nouvelles surfaces de genres $p_a = p_g = 0, p^{(1)} = 1$. La réponse est négative. Nous démontrons dans cette note que l'on a $n = 2$ et que seul l'exemple dont il est question plus haut est possible. Nous

(1) *Sulle superficie algebriche di genere zero e di bigenre uno* (Bolletino della Unione Matematica Italiana, 1958, pp. 531-534). Nous avions antérieurement construit une surface de ce type dans une note *Sur une surface algébrique non rationnelle de* genres *arithmétique et géométrique nuls et de genre linéaire un* (Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège, 1934, pp. 184-187).

démontrons en outre que la surface a le diviseur de Severi égal à trois.

1. Soit une surface algébrique F de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$ un faisceau de courbes elliptiques $| \Gamma |$ privé de points-base. Supposons qu'il existe sur F un certain nombre n de courbes elliptiques isolées $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ qui, multipliées par certains entiers et éventuellement additionnées, sont des courbes de $| \Gamma |$.

Nous supposerons en outre que les adjointes $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$ à ces courbes en sont des combinaisons linéaires, la courbe γ_i ne faisant pas partie de la combinaison linéaire de l'adjointe γ'_i puisque F est dépourvue de courbe canonique.

Supposons $n > 2$ et posons

$$\gamma'_1 \equiv \lambda_{12}\gamma_2 + \lambda_{13}\gamma_3 + \cdots + \lambda_{1n}\gamma_n.$$

$$\gamma'_2 \equiv \lambda_{21}\gamma_1 + \lambda_{23}\gamma_3 + \cdots + \lambda_{2n}\gamma_{n1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma'_n \equiv \lambda_{n1}\gamma_1 + \lambda_{n2}\gamma_2 + \cdots + \lambda_{n,n-1}\gamma_{n-1},$$

De

$$\gamma'_i \equiv \lambda_{i1}\gamma_1 + \cdots + \lambda_{i,i-1}\gamma_{i-1} + \lambda_{i,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \lambda_{in}\gamma_n,$$

on déduit successivement

$$\gamma''_i \equiv (\lambda_{i1} - 1)\gamma_1 + \lambda_{i2}\gamma_2 + \cdots + \lambda_{in}\gamma_n + \gamma'_1,$$

$$\gamma''_i \equiv (\lambda_{i1} - 1)\gamma_1 + (\lambda_{i2} + \lambda_{12})\gamma_2 + \cdots + (\lambda_{in} + \lambda_{1n})\gamma_n + \lambda_{1i}\gamma_i,$$

$$\gamma''_i - \gamma_i \equiv (\lambda_{i1} - 1)\gamma_1 + (\lambda_{i2} + \lambda_{12})\gamma_2 + \cdots + (\lambda_{in} + \lambda_{1n})\gamma_n + (\lambda_{1i} - 1)\gamma_i \tag{1}$$

La courbe $\gamma''_i - \gamma_i$ est une courbe bicanonique C_2 de F et on a

$$C_2 \equiv \gamma''_1 - \gamma_1 \equiv \gamma''_2 - \gamma_2 \equiv \cdots \equiv \gamma''_n - \gamma_n$$

et par conséquent l'expression (1) doit être la même quel que soit $i = 2, 3, \ldots, n$.

On a donc

$$\lambda_{21} = \lambda_{31} = \cdots = \lambda_{n1}.$$

D'une manière analogue, on démontrerait que l'on a

$$\lambda_{12} = \lambda_{32} = \cdots = \lambda_{n2}, \ldots, \lambda_{1n} = \lambda_{2n} = \cdots = \lambda_{n,n-1}.$$

Pour $i = 2$, on a

$$C_2 \equiv (\lambda_{21} - 1)\gamma_1 + (\lambda_{12} - 1)\gamma_2 + (\lambda_{13} + \lambda_{23})\gamma_3 + \cdots$$

et pour $i = 3$,

$$C_2 \equiv (\lambda_{31} - 1)\gamma_1 + (\lambda_{13} - 1)\gamma_3 + (\lambda_{12} + \lambda_{32})\gamma_2 + \cdots,$$

d'où

$$\lambda_{12} - 1 = \lambda_{12} + \lambda_{23},\ \lambda_{13} - 1 = \lambda_{13} + \lambda_{23},$$

c'est-à-dire $\lambda_{23} = -1$, $\lambda_{32} = -1$. D'une manière générale, l'on démontre que

$$\lambda_{i2} = -1.$$

Mais alors on a par exemple

$$\gamma_1' + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_n = 0,$$

ce qui est impossible puisque les courbes sont effectives. On en conclut que l'on a $n = 2$.

2. Supposons donc $n = 2$ et posons

$$\gamma_1' \equiv \lambda_2\gamma_2,\ \gamma_2' = \lambda_1\gamma_1. \tag{1}$$

On a

$$\gamma_1'' = (\lambda_2 - 1)\gamma_2 + \lambda_1\gamma_1,\ \gamma_2'' = (\lambda_1 - 1)\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2,$$

d'où

$$C_2 \equiv (\lambda_1 - 1)\gamma_1 + (\lambda_2 - 1)\gamma_2.$$

On peut alors former une courbe tricanonique C_3 de deux manières suivant que l'on utilise la première ou la seconde des formules (1). On trouve ainsi

$$C_3 = C_2' \equiv (\lambda_1 - 2)\gamma_1 + (2\lambda_2 - 1)\gamma_2 \equiv (2\lambda_1 - 1)\gamma_1 + (\lambda_2 - 2)\gamma_2.$$

Ces deux expressions représentent des courbes équivalentes, donc on a

$$(\lambda_1 + 1)\gamma_1 \equiv (\lambda_2 + 1)\gamma_2.$$

Les courbes $(\lambda_1 + 1)\gamma_1, (\lambda_2 + 1)\gamma_2$ sont distinctes, elliptiques et déterminent un faisceau de courbes elliptiques qui ne rencontrent pas les courbes Γ. Ce faisceau coïncide donc avec $|\Gamma|$ et on a

$$(\lambda_1 + 1)\gamma_1 \equiv (\lambda_2 + 1)\gamma_2 \equiv \Gamma.$$

On peut donc supposer $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et écrire

$$\gamma_1' \equiv \lambda\gamma_2,\ \gamma_2' \equiv \lambda\gamma_1,\ \Gamma \equiv (\lambda + 1)\gamma_1 \equiv (\lambda + 1)\gamma_2,$$

$$C_2 \equiv (\lambda - 1)(\gamma_1 + \gamma_2),$$

$$C_3 \equiv (\lambda - 2)\gamma_1 + (2\lambda - 1)\gamma_2 \equiv (\lambda - 2)\gamma_2 + (2\lambda - 1)\gamma_1,$$

Les seconds membres de cette dernière formule représentent des courbes distinctes, elliptiques, déterminant un faisceau linéaire dont les courbes ne rencontrent pas les courbes Γ et qui coïncide donc avec le faisceau $|\Gamma|$. On en conclut

$$(2\lambda - 1)\gamma_1 \equiv (\lambda + 1)\gamma_1,$$

d'où $\lambda = 2$ et

$$C_2 \equiv \gamma_1 + \gamma_2,\ C_3 \equiv 3\gamma_1 \equiv 3\gamma_2 \equiv \Gamma,$$

La surface F a donc les genres $P_2 = 1, P_3 = 2$.

Les systèmes pluricanoniques sont

$$|C_4| = |2(\gamma_1 + \gamma_2)|,\ |C_5| = |\Gamma + \gamma_1 + \gamma_2|,$$

$$|C_6| = |2\Gamma|,\ |C_7| = |\Gamma + 2(\gamma_1 + \gamma_2),\ \ldots$$

et les plurigenres $P_4 = 1, P_5 = 2, P_6 = 3, P_7 = 2, \ldots$

On a d'ailleurs

$$(\gamma_1 + \gamma_2)' \equiv \Gamma,\ \Gamma' \equiv 2(\gamma_1 + \gamma_2)$$

3. Un raisonnement analogue à celui fait par Severi dans ses premières recherches sur la base [1] permet de montrer que la surface F a le diviseur trois.

Soit en effet | G | un système régulier du degré n, de genre π et de dimension

$$r = n - \pi + 1 > 1.$$

les systèmes linéaires

$$|G + \gamma_1 - \gamma_2|,\ |G + 2\gamma_1 - 2\gamma_2|$$

[1] SEVERI, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (Mathematische Annalen, 1906, Bd. LXII, pp. 194-225).

ont le même degré, le même genre que le système $|G|$ et leurs dimensions sont au moins égales à r. Or, on a

$$|3G| = |3G + 3\gamma_1 - 3\gamma_2| = |3G + 2\gamma_1 - 2\gamma_2|$$

et par conséquent le système $|3G|$ contient trois sous-multiples d'indice trois. Le diviseur de Severi de F est donc $\sigma = 3$.

Liège, le 2 juin 1970.