

SUR LES CONGRUENCES D'ORDRE DEUX FORMÉES DE CONIQUES

PAR

Lucien GODEAUX (Liège).

Nous nous proposons, dans cette courte Note, d'exposer quelques propriétés des congruences d'ordre deux, formées de coniques. Une étude plus approfondie de ces congruences semblerait douée d'un certain intérêt, peut-être pourrai-je revenir plus tard sur ce sujet. Je commencerai par rappeler brièvement quelques définitions.

1. On appelle *congruence de coniques* un système algébrique doublement infini de coniques de l'espace. L'*ordre* d'une congruence est le nombre (généralement fini) de coniques de cette congruence passant par un point de l'espace. La *classe* d'une congruence est le nombre (en général fini) de coniques dont les plans passent par une droite.

Un point de l'espace est dit *point focal* d'une congruence si, parmi les coniques de la congruence passant par ce point, il y en a deux (au moins) infiniment voisines.

Un point est dit *singulier* pour une congruence si, par ce point, passent des coniques de la congruence, non toutes dégénérées, en nombre infini. Les points singuliers sont des points focaux particuliers ¹.

Les points focaux forment une surface, la *surface focale* de la congruence. Les coniques de la congruence touchent cette surface en chaque point de rencontre ². Les points singuliers

¹ Voir par ex. les *Leçons sur la théorie des surfaces*, de M. DARBOUX, t. II.

² DARBOUX, *l. c.*

d'une congruence sont *au plus* ∞^1 . S'ils sont ∞^1 , ils forment des *courbes singulières*.

Il existe des droites, appelées *droites exceptionnelles*, qui forment, soit seules, soit avec ∞^1 autres droites, des coniques de la congruence.

Une conique d'une congruence possède six points focaux (ou singuliers)¹.

2. Ces points étant rappelés, soit Σ une congruence *d'ordre deux* formée de coniques, et soit Φ la surface focale de cette congruence.

Par un point commun à la surface Φ et à une conique de Σ passe une deuxième conique de cette congruence, infiniment voisine de la première. S'il en passe une troisième, le point est singulier, puisque Σ est d'ordre deux.

Une conique de Σ possède six points focaux, éventuellement singuliers, donc elle rencontre Φ en six points distincts. De plus, en un point focal non singulier, cette conique touche Φ . Par conséquent, si Σ est dépourvue de courbes singulières, une conique de cette congruence touche Φ en six points et, par suite, Φ est d'ordre six.

La surface focale d'une congruence d'ordre deux, formée de coniques, et dépourvue de lignes singulières, est d'ordre six.

3. Considérons les coniques d'une congruence Σ passant par les points d'une conique de cette congruence. Elles engendrent une certaine surface Ψ .

Deux cas peuvent se présenter : a) Les surfaces Ψ sont en nombre ∞^2 . — b) Les surfaces Ψ sont en nombre ∞^1 .

Dans chacun des cas, la surface Ψ possède un système ∞^1 de coniques d'indice un ou deux.

Si le système est d'indice deux, on tombe nécessairement dans le second cas, car alors deux coniques de Σ qui se rencontrent donnent nécessairement naissance à la même surface Ψ . Inversement, si le système est d'indice un (faisceau), on est dans le premier cas, c'est-à-dire qu'une surface Ψ ne provient que d'un nombre fini de coniques de Σ .

Imaginons une surface F dont les points représentent, d'une

¹ DARBOUX, *l. c.*

manière univoque, les coniques de Σ , et plaçons-nous dans le premier cas.

Une surface Ψ est représentée sur F par une courbe rationnelle. F contient donc une série continue, ∞^2 , de courbes rationnelles et est par suite rationnelle¹.

Passons au second cas. Chaque surface Ψ est rationnelle, car elle possède un système continu de courbes rationnelles : les coniques de Σ ²). Ces coniques forment un système ∞^1 , d'indice deux, qui est nécessairement rationnel, donc F possède ∞^1 courbes rationnelles (image des Ψ) et est par suite rationnelle.

Une congruence d'ordre deux, formée de coniques, est rationnelle.

4. On peut partager les congruences d'ordre deux, formées de coniques, en deux catégories, suivant que les coniques passant par un point P , passent ou ne passent pas, par un second point Q .

Considérons une congruence Σ telle que : *a*) les deux coniques passant par un point passent en conséquence par un second point; *b*) les points singuliers soient en nombre fini.

Soient Γ une conique de Σ , Π son plan, Ψ la surface lieu des coniques de Σ s'appuyant en un point (et par suite en deux) sur Γ .

Les couples de points d'appui des coniques de Ψ sur Γ forment nécessairement une involution d'ordre deux sur Γ . Par suite, les intersections des plans de ces coniques avec Π passent par un point A .

Considérons une conique Γ' de Σ s'appuyant en deux points sur Γ . Les plans des coniques de Σ s'appuyant sur Γ' passent par un point A' situé dans Π . Lorsque Γ' varie sur Ψ , A' décrit une courbe C d'un certain ordre n' , passant nécessairement $n' - 1$ fois par A .

Un point commun à C et à Γ est nécessairement singulier, car il est commun à toutes les coniques de la surface Ψ' relative à Γ' . Par suite, on a $2n' \leq 6$, ou $n' \leq 3$.

¹ CASTELNUOVO-ENRIQUES. *Annali di Matematica*, 1901.

² CASTELNUOVO-ENRIQUES, *l. c.*

Actuellement, Σ est privée de lignes singulières, on a donc $n' = 0$, c'est-à-dire que les plans de toutes les coniques de Σ passent par un même point.

Remarquons de plus qu'il ne peut y avoir plus d'une conique de Σ dans un plan. En effet, si un plan contenait deux coniques de Σ , à chacune de ces coniques correspondrait un point A par lequel les plans de toutes les coniques de Σ devraient passer, ce qui est absurde (la droite joignant ces points serait une ligne singulière). Par suite :

Une congruence d'ordre deux, formée de coniques, dépourvue de lignes singulières, et telle que les coniques passant par un point passent par un second, est de classe un.

5. Considérons les coniques d'une congruence Σ , d'ordre deux, privée de lignes singulières, s'appuyant sur une droite d . Elles forment une surface Θ et, sur cette surface, un faisceau hyperelliptique d'un certain genre p . Dans ce faisceau, la g_2^1 est formée par les couples de coniques passant par les points de d . Cette g_2^1 possède une coïncidence chaque fois que d rencontre la surface focale Φ de Σ . Elle possède donc six coïncidences et par suite $p = 2$.

La congruence Σ , privée de lignes singulières, peut cependant posséder des points singuliers en nombre fini. Soit A un pareil point et supposons que les ∞^1 coniques passant par A forment une surface [A] d'ordre m .

La surface Θ contient m coniques de la surface [A]. Le point A est donc multiple d'ordre m pour Θ , les m plans tangents à Θ en ce point étant précisément les plans des m coniques dont il vient d'être question.

Considérons deux plans Π, Π' passant par d . Ils rencontrent Θ , en dehors de d , en deux courbes $\varepsilon, \varepsilon'$ birationnellement identiques. En effet, par un point de ε passe une conique de Θ , rencontrant ε' en un seul point, et réciproquement.

Supposons, en particulier, que π' passe par A. La section ε' possède en A un point m -uple et, d'autre part, les mêmes singularités que ε . Ces deux courbes étant birationnellement identiques, on a $m = 1$, c'est-à-dire que [A] est un plan. De plus, il ne peut passer par A deux coniques de Θ , puisque A est simple pour cette surface, donc les coniques de Σ pas-

sant par A, forment, dans le plan [A], un faisceau. Il en résulte que :

Les points singuliers éventuels d'une congruence d'ordre deux, formée de coniques, privée de lignes singulières, se distribuent par quaternes dans des plans. Les points d'un quaterne sont les points-base d'un faisceau de coniques appartenant à la congruence.

6. Considérons, dans la congruence Σ envisagée dans le N° 5, une droite exceptionnelle r qui, avec ∞^1 autres droites, forment ∞^1 coniques de Σ . Fixons encore l'attention sur la surface Θ lieu des coniques de Σ s'appuyant sur une droite d , que nous supposons ne pas rencontrer r .

La droite r appartiendra un certain nombre de fois, μ , à la surface Θ . Précisément, μ sera l'ordre de la réglée, lieu des droites s'appuyant sur r et formant avec cette droite les ∞^1 coniques de Σ . Les plans tangents à Θ , le long de r , seront précisément les μ plans contenant des coniques dégénérées de Σ (en r et en une droite s'appuyant sur d).

Considérons encore les plans Π , Π' dont il est question plus haut, mais supposons que Π' contienne une des droites formant, avec r , des coniques de Σ . La courbe ϵ' sera par suite composée d'une droite et d'une courbe ϵ'' . Les deux courbes ϵ , ϵ'' seront d'ailleurs birationnellement identiques. Un calcul simple montre que l'on doit par suite avoir la relation

$$n = \mu + 3$$

μ étant l'ordre de la surface Θ .

Nieucappelle (Furnes), 5 avril 1915.