Sur les congruences linéaires de courbes planes douées de deux lignes singulières.

Dans deux Mémoires publiés l'an dernier (*), j'ai déterminé les congruences linéaires de courbes planes d'ordre m, en général dépourvues de points multiples, douées soit d'une courbe singulière, soit de deux courbes singulières dont l'une est une courbe plane d'ordre m, rencontrée en m points par les courbes de la congruence. La méthode utilisée peut, ainsi que je l'ai du reste fait remarquer, permettre de déterminer toutes les congruences linéaires de courbes planes; cependant, cette détermination promettait d'être longue et ennuyeuse. Quelques remarques faites récemment m'ont permis de simplifier quelque peu cette méthode. Le point essentiel est de déterminer des surfaces d'ordre le plus petit possible, engendrées par des courbes de la congruence, et formant un système linéaire, c'est-à-dire de déterminer le plus simple *système linéaire générateur* de la congruence. Lorsque l'on se trouve en présence de congruences linéaires de classe un, il est aisé de voir qu'elles admettent un réseau générateur de surfaces d'ordre $m+1$. Lorsque la classe est supérieure à un, j'avais trouvé, dans les deux cas étudiés, des faisceaux générateurs de surfaces d'ordre $m+1$. C'est ce résultat que je suis parvenu à étendre. Je considère dans ce travail les congruences linéaires de courbes planes d'or-

(*) *Sulle congruenze lineari di curve piane dotate di una sola curva singolare.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1912, volume XXXIV.

Sur les congruences linéaires de courbes planes. Bulletin international de l'Académie de Cracovie, 1912.

dre m supérieur à deux, dotées de deux courbes singulières; je construis des systèmes générateurs de surfaces d'ordre m ou $m+1$. Il était inutile de considérer le cas $m=2$, car on sait que M. Montesano a déterminé toutes les congruences linéaires de coniques, par des procédés d'ailleurs différents des nôtres (*). De plus, notre raisonnement n'est pas applicable à ce cas.

J'établis le théorème suivant:

Si une congruence linéaire de courbes planes d'ordre m *supérieur à deux, en général dépourvues de points multiples, possède deux lignes singulières, elle admet:*

a) *un réseau générateur de surfaces d'ordre* m + 1 *et elle est alors de classe un, ou*

b) *un faisceau générateur de surfaces d'ordre* m, *elle est alors de classe supérieure à un et ses courbes s'appuient en* m *points sur une des courbes singulières, ou*

c) *un faisceau générateur de surfaces d'ordre* m + 1 *et elle est alors également de classe supérieure à un.*

La connaissance de ces systèmes générateurs permettra de déterminer sans difficultés les différents types de congruences possédant deux lignes singulières.

Nous devrons souvent renvoyer dans le cours de ce travail, à certains résultats établis dans nos Mémoires déjà cités; nous indiquerons par P le Mémoire publié à Palerme, par C celui publié à Cracovie. Nous ferons suivre ces lettres d'un chiffre arabe indiquant le paragraphe invoqué.

1. — Soit Σ une congruence linéaire de courbes planes Γ d'ordre m supérieur à deux, en général dépourvues de points multiples, possédant deux courbes singulières C_1, C_2, respectivement d'ordres λ_1, λ_2. Nous supposerons que les courbes Γ s'appuient en m_1 points sur C_1 et en m_2 points sur C_2;

(*) *Sui varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio*, Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli, 1895.

pour fixer les idées, nous supposerons m_1 supérieur à m_2. De plus, nous indiquerons par n la classe de Σ.

Il résulte de théorèmes de M. Darboux (P, 2, C, 1), que les hypothèses:

1°) on a

$$m_1 + m_2 = m\,(m+1),$$

2°) les courbes Γ passant par un point quelconque de C_1 (ou de C_2), ne touchent pas, en ce point, un même plan tangent à C_1 (ou à C_2) au point considéré.

Sont équivalentes et correspondent au cas général, celui que nous considérerons ici.

Soient q, le nombre de courbes Γ passant par un point de C_1 et dont les plans passent par un point quelconque de l'espace, q_2 le caractère analogue relatif à C_2. On a évidemment, d'après la définition de la classe, $q_1 \leq n$, $q_2 \leq n$.

La surface F, lieu des courbes Γ dont les plans passent par un point quelconque de l'espace, est d'ordre $mn+1$, passe q_1 fois par C_1, q_2 fois par C_2 (P, 3; C, 2).

Une courbe de la congruence n'appartenant pas à cette surface F, ne peut la rencontrer en dehors des lignes singulières (P, 5; C 3). On a donc

$$m\,(mn+1) = m_1 q_1 + m_2 q_2 .$$

2. — Si la congruence Σ est de classe un ($n=1$), les plans des courbes de la congruence passent par un même point O. Une surface F est le lieu des courbes Γ dont les plans passent par une droite issue de O.

La formule (1) donne $q_1 = q_2 = 1$. Les surfaces F sont d'ordre $m+1$, passent simplement par les courbes C_1, C_2 et forment un réseau. La congruence Σ cst un cas particulier d'une congruence connue (P, 8).

Remarquons que si $q_1 = q_2 = n$, la formule (1) donne

$n=1$; on pourra donc supposer dans la suite que l'un des nombres q_1, q_2 est inférieur à n.

3. — Supposons $q_1 < n$. La surface F relative à un point P de C_1 se scinde en deux autres dont l'une, F'_1, d'ordre $m(n-q_1)+1$, est le lieu des courbes Γ dont les plans passent par P mais qui ne passent pas elles-mêmes par ce point. P est simple pour F'_1 (C, 6).

Désignons par q_{11} le nombre des courbes Γ passant par deux points quelconques de C_1, par q_{12} le nombre de courbes Γ passant par un point de C_1 et dont les plans *seuls* passent par un deuxième point de cette courbe. On a évidemment $q_{11}+q_{12}=q_1$.

D'après sa définition, F'_1 passe q_{12} fois par la courbe C_1; or nous savons qu'nn point P de cette courbe est simple pour F'_1, par conséquent on a soit $q_{12}=1$, soit $q_{12}=0$.

Soit q'_2 la multiplicité de C_2 pour la surface F'_1; il est facile de voir, en considérant les courbcs Γ dont les plans passent par une droite s'appuyant en un point sur chacune des courbes C_1, C_2, que la plus haute valeur de q'_2 est atteinte pour $q_1=n$. On a alors $q'_2=n-q_1$ (C, 7), donc $q'_2 < n-q_1$.

Une courbe Γ ne peut rencontrer la surface F'_1 en dehors de C_1, C_2, si elle n'appartient pas à cette surface (P, 10; C, 6). Par conséquent

$$m[m(n-q_1)+1]=m_1 q_{12}+m_2 q'_2. \qquad (2)$$

Supposons $q_{12}=0$. Alors, la formule (2) donne

$$q'_2=\frac{m}{m_2}[m(n-q_1)+1].$$

L'inégalité $q'_2 < n-q_1$ devient

$$m[m(n-q_1)+1] \leq m_2(n-q_1).$$

Cela est absurde car puisque l'on a supposé $m_1 \geq m_2$, m_2 est au plus égal à $\dfrac{1}{2} m(m+1)$.

On a donc $q_{12} = 1$.

Considérons une droite s'appuyant au moins en trois points Q_1, Q_2, Q_3, sur la courbe C_1. Supposons qu'il y ait un certain nombre z de courbes Γ passant à la fois par ces trois points. Comptons les courbes Γ passant par Q_1 et dont les plans passent par Q_2, Q_3. Il y a:

1°) z courbes Γ passant par Q_1, Q_2, Q_3;
2°) $q_{11} - z$ » » » Q_1, Q_2;
3°) $q_{11} - z$ » » » Q_1, Q_3;
4°) $q_{12} - z$ » » » Q_1 seul.

Par suite, on a

$$q_1 = 2q_{11} + q_{12} - z.$$

A cause de $q_1 = q_{11} + q_{12}$, on en déduit $z = q_{11}$.

Parmi les n courbes Γ dont les plans passent par Q_1, Q_2, Q_3, il y en a q_{11} passant par ces trois points et $3q_{12}$ passant par un seul de ces points. On a donc

$$q_{11} + 3q_{12} \leq n,$$

et par conséquent, puisque $q_1 = q_{12} \quad q_{11}$,

$$q_{12} \leq \frac{1}{2}(n - q_1.$$

Mais par la formule (2), cette inégalité devient

$$2m^2(n - q_1) + 2m - 2m_2 q'_2 \leq m_1(n - q_1). \qquad (3)$$

En donnant à q'_2 sa plus haute valeur possible $n - q_1$, on a

$$(n - q_1)(m^2 - m - m_2) + 2m \leq 0. \qquad (4)$$

Or, $m_2 \leq \frac{1}{2} m(m+1)$, donc

$$m(m+1) - m_2 \geq 0$$

pour $m > 2$. L'inégalité (4) est donc absurde.

L'inégalité (3) n'étant pas valable pour la plus grande valeur possible dc q'_2, n'est donc jamais vérifiée et on a $n - q_1 < 2q_{12}$.

Nous avons $q_{12} = 1$ et d'autre part, $q_1 < n, q_1 > n - 2$. Par suite, $q_1 = n - 1$. La formule (2) donne alores $q'_2 = 1$, et nous avons donc construit une surface F'_1 d'ordre $m + 1$, passant simplement par les courbes singulières C_1, C_2 de la congruence. A chaque point de C_1 correspond une surface F'_1, nous avons donc une simple infinité de pareilles surfaces.

4. — Supposons maintenant $q_2 < n$. Désignons par q_{21} le nombre de courbes Γ passant par deux points quelconques de C_2, par q_{22} le nombre de ces courbes passant par un point de C_2, mais dont les plans *seuls* passent par un deuxième point de cette courbe. On a $q_{21} + q_{22} = q_2$.

La surface F'_2, lieu des courbes Γ dont les plans seuls passent par un point quelconque P de C_2, est d'ordre $m(n - q_2) + 1$, passe q_{22} fois par C_2 et un certain nombre q'_1 de fois par C_1 · P est un point simple de F'_2, donc on doit avoir soit $q_{22} = 0$, soit $q_{22} = 1$.

Les intersections d'une courbe Γ n'appartenant pas à F'_2 et de cette surface ne peuvent tomber en dehors de C_1, C_2, par suite

$$m[m(n - q_2) + 1] = m_1 q'_1 + m_2 q_{22}. \tag{5}$$

Considérons un point Q de C_1 et les n courbes Γ dont les plans contiennent la droite PQ.

Il y a q'_2 de ces courbes passant par 0 mais non par P, q'_1

passant par P mais non par 0. Soit z le nombre de ces courbes passant par P et Q, on a

$$q_1 = q'_1 + z, q_2 = q'_2 + z,$$

d'où, en éliminant z

$$q'_1 = q_1 - q_2 + q'_2.$$

Si $q_1 = n$, on a évidemment $q'_2 = 0$, d'où $q'_1 = n - q_2$. Si $q_1 < n$, on a $q_1 = n - 1$, $q'_2 = 1$, d'où encore $q'_1 = n - q_2$.

La formule (6) devient donc, quelque soit q_1,

$$(n - q_2)(m^2 - m_1) + m = m_2 \, q_{22}.$$

Si $q_{22} = 0$, on a

$$(n - q_2)(m^2 - m_1) + m = 0.$$

Cette égalité n'est possible que si m_1 est divisible par m et supérieur à m^2, ce qui est impossible. On a donc toujours $q_{22} = 1$.

Si $q_{22} = 1$, on a

$$(n - q_2)(m^2 - m_1) + m = m_2,$$

ou, à cause de $m_1 + m_2 = m(m + 1)$,

$$(n - q_2 - 1)(m^2 - m_1) = 0.$$

Deux cas peuvent donc se présenter:

a) $m_1 = m^2$, ou

b) $q_2 = n - 1$.

Dans le premier cas, l'équations (1) donne

$$m(n - q_1) = q_2 - 1.$$

Si $q_1 = n$, on a $q_2 = 1$. Si $q_1 = n - 1$, on a $q_2 = m + 1$.

Mais le cas qui nous intéresse ici est celui où $q_1 = n$, car lorsque q_1 est inférieur à n, nous savons construire des surfaces F'_1, d'ordre $m + 1$.

Lorsque $q_1 = n$, $q_2 = 1$, nous considérerons la surface F_2, lieu des courbes Γ passant par un point P de C_2. Cette surface, jointe à la surface F'_2 relative au point P, donne une surface F; elle est donc d'ordre $mq_2 = m$, passe $q_1 - q'_1 = 1$ fois par C_1 et $q_2 - q_{22} = 0$ fois par C_2. A chaque point de C_2 correspond une surface F_2, nous avons donc une simple infinité de telles surfaces.

Occupons-nous actuellement du cas b). La surface F'_2 est alors d'ordre $m + 1$ et passe simplement par les courbes C_1, C_2. A chaque point de C_2 correspond une surface F'_2, on a ainsi une simple infinité de ces surfaces.

5. — Rappelons un principe dont nous avons fait usage dans nos travaux antérieurs sur les congruences de courbes.

Si on a une famille simplement infinie de surfaces algébriques, dont chacune est engendrée par une infinité de courbes d'unc congruence linéaire, cette famille est un faisceau et les courbes de la congruence situées sur chacune des surfaces de cette famille forment un faisceau.

Si en effet par un point de l'espace passent x surfaces de la famille et que par un point de l'une de ces surfaces passent y courbes de la congruence situées sur cette surface, par un point de l'espace passent xy courbes de la congruence. Si celle-ci est linéaire, on doit avoir $xy = 1$, d'où $x = y = 1$.

Revenons à la congruence Σ; quatre cas peuvent se présenter:

1°) $q_1 = n, q_2 = n$. On a $n = 1$ et la congruence admet un *réseau générateur de surfaces d'ordre* $m + 1$.

2°) $q_1 < n, q_2 \leq n$. On a une simple infinité de surfaces d'ordre $m + 1$, et la congruence admet donc un *faisceau générateur de surfaces d'ordre* $m + 1$.

3°) $q_1 = n$, $q_2 < n$, $m_1 = m^2$. On a une famille simplement infinie de surfaces d'ordre m et la congruence admet donc un *faisceau générateur de surfaces d'ordre m.*

4°) $q_1 = n, q_2 < n$. On a une simple infinité de surfaces d'ordre $m + 1$ et par conséquent, la congruence admet un *faisceau générateur de surfaces d'ordre m* $+ 1$.

Nous avons donc démontré le théorème énoncé su début. Il sera maintenant aisé d'achever la détermination des congruences de courbes planes dotées de deux courbes singulières.

Morlanwelz (Belgique), le 29 Octobre, 1913.