
MÉMOIRE
SUR LES
INVOLUTIONS APPARTENANT A UNE SURFACE DE GENRES 1
(PREMIÈRE PARTIE),

PAR M. LUCIEN GODEAUX (1).

Les involutions simplement infinies appartenant à une courbe algébrique ont fait depuis longtemps l'objet de recherches approfondies. Au contraire, les involutions doublement infinies appartenant à une surface algébrique ont été très peu étudiées. A part un théorème de M. Enriques, que nous utiliserons plus loin, complété plus tard par M. Severi (2), et une généralisation du théorème d'Abel, due à M. Severi (3), on n'a étudié que les involutions appartenant à une surface de M. Picard, c'est-à-dire à une surface admettant un groupe continu transitif, à deux dimensions, de transformations birationnelles en elle-même (4). Cette question s'est présentée dans la recherche des surfaces algébriques dont les coordonnées peuvent s'exprimer pour des fonctions quadruplement périodiques de deux variables. Après avoir fait l'objet de recherches très intéressantes de

(1) Le manuscrit et les épreuves de ce Mémoire envoyés à M. Godeaux en Belgique le 30 juillet ont été en partie égarés; l'auteur n'a pu corriger les épreuves de son travail que jusqu'à la page 408. (Note de la Rédaction.)

(2) *Sulle relazioni che legano i caratteri...* (Rend. Istituto Lombardo, 1903).

(3) *Il teorema di Abel sulle superficie algebriche* (Annali di Matematica, 3^e série, t. XII, 1905).

(4) E. PICARD, *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Journal de Liouville, 4^e série, t. V, 1889). Voir aussi E. PICARD et G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II, Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. 439.

MM. Picard ⁽¹⁾, Humbert ⁽²⁾ et Traynard ⁽³⁾, ces surfaces furent complètement déterminées tout récemment par MM. Enriques et Severi d'une part ⁽⁴⁾, par MM. Bagnera et de Franchis d'autre part ⁽⁵⁾.

De l'analyse de ces géomètres, il résulte que, si l'on fait abstraction des involutions rationnelles ou référables à des réglées, une involution appartenant à une surface de M. Picard ne possède qu'un nombre fini de coïncidences, elle est cyclique ou engendrée par un groupe de transformations cycliques; son ordre est quelconque si cette involution est référable à une surface de M. Picard; son ordre est égal à 2, 3, 4, 6, 8, 12 ou 24 dans tous les autres cas.

En répétant, avec quelques variantes, le raisonnement qui lui avait permis, avec M. Severi, de démontrer qu'une involution (ni rationnelle, ni réglée) appartenant à une surface de M. Picard (ou de Jacobi) est engendrée par un groupe de transformations cycliques, M. Enriques ⁽⁶⁾ est parvenu à prouver qu'une involution de genres 1 ($p_a = P_a = 1$) existant sur une surface de genres 1 ($p_a = P_a = 1$) possède la même propriété.

En me basant sur ce théorème ⁽⁷⁾, je suis parvenu à prouver que l'ordre d'une pareille involution n'admet pour facteurs premiers que 2 et 3 ⁽⁸⁾.

J'ai continué mes recherches sur ce sujet et je suis parvenu à déter-

⁽¹⁾ *Loc. cit.*

⁽²⁾ *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques (Journal de Liouville, 4^e série, t. IX, 1893).*

⁽³⁾ *Sur les fonctions thêta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques (Annales de l'École Normale, 3^e série, t. XXIV, 1907).*

⁽⁴⁾ *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques (Acta mathem., t. XXXII, XXXIII, 1909).*

⁽⁵⁾ *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione mediante funzioni iperellittiche di due argomenti [Memorie della Società delle Scienze (dei XL), 3^e série, t. XV, 1908]. — Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et les surfaces irrégulières de genre zéro (Rendiconti di Palermo, t. XXX, 1910).*

⁽⁶⁾ *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno (Rend. della R. Accad. di Bologna, 1910).*

⁽⁷⁾ C'est sur le conseil de M. Enriques que j'ai entrepris ces recherches. Je tiens à lui exprimer ici tous mes remerciements.

⁽⁸⁾ *Sur les involutions de genres 1 existant sur une surface de genres 1 (Bull. de l'Acad. roy. de Belg., 1913). Voir aussi Sur les transformations rationnelles des surfaces de genre 1 (C. R. Acad. Sc., t. CLV, 1912).*

miner toutes les involutions de genres 1 pouvant exister sur une surface de genres 1. J'établis dans cette première Partie que :

Une involution de genres 1, appartenant à une surface de genres 1, a l'ordre égal à 2, 3, 4, 6, 8, 12, ou bien elle est composée d'involutions n'ayant aucun point de coïncidence commune.

Dans une seconde Partie, que j'espère publier avant peu, j'établirai l'existence de ces involutions.

J'ai établi un Tableau des singularités des surfaces représentatives de ces involutions qu'on trouvera à la fin de cette première Partie. Ces singularités sont (au nombre près) les mêmes que dans le cas des surfaces hyperelliptiques, mais j'ai dû, pour arriver à les déterminer, suivre un chemin tout différent de celui suivi par MM. Enriques et Severi, ou par MM. Bagnera et de Franchis. Ces géomètres purent, en effet, profiter de la représentation paramétrique des surfaces étudiées. Rien de pareil ne se présentait ici.

Du reste, mes procédés de démonstration pourraient s'appliquer à la recherche des surfaces hyperelliptiques, ainsi qu'à l'étude des involutions appartenant à une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = P_6 = 1$. C'est ce que j'ai montré dans un travail récent ⁽¹⁾.

PREMIÈRE PARTIE.

CLASSIFICATION DES INVOLUTIONS.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES. PROPRIÉTÉS DES POINTS DE COINCIDENCE.

1. Soit F une surface algébrique de genres $p_a = P_4 = 1$, que nous supposons dépourvue de courbes exceptionnelles. Les propriétés de cette surface sont les suivantes ⁽²⁾ :

⁽¹⁾ *Sur les involutions appartenant à une surface de genres zéro et de bigenre un* (C. R. Acad. Sc. t. CLVI, 1913). *Sur les involutions de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, existant sur une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$* (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XLI, 1913),

⁽²⁾ ENRIQUES, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 1$* (Rendiconto della R. Accad. di Bologna, décembre 1906).

1° La surface F possède des courbes canoniques et pluricanoniques d'ordre zéro; ses genres géométriques sont donc tous égaux à l'unité

$$\rho_g = P_2 = P_3 = P_4 = \dots = P_i = \dots = 1.$$

2° Un système complet de courbes de genre π tracé sur la surface F, est linéaire, son degré est égal à $2\pi - 2$ et sa dimension à π . Les courbes de ce système découpent, sur l'une quelconque d'entre elles, la série canonique complète.

3° Le genre linéaire $p^{(1)}$ de F est égal à l'unité.

La surface F a donc les caractères $p^{(1)} = p_a = p_g = \dots = P_4 = \dots = 1$; pour cette raison, on désigne souvent la surface F par la locution : *surface de genres 1*. C'est ce que nous ferons ici.

Supposons qu'il existe, sur la surface F, une involution d'ordre n , c'est-à-dire un système algébrique, doublement infini, de groupes de n points de F, tel qu'un point de F appartienne, en général, à un seul de ces groupes. Nous désignerons une involution tantôt par le symbole I_n , tantôt par le symbole $I_{\mu\nu\dots}$, μ, ν, \dots étant les exposants respectivement de 2, 3, ..., dans le nombre n , ordre de l'involution. Ainsi, une involution d'ordre 2 sera représentée tantôt par le symbole I_2 , tantôt par le symbole $I_{100\dots}$. Nous n'utiliserons la première notation que lorsque l'ordre n sera indéterminé, de sorte qu'il n'y aura pas de confusion possible entre les deux symboles.

Soit Φ une surface représentative de l'involution I_n , c'est-à-dire une surface telle qu'entre ses points et les groupes de I, il existe une correspondance birationnelle. Si nous désignons par $\pi_a, \pi_g, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \dots$ respectivement les genres arithmétique, géométrique et les pluri-genres de Φ , nous aurons les inégalités nécessaires

$$\pi_g - \pi_a \leq p_g - p_a, \quad \pi_g \leq p_g, \quad \Pi_2 \leq P_2, \quad \dots,$$

c'est-à-dire

$$\pi_g = \pi_a, \quad \pi_g \leq 1, \quad \Pi_2 \leq 1, \quad \dots$$

Les cas suivants peuvent se présenter :

- | | | |
|-----|----------------------|--------------|
| (a) | $\pi_a = 0,$ | $\Pi_2 = 0,$ |
| (b) | $\pi_a = \pi_g = 0,$ | $\Pi_6 = 1,$ |
| (c) | $\pi_a = \Pi_4 = 1.$ | |

Dans le premier cas, la surface Φ est rationnelle (¹); nous le laisserons de côté, car il ne présente, à notre point de vue, aucun intérêt.

Dans le second cas, la surface Φ est la surface de bigenre 1 qui fut étudiée d'une manière approfondie par MM. Enriques (²) et Fano (³). Nous ne nous occuperons pas non plus des involutions qui se présentent dans ce cas. Leur étude a d'ailleurs déjà été commencée par MM. Enriques et Severi dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (⁴). Ces géomètres ont montré qu'une involution d'ordre 2 et de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ sur une surface de genres 1, ne possède pas de point de coïncidence. Plus tard, M. Enriques est parvenu à démontrer qu'une surface de genres $p_g = p_a = 0$, $P_6 = 1$ peut toujours être considérée comme représentant une involution d'ordre 2 sur une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ (⁵).

Dans le dernier cas, la surface Φ est une surface de genres 1, c'est ce cas que nous étudierons dans ce travail.

2. *L'involution I_n ne possède qu'un nombre fini de coïncidences.* — Pour le démontrer il suffit d'invoquer un théorème de M. Enriques (⁶), d'après lequel si l'on a une correspondance rationnelle $(1, n)$ entre deux surfaces algébriques Φ , F , la transformée d'une courbe canonique de Φ , augmentée de la courbe lieu des points de coïncidence sur F , donne une courbe canonique de F . Or, la courbe canonique de Φ étant d'ordre zéro, sa transformée sur F est également d'ordre zéro. S'il existait une courbe de coïncidence d'ordre supérieur à zéro, il y aurait donc une courbe canonique d'ordre supérieur à zéro sur F , ce qui est impossible. Donc I_n ne possède qu'un nombre fini de

(¹) CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero* (*Mem. della Società italiana delle Scienze*, 3^e série, t. X, 1896).

(²) *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* (*Mem. della Società italiana delle Scienze*, 3^e série, t. XIV, 1907).

(³) *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari* (*Rend. del Circolo matem. di Palermo*, t. XXIX, 1910).

(⁴) *Loc. cit.*, t. XXXII, p. 331.

(⁵) *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere uno* (*Rend. della R. Accad. di Bologna*, gennaio, 1908).

(⁶) *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* (*Mem. della R. Accad. di Torino*, 2^e série, t. XLIV, 1893).

points de coïncidence sur F . Nous verrons d'ailleurs que ce nombre est toujours plus grand que zéro.

En se basant sur cette propriété, et en utilisant un raisonnement qu'il avait déjà employé avec M. Severi dans le *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*, M. Enriques est parvenu à démontrer le théorème suivant :

Si entre deux surfaces de genres 1 ($p_a = P_a = 1$), F , Φ , on a une correspondance rationnelle $(n, 1)$, les groupes de n points de F qui correspondent aux points de Φ forment une involution I_n engendrée par un groupe de n transformations birationnelles cycliques de F en elle-même⁽¹⁾.

Ce théorème peut encore s'énoncer sous une forme un peu différente :

Si sur une surface de genres 1, il existe une involution de genres 1, cette involution est cyclique ou composée avec une involution cyclique.

C'est de ce théorème, pris sous sa première forme, que nous partons pour effectuer nos recherches. Dans ce premier Chapitre, nous construirons sur la surface F un système composé avec I_n et un modèle projectif de Φ . Nous construirons aussi un système composé avec l'involution et se comportant d'une certaine manière en un point de coïncidence.

3. *Construction d'un système linéaire invariant* $|A|$. — Désignons par $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ les n transformations birationnelles cycliques de la surface F en elle-même qui engendrent l'involution I_n d'après le théorème de M. Enriques.

Nous dirons qu'un système linéaire est *invariant* quand une courbe de ce système est transformée en une courbe de ce système par l'une quelconque des n transformations T_1, T_2, \dots, T_n .

Nous allons construire un système invariant $|A|$, complet, simple, dépourvu de points-bases, et de genre virtuel $\pi > 1$.

⁽¹⁾ *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno (Rend. della R. Accad. di Bologna, marzo, 1910).*

Soit $|C_1|$ un système complet, simple, de genre supérieur à 1, qui ne soit pas invariant pour les transformations T_1, T_2, \dots, T_n , s'il est possible d'en trouver un (1). Indiquons par $|C_2|, |C_3|, \dots, |C_n|$ les systèmes transformés de $|C_1|$ au moyen de T_2, T_3, \dots, T_n respectivement. Je dis que le système complet

$$|A| = |C_1 + C_2 + \dots + C_n|$$

est invariant, simple, dépourvu de points-bases et de genre $\pi > 1$.

Tout d'abord, une courbe A de ce système est transformée par T_i en une courbe

$$A' \equiv C_{i+1} + C_{i+2} + \dots + C_n + C_1 + \dots + C_i.$$

Cette courbe est évidemment identique à A , donc c'est une courbe de $|A|$. Ce système est donc invariant.

Pour montrer que $|A|$ est simple, commençons par démontrer qu'il ne peut être composé avec l'involution I_n . Si cela était, il correspondrait en effet sur Φ au système $|A|$ un système $|A_1|$ de degré $\frac{2\pi - 2}{n}$ et de dimension π . Φ étant une surface de genres 1, on devrait avoir $2\pi - 2 = \frac{2\pi - 2}{n}$, ce qui n'est possible (n étant évidemment supérieur à 1) que si $\pi = 1$. Or, on a $\pi > 1$, car le genre des C_1 et par suite celui des C_2, C_3, \dots, C_n est supérieur à 1 et que, d'autre part, une C_1 et une C_2 , par exemple, se rencontrent au moins en trois points (2). $|A|$ ne peut donc être composé avec I_n .

Supposons que $|A|$ puisse être composé avec une involution différente de I_n . Alors les courbes C_1 , passant par un point, passeraient en conséquence par d'autres points, ce qui est impossible, $|C_1|$ étant simple par hypothèse.

Donc, $|A|$ est simple.

Il nous reste à prouver que $|A|$ n'a pas de points-bases. Cela est évident, car la série caractéristique d'une courbe A est la série cano-

(1) Cette restriction est nécessaire, car il se pourrait que tous les systèmes de courbes tracées sur F soient invariants. On démontrerait facilement, dans ce cas, qu'il existe des systèmes invariants simples et sans points-bases.

(2) Exactement, on a $\pi \geq \frac{1}{2}(3n^2 - n + 2)$.

nique $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ complète de cette courbe, et l'on sait que cette série n'a pas de points fixes.

4. *Construction d'un système linéaire de courbes invariantes et d'un modèle projectif de Φ .* — Nous dirons qu'une courbe est invariante quand elle est transformée en elle-même par chacune des transformations T_1, T_2, \dots, T_n .

Considérons une courbe A_1 de $|A|$ et désignons par A_2, A_3, \dots, A_n ses transformées au moyen de T_2, T_3, \dots, T_n . Ces $n-1$ courbes appartiendront à $|A|$.

A la courbe A_1 correspond sur la surface Φ une courbe Γ de genre effectif π . La courbe Γ étant birationnellement identique à A_1 , lorsqu'à deux points de A_1 correspondra un seul point de Φ , celui-ci sera double pour Γ . Cherchons le nombre de ces points.

Soient M, M' deux points de A_1 auxquels correspond un seul point de Φ . M et M' font donc partie d'un groupe de I_n et par suite, chacun d'eux est à l'intersection de A_1 avec une des courbes A_2, A_3, \dots, A_n . Supposons que M soit un des points d'intersection des courbes A_1, A_i ($i \leq n$). La transformation T_{n-i+2} change A_1 en A_{n-i+1} et A_i en A_1 . Le point M' doit donc être un point commun à A_1 et A_{n-i+1} .

A_1 a en commun avec A_2, A_3, \dots, A_n , $(n-1)(2\pi-2)$ points. Ces points se groupent en couples tels que MM' , par suite, la courbe Γ possède $(n-1)(\pi-1)$ points doubles.

La courbe Γ , de genre effectif π , possédant $(n-1)(\pi-1)$ points doubles, est de genre virtuel $\pi + (n-1)(\pi-1) = n(\pi-1) + 1$. Elle détermine sur Φ un système linéaire complet $|\Gamma|$, de degré $2n(\pi-1)$, et de genre et dimension $n(\pi-1) + 1$.

Le système $|\Gamma|$ est :

1° Simple : En effet, si Γ étant composé avec une involution, les courbes Γ passant par un point P passeraient, en conséquence, par un point Q (au moins). La courbe A_1 , passant par un des correspondants de P , passerait au moins par un des correspondants de Q , de sorte que le système $|A|$ ne serait pas simple, contre l'hypothèse.

2° Dépourvu de points-bases : En effet, les courbes Γ découpent sur l'une d'entre elles la série canonique complète, laquelle n'a pas de points fixes.

Ces deux points établis, rapportons projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace linéaire à $n(\pi - 1) + 1$ dimensions. On obtient dans cet espace un modèle projectif de Φ que nous désignerons encore par Φ , sous forme d'une surface simple, d'ordre $2n(\pi - 1)$, à sections hyperplanes Γ de genre $n(\pi - 1) + 1$.

Aux courbes Γ correspondent, sur la surface F , des courbes invariantes C , telles que

$$C \equiv A_1 + A_2 + \dots + A_n \equiv nA \quad (1).$$

Ces courbes C forment un système linéaire *incomplet*, $|C|$, composé avec I_n , de degré $2n^2(\pi - 1)$, de genre $n^2(\pi - 1) + 1$ et de dimension (égale à celle de $|\Gamma|$) $n(\pi - 1) + 1$.

5. Soit P_1 un point de coïncidence de l'involution I_n sur F . Ce point sera changé lui-même par un certain nombre $\nu \leq n$ de transformations génératrices de l'involution. Supposons que les transformations $T_2, T_3, T_4, \dots, T_\nu$, outre T_1 , changent P_1 en lui-même.

Les transformations $T_{\nu+1}, T_{\nu+2}, \dots, T_n$ transportent P_1 en des points P_2, P_3, \dots, P_μ qui sont évidemment également invariants pour T_2, T_3, \dots, T_ν . Les μ points P_1, P_2, \dots, P_μ forment évidemment un groupe de I_n , par suite, on doit avoir $\mu\nu = n$ (2).

Nous dirons que chacun des points P_1, P_2, \dots, P_μ est un *point de coïncidence ν -uple* de l'involution. Le point P' , correspondant sur Φ à P_1 , sera dit *point de diramation ν -uple*.

Les courbes C passant par le point P_1 , passent également par les points P_2, P_3, \dots, P_μ , puisque ce sont des courbes invariantes. Dans la suite, le système formé par ces courbes C sera désigné par $|C_1|$, et les sections hyperplanes de Φ qui correspondent aux C_1 seront désignées par Γ_1 . Les systèmes $|\Gamma_1|, |C_1|$ auront la dimension $n(\pi - 1)$.

Nous aurons aussi à considérer dans la suite des courbes C_1 se com-

(1) Ici apparaît la nécessité de l'hypothèse $\pi > 1$. On sait en effet que le système linéaire multiple d'un système linéaire de dimension supérieure à 1 est irréductible, mais que le multiple d'un faisceau peut être réductible.

(2) Deux des transformations $T_{\nu+1}, \dots, T_n$ peuvent évidemment transporter P_1 en un même point. Il y aura précisément ν de ces transformations transportant P_1 en P_i ($i = 2, \dots, \mu$).

portant d'une manière particulière en P_1, P_2, \dots, P_μ , manière que nous allons définir. Nous désignerons ces courbes C_1 particulières par C_2 . Les Γ_1 correspondantes aux C_2 seront désignées par Γ_2 .

Pour définir les C_2 , nous devons envisager de quelle manière agissent les transformations T_2, \dots, T_ν sur les points du domaine de chacun des points P_1, P_2, \dots, P_μ . Tout d'abord, remarquons que ces transformations se comporteront de la même manière dans les domaines de ces μ points, car ces domaines sont deux à deux birationnellement identiques.

Nous supposons qu'il passe par P_1 deux branches de courbes γ_1, γ_2 , tracées sur F et jouissant des propriétés suivantes :

a. Les transformations $T_1, T_2, \dots, T_\varepsilon$ ($\varepsilon \leq \nu$) changent γ_1 (ou γ_2) en d'autres branches de courbes ayant avec γ_1 (ou γ_2) un contact ρ -uple.

b. Les transformations $T_{\varepsilon+1}, T_{\varepsilon+2}, \dots, T_\nu$ ne changent ni l'une ni l'autre la branche γ_1 en la branche γ_2 .

Cela étant, la branche γ_1 sera transformée, par $T_{\varepsilon+1}, T_{\varepsilon+2}, \dots, T_\nu$ en un certain nombre de branches issues de P_1 . Si $\eta - 1$ est le nombre de ces branches, il faut nécessairement qu'on ait $\nu = \varepsilon\eta$.

Considérons une courbe quelconque de $|A|$, soit A'_1 , ayant un contact ρ -uple avec γ_1 . Désignons par A'_2, A'_3, \dots, A'_n les courbes en lesquelles T_2, \dots, T_n transforment A_1 . Ces n courbes vont se distribuer d'une façon particulière que nous allons chercher à établir.

Tout d'abord, les courbes $A'_1, A'_2, \dots, A'_\varepsilon$ auront entre elles un contact ρ -uple en P_1 . Les courbes $A'_{\varepsilon+1}, A'_{\varepsilon+2}, \dots, A'_\nu$ auront aussi entre elles un contact ρ -uple en P_1 . Les courbes $A'_{\nu+1}, A'_{\nu+2}, \dots, A'_{\nu+\varepsilon}$ auront un contact ρ -uple en P_2 si les transformations $T_{\nu+1}, T_{\nu+2}, \dots, T_{\nu+\varepsilon}$ changent P_1 en P_2 .

En général, supposons que les transformations

$$T_{i\nu+1}, T_{i\nu+2}, \dots, T_{i\nu+\nu} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \mu - 1)$$

soient les ν transformations changeant P_i en P_{i+1} et que les transformations

$$T_{k\varepsilon+1}, T_{k\varepsilon+2}, \dots, T_{k\varepsilon+\varepsilon} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \eta - 1)$$

soient les ε transformations changeant la branche γ_1 (ou γ_2) en une

même branche issue de P_{i+1} . Alors les courbes

$$A'_{i\nu+k\varepsilon+1}, A'_{i\nu+k\varepsilon+2}, \dots, A'_{i\nu+k\varepsilon+\varepsilon} \quad (i \leq \mu - 1, k \leq \eta - 1)$$

ont, en P_{i+1} , un contact ρ -uple.

On voit donc que, en additionnant ces n courbes A' , on obtient une courbe C_1 particulière, que nous désignerons par C'_1 ,

$$C'_1 = A'_1 + A'_2 + \dots + A'_n,$$

ayant en chacun des points P_1, P_2, \dots, P_μ un point ν -uple auquel sont infiniment voisins, dans n directions différentes, des points ε -uples, chaque direction comprenant $(\rho + 1)$ points ε -uples infiniment voisins successifs.

En considérant une courbe A'_i de $|A|$, passant par P_i et y ayant un contact d'ordre ρ avec γ_2 , on formerait une courbe C''_1 , du système $|C_1|$, possédant en chacun des points P_1, P_2, \dots, P_μ , la même singularité que C'_1 , les séries de points ε -uples étant dans des directions différentes.

Les courbes C'_1, C''_1 déterminent un système linéaire $|C_2|$, dont les courbes appartiennent à $|C_1|$, et ont en chacun des points P_1, P_2, \dots, P_μ des points ν -uples à tangentes variables. Les courbes C_2 sont donc de genre $n^2(-1) - \frac{n(\nu-1)}{2} + 1$, et le degré effectif de $|C_2|$ est égal à $2n^2(\pi - 1) - n\nu$.

A priori, on peut supposer que les systèmes $|C_1|, |C_2|$ peuvent parfois coïncider; c'est ce qui arrive dans un cas, celui où $n = 2$.

6. Nous allons actuellement, en nous servant de la formule de correspondance de Zeuthen, établir une propriété fondamentale des points de coïncidence.

Nous avons supposé plus haut que la transformation T_ε laissait invariants deux points infiniment voisins de P_1 . Nous en avons déduit qu'un nombre fini de points infiniment voisins de P_1 jouissaient de la même propriété.

Sur la manière dont les transformations $T_2, T_3, \dots, T_\varepsilon$ se comportent vis-à-vis d'un point *générique* infiniment voisin de P_1 , nous pouvons faire deux hypothèses :

1° Aucune de ces transformations ne laisse invariant un point *géné-
rique* infiniment voisin de P_1 ;

2° Les transformations T_2, T_3, \dots, T_τ ($\tau \leq \epsilon$) laissent invariants *tout
point* infiniment voisin de P_1 , et ce sont les seules jouissant de cette
propriété.

Il est d'ailleurs bien clair que les domaines des points P_2, P_3, \dots, P_μ
jouissent exactement des mêmes propriétés que celui de P_1 .

Plaçons-nous dans la première hypothèse et appliquons la formule
de Zeuthen ⁽¹⁾ à la correspondance $(1, n)$ existant entre une Γ_2 et la
 C_2 homologue. Cette correspondance détermine sur la C_2 une involu-
tion ne possédant aucun point de coïncidence. On a donc, en désignant
par ξ le degré virtuel de $|\Gamma_2|$,

$$n\xi = 2n^2(\pi - 1) - n(\nu - 1),$$

c'est-à-dire

$$\xi = 2n(\pi - 1) - (\nu - 1).$$

Mais sur une surface de genres 1, le degré virtuel d'un système
linéaire est pair. ξ est donc pair et par suite $\nu - 1$ est également pair.
La première hypothèse est donc acceptable que lorsque ν est impair.

Plaçons-nous dans la seconde hypothèse. La correspondance $(1, n)$
entre une Γ_2 et la C_2 homologue détermine actuellement sur la C_2
une involution ayant $\mu\nu = n$ coïncidences τ -uples. La formule de
Zeuthen donne donc, en désignant toujours par ξ le degré virtuel
de $|\Gamma_1|$,

$$n\xi + n(\tau - 1) = 2n^2(\pi - 1) - n(\nu - 1)$$

ou

$$\xi = 2n(\pi - 1) - \nu - \tau + 2.$$

Actuellement, $\tau + \nu$ est donc pair.

Le degré effectif de $|C_2|$ est égal à $2n^2(\pi - 1) - n\nu$. Celui de $|\Gamma_2|$
est donc égal à $2n(\pi - 1) - \nu$. Or, le degré virtuel d'un système
linéaire est au moins égal à son degré effectif, c'est-à-dire qu'on doit
avoir

$$\xi \geq 2n(\pi - 1) - \nu.$$

(1) La formule de Zeuthen, dans le cas d'une involution d'ordre n et de genre π sur
une courbe de genre p , indique qu'il y a $\delta = 2(p - 1) - 2n(\pi - 1)$ coïncidences.

Cela donne

$$\tau \leq 2.$$

Évidemment, on a $\tau > 1$, donc $\tau = 2$. On en conclut que ν est pair et que $|\Gamma_2|$ a ses degrés effectif et virtuel égaux.

En résumé :

Les points infiniment voisins d'un point de coïncidence d'ordre impair d'une involution de genres 1 sur une surface de genres 1, ne sont généralement invariants pour aucune transformation génératrice de l'involution, et réciproquement.

Les points infiniment voisins d'un point de coïncidence d'ordre pair d'une involution de genres 1 sur une surface de genres 1, sont généralement invariants pour une transformation de période 2, génératrice de l'involution, et réciproquement.

L'hypothèse de l'existence des branches γ_1, γ_2 n'est évidemment pas restrictive. Plaçons-nous dans la première hypothèse. L'involution I_n détermine, entre les points du domaine de P_1 , ou si l'on veut, entre les tangentes à F en P_1 , une involution rationnelle d'ordre n qui possède certainement des coïncidences. On aura ainsi les branches γ_1, γ_2 en considérant, par exemple, des courbes touchant les tangentes unies.

Si nous nous plaçons dans la seconde hypothèse, I_n détermine, dans le faisceau des tangentes à F en P_1 , une involution rationnelle d'ordre $\frac{n}{2}$, qui possède des coïncidences (on exclut le cas $n = 2$, où alors on aurait $\nu = 2, \varepsilon = 2$).

7. Pour terminer ce Chapitre nous allons construire une suite de surfaces de genres 1 dont les extrêmes seront F et Φ , et telle qu'entre deux surfaces consécutives il existe une correspondance rationnelle d'ordre premier.

Soit $n = p_1 p_2 \dots p_\alpha, p_1, p_2, \dots, p_\alpha$ étant des nombres premiers, distincts ou non, rangés dans un ordre convenable.

Prenons le théorème de M. Enriques sous sa seconde forme. Soit I_r ($r \leq n$) une involution cyclique d'ordre r , sur F , avec laquelle I_n est composée. Posons, pour fixer les idées, $r = p_1 p_2 \dots p_\beta$ ($\beta \leq \alpha$). L'invo-

lution I_r est engendrée par une transformation birationnelle T , de période r , de F en elle-même.

Soit Φ_β une surface représentative de l'involution I_r , de sorte qu'entre Φ_β et F on ait une correspondance $(1, r)$. A un groupe de I_r correspond sur Φ_β un groupe de $\frac{n}{r} = s$ points. L'ensemble de ces groupes forme une involution, dont Φ est évidemment une surface représentative, de sorte qu'entre Φ et Φ_β , on a une correspondance $(1, s)$,

Considérons la transformation $T^{p_2 p_3 \dots p_\beta}$. Elle est de période p_1 , car on a

$$(T^{p_2 p_3 \dots p_\beta})^{p_1} = T^r = 1.$$

Elle engendre donc sur F une involution d'ordre p_1 . Soit Φ_1 une surface représentative de cette involution. Entre Φ_1 et F , on a une correspondance $(1, p_1)$, entre Φ et Φ_1 , une correspondance $(1, p_2 p_3 \dots p_\beta)$.

Considérons la transformation $T^{p_3 \dots p_\beta}$. Elle est de période $p_1 p_2$ et engendre une involution d'ordre $p_1 p_2$. Soit Φ_2 une surface représentative de cette involution. Entre Φ_2 et F , on a une correspondance $(1, p_1 p_2)$, entre Φ_β et Φ_2 , une correspondance $(1, p_3 \dots p_\beta)$, entre Φ_2 et Φ_1 , une correspondance $(1, p_2)$.

En continuant de la sorte, nous construirons une série de surfaces $F, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_\beta$, telle que l'une d'elles, Φ_k , est en correspondance $(1, p_k)$ avec la précédente. Toutes ces surfaces sont évidemment de genres 1. En effet, leur irrégularité est moindre que celle de F , laquelle est égale à zéro. Leur genre géométrique et leur quadrigenre sont respectivement au plus égaux aux caractères correspondants de F et au moins égaux à ceux de Φ . On a donc, pour une surface de la suite, $p_\alpha = p_g = 1, P_\alpha = 1$.

On recommencera sur l'involution I_s , existant sur Φ_β le raisonnement fait sur I_r . Finalement, on aura construit une suite de $\alpha + 1$ surfaces de genres 1

$$\Phi_0 \equiv F, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k, \dots, \Phi_\alpha \equiv \Phi,$$

telles qu'entre deux surfaces consécutives de la suite, Φ_k et Φ_{k-1} , on ait une correspondance rationnelle d'ordre premier $(1, p_k)$.

Nous allons, dans le Chapitre suivant, démontrer que les nombres premiers p_k ne peuvent prendre que les valeurs 2 et 3. Pour cela, il nous suffira de montrer qu'une involution d'ordre premier impair et de genres 1 sur une surface de genres 1, a l'ordre 3.

CHAPITRE II.

INVOLUTIONS D'ORDRE PREMIER IMPAIR.

8. Soit, sur la surface F de genres 1, une involution I_p , d'ordre premier impair p et de genres 1. D'après le théorème fondamental de M. Enriques, cette involution est cyclique. Soit T la transformation birationnelle cyclique de période p , de F en elle-même, qui engendre I_p . En conservant nos notations du Chapitre précédent, nous pouvons dire que I_p est engendrée par p transformations cycliques

$$T_1 = 1, \quad T_2 = T, \quad T_3 = T^2, \quad \dots, \quad T_p = T^{p-1}.$$

Nous savons qu'il existe, sur la surface F , un système linéaire incomplet $|C|$, de degré $2p^2(\pi - 1)$, de genre $p^2(\pi - 1) + 1$, de dimension $p(\pi - 1) + 1$, composé de courbes invariantes C , c'est-à-dire composé avec I_p .

Comme surface représentative de l'involution I_p , nous pouvons prendre une surface Φ , de l'espace linéaire à $p(\pi - 1) + 1$ dimensions, d'ordre $2p(\pi - 1)$, et dont les sections hyperplanes Γ , de genre $p(\pi - 1) + 1$, correspondent aux courbes C .

Soit P un point de coïncidence de I_p . P est invariant pour l'une au moins des transformations T_2, T_3, \dots, T_p . Or, chacune de ces transformations a la période p , donc P est une coïncidence p -uple et est invariant pour toutes les transformations T_1, T_2, \dots, T_p .

D'après ce que nous avons vu, le point P étant un point de coïncidence d'ordre impair, les transformations T_2, \dots, T_p , c'est-à-dire T , ne laisse généralement pas invariant un point du domaine de P .

Considérons les tangentes en P à la surface F . Chacune d'elles a en commun avec F un point infiniment voisin de P , c'est-à-dire un point du domaine de P . On en conclut que la transformation T détermine,

dans le faisceau des tangentes à F en P , une involution (simplement infinie) cyclique d'ordre p . Il y a deux coïncidences (p -uples), donc il y a deux points du domaine de P qui sont laissés invariants par T .

Nous désignerons par t_1, t_2 les tangentes à F en P invariantes pour T . Les branches de courbes que nous avons tantôt désignées par γ_1, γ_2 sont des branches respectivement tangentes à t_1, t_2 . Actuellement, on a $\rho = 1$.

9. Considérons le système $|C_i|$, c'est-à-dire le système formé par les courbes C passant par P .

Supposons que les courbes C_i ont en P une certaine singularité abaissant le genre de i unités, de manière que le genre effectif d'une courbe C_i soit $p^2(\pi - 1) - i + 1$.

Considérons la correspondance $(p, 1)$ entre une courbe C_i et la section hyperplane correspondante Γ_i de Φ . Cette correspondance détermine sur la C_i une involution cyclique d'ordre p qui ne peut avoir des coïncidences que dans le voisinage de P . Soit δ le nombre de ces coïncidences. L'involution étant cyclique, δ est multiple de $p - 1$.

Soit P' le point de diramation de Φ correspondant à P .

Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance entre Γ_i et C_i , en supposant d'abord que P' est simple pour Φ . Nous obtenons

$$p[2p(\pi - 1)] + \delta = 2p^2(\pi - 1) - 2i,$$

c'est-à-dire $\delta = i = 0$. Cela est impossible, car puisque $i = 0$, les C_i ont un point simple en P et, par suite, δ devrait être supérieur à zéro.

P' est donc multiple pour Φ . On sait d'autre part que P' ne peut être que double et même ne peut être un point double tacnodal. L'existence pour Φ d'un point de multiplicité supérieure à deux, ou d'un point double tacnodal (ayant une droite double infiniment voisine) entraînerait en effet la présence de systèmes linéaires complets ayant le genre inférieur à la dimension, ce qui est impossible.

Nous voyons donc que P' est un point double de Φ . La formule de Zeuthen, appliquée dans cette hypothèse, donne

$$p[2p(\pi - 1) - 2] + \delta = 2p^2(\pi - 1) - 2i,$$

d'où

$$\delta + 2i = 2p.$$

δ est pair et, comme nous l'avons déjà dit, multiple de $p - 1$, donc deux cas sont possibles *a priori* :

$$(a) \quad \delta = p - 1, \quad i = \frac{1}{2}(p + 1),$$

$$(b) \quad \delta = 2(p - 1), \quad i = 1.$$

Plaçons-nous dans le premier cas. Il y a une seule coïncidence, donc il faut absolument que l'une des branches au moins des courbes C_1 touche soit t_1 , soit t_2 . Supposons qu'il y ait une branche des C_1 qui ne touche ni t_1 , ni t_2 . Considérons un point M s'approchant indéfiniment de P sur cette droite. Les $p - 1$ points qui, avec M , forment un groupe de I_p , s'approchent également de P , mais sur des branches différentes, car autrement, il y aurait une coïncidence de I_p en un point infiniment voisin de P dans une direction différente de celles de t_1, t_2 .

Par conséquent, dans l'hypothèse (a), si les C_1 ont une branche ne touchant ni t_1 , ni t_2 , elles ont en P une multiplicité au moins égale à $p + 1$. Mais alors, on aurait

$$i \geq \frac{1}{2}p(p + 1),$$

ce qui est impossible, car p est évidemment supérieur à l'unité.

On en conclut que si le cas (a) peut se présenter, toutes les branches des C_1 touchent l'une ou l'autre des droites t_1, t_2 . Supposons que les C_1 aient, en P , un point k -uple dont les tangentes seront donc toutes coïncidentes. Le système $|C_1|$ a la dimension $p(\pi - 1)$, par conséquent il existe deux systèmes linéaires de courbes C , de dimension $p(\pi - 1)$, ayant en P un point k -uple avec (au moins) un point k -uple infiniment voisin respectivement sur t_1, t_2 . Ces deux systèmes déterminent un système linéaire de courbes invariantes C de dimension $p(\pi - 1) + 1$, ayant en P un point k -uple ordinaire. Or cela est impossible, car $|C|$ a précisément la dimension $p(\pi - 1) + 1$, et ses courbes ne passent pas nécessairement par P . Le cas (a) ne peut donc se présenter.

Plaçons-nous dans le seul cas possible (b) : $\delta = 2(p - 1)$, $i = 1$. Alors, les courbes C_1 ont un point double en P et, comme il y a deux coïncidences, il faut nécessairement que les branches des courbes C_1 touchent les droites t_1, t_2 .

Le système $|C_1|$ a en P un point-base double dont les branches touchent respectivement les droites t_1, t_2 .

On peut conclure de cette propriété que le point P' ne peut être un point double uniplanaire de Φ .

En effet, si P' était uniplanaire, les courbes Γ_1 auraient en P' un point de rebroussement. Or, cela n'a pas lieu en général, car aux points infiniment voisins de P sur les branches d'une C_1 correspondent deux points distincts de Φ , et ces points doivent être situés sur des branches différentes de la Γ_1 correspondante en P'.

10. Considérons les courbes C_1 passant par un point M quelconque de la surface F, et supposons que ce point M s'approche de P suivant une courbe non tangente à t_1 ni à t_2 . Désignons par C'_2 les courbes C_1 qui satisfont à cette condition. Les courbes C'_2 forment un système linéaire $|C'_2|$ de dimension $p(\pi - 1) - 1$ et ont, en P, une multiplicité supérieure à 2.

Reprenons la considération du point M s'approchant de P sur une courbe non tangente à t_1 ni à t_2 . Les $p - 1$ points qui, avec M, font partie d'un groupe de I_p , s'approcheront aussi de P, et cela sur des branches différentes des courbes C'_2 , car il ne peut y avoir coïncidence en un point quelconque du domaine de P. On en conclut que les courbes C'_2 ont, k étant un entier positif, kp branches non tangentes ni à t_1 , ni à t_2 , en P.

Cela étant établi, on peut faire trois hypothèses sur la singularité des C'_2 en P :

a. Les C'_2 ont en P un point $(kp + 2)$ -uple dont deux tangentes sont fixes et se confondent avec t_1, t_2 et dont kp tangentes sont variables.

b. Les C'_2 ont en P un point $(kp + 1)$ -uple dont une tangente est l'une des droites t_1, t_2 et dont kp tangentes sont variables.

c. Les C'_2 ont en P un point kp -uple à tangentes variables.

Remarquons que le point P' étant double pour Φ , et les courbes Γ'_2 ,

sections hyperplanes de Φ correspondant aux C'_2 , formant un système linéaire, ces courbes Γ'_2 ont au plus deux branches en P' . Or, dans les hypothèses a, b, c , les Γ'_2 auraient respectivement $k + 2, k + 1$ et k branches en P' . D'autre part, comme nous l'avons fait remarquer, k est positif (non nul), donc la première hypothèse est inadmissible. Dans l'hypothèse b , on a $k = 1$, et dans l'hypothèse c , $k = 1$ ou 2.

Désignons par ξ' le degré virtuel de $|\Gamma'_2|$ et appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance existant entre une Γ'_2 et la C'_2 homologue.

Dans l'hypothèse b , il y a une coïncidence p -uple, donc on a

$$p\xi' + p - 1 = 2p^2(\pi - 1) - p(p + 1).$$

Pour que l'hypothèse b soit acceptable, il faudrait donc que, p étant supérieur à 1, $p - 1$ soit divisible par p . Cela est impossible, donc l'hypothèse b , de même que l'hypothèse a , doit être rejetée.

Dans l'hypothèse c , il n'y a pas de coïncidence, donc on a

$$p\xi' = 2p^2(\pi - 1) - kp(kp - 1) \quad (k \leq 2),$$

c'est-à-dire

$$\xi' = 2p(\pi - 1) - k(kp - 1).$$

Le degré effectif de $|C'_2|$ est égal à $2p^2(\pi - 1) - k^2p^2$, donc le degré effectif de $|\Gamma'_2|$ est $2p(\pi - 1) - k^2p$. Le degré virtuel de $|\Gamma'_2|$ surpasse donc le degré effectif de $k (> 0)$ unités, c'est-à-dire que $|\Gamma'_2|$ a k points-bases assignés. Or la dimension d'un système linéaire de degré effectif ξ' étant $\frac{1}{2}\xi' + 1$, c'est-à-dire $p(\pi - 1) - \frac{1}{2}k(kp - 1) + 1$, celle de $|\Gamma'_2|$ sera d'au moins une unité moindre, c'est-à-dire qu'elle sera au plus égale à $p(\pi - 1) - \frac{1}{2}k(kp - 1)$. Mais les systèmes $|C'_2|$ et $|\Gamma'_2|$ ont la même dimension $p(\pi - 1) - 1$. On doit donc avoir

$$p(\pi - 1) - 1 \leq p(\pi - 1) - \frac{1}{2}k(kp - 1),$$

c'est-à-dire

$$k(kp - 1) \leq 2.$$

Il faut nécessairement que l'on ait $k = 1, p = 3$.

Les courbes C'_2 sont donc des courbes ayant un point triple à tan-

gentes variables. Elles coïncident donc avec le système $|C_2|$ défini au Chapitre I. Les courbes Γ'_2 coïncident avec les Γ_2 . Elles ont, en P' , un point de rebroussement ordinaire, car leur genre est d'une unité inférieur à celui des Γ et qu'au groupe de I_3 infiniment voisin de P sur une C_2 correspond un seul point infiniment voisin de P' sur Φ .

Les Γ_2 forment un système linéaire $|\Gamma_2|$ de dimension $3(\pi - 1) - 1$, donc le point P' est un point biplanaire ordinaire pour Φ .

11. Nous allons actuellement rechercher le nombre des points de diramation sur Φ .

Pour cela, nous calculerons l'invariant de Zeuthen-Segre I de Φ et de F et nous comparerons les résultats obtenus. Rappelons que la valeur de cet invariant est fournie, d'une part, par la formule

$$I = 12\rho_a + 9 - \rho^{(1)}$$

(donc, dans notre cas, $I = 20$) et, d'autre part, par la formule

$$I = \Delta - \sigma - 4\rho,$$

où σ est le degré d'un faisceau linéaire de courbes, ρ le genre et Δ le nombre de courbes de ce faisceau ayant un point double.

Considérons sur Φ un faisceau de courbes Γ et désignons par m la classe effective de cette surface. Il y aura donc m courbes Γ dont les hyperplans toucheront Φ , c'est-à-dire m courbes Γ ayant un point double en un point simple de Φ . Si nous nous rappelons, d'autre part, qu'un point double biplanaire ordinaire abaisse la classe d'une surface de trois unités, nous aurons, pour l'invariant de Zeuthen-Segre de Φ ,

$$I = 20 = 3x + m - 6 \times 3(\pi - 1) - 4,$$

x étant le nombre de points de diramation sur Φ .

Considérons sur F le faisceau de courbes C correspondant au faisceau de Γ pris sur Φ . A une Γ , ayant un point double en un point simple de Φ , correspond une C ayant trois points doubles. De plus, les C passant par un point de coïncidence y acquièrent un point double ordinaire (courbes C_1). On a donc, pour l'invariant de Zeuthen-Segre

de F,

$$I = 20 = x + 3m - 6 \times 9(\pi - 1) - 4.$$

Entre ces deux équations, éliminons m . π disparaît également et l'on obtient $x = 6$.

Nous avons donc les théorèmes suivants :

Une involution d'ordre premier impair et de genres 1 sur une surface de genres 1 est nécessairement d'ordre 3. Elle possède six points de coïncidence et l'on peut prendre, comme surface représentative de l'involution, une surface normale (1) possédant, en un point de diramation, un point double biplanaire ordinaire.

Si l'on se rapporte aux dernières lignes du Chapitre précédent, on voit que :

L'ordre n d'une involution de genres 1 sur une surface de genres 1 n'admet comme facteurs premiers que 2 et 3.

Pour désigner les involutions, nous emploierons dorénavant la seconde notation. Une involution d'ordre $n = 2^\alpha 3^\beta$ sera donc représentée par le symbole $I_{\alpha\beta}$.

CHAPITRE III.

INVOLUTIONS D'ORDRE 2^α .

I. — Involutions cycliques.

12. Nous allons étudier, dans ce Chapitre, les involutions d'ordre 2^α . Nous démontrerons que α est au plus égal à 3. Nous commencerons par considérer les involutions cycliques et nous trouverons que, dans ce cas, on a $\alpha \leq 2$.

Soit, sur la surface F de genres 1, une involution cyclique $I_{\alpha 0}$,

(1) C'est-à-dire une surface qui n'est projection d'aucune surface du même ordre appartenant à un espace à un plus grand nombre de dimensions. Actuellement, une surface normale est une surface d'ordre $2k - 2$, de S_k , à sections hyperplanes de genre k .

d'ordre 2^α et de genres 1. Il existe donc une transformation birationnelle T , de période 2^α , de F en elle-même, qui engendre I_{α_0} . En d'autres termes, I_{α_0} est engendrée par les $n = 2^\alpha$ transformations birationnelles

$$T_1 = I, \quad T_2 = T^{n-1}, \quad T_3 = T^{n-2}, \quad \dots, \quad T_n = T.$$

Il sera commode, dans la suite, d'introduire la notation

$$\Theta_h = T^{2^h}.$$

La transformation birationnelle Θ_h est cyclique de période $2^{\alpha-h}$, car on a

$$\Theta_h^{2^{\alpha-h}} = (T^{2^h})^{2^{\alpha-h}} = T^{2^\alpha} = I.$$

Nous avons établi, au Chapitre I, que l'on peut construire, sur la surface F , un système linéaire incomplet $|C|$, composé de courbes invariantes C , de degré $2 \cdot 2^{2^\alpha}(\pi - 1)$, de genre $2^{2^\alpha}(\pi - 1) + 1$ et de dimension $2^\alpha(\pi - 1) + 1$. De plus, comme surface représentative de l'involution I_{α_0} , on peut prendre une surface Φ , d'ordre $2 \cdot 2^\alpha(\pi - 1)$, située dans un espace linéaire à $2^\alpha(\pi - 1) + 1$ dimensions, dont les sections hyperplanes Γ , de genre $2^\alpha(\pi - 1) + 1$, correspondent aux courbes C .

Soit P_i un point de coïncidence de l'involution I_{α_0} et soit P' le point de diramation correspondant sur Φ . Soit r le plus petit nombre positif, non nul, tel que T^r change P_i en lui-même. Il faut nécessairement que r soit une puissance de 2. Pour le démontrer, il nous suffira de faire voir que si r n'est pas une puissance de 2, il existe un entier positif non nul r' inférieur à r tel que $T^{r'}$ change P_i en lui-même. Soit, en effet, t le plus petit entier tel que

$$tr > 2^\alpha.$$

Posons $r' = tr - 2^\alpha > 0$. T^r change P_i en lui-même, donc $T^{tr} = T^{2^\alpha+r'}$ change aussi P_i en lui-même. $T^{r'}$ jouit donc de la même propriété. Or r' est inférieur à r , donc r n'est pas le plus petit entier tel que T^r laisse P_i invariant. r est donc une puissance de 2. Nous poserons $r = 2^h$. Le point P_i sera alors un point de coïncidence $2^{\alpha-h}$ -uple. Ce point est invariant pour les transformations $\Theta_h, \Theta_{h+1}, \dots, \Theta_{\alpha-1}$.

Nous savons, d'après ce que nous avons vu au Chapitre I, que l'existence de P_1 entraîne celle de $r - 1 = 2^h - 1$ autres points de coïncidence $2^{\alpha-h}$ -uple P_2, P_3, \dots, P_r . Les r points P_1, P_2, \dots, P_r forment un groupe de I_{α_0} .

De plus, la transformation $\Theta_{\alpha-1}$ laisse invariant tout point du domaine du premier ordre de P_1 , ou de P_2, \dots , ou de P_r , et c'est la seule des transformations $\Theta_h, \Theta_{h+1}, \dots, \Theta_{\alpha-1}$ jouissant de cette propriété.

La transformation cyclique Θ_h , d'ordre $2^{\alpha-h}$, détermine donc une involution cyclique d'ordre $2^{\alpha-h-1}$ dans le domaine du premier ordre de P_1 (ou de P_2, \dots, P_r), c'est-à-dire dans le faisceau des tangentes à F en P_1 (ou P_2, \dots, P_r). Si $h < \alpha - 1$, il y a deux coïncidences, c'est-à-dire deux directions t_1, t_2 , issues de P_1 (et des directions homologues issues de P_2, \dots, P_r) que Θ_h laisse invariante.

Rappelons encore que l'on peut construire un système linéaire $|C_2|$, compris dans $|C|$, dont les courbes ont en chacun des points P_1, P_2, \dots, P_r un point $2^{\alpha-h}$ -uple à tangentes variables.

13. Considérons les courbes C passant par le point P_1 et par suite par les points P_2, \dots, P_r . Désignons ces courbes par C_i et par Γ_i les sections hyperplanes (passant par P') de Φ qui leur correspondent.

Les courbes C_i forment un système linéaire $|C_i|$ de dimension $2^\alpha(\pi - 1)$. Supposons qu'en chacun des points P_1, P_2, \dots, P_r ces courbes C_i acquièrent une singularité abaissant le genre de i unités, de telle sorte que le genre des courbes C_i est égal à $2^\alpha(\pi - 1) - 2^h i + 1$.

La correspondance $(1, 2^\alpha)$ existant entre une courbe Γ_i et la C_i homologue détermine sur celle-ci une involution d'ordre 2^α possédant, dans le voisinage de chacun des points P_1, P_2, \dots, P_r , un certain nombre δ de coïncidences.

Appliquons la formule de Zeuthen à cette correspondance. Si P' est simple pour Φ , nous trouvons

$$2^\alpha[2 \cdot 2^\alpha(\pi - 1)] + 2^h \delta = 2 \cdot 2^{2\alpha}(\pi - 1) - 2^{h+1} i,$$

ce qui entraîne $i = \delta = 0$, ce qui est absurde.

Si P' est double pour Φ , on a

$$2^\alpha[2 \cdot 2^\alpha(\pi - 1) - 2] + 2^h \delta = 2 \cdot 2^{2\alpha}(\pi - 1) - 2^{h+1} i,$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad \delta + 2i = 2^{\alpha-h+1}.$$

Nous avons déjà vu que Φ ne peut avoir que des points doubles non tacnodaux, donc c'est le seul cas qui puisse se présenter.

Supposons que les C_i aient en P_i une branche à tangente variable. Alors, elle en a nécessairement $2^{\alpha-h-1} - 1$ autres, car autrement, on aurait des coïncidences plus que doubles en des points de l'entourage de P_i non situés sur t_1 ou t_2 . De cela, il résulte que nous pouvons faire, sur la singularité de C_i en P_i , trois hypothèses :

a. Les C_i ont en P_1, P_2, \dots, P_r un point $j \cdot 2^{\alpha-h-1}$ -uple à tangentes variables.

b. Les C_i ont en P_1, P_2, \dots, P_r un point $(j \cdot 2^{\alpha-h-1} + 1)$ -uple dont $j \cdot 2^{\alpha-h-1}$ tangentes sont variables, l'autre étant soit t_1 , soit t_2 .

c. Les C_i ont en P_1, P_2, \dots, P_r un point $(j \cdot 2^{\alpha-h-1} + 2)$ -uple dont deux tangentes sont t_1, t_2 et dont les autres tangentes sont variables.

Les deux dernières hypothèses supposent $h < \alpha - 1$.

Les Γ_i ont au plus deux branches distinctes au point double P' , donc on a $j \leq 2$, $j \leq 1$, $j = 0$ respectivement dans les hypothèses *a*, *b*, *c*.

Plaçons-nous dans l'hypothèse *a*. On a

$$\delta = j \cdot 2^{\alpha-h-1}$$

et

$$i = \frac{1}{2} j \cdot 2^{\alpha-h-1} (j \cdot 2^{\alpha-h-1} - 1).$$

La formule (1) devient

$$j^2 \cdot 2^{2\alpha-2h-2} = 2^{\alpha-h+1},$$

c'est-à-dire

$$j^2 = 2^{h+3-\alpha}.$$

Si $j = 1$, on a $h = \alpha - 3$; si $j = 2$, $h = \alpha - 1$.

Dans l'hypothèse *b*, on a ($h < \alpha - 1$)

$$\delta = j \cdot 2^{\alpha-h-1} + 2^{\alpha-h} - 1, \quad i = \frac{1}{2} j \cdot 2^{\alpha-h-1} (j \cdot 2^{\alpha-h-1} + 1).$$

La formule (1) donne donc

$$j^2 \cdot 2^{2\alpha-2h-2} + j \cdot 2^{\alpha-h} = 2^{\alpha-h+1} - 2^{\alpha-h} + 1,$$

ce qui n'est possible que pour $h = \alpha - 1$, cas exclus.

Dans l'hypothèse c , on a

$$(h < \alpha - 1), \quad \delta = 2(2^{\alpha-h} - 1), \quad i = 1,$$

et la formule (1) est vérifiée identiquement.

Trois cas peuvent donc se présenter :

1° P_1 est un point de coïncidence octuple où les C_1 ont un point quadruple à tangentes variables.

2° P_1 est un point de coïncidence double où les C_1 ont un point double à tangentes variables.

3° P_1 est un point de coïncidence $2^{\alpha-h}$ -uple ($h < \alpha - 1$), où les C_1 ont un point double à tangentes fixes t_1, t_2 .

Nous allons examiner séparément ces cas; nous verrons que le premier ne peut se présenter et que le troisième exige $h = \alpha - 2$.

14. Soit P_1 un point de coïncidence octuple. Les courbes C_1 ont en ce point une multiplicité d'ordre 4. Les courbes Γ_1 ont en P' un point double à tangentes unies, c'est-à-dire un point de rebroussement, car au seul groupe de I_{20} infiniment voisin du groupe composé de P_1, P_2, \dots, P_r , sur une C_1 , ne correspond qu'un point sur la Γ_1 homologue. P' est donc un point uniplanaire (non tacnodal) de Φ .

Considérons les C_1 qui touchent en P_1 deux directions différentes de t_1, t_2 et désignons ces courbes par C'_2 . Les C'_2 forment un système $|C'_2|$ de dimension $2^\alpha(\pi - 1) - 2$ et elles ont, en P_1, P_2, \dots, P_r , des points multiples :

1° A tangentes variables par construction ;

2° D'ordre supérieur à 4 par construction ;

3° D'ordre multiple de 4, car autrement on aurait en un point *quelconque* du domaine de P_1 , par exemple, une coïncidence plus que double, ce qui est impossible ;

4° D'ordre 8, car les courbes Γ'_2 qui correspondent sur Φ aux C'_2 ne peuvent avoir plus de deux branches au point double P' .

On voit donc que les courbes C'_2 coïncident avec les courbes C_2 et, par suite, les Γ'_2 avec les Γ_2 .

Les courbes Γ_2 ont, en P' , un point double ordinaire à tangentes

variables. Or, nous avons vu que P' était uniplanaire pour Φ et que $|\Gamma_2|$ avait la dimension $2^\alpha(\pi - 1) - 2$ de trois unités inférieure à celle de $|\Gamma|$. Le point P' est donc un point uniplanaire ordinaire de Φ .

Dans le domaine du premier ordre d'un point double uniplanaire ordinaire se trouvent, dans trois directions différentes, trois points doubles ordinaires (1). Considérons les hyperplans passant par une de ces directions. Ils découpent sur Φ un système de courbes que nous désignerons par $|C'_i|$, de degré $2 \cdot 2^\alpha(\pi - 1) - 4$, de genre $2^\alpha(\pi - 1) - 1$ et de dimension $2^\alpha(\pi - 1) - 1$. Désignons par C'_i les courbes qui leur correspondent sur F . Les C'_i ont en P_i un point au moins quadruple auquel peuvent d'ailleurs être infiniment voisins des points multiples. Il en est de même en P_2, P_3, \dots, P_r . Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance entre une Γ'_i et une C'_i homologues, en désignant par i' l'abaissement du genre d'une C'_i en P_i , par δ' les coïncidences situées sur une C'_i dans le domaine de P_i . On trouve

$$2^\alpha[2 \cdot 2^\alpha(\pi - 1) - 4] + 2^{\alpha-3}\delta' = 2 \cdot 2^{2\alpha}(\pi - 1) - 2 \cdot 2^{\alpha-3}i',$$

c'est-à-dire

$$\delta' + 2i' = 32.$$

On peut faire trois hypothèses sur la singularité des C'_i en P_i :

1° Les C'_i ont en P_i un point sextuple dont deux tangentes sont t_1, t_2 . On a alors $i' = 15$, $\delta' = 2$, ce qui est absurde.

2° Les C'_i ont en P_i un point quadruple auquel est infiniment voisin sur t_1 ou t_2 un point quadruple. On a $i' = 12$, $\delta' = 8$. Cela est absurde, car on devrait avoir $\delta' = 4 \times 7$.

3° Les C'_i ont en P_i un point quadruple à deux branches sur chacune desquelles se trouvent k points doubles infiniment voisins successifs. On a alors $i' = 6 + 2k$, $\delta' = 26 - 2k$. Les deux branches des C'_i ne peuvent être tangentes respectivement à t_1, t_2 , car alors on aurait $\delta' = 4 \times 7$. Elles ne peuvent non plus ne pas être tangentes à ces directions, car alors il faudrait que les C'_i aient quatre branches en P_i (transformées l'une de l'autre, dans le domaine du premier ordre de P_i , au moyen de $\Theta_{\alpha-3}$).

(1) SEGRE, *Sulla composizione dei punti singolari delle superficie algebriche* (*Annali di Matematica*, 2^e série, t. XXV, 1896).

De tout ceci on conclut qu'il ne peut exister de point de diramation octuple du modèle assigné dans ce numéro, lorsque I_{α} est cyclique.

15. Soit P_1 un point de coïncidence double, les C_1 passant par P_1 y ayant un point double à tangentes variables.

A une courbe C_1 correspond sur Φ une section hyperplane Γ_1 ayant en P' un point double ordinaire, car à chaque point infiniment voisin de P_1 sur l'une des branches d'une C_1 correspond un point infiniment voisin de P' situé sur la Γ_1 homologue. On obtient ainsi, puisque P_1 est double pour les C_1 , deux points infiniment voisins de P' , situés dans des directions différentes, sur chaque Γ_1 . Ces points sont d'ailleurs variables avec la Γ_1 , de sorte que le point P' est nécessairement un point conique pour Φ .

Un point de diramation double est un point double conique de Φ . Les C passant par un point de coïncidence double acquièrent un point double ordinaire.

16. Soit enfin P_1 un point de coïncidence $2^{\alpha-h}$ -uple ($h < \alpha - 1$) tel que les courbes C_1 ont, en ce point, un point double à tangentes fixes t_1, t_2 .

Le degré effectif du système $|\Gamma_1|$ est égal à son degré virtuel $2 \cdot 2^{\alpha}(\pi - 1) - 2$. Le degré effectif de $|C_1|$ est donc $2 \cdot 2^{2\alpha}(\pi - 1) - 2^{2\alpha+1}$. On en conclut qu'en chacun des $r = 2^h$ points P_1, P_2, \dots, P_r , il y a 2^{h+1} intersections des courbes C_1 absorbées. Or, ces points sont doubles pour les courbes, il faut donc que les branches de C_1 en ces points aient respectivement des contacts $2(2^{h-1} - 1)$ ponctuels. En d'autres termes, sur chacune des branches des C_1 en P_1 (ou P_2 , ou P_3, \dots, P_r), il y a $2(2^{h-1} - 1)$ points-bases simples infiniment voisins successifs.

Considérons les C_1 passant par un point M quelconque de F et supposons que ce point M s'avoisine indéfiniment de P_1 suivant une direction différente de t_1 et t_2 . Désignons par C'_2 les courbes C_1 répondant à cette condition, par Γ'_2 les sections hyperplanes correspondantes de Φ . Les systèmes $|\Gamma'_2|, |C'_2|$ ont la dimension $2^{\alpha}(\pi - 1) - 1$.

En répétant un raisonnement déjà fait plusieurs fois, on voit que les branches variables des courbes C'_2 , qui ont en P_1, P_2, \dots, P_r une multiplicité supérieure à 2, sont, en chacun de ces points, au nombre

de $j \cdot 2^{\alpha-h-1}$. Il se pourrait de plus que les courbes C'_2 aient k branches tangentes à t_1 ou t_2 , ou à chacune de ces deux directions. En se souvenant que les Γ'_2 ont au plus deux branches en P' , on voit que trois hypothèses peuvent être faites concernant la singularité des C'_2 en chacun des points P_1, P_2, \dots, P_r .

1° Les C'_2 ont des points $j \cdot 2^{\alpha-h-1}$ -uples ($j = 1$ ou 2) à tangentes variables.

2° Les C'_2 ont des points $(j \cdot 2^{\alpha-h-1} + k)$ -uples ($j \leq 1$) ayant $j \cdot 2^{\alpha-h-1}$ tangentes variables et k tangentes fixes unies (en t_1 ou t_2 s'il s'agit de P_1 , en la direction conjuguée s'il s'agit d'un autre point). La branche à tangente fixe possède alors $2(2^{h-1} - 1)$ points k -uples successifs.

3° Les C'_2 ont des points k -uples ayant dans deux directions, respectivement $2(2^{h-1} - 1)$ points k -uples infiniment voisins successifs (ces directions sont tangentes à t_1, t_2 s'il s'agit du point P_1 , aux directions conjuguées s'il s'agit des autres points).

Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance $(1, 2^\alpha)$ liant une Γ'_2 et la C'_2 homologue. Pour cela, désignons par ξ' le degré virtuel de $|\Gamma'_2|$, par i l'abaissement du genre produit par la singularité d'une C'_2 en un des points P_1, P_2, \dots, P_r , par δ le nombre des coïncidences sur une C'_2 dans le voisinage d'un de ces points. On trouve

$$2^\alpha \xi' + 2^h \delta = 2 \cdot 2^{2\alpha} (\pi - 1) - 2^{h+1} i,$$

c'est-à-dire

$$\xi' = 2 \cdot 2^\alpha (\pi - 1) - \frac{1}{2^{\alpha-h}} (\delta + 2i).$$

Mais $|\Gamma'_2|$ ayant la dimension $2^\alpha (\pi - 1) - 1$, son degré virtuel est au moins égal à $2 \cdot 2^\alpha (\pi - 1) - 4$. On a donc

$$(1) \quad \delta + 2i \leq 2^{\alpha-h+2}.$$

Plaçons-nous dans la première hypothèse. Nous avons ($j = 1$ ou 2)

$$\delta = j \cdot 2^{\alpha-h-1}, \quad i = \frac{1}{2} j \cdot 2^{\alpha-h-1} (j \cdot 2^{\alpha-h-1} - 1).$$

L'inégalité (1) devient donc

$$j^2 \cdot 2^{\alpha-h-1} \leq 1.$$

Si $j = 1$, on a $h = \alpha - 4$; si $j = 2$, $h = \alpha - 2$.

Plaçons-nous dans la seconde hypothèse. On a ($j = 0$ ou 1)

$$\delta = j \cdot 2^{\alpha-h-1} + k(2^{\alpha-h} - 1),$$

$$i = \frac{1}{2}(j \cdot 2^{\alpha-h-1} + k)(j \cdot 2^{\alpha-h-1} + k - 1) + 2(2^{h-1} - 1) \frac{k(k-1)}{2}.$$

L'inégalité (1) devient

$$(2) \quad j^2 \cdot 2^{\alpha-2h-2} + k \cdot 2^{\alpha-h}(j+1) + k(k-1)(2^h-1) \leq 2^{\alpha-h+2}.$$

De la valeur trouvée plus haut pour ξ' il ressort que le premier membre de l'inégalité (1) est multiple de $2^{\alpha-h}$. On en déduit que $k(k-1)$ est multiple de $2^{\alpha-h}$, c'est-à-dire que k ou $k-1$ est multiple de $2^{\alpha-h}$.

Supposons $k = t \cdot 2^{\alpha-h}$ et $j = 0$. On a

$$t \cdot 2^{\alpha-h} + t(t \cdot 2^{\alpha-h} - 1)(2^h - 1) \leq 4,$$

ce qui est incompatible avec $h < \alpha - 1$.

De même, si l'on suppose $k = t \cdot 2^{\alpha-h} + 1$ et $j = 0$, on trouve

$$t \cdot 2^{\alpha-h} + 1 + t(t \cdot 2^{\alpha-h} + 1)(2^h - 1) \leq 4,$$

inégalité incompatible avec $h < \alpha - 1$.

Si $j = 1$, l'inégalité (2) sera *a fortiori* impossible. La seconde hypothèse est donc inacceptable.

Passons enfin à la troisième hypothèse. On a

$$\delta = 2(2^{\alpha-h} - 1)k, \quad i = \frac{2k(2k-1)}{2} + 4(2^{h-1} - 1) \frac{k(k-1)}{2}.$$

L'inégalité (1) donne actuellement

$$k \cdot 2^{\alpha-h+1} + 2^{h+1}k(k-1) \leq 2^{\alpha-h+2}.$$

Or, k est au moins égal à 2, sans quoi $|C'_2|$ coïnciderait avec $|C_1|$, ce qui est absurde, puisque ces systèmes n'ont pas la même dimension. L'inégalité précédente est donc impossible et la troisième hypothèse est donc à rejeter également.

Nous voyons donc que seule la première hypothèse est acceptable lorsque :

1° On a $h = \alpha - 4$ et que les C'_2 ont, en P_1, P_2, \dots, P_r des points octuples à tangentes variables; ou lorsque :

2° On a $h = \alpha - 2$ et que les C'_2 ont, en P_1, P_2, \dots, P_r , des points quadruples à tangentes variables. Dans ce dernier cas, on constatera que les C'_2 coïncident avec les C_2 .

En examinant de plus près la question, on peut voir que le 1° doit encore être écarté. Remarquons d'abord que dans ce cas il y a un seul groupe de I_{α_0} infiniment voisin du groupe formé par P_1, P_2, \dots, P_r sur une C'_2 , par suite, les Γ'_2 ont en P' , un point de rebroussement. Le point P' serait donc un point double biplanaire ordinaire de Φ (car $|\Gamma'_2|$ a la dimension de deux unités inférieure à celle de $|\Gamma|$). D'autre part le degré virtuel de $|\Gamma'_2|$ est, nous l'avons calculé,

$$\xi' = 2 \cdot 2^\alpha (\pi - 1) - 4.$$

Le degré effectif de $|C'_2|$ est égal à $2 \cdot 2^{2\alpha} (\pi - 1) - 2^{\alpha-4} \cdot 8^2$, donc celui de $|\Gamma'_2|$ est $2 \cdot 2^\alpha (\pi - 1) - 4$, c'est-à-dire ξ' . On en conclut que les Γ'_2 ont un tacnode en P' , c'est-à-dire que P' est, pour Φ , un point double biplanaire ayant, dans son domaine du premier ordre, un second point double. La contradiction à laquelle nous sommes conduit prouve que le 1° ne peut se présenter.

Ainsi donc, si $h < \alpha - 1$, il ne peut se présenter qu'un seul cas, celui de coïncidence quadruple ($h = \alpha - 2$).

Dans ce cas, les C_1 ont, en P_1 , un point double ordinaire dont les branches s'osculent. La même singularité se présente évidemment en P_2, P_3, \dots, P_r ($r = 2^{\alpha-2}$). Les C_1 forment un système linéaire de dimension $2^\alpha (\pi - 1)$.

Les C_2 forment un système $|C_2|$ de dimension $2^\alpha (\pi - 1) - 1$. Ces courbes ont en P_1 (et en P_2, \dots, P_r) un point quadruple à tangentes variables. On en conclut que les Γ_2 ont en P' , deux branches distinctes, mais seulement dans le domaine du second ordre de ce point. En effet, un calcul simple montre que $|\Gamma_2|$ a les degrés virtuel et effectif égaux à $\xi' = 2 \cdot 2^\alpha (\pi - 1) - 4$, c'est-à-dire que les Γ_2 ont un tacnode en P' . Le point P' est donc, pour Φ , un point biplanaire ayant un point double dans un domaine du premier ordre. En résumé :

Une involution cyclique d'ordre 2^α ne possède que des coïncidences

doubles et quadruples. En un point de diramation quadruple, Φ a un point double biplanaire ayant, dans son domaine du premier ordre, un point double conique. Les courbes C passant par un point de coïncidence quadruple y acquièrent un point double ordinaire.

17. Soient x_1 le nombre de points de diramation double, x_2 celui des points de diramation quadruple de l'involution I_{α_0} sur Φ .

Calculons l'invariant de Zeuthen-Segre de Φ au moyen d'un faisceau de Γ . En désignant par m la classe effective de Φ et en se rappelant que la présence d'un point double biplanaire du genre de ceux rencontrés ici abaisse la classe d'une surface de quatre unités, on a

$$I = 20 = m + 2x_1 + 4x_2 - 6 \cdot 2^\alpha (\pi - 1) - 4.$$

Le calcul de l'invariant de Zeuthen-Segre de F se fait en considérant un faisceau de courbes C et en se rappelant qu'une C passant par un point de coïncidence y acquiert un point double (ainsi qu'aux points de coïncidence complétant le groupe de I_{α_0}). On trouve

$$I = 20 = 2^\alpha m + 2^{\alpha-1} x_1 + 2^{\alpha-2} x_2 - 6 \cdot 2^{2\alpha} (\pi - 1) - 4.$$

L'élimination de m entre ces formules donne

$$(1) \quad 2^{\alpha-1} x_1 + 5 \cdot 2^{\alpha-2} x_2 = 8(2^\alpha - 1).$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, on trouve ($x_2 = 0$) $x_1 = 8$, c'est-à-dire qu'une involution d'ordre 2 possède huit points de coïncidence. Or, considérons l'involution d'ordre 2 engendrée sur F pour $\Theta_{\alpha-1}$. Cette involution possède une coïncidence en chaque point de coïncidence double ou quadruple de I_{α_0} . On a donc

$$(2) \quad 2^{\alpha-1} x_1 + 2^{\alpha-2} x_2 = 8.$$

Des formules (1) et (2) on déduit

$$x_1 = \frac{4}{2^{\alpha-1}} (3 - 2^{\alpha-1}),$$

$$x_2 = \frac{8}{2^{\alpha-1}} (2^{\alpha-1} - 1).$$

La première égalité montre qu'on a $\alpha \leq 2$. Si $\alpha = 1$, on a, comme

nous l'avons déjà dit, $x_1 = 8$, $x_2 = 0$. Si $\alpha = 2$, on trouve $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

En résumé :

Une involution cyclique d'ordre 2^α et de genres 1, sur une surface de genres 1, a l'ordre 2 ou 4.

Une involution d'ordre 2 possède huit points de coïncidence et l'on peut prendre, comme surface représentative de cette involution, une surface normale possédant huit points doubles coniques (aux points de diramation).

Une involution d'ordre 4 possède quatre points de coïncidence quadruple et quatre points de coïncidence double, ces quatre derniers se répartissant en deux couples formant deux groupes de l'involution. On peut prendre comme surface représentative de celle-ci une surface normale possédant quatre points doubles biplanaires ayant chacun, dans leur domaine du premier ordre, un point double conique (aux points de diramation quadruple) et deux points doubles coniques (aux points de diramation double).

II. — Involutions non cycliques.

18. Nous considérerons actuellement les involutions non cycliques d'ordre 2^α . Nous commencerons par établir un théorème important sur les involutions engendrées par plusieurs transformations cycliques de périodes paires.

Soit sur la surface F une involution non cyclique I_n , d'ordre n et de genres 1, engendrée par deux transformations cycliques Θ_1 , Θ_2 respectivement d'ordres $2a$, $2b$.

La transformation Θ_1 engendre une involution cyclique I_{2a} , d'ordre $2a$, avec laquelle I_n est composée. De même, Θ_2 engendre une involution I_{2b} d'ordre $2b$ avec laquelle I_n est composée.

Supposons qu'un point de coïncidence de I_n , sur F , ne soit jamais invariant à la fois pour des puissances de Θ_1 et pour des puissances de Θ_2 . En d'autres termes, si un point de coïncidence de I_n est laissé invariant par Θ_1 ou par certaines puissances de Θ_1 , il n'est invariant pour aucune puissance de Θ_2 .

Indiquons par Φ_1 une surface représentative de I_{2a} , Φ_2 une surface représentative de I_{2b} , Φ une surface représentative de I_n . Entre Φ , (ou Φ_2) et F, nous avons une correspondance $(1, 2a)$ [ou $(1, 2b)$], entre Φ et Φ_1 (ou Φ_2), une correspondance $(1, 2b)$ [ou $(1, 2a)$].

D'après ce que nous avons vu au Chapitre I, s'il existe un point de coïncidence a' -uple de I_n , il en existe $\left(\frac{n}{a'} - 1\right)$ autres, et ces $\frac{n}{a'}$ points forment un groupe de I_n .

A un de ces groupes correspond, sur Φ_1 , un groupe de $2b$ points de diramation a' -uple pour la correspondance entre Φ_1 et F.

Aux groupes considérés sur F correspondent des groupes de $\frac{2a}{a'}$ points de Φ_2 qui sont des groupes de l'involution d'ordre $2a$ déterminée sur Φ_2 pour la correspondance $(1, 2a)$ existant entre Φ et Φ_2 . on a $x = y$. En comparant à l'égalité précédente, on trouve $ab = 1$, ce qui est impossible.

Il peut donc exister des involutions telles que I_n ayant des points de coïncidence qui ne soient pas invariants pour des puissances de Θ_1 et de Θ_2 à la fois. Leur étude ne présente cependant pas un grand intérêt, c'est pourquoi nous les laisserons de côté dans ce travail, nous réservant d'y revenir plus tard. Bornons-nous pour l'instant à donner un exemple d'une surface de genres 1 possédant une involution d'ordre 4 engendrée par deux transformations Θ_1, Θ_2 d'ordre 2, sans coïncidence commune. Le plan double

$$z^2 = ay^6 + by^4x^2 + cy^4 + dy^2x^4 + ey^2x^2 + fy^2 + gx^4 + hx^2 + k$$

est une surface de genres 1. Des deux transformations Θ_1, Θ_2 sont :

$$\Theta_1(x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = -z),$$

$$\Theta_2(x' = -x, \quad y' = y, \quad z' = -z).$$

Nous supposons donc dans la suite qu'il existe, sur F, des points de coïncidence qui sont à la fois invariants pour certaines puissances de Θ_1 et de Θ_2 .

Soit P un pareil point. D'après ce que nous avons vu (Chap. I), tout point infiniment voisin de P, est changé en lui-même par Θ_1^a de période 2, car P est une coïncidence de I_{2a} . De même, ces points sont invariants pour Θ_2^b , de période 2. Mais d'autre part, ils ne peuvent être invariants que pour une transformation du second ordre laissant

invariant tout groupe de points de I_n . Or, les transformations Θ_1^a, Θ_1^b laissant invariant tout groupe de I_n , par suite, on doit avoir $\Theta_1^a \equiv \Theta_1^b$.

En considérant une involution engendrée par plusieurs transformations cycliques de périodes paires, on aurait :

Si une involution est engendrée par un certain nombre de transformations cycliques $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$ de périodes paires respectivement $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_k$, on a

$$\Theta_1^{a_1} \equiv \Theta_2^{a_2} \equiv \dots \equiv \Theta_k^{a_k}.$$

En particulier, une involution non cyclique d'ordre 2^α ne pouvant être engendrée que par des transformations cycliques d'ordre 2 ou 4, on a le théorème suivant :

Une involution non cyclique d'ordre 2^α est engendrée par $\alpha - 1$ transformations birationnelles cycliques de période 4, dont les carrés coïncident.

19. Soit sur une surface F , de genres 1, une involution non cyclique I_{α_0} , d'ordre 2^α et de genres 1. D'après ce que nous venons de voir, elle est engendrée par $\alpha - 1$ transformations birationnelles cycliques de période 4 : $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{\alpha-1}$, telles que

$$\Theta_1^2 \equiv \Theta_2^2 \equiv \dots \equiv \Theta_{\alpha-1}^2.$$

On a donc $\alpha \geq 3$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'involutions non cycliques d'ordre 4.

Rappelons que nous avons établi les propriétés suivantes au Chapitre I :

On peut construire, sur F , un système linéaire incomplet $|C|$, de degré $2 \cdot 2^{2\alpha}(\pi - 1)$, de genre $2 \cdot 2^{2\alpha}(\pi - 1) + 1$ et de dimension $2^\alpha(\pi - 1) + 1$, composé de courbes invariantes C .

On peut prendre comme surface représentative de l'involution I_{α_0} , une surface Φ d'ordre $2 \cdot 2^{2\alpha}(\pi - 1)$, située dans un espace linéaire à $2^\alpha(\pi - 1) + 1$ dimensions, dont les sections hyperplanes Γ correspondent aux courbes C et sont de genre $2^\alpha(\pi - 1) + 1$.

Un point de coïncidence ν -uple (ν divisant 2^α) fait partie d'un groupe de I_{α_0} composé de $\frac{2^\alpha}{\nu}$ points de coïncidence ν -uple.

Il est possible de construire un système linéaire $|C_2|$ composé de

courbes C ayant, en chacun des points de coïncidence ν -uple formant un groupe de I_{α_0} , un point multiple d'ordre ν à tangentes variables.

Sur la surface F, nous aurons trois espèces de points de coïncidence de l'involution I_{α_0} :

1° Les points de coïncidence double, c'est-à-dire les points de coïncidence de l'involution d'ordre 2 engendrée par la transformation $\Theta \equiv \Theta_1 \equiv \Theta_2 \equiv \dots \equiv \Theta_{\alpha-1}$. Nous avons déjà étudié de pareils points. Ils se distribuent par groupes de $2^{\alpha-2}$ points et les C, passant par l'un de ces points, acquièrent un point double ordinaire à branches variables en chaque point du groupe. A un pareil groupe correspond un point de diramation double de Φ , ce point est un point double conique de cette surface.

2° Les points de coïncidence quadruple. Ces points sont nécessairement des points de coïncidence pour une seule des involutions cycliques engendrées par $\Theta_1, \Theta_2, \dots$, ou $\Theta_{\alpha-1}$. Nous les avons déjà étudiés dans le paragraphe précédent. Ils se distribuent sur F par groupes de $2^{\alpha-2}$ et les C passant par un point d'un groupe ont, en chaque point de ce groupe, un point double ordinaire à tangentes fixes. A un groupe correspond, sur Φ , un point de diramation quadruple. Ce point est double biplanaire pour Φ , et il contient, dans son domaine du premier ordre, un second point double conique.

3° Les points de coïncidence laissés invariants par $\varepsilon - 1$ des transformations $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{\alpha}$ ($\varepsilon \geq 3$). Un pareil point est un point de coïncidence 2^ε -uple et forme, avec $2^{\alpha-\varepsilon}$ points analogues, un groupe de I_{α_0} (1). Ce sont ceux-ci que nous devons étudier. Tout point du domaine du premier ordre d'un pareil point est laissé invariant par la

(1) Il est facile de voir que les transformations $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{\varepsilon-1}$ engendrent une involution d'ordre 2^ε . En effet, toutes les transformations différentes que l'on peut former sont de l'une des formes $\Theta_2^{i_2} \Theta_3^{i_3} \dots \Theta_{\varepsilon-1}^{i_{\varepsilon-1}}, \Theta_1 \Theta_2^{i_2} \dots \Theta_{\varepsilon-1}^{i_{\varepsilon-1}}, \Theta_1^2 \Theta_2^{i_2} \dots \Theta_{\varepsilon-1}^{i_{\varepsilon-1}}, \Theta_1^3 \Theta_2^{i_2} \dots \Theta_{\varepsilon-1}^{i_{\varepsilon-1}}$, les nombres $i_2, i_3, \dots, i_{\varepsilon-1}$ pouvant seulement prendre les valeurs 0 et 1 (ainsi, par exemple, on a $\Theta_1 \Theta_2^3 \equiv \Theta_1 \Theta_2^2 \Theta_2 \equiv \Theta_1 \Theta_1^2 \Theta_2 \equiv \Theta_1^3 \Theta_2$). Ces transformations sont au nombre de 2^ε . Pour le voir, il suffit de classer sur une première ligne celles pour lesquelles $i_2 = \dots = i_{\varepsilon-1}$ sont nuls, sur une seconde ligne celles pour lesquelles $i_2 = 1, i_3 = \dots = i_{\varepsilon-1} = 0$, et ainsi de suite. La première ligne a 4 termes, la deuxième 4, la troisième en a 8, ..., la $(j+1)^{i_{i\text{ème}}}$

en a 2^{j+1} . Le nombre cherché est donc $4 + \sum_{j=1}^{\varepsilon-2} 2^{j+1} = 2^\varepsilon$. En appliquant toutes ces transformations à un point de F, on construit un groupe de l'involution qui est donc d'ordre 2^ε .

transformation $\Theta \equiv \Theta_2^1 \equiv \dots \equiv \Theta_{\alpha-1}^2$. Les différentes involutions $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{\alpha-1}$ déterminent donc, dans ce domaine (ou si l'on veut dans le faisceau des tangentes à F au point de coïncidence considéré), une involution du second ordre possédant deux coïncidences.

20. Soit P_1 un point de coïncidence 2^ε -uple. Pour fixer les idées, supposons qu'il soit invariant pour les $\varepsilon - 1$ premières transformations génératrices de $I_{\alpha_0}, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{\varepsilon-1}$. Posons $\mu = 2^{\alpha-\varepsilon}$ et indiquons pour P_2, P_3, \dots, P_μ , les $\mu - 1$ points de coïncidence 2^ε -uple qui, avec P_1 , forment un groupe de I_{α_0} . Soit P' le point de diramation 2^ε -uple correspondant sur Φ .

Considérons la transformation $\Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_r$. Cette transformation est certainement cyclique et sa période est une puissance de 2, puisqu'elle doit engendrer une certaine involution avec laquelle I_{α_0} est composée. Sa période ne peut être égale à 2, car alors elle se confondrait avec la transformation $\Theta \equiv \Theta_2^1 \equiv \dots \equiv \Theta_{\alpha-1}^2$. On aurait donc

$$\Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_r \equiv \Theta_1^2$$

ou

$$\Theta_2 \dots \Theta_r \equiv \Theta_1,$$

ce qui est impossible, car l'ordre de l'involution I_{α_0} serait inférieur à 2^α .

La période de $\Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_r$ ne peut non plus être supérieure à 4 (comme nous l'avons vu au paragraphe 1), il faut donc qu'elle soit égale à 4, c'est-à-dire qu'on ait $(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_r)^4 = 1$. On a, par suite,

$$(\Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_r)^2 = \Theta_1^2 \equiv \Theta.$$

En particulier,

$$(\Theta_1 \Theta_2)^2 = \Theta_1^2,$$

c'est-à-dire

$$\Theta_1^{-1} \Theta_2 \Theta_1 = \Theta_2^{-1}.$$

Nous voyons donc que :

Une des transformations $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_\alpha$ en transforme une autre en son inverse.

Le produit de plusieurs des transformations $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_\alpha$ (chacune de ces transformations entrant au plus une fois dans ce produit) est une transformation cyclique de période 4.

En particulier, celles de ces transformations qui sont le produit de quelques-unes des transformations $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{\varepsilon-1}$, laissent invariants les points P_1, P_2, \dots, P_μ . Il y a donc $2^{\varepsilon-1} - 1$ transformations cycliques de période 4, $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{\varepsilon-1}, \Theta_1\Theta_2, \dots, \Theta_1\Theta_2\dots\Theta_{\varepsilon-1}$ laissant invariants les points P_1, P_2, \dots, P_μ . On démontrerait facilement qu'il n'y en a pas d'autres (de période 4) ayant la même propriété, en faisant un raisonnement analogue à celui qui se trouve en note au bas de la page 391.

Tout point infiniment voisin de l'un des points P_1, P_2, \dots, P_μ étant invariant pour $\Theta \equiv \Theta_1^2$, les $2^{\varepsilon-1} - 1$ transformations dont il vient d'être question détermine, dans le domaine de chacun de ces points, des involutions d'ordre 2 possédant deux coïncidences. *Il y a donc, dans le voisinage de chacun des points P_1, P_2, \dots, P_μ , $2(2^{\varepsilon-1} - 1)$ points unis pour une transformation de période 4.*

21. Considérons les courbes C passant par P_1 . Elles passent en conséquence par les points P_1, P_2, \dots, P_μ . Désignons-les par C_i et soient Γ_i les courbes qui leur correspondent sur Φ .

Supposons que la singularité des C_i en P_1 abaissent le genre de i unités et que l'involution d'ordre 2^α déterminée sur une C_i possède, dans le voisinage de P_1 , δ coïncidences. Les C_i sont donc de genre $2^{2\alpha}(\pi - 1) - 2^{\alpha-\varepsilon}i + 1$ et l'involution d'ordre 2^α existant sur une de ces courbes possède $2^{\alpha-\varepsilon}\delta$ coïncidences.

Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance $(1, 2^\alpha)$ liant deux courbes Γ_i, C_i homologues.

Si P' est simple pour Φ , on a

$$2^\alpha [2 \cdot 2^\alpha (\pi - 1)] + 2^{\alpha-\varepsilon} \delta = 2 \cdot 2^{2\alpha} (\pi - 1) - 2^{\alpha-\varepsilon+1} i,$$

c'est-à-dire $\delta = i = 0$, ce qui est absurde.

P' est donc un point double (non tacnodal) de Φ (car il ne peut avoir, pour cette surface, une multiplicité supérieure à 2). Nous avons actuellement

$$2^\alpha [2 \cdot 2^\alpha (\pi - 1) - 2] + 2^{\alpha-\varepsilon} \delta = 2 \cdot 2^{2\alpha} (\pi - 1) - 2^{\alpha-\varepsilon+1} i,$$

c'est-à-dire

$$\delta + 2i = 2^{\varepsilon+1}.$$

Considérons un groupe de I_{α_0} dont un point s'approche indéfiniment de P_1 sur une courbe C_1 . Il y aura 2^ε points de ce groupe qui s'approcheront indéfiniment de chacun des points P_1, P_2, \dots, P_μ et le point de Φ correspondant à ce groupe s'approchera de P' sur une branche de la courbe Γ_1 correspondante. Examinons les 2^ε points du groupe s'approchant de P_1 . Deux cas peuvent se présenter :

1° Un de ces points s'approche de P_1 sur une branche variable de la courbe C_1 . Alors, les autres points s'approcheront également de P_1 sur des branches variables et comme il y a, en chaque point du domaine de P_1 , une coïncidence double, le nombre des branches variables de la C_1 passant par P_1 sera nécessairement multiple de $2^{\varepsilon-1}$. Si le nombre de ces branches est précisément $k_1 \cdot 2^{\varepsilon-1}$, il y aura k_1 groupes de I_{α_0} infiniment voisins du groupe de cette involution formé par P_1, P_2, \dots, P_μ .

2° Un de ces points s'approche de P_1 sur une branche de C_1 passant par un des points du domaine de P_1 invariant pour une des transformations de période 4, $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_1 \dots \Theta_{\varepsilon-1}$. Les autres points s'approchent nécessairement de P_1 sur des branches jouissant de la même propriété. Ces différentes branches sont donc fixes et le nombre des branches fixes d'une courbe C_1 est multiple de $2^{\varepsilon-2}$. Si ce nombre est $k_2 \cdot 2^{\varepsilon-2}$, il y a k_2 groupes de I_{α_0} (formés de $2^{\varepsilon-2}$ points de coïncidence quadruple) infiniment voisins du groupe P_1, P_2, \dots, P_μ .

Il faut remarquer qu'il n'est pas impossible *a priori* que les branches fixes d'une courbe C_1 aient entre elles des contacts plus ou moins élevés, c'est-à-dire que cette C_1 ait des points multiples infiniment voisins de P_1, P_2, \dots, P_μ . Cependant, si $k_1 = 0$, cette particularité ne pourra se présenter pour toutes les C_1 , comme nous le montrerons plus loin.

En résumé, nous voyons que, dans le cas le plus général, les courbes C_1 ont en chacun des points P_1, P_2, \dots, P_μ un point multiple d'ordre $(k_1 2^{\varepsilon-1} + k_2 2^{\varepsilon-2})$ dont $k_1 2^{\varepsilon-1}$ tangentes sont variables et les autres sont fixes. A une courbe C_1 correspond alors une courbe Γ_1 ayant $k_1 + k_2$ branches distinctes en P' . Mais P' étant double pour Φ , donc pour les Γ_1 , on doit avoir $k_1 + k_2 \leq 2$.

Ceci établi, nous avons

$$\delta = k_1 2^{\varepsilon-1} + 3 k_2 2^{\varepsilon-2},$$

$$i \geq \frac{1}{2} (k_1 2^{\varepsilon-1} + k_2 2^{\varepsilon-2}) (k_1 2^{\varepsilon-1} + k_2 2^{\varepsilon-2} - 1).$$

On a donc

$$\delta + 2i = 2^{\varepsilon+1} \geq k_1 2^{\varepsilon-1} + 3 k_2 2^{\varepsilon-2} + (k_1 2^{\varepsilon-1} + k_2 2^{\varepsilon-2})(k_1 2^{\varepsilon-1} + k_2 2^{\varepsilon-2} - 1),$$

c'est-à-dire

$$k_2 2^{\varepsilon-1} + 2^{2\varepsilon-4} (2k_1 + k_2)^2 \leq 2^{\varepsilon+1}.$$

Nous avons d'ailleurs déjà dit que les points P_1, P_2, \dots, P_μ étaient des points de coïncidence au moins octuples; on a donc $\varepsilon \geq 3$.

Si $k_2 = 0$, il vient

$$k_1^2 \leq 2^{3-\varepsilon},$$

d'où $\varepsilon = 3$.

Si $k_2 > 0$, on a

$$k_2 + 2^{\varepsilon-3} (2k_1 + k_2)^2 \leq 4.$$

On a nécessairement $k_1 = 0, k_2 = 1$, d'où $2^{\varepsilon-3} \leq 3$. ε peut, par suite, prendre les valeurs $\varepsilon = 3, \varepsilon = 4$.

Trois cas peuvent donc, *a priori*, se présenter :

a. Les points P_1, P_2, \dots, P_μ sont des points de coïncidence octuple ($\varepsilon = 3, \mu = 2^{\alpha-3}$) et les C_i ont, en ces points, des points quadruples à tangentes variables.

b. Les points P_1, P_2, \dots, P_μ sont des points de coïncidence octuple ($\varepsilon = 3, \mu = 2^{\alpha-3}$) et les C_i ont, en ces points, des points doubles à tangentes fixes (distinctes ou non).

c. Les points P_1, P_2, \dots, P_μ sont des points de coïncidence 16-uple ($\varepsilon = 4, \mu = 2^{\alpha-4}$) et les C_i ont, en ces points, des points quadruples à tangentes fixes (distinctes ou non).

Nous allons faire voir que les deux derniers cas ne peuvent se présenter effectivement.

22. Plaçons-nous dans le deuxième cas. Nous avons $\delta = 6, \delta + 2i = 16$, d'où $i = 5$. Les C_i ont un point double en P_i , par suite, pour que la singularité de ces courbes en P_i abaisse leur genre de 5 unités, il faut qu'elles aient, en P_i , un point double ayant quatre points doubles infiniment voisins successifs.

Remarquons qu'il y a, dans le domaine du premier ordre de P_i , six points invariants pour l'une des transformations de période 4: $\Theta_1, \Theta_2,$

Θ_1, Θ_2 ($\varepsilon - 1 = 2$). Les courbes C_i doivent passer par l'un de ces points, par suite le système $|C_i|$ se décomposera en six systèmes linéaires. La dimension de chacun de ces systèmes sera d'ailleurs inférieure d'une unité à celle de $|C|$, c'est-à-dire qu'elle est égale à $2^\alpha(\pi - 1)$. Mais si nous considérons deux des systèmes, ils vont déterminer un système linéaire de courbes C ayant, en P_1 (et en P_2, \dots, P_μ), des points doubles à tangentes variables. La dimension de ce système sera d'au moins une unité supérieure à celle de $|C_i|$, c'est-à-dire qu'elle sera au moins égale à celle de $|C|$. Ce système linéaire se confondrait alors avec $|C|$, ce qui est absurde puisque $|C|$ n'a pas de points-bases. Le second cas ne peut donc se présenter.

Le troisième cas se rejette de la même manière. On trouve alors que les C_i ont en P_1 un point quadruple avec quatre points doubles infiniment voisins. Le système $|C_i|$ se décompose en sept systèmes linéaires de dimension $2^\alpha(\pi - 1)$.

23. Nous voyons donc qu'on a toujours $\varepsilon = 3$ et que les C passant par un point de coïncidence octuple y acquièrent un point quadruple à tangentes variables.

A une courbe C_i correspond une courbe Γ_i ayant en P' un point double de rebroussement. En effet, sur une C_i ne se trouve qu'un seul groupe de $I_{\infty 0}$ infiniment voisin du groupe P_1, P_2, \dots, P_μ ($\mu = 2^{\alpha-3}$) et à ce groupe correspond sur la Γ_i homologue un seul point infiniment voisin de P' .

Le point P' est donc un point double uniplanaire (non tacnodal) de Φ . Nous allons voir que c'est un point double uniplanaire ordinaire.

Considérons les courbes C_i touchant, en P_1 , deux directions ne contenant pas de coïncidence quadruple infiniment voisine de P_1 . Soient C'_2 ces courbes, Γ'_2 les sections hyperplanes correspondantes de Φ . On aura deux systèmes linéaires $|C'_2|, |\Gamma'_2|$ de dimension $2^\alpha(\pi - 1) - 2$.

Les C'_2 auront, en P_1, P_2, \dots, P_μ des points de multiplicité supérieure à 4, mais nécessairement multiple de 4, car en un point quelconque de l'un de ces μ points, il y a une coïncidence double. Soit $4k$ cette multiplicité. Les Γ'_2 ont alors, en P' , k branches. Mais

P' étant double, k est au plus égal à 2. Il est plus grand que 1, donc $k=2$ et les C'_2 ont en P_1, P_2, \dots, P_μ des points octuples ordinaires (à tangentes variables). Les C'_2 se confondent donc avec les C_2 , les Γ'_2 avec les Γ_2 .

Les courbes C_2 sont de genre effectif $2^{2\alpha}(\pi - 1) - 28$ et les Γ_2 sont de genre $2^\alpha(\pi - 1) - 3$ (voir Chap. I). D'autre part, $|\Gamma_2|$ a la dimension $2^\alpha(\pi - 1) - 2$. Or, nous avons vu que P' est un point double uniplanaire (non tacnodal) de Φ . Il y a donc, sur cette surface, une droite simple d infiniment voisine de P' . Les hyperplans qui découpent les Γ_2 sur Φ sont en nombre $2^\alpha(\pi - 1) - 2$ fois infini, donc ce sont des hyperplans contenant cette droite d . De plus, le genre des Γ_2 est de trois unités inférieur à celui des Γ_1 , donc il faut qu'il y ait, sur la droite d , trois points doubles infiniment voisins de P' . Si P' n'était pas un point biplanaire ordinaire, il y aurait au moins deux des trois tangentes quadriponctuelles de Φ en P' infiniment voisines, et alors deux des trois points doubles successifs à P' seraient successifs l'un de l'autre, c'est-à-dire situés sur cycle d'ordre 2 (1). C'est ce qui ne peut avoir lieu ici. Les Γ_2 ont d'ailleurs (puisque $k=2$) deux branches distinctes en P' .

Un point de diramation octuple est un point double uniplanaire ordinaire de Φ .

Les transformations $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_1 \Theta_2$ de période 4, déterminent, comme nous l'avons vu, des involutions du second ordre dans le faisceau des tangentes à F en P_1 . Soient t_1, t_2, \dots, t_6 les six tangentes de coïncidence de ces trois involutions. Au point infiniment voisin de P_1 sur l'une de ces coïncidences, il y a une coïncidence quadruple de I_{α_0} .

Considérons les C_1 (soit C'_1) qui ont deux tangentes coïncidentes avec t_1 et dont, de plus, les deux branches ayant cette tangente t_1 s'osculent. Supposons, pour fixer les idées, que t_2 soit invariante pour Θ_1 et que Θ_2 change t_1 en t_2 . Alors, les C'_1 étant des courbes inva-

(1) SEGRE, *Sulla scomposizione...* (loc. cit.). — Il pourrait sembler qu'il y a ici une contradiction, le système $|\Gamma_2|$ ayant la dimension $2^\alpha(\pi - 1) - 2$ et le genre d'une unité inférieure $2^\alpha(\pi - 1) - 3$. Il n'en est rien, car les sections hyperplanes Γ_2 se décomposent en la droite d , infiniment voisine de P' et en des courbes d'ordre $2 \cdot 2^\alpha(\pi - 1) - 1$, qui sont de genre effectif $2^\alpha(\pi - 1) - 2$.

riantes, leurs deux autres tangentes se confondent avec t_2 et les branches touchant t_2 s'y osculent. En d'autres termes, les C'_i ont en P_i un point quadruple auquel sont infiniment voisins, dans deux directions, deux points doubles successifs.

Les C'_i sont donc de genre $\mu \cdot 2^{2\alpha}(\pi - 1) - (6 + 4)$, car elles ont la même singularité en P_2, P_3, \dots, P_μ . Soient Γ'_i les sections hyperplanes correspondantes de Φ , η' leur degré virtuel. La formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance $(1, 2^\alpha)$ entre une Γ'_i et une C'_i homologues, donne

$$2^\alpha \eta' + \mu \cdot 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2^{2\alpha}(\pi - 1) - 20\mu,$$

ou, comme $\mu = 2^{\alpha-3}$,

$$\eta' = 2 \cdot 2^\alpha(\pi - 1) - 4.$$

Le genre des Γ'_i est donc égal à $2^\alpha(\pi - 1) - 1$, c'est-à-dire qu'il est de deux unités inférieur à celui des Γ . Les Γ'_i sont donc données par les sections de Φ pour les hyperplans passant par P' et par une des tangentes quadriponctuelles (contenant un des trois points doubles infiniment voisins de P'). Les six directions t_1, t_2, \dots, t_6 se partagent en trois groupes de deux en correspondance avec les trois tangentes quadriponctuelles à Φ en P' .

24. Nous allons maintenant calculer le nombre des points de diramation d'ordre 2, 4 et 8 de Φ .

Soient : x_1 le nombre de points de diramation double, c'est-à-dire les points de diramation pour l'involution d'ordre 2 engendrée par $\Theta \equiv \Theta_1^2 \equiv \dots \equiv \Theta_{\alpha-1}^2$; x_2 le nombre des points de diramation quadruple; x_3 le nombre des points de diramation octuple.

Désignons par m la classe effective de Φ et calculons la valeur de l'invariant de Zeuthen-Segre $I = 20$ de cette surface. Nous savons qu'un point de diramation double est un point double conique de Φ et abaisse la classe de cette surface de deux unités, qu'un point de diramation quadruple est un point double biplanaire de seconde espèce⁽¹⁾

(1) Pour abrégé, nous introduirons dans la suite la terminologie suivante, déjà utilisée par plusieurs auteurs. Un point double biplanaire formé d'une suite de $k + 1$ points doubles successifs dont les k premiers sont biplanaires et le dernier conique sera dit : *point double biplanaire d'espèce $2k$* . Un point double biplanaire formé d'une suite de

de Φ et abaisse la classe de cette surface de quatre unités, qu'un point de diramation octuple est un point uniplanaire ordinaire et abaisse la classe de six unités (1). On a donc, en considérant un faisceau de courbes Γ ,

$$I = 20 = m + 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 6 \cdot 2^\alpha (\pi - 1) - 4.$$

Calculons l'invariant de Zeuthen-Segre $I = 20$ de F au moyen d'un faisceau de courbes C . Il y a m de ces courbes ayant 2^α points doubles. Les C de ce faisceau passant par une coïncidence octuple acquièrent $2^{\alpha-3}$ points quadruples, et un point quadruple doit être considéré, actuellement, comme équivalent à $(4-1)^2 = 9$ points doubles (2). Les C du faisceau passant par un point de coïncidence double au quadruple acquièrent respectivement $2^{\alpha-1}$, $2^{\alpha-2}$ points doubles ordinaires. On a donc

$$I = 20 = 2^\alpha m + 2^{\alpha-1}x_1 + 2^{\alpha-2}x_2 + 9 \cdot 2^{\alpha-3}x_3 - 6 \cdot 2^{2\alpha}(\pi - 1) - 4.$$

Entre les deux formules trouvées, éliminons m . On obtient

$$(1) \quad 2^{\alpha-1}x_1 + 5 \cdot 2^{\alpha-2}x_2 + 13 \cdot 2^{\alpha-3}x_3 = 8(2^\alpha - 1).$$

Considérons la surface représentative de l'involution du second ordre engendrée par $\Theta \equiv \Theta_1^2 \equiv \dots \equiv \Theta_{\alpha-1}^2$. Elle possède $2^{\alpha-1}x_1 + 2^{\alpha-2}x_2 + 2^{\alpha-3}x_3$ points de diramation. Mais nous avons vu que le nombre de points de diramation d'une surface représentative d'une involution d'ordre 2 est égal à 8 (Chap. III, § 1). On doit donc avoir

$$(2) \quad 2^{\alpha-1}x_1 + 2^{\alpha-2}x_2 + 2^{\alpha-3}x_3 = 8.$$

On a $\alpha \geq 3$ et d'autre part, d'après ce que nous avons convenu au début de ce paragraphe, l'un au moins des nombres x_2, x_3 n'est pas nul.

Supposons tout d'abord $x_3 = 0$. Alors $x_2 > 0$ et l'on déduit, en sous-

$k+1$ points doubles infiniment voisins successifs dont les k premiers sont biplanaires et le dernier biplanair ordinaire, sera dit : *point double biplanair d'espèce $2k+1$* .

(1) SEGRE, *Sulla scomposizione...* (*loc. cit.*).

(2) SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* (*Atti della R. Accad. di Torino*, t. XXXI, 1896).

trayant (2) de (1),

$$x_2 = 2^{4-\alpha}(2^{\alpha-1} + 1).$$

Mais de (2) on déduit $x_2 \leq 2^{5-\alpha}$. On devrait donc avoir

$$2^{4-\alpha}(2^{\alpha-1} + 1) \leq 2^{5-\alpha},$$

ce qui est impossible pour $\alpha \geq 3$. On a donc toujours $x_3 > 0$.

Entre (1) et (2) éliminons x_3 . Il vient

$$12 \cdot 2^{\alpha-1} x_1 + 8 \cdot 2^{\alpha-2} x_2 = 8(14 - 2^\alpha).$$

On a donc $\alpha < 4$, donc $\alpha = 3$.

On trouve aisément que les équations (1) et (2) admettent alors deux systèmes de solutions entières et positives :

$$\begin{array}{lll} (a) & x_1 = 1, & x_2 = 0, & x_3 = 4; \\ (b) & x_1 = 0, & x_2 = 3, & x_3 = 2. \end{array}$$

Nous voyons donc que :

Une involution non cyclique d'ordre 2^α et de genres 1 sur une surface de genres 1 est d'ordre 8 ($\alpha = 3$). Elle est engendrée par deux transformations birationnelles cycliques de période 4 dont les carrés coïncident.

Il y a deux espèces d'involution d'ordre 8 : Celles de première espèce possèdent quatre points de coïncidence octuple et un groupe de quatre points de coïncidence double. On peut prendre comme surface représentative d'une telle involution une surface normale possédant quatre points uniplanaires ordinaires et un point double conique.

Celles de seconde espèce possèdent deux points de coïncidence octuple et trois groupes de deux points de coïncidence quadruple. On peut prendre comme surface représentative d'une pareille involution une surface normale possédant deux points uniplanaires ordinaires et trois points doubles biplanaires de deuxième espèce.

Les involutions d'ordre 2^α et de genres 1 sur une surface de genres 1 sont des involutions cycliques d'ordre 2 ou 4, ou des involutions non-cycliques d'ordre 8.

CHAPITRE IV.

INVOLUTIONS D'ORDRE 3^β .

25. Nous allons considérer, dans ce Chapitre, les involutions $I_{0\beta}$ d'ordre 3^β et de genres 1 existant sur une surface F de genres 1. Nous démontrerons que, l'involution étant cyclique ou non, on a toujours $\beta = 1$.

Soit donc $I_{0\beta}$ une involution d'ordre 3^β , cyclique ou non, sur F . Nous savons (Chap. I) que l'on peut construire sur F un système linéaire incomplet $|C|$, de degré $2 \cdot 3^{2\beta}(\pi - 1)$, de genre $3^{2\beta}(\pi - 1) + 1$ et de dimension $3^\beta(\pi - 1) + 1$, dépourvu de points-bases et composé avec $I_{0\beta}$.

Comme surface représentative de l'involution, nous prendrons la surface Φ , d'ordre $2 \cdot 3^\beta(\pi - 1)$, située dans un espace linéaire à $3^\beta(\pi - 1) + 1$ dimensions et dont les sections hyperplanes Γ , de genre $3^\beta(\pi - 1) + 1$, correspondent aux courbes C .

Considérons un point de coïncidence ν -uple P_1 sur F . Nous savons que l'existence de ce point entraîne celle de $\mu - 1 = \frac{3^\beta}{\nu} - 1$ autres points de coïncidence ν -uple P_2, P_3, \dots, P_μ , les μ points P_1, P_2, \dots, P_μ formant un groupe de $I_{0\beta}$. On a nécessairement $\nu = 3^\varepsilon$, ε étant inférieur ou égal à β , et $\mu = 3^{\beta-\varepsilon}$.

Il est possible, comme nous l'avons montré, de construire des courbes C formant un système linéaire que nous avons désigné par $|C_2|$, ayant en chacun des points P_1, P_2, \dots, P_μ une multiplicité d'ordre 3^ε .

Un point de F infiniment voisin de P_1 (ou de P_2, \dots, P_μ) n'est généralement pas invariant pour une transformation quelconque génératrice de $I_{0\beta}$ (Chap. I).

26. Considérons les courbes C passant par P_1 (et par suite par P_2, P_3, \dots, P_μ) et désignons-les par C_1 . Soient Γ_1 les sections hyperplanes de Φ qui correspondent aux C_1 . Les Γ_1 passent par le point de diramation P' correspondant au groupe P_1, P_2, \dots, P_μ . Les systèmes $|C_1|, |\Gamma_1|$ ont la dimension $2 \cdot 3^\beta(\pi - 1)$.

Désignons par i l'abaissement du genre par suite de la singularité qu'ont les C_i aux points P_1, P_2, \dots, P_μ respectivement. Soit, d'autre part, δ le nombre des coïncidences de l'involution d'ordre 3^β déterminée sur une C_i , dans le voisinage d'un de ces points.

La formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance $(1, 3^\beta)$ existant entre une Γ_i et une C_i homologues, montre immédiatement que P' est double pour Φ . Elle donne alors

$$3^\beta[2 \cdot 3^\beta(\pi - 1) - 2] + 3^{\beta-\varepsilon} \delta = 2 \cdot 3^{2\beta}(\pi - 1) - 2 \cdot 3^{\beta-\varepsilon} i,$$

c'est-à-dire

$$\delta + 2i = 2 \cdot 3^\varepsilon.$$

Les transformations génératrices de $I_{0\beta}$ déterminent, dans le faisceau des tangentes à F en P_1 , une involution γ_{3^ε} d'ordre 3^ε . Soit t_i une tangente qui soit une coïncidence 3^τ -uple de cette involution ($\tau \leq \varepsilon$). Les transformations génératrices de $I_{0\beta}$ ne laissant pas t_i invariante, mais laissant P_1 invariant, transportent t_i en $3^{\varepsilon-\tau} - 1$ autres tangentes qui sont aussi des coïncidences 3^τ -uples. Par suite, si les C_i touchent t_i en P_1 , elles touchent nécessairement ces $3^{\varepsilon-\tau} - 1$ autres tangentes en ce point.

Si les C_i ont une branche variable en P_1 , un raisonnement analogue montre qu'elles en ont nécessairement $3^\varepsilon - 1$ autres.

D'une manière générale, on peut supposer que les C_i ont, en P_1 , un point multiple d'ordre

$$k_0 3^\varepsilon + k_1 3^{\varepsilon-1} + \dots + k_\tau 3^{\varepsilon-\tau} + \dots + k_\varepsilon,$$

les $k_0, k_1, \dots, k_\varepsilon$ étant des entiers positifs ou nuls. Parmi les différentes branches de C_i en P_1 , il y en a exactement $k_0 \cdot 3^\varepsilon$ variables.

On aura

$$\delta = k_1 3^{\varepsilon-1}(3-1) + k_2 3^{\varepsilon-2}(3^2-1) + \dots + k_\tau 3^{\varepsilon-\tau}(3^\tau-1) + \dots + k_\varepsilon(3^\varepsilon-1),$$

$$2i \leq \left(\sum_{\tau=0}^{\varepsilon} k_\tau 3^{\varepsilon-\tau} \right) \left(\sum_{\tau=0}^{\varepsilon} k_\tau 3^{\varepsilon-\tau} - 1 \right),$$

car les C_i pourraient avoir des points multiples infiniment voisins de P_1 .

La formule établie plus haut donne

$$(1) \quad \sum_{\tau=1}^{\varepsilon} k_{\tau} 3^{\varepsilon-\tau} (3^{\tau} - 2) + \left(\sum_{\tau=0}^{\varepsilon} k_{\tau} 3^{\varepsilon-\tau} \right)^2 - k_0 3^{\varepsilon} \leq 2 \cdot 3^{\varepsilon}.$$

Remarquons que les courbes Γ_1 ont $k_0 + k_1 + \dots + k_{\tau}$ branches en P' . Or, P' est double pour ces courbes, donc on aura

$$(2) \quad k_0 + k_1 + \dots + k_{\varepsilon} \leq 2.$$

Si k_0 est différent de zéro, la formule (1) donne

$$\sum_{\tau=1}^{\varepsilon} k_{\tau} 3^{\varepsilon-\tau} (3^{\tau} - 2) + \left(\sum_{\tau=1}^{\varepsilon} k_{\tau} 3^{\varepsilon-\tau} \right)^2 + 2 k_0 3^{\varepsilon} \left(\sum_{\tau=1}^{\varepsilon} k_{\tau} 3^{\varepsilon-\tau} \right) \leq 3^{\varepsilon} (2 - k_0^2 3^{\varepsilon} + k_0).$$

Le premier membre est positif ou nul (si $k_1 = \dots = k_{\varepsilon} = 0$), le second membre est donc également positif ou nul :

$$k_0^2 3^{\varepsilon} - k_0 \leq 2.$$

On a nécessairement $k_0 = 1$, $\varepsilon = 1$, et par suite

$$\left(\sum_{\tau=1}^{\varepsilon} k_{\tau} 3^{\varepsilon-\tau} \right)^2 + \dots \leq 0.$$

Cela entraîne $k_1 = k_2 = \dots = k_{\tau} = 0$. Donc, si les C_1 ont en P_1 des branches variables ($k_0 > 0$), elles n'ont pas de branches fixes et le nombre des branches variables est exactement trois; la coïncidence est triple ($\varepsilon = 1$).

Supposons maintenant $k_0 = 0$. Deux des nombres $k_1, k_2, \dots, k_{\varepsilon}$ (soient k_{τ}, k_{σ}) peuvent, à cause de l'inégalité (2), ne pas être nuls. L'inégalité (1) devient alors

$$2 k_{\tau} k_{\sigma} 3^{2\varepsilon-\tau-\sigma} + k_{\tau} 3^{\varepsilon-\tau} (k_{\tau} 3^{\varepsilon-\tau} - 2) + k_{\sigma} 3^{\varepsilon-\sigma} (k_{\sigma} 3^{\varepsilon-\sigma} - 2) \leq 3^{\varepsilon} (2 - k_{\tau} - k_{\sigma}).$$

Si $k_{\tau} = k_{\sigma} = 1$, le deuxième membre de cette inégalité est nul, donc on doit avoir $\tau = \sigma = \varepsilon$, ce qui est impossible, puisqu'on a supposé implicitement $\tau \neq \sigma$.

On doit donc avoir $k_\sigma = 0$ et alors (1) devient

$$k_\tau(k_\tau 3^{\varepsilon-\tau} - 2) \leq 3^\tau(2 - k_\tau),$$

où k_τ est au plus égal à 2.

Si $k_\tau = 2$, on a $3^{\varepsilon-\tau} \leq 2$, c'est-à-dire $\tau = \varepsilon$. Il y a, dans ce cas, deux directions t_1, t_2 , issues de P_1 , que toutes les transformations génératrices de $I_{0\beta}$ laissant invariant P_1 , laissent invariantes.

Si $k_\tau = 1$, on a

$$3^{\varepsilon-\tau} - 2 \leq 3^\tau,$$

c'est-à-dire $\tau = \frac{\varepsilon}{2}$, ou $\tau = \varepsilon$.

Quatre cas peuvent donc se présenter :

- (a) $k_0 = 1, \quad k_1 = \dots = k_\varepsilon = 0, \quad \varepsilon = 1;$
 (b) $k_0 = 0, \quad k_1 = \dots = k_{\varepsilon-1} = 0, \quad k_\varepsilon = 1, \quad \tau = \varepsilon;$
 (c) $k_0 = 0, \quad k_1 = \dots = k_{\frac{\varepsilon}{2}-1} = k_{\frac{\varepsilon}{2}+1} = \dots = k_\varepsilon = 0, \quad k_{\frac{\varepsilon}{2}} = 1, \quad \tau = \frac{\varepsilon}{2};$
 (d) $k_0 = 0, \quad k_1 = \dots = k_{\varepsilon-1} = 0, \quad k_\varepsilon = 2, \quad \tau = \varepsilon.$

Nous allons examiner ces cas séparément et constater que, seul, le dernier peut se présenter lorsque $\varepsilon = 1$.

27. Plaçons-nous dans le premier cas. Les courbes C_i ont alors, en P_1, P_2, \dots, P_μ ($\mu = 3^{\beta-1}$) des points triples ordinaires à tangentes variables. Il y a sur une C_i un seul groupe de $I_{0\beta}$ infiniment voisin du groupe formé par P_1, P_2, \dots, P_μ , dont la courbe Γ_i correspondante a, en P' , un point de rebroussement. On en conclut que le point P' est un point uniplanaire (nécessairement non tacnodal) de Φ . Cette surface possède donc une droite simple d infiniment voisine de P' .

Considérons les C_i assujetties à toucher, en P_1 , deux directions quelconques (non conjuguées pour celle des transformations génératrices de $I_{0\beta}$ laissant invariant P_1). Soient C'_2 les courbes C_i répondant à ces conditions, Γ'_2 les courbes correspondantes sur Φ . $|\Gamma'_2|$ et $|C'_2|$ ont donc la dimension $3^\beta(\pi - 1) - 2$.

Les C'_2 ont, en P_1 , des branches variables et, par suite, un point multiple d'ordre $3k$ ($k > 1$). Mais on ne peut avoir $k > 2$, car alors les Γ'_2 auraient plus de deux branches en P' , ce qui est absurde. On a donc $k = 2$ et les C'_2 ont, en $P_1, P_2, P_3, \dots, P_\mu$, des points sextuples à

tangentes variables. Les C'_2 coïncident avec les $C_{2,1}$, les Γ'_2 avec les Γ_2 . Soit y le genre virtuel des Γ_2 ; la formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance existant entre une Γ_2 et une C_2 homologues, donne

$$3^\beta(2y - 2) = 2 \cdot 3^{2\beta}(\pi - 1) - 3^{\beta-1} \cdot 30,$$

c'est-à-dire

$$y = 3^\beta(\pi - 1) - 4.$$

Or, le point P' étant uniplanaire et les hyperplans découpant les Γ_2 sur Φ étant en nombre $3^\beta(\pi - 1) - 2$ fois infini, ces Γ_2 sont des courbes Γ ayant au plus quatre points doubles (P' et les trois points infiniment voisins). Leur genre doit donc être au plus de quatre unités inférieur à celui des Γ . Nous trouvons ici qu'il est de cinq unités inférieur au genre des Γ . Cette contradiction montre que le premier cas ne peut se présenter.

Plaçons-nous dans le second cas. Les C_1 ont alors en P_1 une seule branche ($k_0 = \dots = k_{\varepsilon-1} = 0, k_\varepsilon = 1$) passant par un point infiniment voisin de P_1 invariant pour toutes les transformations laissant P_1 invariant. On a donc $\delta = 3^\varepsilon - 1, i = 0$. Or, on doit avoir $\delta + 2i = 2 \cdot 3^\varepsilon$, donc $3^\varepsilon - 1 = 2 \cdot 3^\varepsilon$, ce qui est absurde. Le second cas ne peut donc exister.

Plaçons-nous dans le troisième cas. ε est pair et égal précisément à 2τ . Les C_1 ont en P_1 un point 3^τ -uple à tangentes fixes et sur une C_1 , dans le voisinage de P_1 , il y a 3^τ coïncidences 3^τ -uples. On a

$$\delta = 3^\tau(3^\tau - 1), \quad \text{d'où} \quad 2i = 2 \cdot 3^{2\tau} - \delta = 3^\tau(3^\tau + 1).$$

Si P_1 était un point 3^τ -uple ordinaire, on aurait $2i = 3^\tau(3^\tau + 1)$; donc, les courbes C_1 ont des points multiples infiniment voisins du point P_1 . Ces points multiples infiniment voisins ne peuvent être d'une multiplicité $3h$, car alors on n'aurait plus que des coïncidences $3^{\tau-1}$ -uples. Il est d'ailleurs clair que les branches des C_1 en P_1 doivent se distribuer d'une manière symétrique. Si les C_1 ont des points η -uples infiniment voisins de P_1 , on doit donc avoir $\frac{3^\tau}{\eta}$ entier, c'est-à-dire η multiple de 3. Nous venons de voir que c'est impossible, donc le troisième cas ne peut se présenter.

28. Étudions enfin le quatrième cas. Actuellement, les C_1 ont en P_1 (et en P_2, \dots, P_μ) un point double ordinaire et leurs branches sont

tangentes à deux droites t_1, t_2 (tangentes à F en P_1). Sur chaque branche des C_1 , il y a, infiniment voisine de P_1 , une coïncidence 3^e-uple.

Le point P' est double pour Φ . D'autre part, à une C_1 correspond généralement une courbe Γ_1 ayant deux branches, donc P' est un point double conique ou biplanaire. Nous verrons qu'il est précisément biplanaire ordinaire (de première espèce, d'après la terminologie introduite plus haut).

Considérons les C_1 touchant, en P_1 , une direction différente de t_1, t_2 . Soient C'_2 les courbes obtenues. En raisonnant exactement de la même manière qu'au Chapitre II, on verrait que les C'_2 coïncident avec les C_2 , c'est-à-dire qu'elles ont en P_1, P_2, \dots, P_μ des points 3^e-uples ordinaires à tangentes variables.

Or, $|C'_2|$, c'est-à-dire $|C_2|$, et par suite $|\Gamma_2|$, ont la dimension $3^\beta(\pi - 1) - 1$; donc le degré virtuel de $|\Gamma_2|$ est au moins égal à $2 \cdot 3^\beta(\pi - 1) - 4$. La formule de Zeuthen donne d'autre part, pour ce degré virtuel, la valeur $2 \cdot 3^{2\beta}(\pi - 1) - (3^\beta - 1)$. On doit donc avoir, toutes réductions faites,

$$3^\varepsilon - 1 \leq 4,$$

c'est-à-dire $\varepsilon = 1$.

Les points P_1, P_2, \dots, P_μ ($\mu = 3^{\beta-1}$) sont donc des points de coïncidence triple.

Les Γ_2 ont, en P' , un point de rebroussement. En raisonnant comme au Chapitre II, on voit immédiatement que P' est double biplanaire ordinaire pour Φ .

29. Supposons actuellement que $I_{0\beta}$ soit cyclique et cherchons quel est le nombre des points de diramation (nécessairement triple) de Φ .

Pour cela, nous calculerons les invariants de Zeuthen-Segre de Φ et de F. En indiquant par m la classe effective de Φ , par x le nombre de points de diramation, on trouve : pour Φ

$$I = 20 = m + 3x - 6 \cdot 3^\beta(\pi - 1) - 4,$$

et pour F

$$I = 20 = 3^\beta m + 3^{\beta-1} x - 6 \cdot 3^{2\beta}(\pi - 1) - 4.$$

L'élimination de m donne

$$x = 3^{2-\beta}(3^\beta - 1).$$

D'autre part, si nous désignons par T la transformation birationnelle cyclique de période 3^β de F en elle-même engendrant $I_{0\beta}$, la transformation $T^{3^{\beta-1}}$ est de période 3 et engendre donc une involution d'ordre 3. Cette involution possède une coïncidence (triple) en tous points de coïncidence de $I_{0\beta}$. Or, nous savons que le nombre des coïncidences de $I_{0\beta}$ est $3^{\beta-1}x$ et que celui d'une involution d'ordre 3 est 6 (Chap. II). On a donc $x = 2 \cdot 3^{2-\beta}$. Comparant les deux valeurs trouvées pour x , on trouve $2 = 3^\beta - 1$, d'où $\beta = 1$.

Supposons maintenant que l'involution $I_{0\beta}$ ne soit pas cyclique. Le nombre $x = 3^{2\beta}(3^\beta - 1)$ des points de diramation de Φ , obtenu par la comparaison des valeurs des invariants de Zeuthen-Segre de F et de Φ , est toujours valable. On a évidemment $\beta > 1$, donc $\beta = 2$ et $x = 8$.

Soient T_1, T_2 les transformations birationnelles cycliques de période 3, de F en elle-même, engendrant I_{02} .

D'après ce que nous venons de voir, il ne peut exister de point de coïncidence de I_{02} qui soit à la fois invariant pour T_1, T_2 . Cette involution I_{0p} sera donc engendrée par deux transformations n'ayant aucune coïncidence en commun; ainsi que nous l'avons déjà dit plus haut, nous laissons de côté, dans cette étude, de pareilles involutions. Nous reprendrons plus tard leur étude. Dans ces conditions, nous voyons donc que :

Les involutions d'ordre 3^β et de genres 1, existant sur une surface de genres 1, sont nécessairement d'ordre 3.

CHAPITRE V.

INVOLUTIONS D'ORDRE $2^\alpha \cdot 3$.

30. Considérons une involution $I_{\alpha\beta}$ d'ordre $2^\alpha 3^\beta$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) et de genres 1 sur une surface F de genres 1. Elle est engendrée par un groupe de $2^\alpha \cdot 3^\beta$ transformations birationnelles cycliques de F en elle-même. Ne considérons, parmi ces transformations, que celles qui ne sont pas puissances d'autres ou produits de puissances d'autres. Indi-

quons-les par $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_\sigma$ (notations que nous abandonnerons après ce numéro).

Supposons que, parmi ces transformations, il y en ait une, par exemple Θ_1 , de période $2^h \cdot 3^k$. Alors, la transformation $\Theta_1^{2^h}$ a la période 3^k et l'on a donc (Chap. IV) $k = 0$ ou 1 . $\Theta_1^{3^k}$ a la période 2^h et l'on a $h = 0, 1$ ou 2 (Chap. III). La période d'une des transformations $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_\sigma$ est donc égale à $2, 3, 4, 6$ ou 12 .

De plus, nous savons que :

S'il existe plusieurs transformations, par exemple $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_\tau$ ($\tau < \sigma$) de périodes paires respectivement $2h_1, 2h_2, \dots, 2h_\tau$, on a $\tau = 2$,

$$\Theta_1^{h_1} = \Theta_2^{h_2},$$

h_1 et h_2 étant pairs ou non (Chap. III);

S'il existe plusieurs transformations, par exemple $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_\tau$ ($\tau < \sigma$) de périodes respectives $3k_1, 3k_2, \dots, 3k_\tau$, on a

$$\Theta_1^{k_1} \equiv \Theta_2^{k_2} \equiv \dots \equiv \Theta_\tau^{k_\tau},$$

car autrement, l'involution engendrée par $\Theta_1^{k_1}, \dots, \Theta_\tau^{k_\tau}$ serait d'ordre 3^i ($1 < i \leq \tau$), ce qui est impossible (Chap. IV).

Ces remarques permettent de classer les différentes involutions d'ordre $2^\alpha \cdot 3^\beta$ qui peuvent se présenter. On voit immédiatement que l'on doit avoir $\alpha \leq 3, \beta \leq 1$, c'est-à-dire que :

Les involutions de genres 1 sur une surface de genres 1 sont d'ordre 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

Nous avons déjà étudié celles d'ordre 2, 3, 4 et 8. Nous étudierons dans ce dernier Chapitre les involutions d'ordre 6, 12 et 24.

Avant de commencer cette étude, nous rappellerons une fois pour toutes certaines propriétés que nous avons établies au Chapitre I :

1° On peut supposer l'existence, sur F , d'un système incomplet $|C|$, de degré $2 \cdot 3^2 \cdot 2^{2\alpha}(\pi - 1)$, de genre $3^2 \cdot 2^{2\alpha}(\pi - 1) + 1$ et de dimension $3 \cdot 2^\alpha(\pi - 1) + 1$, composé avec $I_{\alpha 1}$.

2° On peut prendre pour surface représentative de l'involution une surface Φ , d'ordre $2 \cdot 3 \cdot 2^\alpha(\pi - 1)$, située dans un espace linéaire

à $3 \cdot 2^\alpha (\pi - 1) + 1$ dimensions, dont les sections hyperplanes de genre $3 \cdot 2^\alpha (\pi - 1) + 1$ correspondent aux courbes C.

3° L'existence d'un point P_1 de coïncidence ν -uple sur la surface F entraîne celle de $\mu - 1 = \frac{3 \cdot 2^\alpha}{\nu} - 1$ autres points de coïncidence ν -uple, ces μ points formant un groupe de l'involution $I_{\alpha 1}$.

Actuellement, μ étant entier, on peut avoir $\nu = 2^\varepsilon$ et $\nu = 3 \cdot 2^\varepsilon$ ($\varepsilon \leq \alpha \leq 3$).

Si ε est supérieur à zéro, il existe une transformation de période 2 (et non supérieure à 2), génératrice de $I_{\alpha 1}$, qui laisse invariant tout point de F infiniment voisin de l'un des points de coïncidence ν -uple P_1, P_2, \dots, P_μ .

Il existe un système linéaire $|C_2|$, formé de courbes C, pour lequel les μ points P_1, P_2, \dots, P_μ sont des points-bases ν -uples.

I. — Involution d'ordre 6.

31. Supposons $\alpha = 1$. Nous avons alors une involution I_{11} d'ordre 6. Cette involution peut avoir des coïncidences doubles, triples et sextuples.

Nous avons étudié les coïncidences doubles et triples dans les Chapitres antérieurs :

Les points de coïncidence double se distribuent par groupes de trois. Un point de diramation double est un point double conique de Φ . Les C passant par un point de coïncidence double y acquièrent un point double ordinaire à tangentes variables.

Les points de coïncidence triple se distribuent par couples. Un point de diramation triple est un point double biplanaire ordinaire de Φ . Les C passant par un point de coïncidence triple y acquièrent un point double ordinaire à tangentes fixes.

Soit P_1 un point de coïncidence sextuple et soit P' le point de diramation correspondant sur Φ . Considérons les courbes C passant par P_1 et désignons-les par C_1 . Désignons par Γ_1 les sections hyperplanes de Φ qui correspondent aux C_1 .

Supposons que les C_1 aient, en P_1 , une singularité abaissant leur

genre de i unités, en sorte que le genre des C_i est $36(\pi - 1)$. Dans le voisinage de P_i , l'involution engendrée sur une C_i par I_{11} possède un certain nombre δ de points de coïncidence. Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance $(1, 6)$ liant une Γ_i et une C_i homologues. On voit immédiatement que P' est double pour Φ et qu'on a donc

$$6[12(\pi - 1) - 2] + \delta = 72(\pi - 1) - 2i,$$

c'est-à-dire

$$\delta + 2i = 12.$$

Désignons par Θ_1, Θ_2 les transformations birationnelles de F en elle-même, de périodes respectives 2 et 3, qui engendrent I_{11} . Si cette involution est cyclique, Θ_1 sera le cube et Θ_2 le carré d'une transformation cyclique de période 6. Ou encore, le produit Θ_1, Θ_2 sera une transformation cyclique d'ordre 6.

Ainsi que nous l'avons vu (Chap. I), la transformation Θ_1 , de période 2, laisse invariant tout point de F infiniment voisin de P_i . Θ_2 détermine, dans le domaine du premier ordre de P_i , ou si l'on veut dans le faisceau des tangentes à F en P_i , une involution cyclique d'ordre 3, ayant donc deux coïncidences t_1, t_2 .

Comment peuvent se comporter les courbes C_i en P_i ? Tout d'abord, il y aura, sur une courbe C_i , au plus deux groupes de I_{11} infiniment voisins de P_i , car la courbe Γ_i correspondante a au plus deux branches au point double P' . On peut donc faire les hypothèses suivantes :

1° Les C_i ont en P_i un point double ordinaire dont les branches touchent respectivement t_1, t_2 .

On a alors $\delta = 2 \cdot 5, i = 1$, car le point infiniment voisin de P_i dans l'une des directions t_1, t_2 est invariant pour Θ_1 et Θ_2 . L'équation (1) est vérifiée identiquement.

2° Les C_i ont en P_i un point sextuple à tangentes variables. On a alors $\delta = 6, 2i = 30$, ce qui est impossible.

3° Les C_i ont en P_i un point triple à tangentes variables. On a $\delta = 3, 2i = 6$, ce qui est également impossible.

4° Les C_i ont en P_i un point quadruple dont deux tangentes coïncident avec t_1 et les deux autres avec t_2 . On a $2i \geq 16$ de sorte que,

quel que soit δ (certainement supérieur à zéro), l'équation (1) n'est pas vérifiée.

5° Les C_1 ont en P_1 un point quadruple dont trois branches sont variables, la quatrième branche étant tangente à t_1 ou à t_2 . On a $\delta = 8$, $2i = 12$, ce qui est incompatible avec l'équation (1).

6° Les C_1 ont en P_1 un point quintuple dont trois branches sont variables et elles ont en outre, sur t_1 ou t_2 , un point double infiniment voisin de P_1 (au moins). On a $2i \geq 22$, ce qui est impossible.

7° Les C_1 ont en P_1 un point triple dont une tangente coïncide avec t_1 (ou t_2), les deux autres coïncidant avec t_2 (ou t_1). On a $\delta > 5$, $2i \geq 8$ et l'équation (1) ne peut donc être satisfaite (1).

La première hypothèse est donc la seule acceptable.

A une courbe C_1 correspond une courbe Γ_1 qui a généralement deux branches distinctes en P' . Ce point n'est donc pas un point double uniplanaire pour Φ .

Le degré effectif de $|\Gamma_1|$ est égal à $2.6(\pi - 1) + 2$, donc celui de $|C_1|$ est égal à $2.36(\pi - 1) - 12$. Il faut donc que les branches des courbes C_1 aient en P_1 des contacts quadripunctuels.

32. Considérons le système $|C_2|$ formé de courbes C ayant en P_1 un point sextuple à tangentes variables, et le système correspondant sur Φ , $|\Gamma_2|$.

Le degré virtuel de $|\Gamma_2|$ se calcule pour la formule de Zeuthen. On trouve

$$\xi = 12(\pi - 1) - 6.$$

Le degré effectif de $|C_2|$ est égal à $72(\pi - 1) - 36$, donc celui de $|\Gamma_2|$ est égal à $12(\pi - 1) - 6$, c'est-à-dire à ξ .

On conclut de là que la singularité de la surface Φ en P' se compose

(1) Il est inutile de considérer l'hypothèse dans laquelle les C_1 auraient en P_1 un point double auquel seraient infiniment voisins d'autres points doubles. Ces courbes auraient alors en P_1 une tangente unique, soit t_1 , soit t_2 . Les C_1 formeraient donc deux systèmes de dimension $6(\pi - 1)$ et ces deux systèmes détermineraient un système de dimension $\geq 6(\pi - 1) + 1$, composé de courbes C , donc coïncident avec $|C|$ (dont la dimension est $6\pi - 5$) ayant en P_1 un point double à tangentes variables. Cela est absurde, $|C|$ n'ayant aucun point-base.

d'au moins trois points doubles infiniment voisins. Nous avons vu d'ailleurs que P' était un point double non uniplanaire de Φ , par suite il possède, dans son domaine du premier ordre, un seul point double et est ainsi biplanaire.

Fixons l'attention sur les sections hyperplanes Γ'_i de Φ passant par P' et par le point double infiniment voisin. Les Γ'_i forment un système $|\Gamma'_i|$ de degré $12(\pi - 1) - 4$, de genre $6(\pi - 1) - 1$ et de dimension $6(\pi - 1) - 1$.

Soit $|C'_i|$ le système correspondant sur F . Les courbes C'_i sont évidemment des courbes C_i particulières. Supposons que les C'_i ont en P_i une singularité abaissant le genre de i' unités et que l'involution d'ordre 6 existant sur une C'_i , possède δ' coïncidences dans le voisinage de P_i . La formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance liant une Γ'_i et la C'_i homologue, donne

$$6[12(\pi - 1) - 4] + \delta' = 72(\pi - 1) - 2i',$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad \delta' + 2i' = 24.$$

Les courbes Γ'_i ayant au plus deux branches en P' , il y a au plus deux groupes de I_{11} infiniment voisins de P_i sur une courbe C'_i . Nous pouvons par suite faire sur les courbes C'_i les mêmes hypothèses que sur les courbes C_i , sauf bien entendu la première, relativement à la singularité de ces courbes en P_i .

Les deuxième et troisième hypothèses se rejettent immédiatement. Nous ne nous en occuperons plus ici et passerons directement à la quatrième.

4° Les C'_i ont en P_i un point quadruple dont deux tangentes coïncident avec t_1 , les deux autres avec t_2 . On a alors $2i' \geq 16$. Pour calculer δ' observons un point M s'approchant indéfiniment de P_i sur une courbe C_i et précisément sur une branche de cette courbe tangente à t_1 . Les cinq points de F qui, avec M , forment un groupe de I_{11} , se distribuent donc sur la même branche que M , les trois autres sur l'autre branche de C'_i touchant également t_1 . Lorsque M est infiniment voisin de P_i , il y a donc, sur chaque branche tangente à t_1 , une coïncidence triple, mais il n'y a plus de coïncidence double. On a

donc $\delta' = 4 \cdot 2 = 8$. L'équation (2) donne alors $i' = 8$, ce qui est possible.

5° Les C'_1 ont en P_1 un point quadruple dont trois branches sont variables et la quatrième tangente à t_1 ou à t_2 . On a alors $\delta' = 8$, $2i' = 12$ et (2) n'est pas satisfaite.

6° Les C'_1 ont en P_1 un point quintuple dont trois tangentes sont variables et dont les deux autres tangentes coïncident avec t_1 ou t_2 . On a $2i' \geq 22$ et $\delta' = 5$, ce qui est incompatible avec l'équation (2).

7° Les C'_1 ont en P_1 un point triple dont une tangente est t_1 (ou t_2) et dont les deux autres tangentes coïncident avec t_2 (ou t_1). Mais alors les C'_1 forment deux systèmes linéaires de dimension $6(\pi - 1) - 1$. Ils déterminent un système linéaire de courbes C ayant en P_1 un point triple à tangentes variables et dont la dimension surpasse $6(\pi - 1) - 1$. Cela est évidemment impossible.

En résumé, une seule hypothèse est acceptable.

Les C'_1 ont en P_1 un point quadruple auquel est infiniment voisin, dans chacune des directions t_1, t_2 , un point double. Les Γ'_1 ont deux branches en P' , de sorte que le point double infiniment voisin de P' n'est pas uniplanaire. D'après ce que nous avons vu, il est certainement biplanaire et possède un troisième point double dans son domaine du premier ordre.

33. Considérons les courbes C'_1 touchant, en P_1 , une direction différente de t_1, t_2 et désignons-les par C'_2 .

Les courbes C'_2 ont, en P_1 , une multiplicité supérieure à 4 et d'autre part inférieure à 6. Deux cas peuvent donc se présenter :

1° Les C'_2 ont en P_1 un point quintuple dont trois tangentes sont variables, les deux autres coïncident avec t_1 (ou t_2).

Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance (1, 6) existant entre une Γ'_2 et une C'_2 homologues. Si i'' est l'abaissement produit sur le genre par la singularité des C'_2 en P_1 , et si ξ' est le degré virtuel de $|\Gamma'_2|$, on a

$$6\xi' + 7 = 72(\pi - 1) - 2i'',$$

ce qui est absurde. Le cas actuel ne peut donc pas se présenter.

2° Les C'_2 ont en P_1 un point sextuple à tangentes variables. La formule de Zeuthen donne alors, pour le degré virtuel ξ de $|\Gamma'_2|$,

$$\xi = 12(\pi - 1) - 6.$$

$|C'_2|$ coïncide avec $|C_2|$ et $|\Gamma'_2|$ avec $|\Gamma_2|$.

Les courbes Γ_2 ont en P' trois points doubles successifs et, comme il y a sur une C_2 deux groupes de $I_{1,1}$ infiniment voisins de P_1 , une Γ_2 a deux points distincts dans le domaine du troisième ordre de P' .

Les branches des C_2 étant variables, on en conclut que le point double situé dans le domaine du deuxième ordre de P' est conique.

En P' , Φ a donc une suite de trois points doubles infiniment voisins successifs, les deux premiers étant biplanaires, le dernier conique. Cette singularité est donc un point biplanair de quatrième espèce.

En un point de diramation sextuple, la surface Φ possède un point double biplanair de quatrième espèce.

34. Supposons que la surface Φ possède x_1 points de diramation double, x_2 points de diramation triple et x_3 points de diramation sextuple.

Soit m la classe effective de Φ . Calculons l'invariant de Zeuthen $I = 20$ de cette surface. On trouve

$$I = 20 = 1m + 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 6 \cdot 12(\pi - 1) - 4,$$

car un point double biplanair de quatrième espèce abaisse la classe d'une surface de six unités.

L'invariant de Zeuthen-Segre de F est

$$I = 20 = 6m + 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 \cdot 72(\pi - 1) - 4.$$

En éliminant m entre ces relations, on trouve

$$(1) \quad 9x_1 + 16x_2 + 35x_3 = 5 \times 24.$$

Il est facile de voir que l'équation (1) n'admet qu'une solution en nombres entiers positifs (ou nuls), c'est

$$x_1 = x_2 = x_3 = 2.$$

Nous n'aurons donc, sur F, qu'un seul type d'involution d'ordre 6. Il s'agit de voir si ce sera une involution cyclique ou non.

Remarquons que $I_{1,1}$ est engendré par un groupe de six transformations birationnelles de F en elle-même

$$(A) \quad T_1 = 1, \quad T_2 = \Theta_1, \quad T_3 = \Theta_2, \quad T_4 = \Theta_1\Theta_2, \quad T_5 = \Theta_2^2, \quad T_6 = \Theta_1\Theta_2^2,$$

Θ_1 et Θ_2 étant respectivement de périodes 2 et 3, ainsi que nous l'avons dit au début de ce paragraphe (n° 31).

Considérons les transformations

$$T_1\Theta_1, \quad T_2\Theta_1, \quad T_3\Theta_1, \quad T_4\Theta_1, \quad T_5\Theta_1, \quad T_6\Theta_1.$$

Ce sont aussi des transformations génératrices de $I_{1,1}$ et elles sont évidemment toutes distinctes. Elles reproduisent donc, dans un certain ordre, la suite (A). Précisément, on peut avoir

$$(B) \quad \begin{cases} T_1\Theta_1 = T_2, & T_2\Theta_1 = T_1, & T_3\Theta_1 = T_4, \\ T_4\Theta_1 = T_3, & T_5\Theta_1 = T_6, & T_6\Theta_1 = T_5, \end{cases}$$

ou bien

$$(C) \quad \begin{cases} T_1\Theta_1 = T_2, & T_2\Theta_1 = T_1, & T_3\Theta_1 = T_6, \\ T_4\Theta_1 = T_5, & T_5\Theta_1 = T_4, & T_6\Theta_1 = T_3. \end{cases}$$

Plaçons-nous dans le cas de la suite (B). On a

$$\Theta_1\Theta_2 = \Theta_2\Theta_1,$$

c'est-à-dire que les transformations Θ_1 et Θ_2 sont permutables. On vérifie que $T_4 = \Theta_1\Theta_2$, $T_6 = \Theta_1\Theta_2^2$ sont des transformations cycliques de période 6. L'involution $I_{1,1}$ est donc cyclique.

Considérons l'involution d'ordre 2 engendrée par Θ_1 sur F. Cette involution possède $3x_1 + x_3$ coïncidences. Or le nombre de ces coïncidences doit être 8 (Chap. III), donc on a

$$(2) \quad 3x_1 + x_3 = 8.$$

Considérons l'involution d'ordre 3 engendrée par Θ_2 . Elle possède $2x_2 + x_3$ coïncidences. On a donc (Chap. II)

$$(3) \quad 2x_2 + x_3 = 6.$$

Les équations (2) et (3) sont vérifiées identiquement par les solutions de (1), donc il est possible que I_{11} soit cyclique.

Plaçons-nous dans le deuxième cas. L'existence de la suite (C) entraîne

$$\Theta_1^{-1} \Theta_2 \Theta_1 = \Theta_2^2 = \Theta_2^{-1},$$

c'est-à-dire que Θ_1 transforme Θ_2 en son inverse. Dans la suite (A), il n'y a aucune transformation de période 6, mais il y en a trois, T_2 , T_4 et T_6 de période 2.

Considérons l'involution d'ordre 2 engendrée sur F par $T_2 = \Theta_1$. Elle possède un certain nombre, nécessairement de la forme $3x'_1 + x_3$, de points de coïncidence. On a $3x'_1 + x_3 = 8$; d'où, à cause de (1), $x'_1 = 2$.

Considérons l'involution d'ordre 2 engendrée sur F par $T_4 = \Theta_1 \Theta_2$. Elle possède huit coïncidences parmi lesquelles se trouvent les $x_3 = 2$ coïncidences sextuples de I_{11} . Les autres points de coïncidence, au nombre de 6, ne sont ni des points invariants pour Θ_1 , ni des points invariants pour Θ_2 . Ils donnent donc, sur Φ , deux nouveaux points de diramation double.

De même, T_6 conduit à deux nouveaux points de diramation double sur Φ . Il y aurait donc six points de diramation double, ce qui est incompatible avec (1). Le second cas ne peut, par suite, pas se présenter.

Une involution d'ordre 6 et de genres 1, sur une surface de genres 1, est cyclique. Elle possède deux points de coïncidence sextuple, quatre points de coïncidence triple et six points de coïncidence double. On peut prendre, comme surface représentative de cette involution, une surface normale possédant deux points doubles biplanaires de quatrième espèce, deux points doubles biplanaires ordinaires et deux points doubles coniques.

II. — Involutions d'ordre 12.

35. Supposons $\alpha = 2$, nous avons alors une involution I_{21} d'ordre 12 et de genres 1 sur la surface F.

Cette involution admet cinq espèces de points de coïncidence, à avoir des points de coïncidence double, triple, quadruple, sextuple

et 12-uple. Nous avons implicitement étudié les quatre premières espèces antérieurement, de sorte qu'il suffira de nous occuper ici des points de coïncidence 12-uple.

Nous savons que :

1° Les points de coïncidence double se présentent par groupes de six. Les C passant par les points d'un pareil groupe ont six points doubles ordinaires. Sur la surface Φ correspondent à ces groupes des points doubles coniques.

2° Les points de coïncidence triple se présentent par groupes de quatre. Les C passant par les points d'un tel groupe ont quatre points doubles ordinaires. Un point de diramation triple est, pour Φ , un point double biplanaire ordinaire.

3° Les points de coïncidence quadruple se présentent par groupes de trois. Les C passant par les points d'un tel groupe ont trois points doubles ordinaires. En un point de diramation quadruple, Φ a un point double biplanaire de deuxième espèce.

4° Les points de coïncidence sextuple se présentent par couples. Les C passant par les points d'un de ces couples ont deux points doubles ordinaires. En un point de diramation sextuple, Φ a un point double biplanaire de quatrième espèce.

Pour étudier les points de coïncidence 12-uple, nous considérerons successivement les cas où $I_{2,1}$ est cyclique ou ne l'est pas.

36. *L'involution $I_{2,1}$ est cyclique.* — Soient P le point de coïncidence 12-uple, P' le point de diramation correspondant. Indiquons par T la transformation birationnelle de période 12, de F en elle-même, engendrant $I_{2,1}$. Nous voyons que T^6 laisse invariant tout point de F infiniment voisin de P, par suite T détermine, dans le faisceau des tangentes à F en P, une involution cyclique d'ordre 6. Il y a deux coïncidences t_1, t_2 ; par suite, il y a deux points infiniment voisins de P qui sont invariants pour T.

La discussion des points de coïncidence 12-uple se poursuit d'une manière parfaitement analogue à celle des points de coïncidence sextuple, de sorte que nous irons assez vite.

Nous commencerons par considérer les courbes C passant par P.

Nous les appelons C_i et nous désignons par Γ_i les courbes correspondantes de Φ . On trouve immédiatement que :

1° Les courbes C_i forment un système $|C_i|$ de dimension $3 \cdot 2^2(\pi - 1)$, ayant en P un point double ordinaire à tangentes fixes t_1, t_2 . Les branches des C_i ont entre elles les contacts 10-punctuels.

Les courbes Γ_i ont, en P', un point double à tangentes distinctes. P' est donc un point double non uniplanaire de Φ .

Considérons les courbes C_i , c'est-à-dire les courbes C ayant en P un point 12-uple à tangentes variables et le système $|L_2|$ correspondant sur Φ . Ce système $|\Gamma_2|$ a les degrés virtuel et effectif égaux à $24(\pi - 1) - 12$, et que, par suite, les Γ_2 ont en P' une singularité composée de six points doubles infiniment voisins. Par suite, au point double non uniplanaire P' de Φ est infiniment voisin un second point double de Φ .

Désignons par Γ'_i les Γ_i passant par ce second point double, par C'_i les courbes correspondantes sur Φ .

On établit sans difficultés que :

2° Les courbes C'_i forment un système linéaire $|C'_i|$ de dimension $12(\pi - 1) - 1$, et ont en P un point quadruple dont deux tangentes coïncident avec t_1 , les deux autres avec t_2 .

Les courbes Γ'_i ont en P' deux points doubles successifs dont le dernier est en général ordinaire. Par suite, le point double de Φ , infiniment voisin de P', n'est pas un point uniplanaire.

D'après ce que nous avons vu plus haut, à ce point est certainement infiniment voisin un troisième point double. Désignons par Γ''_i les Γ'_i passant par ce troisième point double, par C''_i les courbes correspondantes sur Φ . On a :

3° Les courbes C''_i forment un système linéaire $|C''_i|$ de dimension $12(\pi - 1) - 2$ et ont en P un point octuple dont quatre tangentes coïncident avec t_1 , les quatre autres avec t_2 .

Les courbes Γ''_i ont en P' trois points doubles successifs dont le dernier est ordinaire. Le point double de Φ situé dans le domaine du second ordre de P' n'est donc pas uniplanaire.

Désignons par C'_2 les C''_i touchant, en P, une direction différente de t_1, t_2 .

4° Les C'_2 ont en P un point 12-uple ordinaire à tangentes variables

et coïncident donc avec les C_2 . Elles forment un système linéaire $|C_2|$ de dimension $12(\pi - 1) - 3$.

Les Γ_2 ont en P' une singularité composée de quatre points doubles infiniment voisins dont le dernier est ordinaire. Φ a donc en P' une suite de quatre points doubles dont le dernier n'est pas uniplanaire. On peut même montrer qu'il est conique, car les branches des C_2 sont variables. Cependant, cela ne nous sera pas nécessaire. Il nous suffira de remarquer que, d'une part, nous avons trouvé que, en P' , les Γ_2 avaient une singularité abaissant le genre de six unités et que, d'autre part, nous trouvons que cette singularité n'abaisse le genre que de quatre unités. L'absurdité à laquelle nous parvenons provient de ce que nous avons supposé l'existence de points de diramation 12-uples lorsque $I_{2,1}$ est cyclique. Il n'y a donc pas actuellement de pareils points.

Supposons que Φ possède x_1 points de diramation double, x_2 points de diramation triple, x_3 points de diramation quadruple et x_4 points de diramation sextuple. Si m est la classe effective de Φ , l'invariant de Zeuthen-Segre de cette surface est

$$I = 20 = m + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 - 6 \cdot 24(\pi - 1) - 4,$$

et celui de F ,

$$I = 20 = 12m + 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 12 \cdot \overline{12}^2 (\pi - 1) - 4.$$

L'élimination de m donne

$$(1) \quad 18x_1 + 32x_2 + 45x_3 + 70x_4 = 11 \times 24.$$

L'involution d'ordre 2, engendrée sur F par T^c , possède $6x_1 + 3x_3 + 2x_4$ coïncidences, donc

$$(2) \quad 6x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 8.$$

L'involution d'ordre 3, engendrée sur F par T^4 , possède $4x_2 + 2x_4$ coïncidences, donc

$$(3) \quad 2x_2 + x_4 = 3.$$

Il est très facile de voir que les équations (1), (2), (3) n'ont aucune solution en nombres entiers positifs ou nuls. On en conclut que :

Une involution d'ordre 12 et de genres 1 sur une surface de genres 1 n'est pas cyclique.

37. *L'involution $I_{2,1}$ n'est pas cyclique.* — Lorsque l'involution $I_{2,1}$ n'est pas cyclique, elle est engendrée par deux transformations birationnelles de F en elle-même Θ_1, Θ_2 , respectivement de périodes 4 et 3⁽¹⁾. En d'autres termes, $I_{2,1}$ est engendrée par le groupe des douze transformations birationnelles

$$\begin{array}{cccc} 1, & \Theta_1, & \Theta_1^2, & \Theta_1^3, \\ \Theta_2, & \Theta_2\Theta_1, & \Theta_2\Theta_1^2, & \Theta_2\Theta_1^3, \\ \Theta_2^2, & \Theta_2^2\Theta_1, & \Theta_2^2\Theta_1^2, & \Theta_2^2\Theta_1^3. \end{array}$$

En multipliant ces douze transformations par Θ_2 , on doit les retrouver toutes les douze dans un autre ordre. On voit immédiatement que six cas peuvent se présenter, selon que la deuxième de ces transformations Θ_1 est transportée en $\Theta_2\Theta_1, \Theta_2^2\Theta_1, \Theta_2\Theta_1^2, \Theta_2^2\Theta_1^2, \Theta_2\Theta_1^3, \Theta_2^2\Theta_1^3$. Nous allons examiner ces six cas séparément.

1° $\Theta_1\Theta_2 = \Theta_2\Theta_1$. — Les deux transformations sont permutables et la transformation $\Theta_1\Theta_2$ est cyclique de période 12. Nous avons vu plus haut que cela est impossible, donc le premier cas ne peut se présenter.

2° $\Theta_1\Theta_2 = \Theta_2^2\Theta_1$. — On a alors

$$\Theta_1^{-1}\Theta_2\Theta_1 = \Theta_2^2 = \Theta_2^{-1},$$

c'est-à-dire que la transformation de période 4 transforme celle de période 3 en son inverse.

Les transformations $\Theta_2\Theta_1^2, \Theta_2^2\Theta_1^2$ sont cycliques de période 6 et l'on a précisément

$$(\Theta_2\Theta_1^2)^2 = \Theta_2^2, \quad (\Theta_2^2\Theta_1^2)^2 = \Theta_2.$$

(1) L'involution d'ordre 4 avec laquelle $I_{2,1}$ est composée est nécessairement cyclique. Si, en effet, Θ'_1, Θ''_1 étaient deux transformations de période 2, cette involution d'ordre 4 serait engendrée par $1, \Theta'_1, \Theta''_1, \Theta'_1\Theta''_1$ et $\Theta'_1\Theta''_1$ serait cyclique de période 4.

$\Theta_1, \Theta_2\Theta_1, \Theta_2^2\Theta_1, \Theta_1^3, \Theta_2\Theta_1^3, \Theta_2^2\Theta_1^3$ sont six transformations cycliques de période 4. On a

$$\begin{aligned} (\Theta_2\Theta_1)^2 &= \Theta_1^2, & (\Theta_2^2\Theta_1)^2 &= \Theta_1^2, & (\Theta_2\Theta_1^3)^2 &= \Theta_1^2, \\ (\Theta_2^2\Theta_1^3)^2 &= \Theta_1^2, & (\Theta_1^3)^2 &= \Theta_1^2, \end{aligned}$$

comme il fallait s'y attendre, car nous avons établi que si F possédait plusieurs transformations de période 4 en elle-même, les carrés de ces transformations coïncidaient.

Enfin, il y a deux transformations Θ_2, Θ_2^3 de période 3 et une, Θ_1^2 , de période 2.

3° $\Theta_1\Theta_2 = \Theta_2\Theta_1^2$. — Cela est impossible, car $\Theta_2\Theta_1$ serait alors une transformation cyclique de période 12.

4° $\Theta_1\Theta_2 = \Theta_2^2\Theta_1^2$. — Dans ce cas, $\Theta_2\Theta_1$ serait une transformation cyclique de période 8. Or, nous avons vu que de telles transformations ne pouvaient exister, donc le quatrième cas est à écarter.

5° $\Theta_1\Theta_2 = \Theta_2\Theta_1^3$. — Alors, $\Theta_2^2\Theta_1$ serait cyclique de période 12, ce qui est impossible.

6° $\Theta_1\Theta_2 = \Theta_2^2\Theta_1^3$. — Actuellement, $\Theta_1\Theta_1^2$ serait cyclique de période 12, ce qui est impossible.

Nous voyons donc que :

Une involution d'ordre 12 et de genres 1 sur une surface de genres 1 est engendrée par deux transformations cycliques de périodes respectives 4 et 3, la transformation d'ordre 4 changeant l'autre en son inverse.

On peut ajouter que le groupe d'ordre 12 qui engendre l'involution contient un sous-groupe d'ordre 6, trois sous-groupes d'ordre 4, un sous-groupe d'ordre 3 et un d'ordre 2.

38. Soient P un point de coïncidence 12-uple sur F, P' le point de diramation correspondant sur Φ .

Comme nous l'avons vu, la transformation Θ_1^2 , de période 2, laisse invariant tout point de F infiniment voisin de P. Il s'ensuit que l'involution $I_{2,1}$, ou si l'on veut, les transformations Θ_1, Θ_2 , déterminent dans le faisceau des tangentes à F en P, une involution du sixième ordre. Il y aura deux tangentes t_1, t_2 laissées invariantes par Θ_2 . Θ_1 échangera évidemment ces deux tangentes entre elles. Il y aura de

plus trois couples de tangentes $t_3, t_4; t_5, t_6; t_7, t_8$, invariantes pour des transformations de période 4 génératrices de I_{24} . En effet, Θ_1 laisse invariantes deux tangentes t_3, t_4 . Θ_2 transporte ces tangentes en t_5, t_6 et ensuite ces dernières en t_7, t_8 respectivement.

Appelons C_i les courbes C passant par P , Γ_i les sections hyperplanes correspondantes de Φ .

On reconnaît immédiatement, par l'emploi de la formule de Zeuthen, que P' est un point double de Φ . Alors, si i est l'abaissement du genre produit par la singularité des C_i en P , δ le nombre de coïncidences de l'involution d'ordre 12 déterminée sur une C_i par I_{24} (ces coïncidences tombant nécessairement dans le voisinage de P), la formule de Zeuthen donne

$$12[2 \cdot 12(\pi - 1) - 2] + \delta = 2 \cdot \overline{12}^2 (\pi - 1) - 2i,$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad \delta + 2i = 24.$$

On peut faire les hypothèses suivantes sur la singularité des C_i en P , en tenant compte des propriétés des directions unies t_1, t_2, \dots, t_8 par rapport à Θ_1, Θ_2 :

1° Les C_i ont en P un point double à tangentes fixes t_1, t_2 . On a $\delta = 10, i = 1$, ce qui est incompatible avec (1).

2° Les C_i ont en P un point triple à tangentes fixes t_1, t_2, t_3 . Il vient $\delta = 6, i = 3$, ce qui est impossible à cause de (1).

3° Les C_i ont en P un point quadruple avec, dans chacune des directions t_1, t_2 , un point double infiniment voisin.

On a $\delta = 8, i = 8$ et l'équation (1) est vérifiée.

Sur une courbe C_i , il y a un seul groupe de I_{24} infiniment voisin de P , de sorte que les Γ_i ont, en P' , un point de rebroussement (ordinaire, car autrement P' serait un point double tacnodal de Φ , ce qui est impossible). Le point P' est donc un point double uniplanaire de Φ .

Comme vérification, on peut constater que le degré effectif de $|C_i|$ est égal à $2 \cdot \overline{12}^2 (\pi - 1) - 24$; celui de $|\Gamma_i|$ est donc égal à $2 \cdot 12(\pi - 1) - 2$, ce qui correspond au fait que P' est double pour Φ .

4° Les C_1 ne peuvent avoir, en P, une multiplicité supérieure à 4, car alors cette multiplicité serait au moins égale à 10 et l'on aurait $2i \geq 30$, ce qui est incompatible avec l'équation (1).

39. Recherchons quels sont les différents systèmes de courbes C_1 ayant en P un point de multiplicité supérieure à 4 et ne coïncidant pas avec $|C_2|$ (pour lequel P est un point-base 12-uple). Les quatre cas suivants peuvent *a priori* se présenter :

1° Système des courbes C_1 ayant, en P, un point sextuple à tangentes variables.

2° Système formé par les C_1 ayant en P un point sextuple dont les tangentes sont t_3, t_4, \dots, t_8 .

3° Système des C_1 ayant en P un point sextuple avec, dans deux directions tangentes à t_1, t_2 , h points triples infiniment voisins successifs.

4° Système des C_1 ayant en P un point octuple avec, dans deux directions tangentes à t_1, t_2 , h points quadruples infiniment voisins successifs.

Examinons séparément ces quatre hypothèses.

La première est inadmissible, car les courbes correspondant sur Φ aux courbes C_1 considérées auraient, d'après la formule de Zeuthen, le genre ρ donné par

$$12[2\rho - 2] + 6 = 2 \cdot \overline{12^2} (\pi - 1) - 30,$$

c'est-à-dire

$$\rho = 12(\pi - 1) + \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde.

Dans la deuxième hypothèse, le même procédé montre que le genre ρ des courbes Γ'_1 correspondant aux courbes C_1 considérées (que nous désignerons par C'_1) est égal à $12(\pi - 1) - 1$, c'est-à-dire que les hyperplans découpant les Γ'_1 sur Φ ont deux points doubles infiniment voisins successifs en P'.

Le degré effectif de $|C'_1|$ est égal à $2 \cdot \overline{12^2} (\pi - 1) - 36 - 6h$, les différentes branches de C'_1 ayant, en P, des contacts d'ordre $h > 0$. Celui de $|\Gamma'_1|$ est donc égal à $2 \cdot 12(\pi - 1) - 3 - \frac{h}{2}$.

D'autre part, sur une courbe C'_1 , il y a deux groupes de I_2 , infiniment voisins de P ; donc les Γ'_1 ont, en P' , un tacnode ordinaire. En d'autres termes, le point double infiniment voisin de P' et commun à toutes les Γ'_1 est conique. Le système $|\Gamma'_1|$ n'a donc pas de points-bases simples et l'on a nécessairement $h = 2$.

La seconde hypothèse se présente donc effectivement.

Envisageons la troisième hypothèse. Le genre ρ des courbes correspondant sur Φ aux C_1 , considérées et donné par la formule de Zeuthen est

$$\rho = 12(\pi - 1) - \frac{1 + h}{2}.$$

Le degré effectif de ces courbes est, d'autre part, égal à

$$2 \cdot 12(\pi - 1) - 3 - \frac{3h}{2}.$$

D'après la première égalité, h doit être impair. D'après la seconde, il doit être pair, ce qui est absurde. L'hypothèse 3° ne peut donc se présenter.

Passons à la dernière hypothèse qu'on puisse faire. Désignons par C'_1 les courbes C_1 particulières considérées, par Γ''_1 les courbes qui leur correspondent sur Φ .

La formule de Zeuthen donne, pour le genre ρ des Γ''_1 ,

$$\rho = 12(\pi - 1) - 2 - h.$$

Le degré effectif de $|C''_1|$ est égal à $2 \cdot 12^2(\pi - 1) - 64 - 32h$; donc, celui, η , de $|\Gamma''_1|$ est

$$\eta = 2 \cdot 12(\pi - 1) - \frac{16 + 8h}{3}.$$

D'autre part, le genre ρ des Γ''_1 étant de $h + 3$ unités inférieur à celui des Γ'_1 , les courbes Γ''_1 ont, en P' , une suite de $h + 3$ points doubles infiniment voisins successifs (évidemment doubles pour Φ , puisque les Γ''_1 sont des sections hyperplanes). Sur une C''_1 , il y a deux groupes de I_2 , infiniment voisins de P ; donc le dernier point double des Γ''_1 en P' est un point double ordinaire. Le système $|\Gamma''_1|$ n'a donc pas de points-bases simples, c'est-à-dire que ses degrés virtuel $2\rho - 2$

et effectif η sont égaux. Cela conduit à $h = 1$. La dernière hypothèse se présente donc effectivement.

Le point P' est, comme nous l'avons vu, un point doublé uniplanaire. Par suite, Φ possède une droite simple infiniment voisine de P' . Dans le voisinage de P' , il y a tout d'abord un point double (commun aux Γ'_1), puis une suite de deux points doubles (communs aux Γ''_1). P' n'est donc pas un point uniplanaire ordinaire; car, des trois tangentes quadripunctuelles de F en P' , deux sont infiniment voisines.

40. Considérons les courbes C''_1 touchant en P une direction différente de t_1, t_2, \dots, t_8 . Elles forment un système de dimension $12(\pi - 1) - 4$ [car $|C''_1|$ et $|\Gamma''_1|$ ont la même dimension $12(\pi - 1) - 3$]. Ces courbes ont en P une branche variable; donc, par un raisonnement déjà fait maintes fois, elles en ont certainement cinq autres. En d'autres termes, les C''_1 particulières considérées ont, en P , un point $6k$ -uple à tangentes variables.

On ne peut avoir $k = 1$, comme on l'a montré précédemment. On ne peut non plus avoir $k > 2$, car les sections hyperplanes correspondantes sur Φ auraient plus de deux branches en P' , ce qui est absurde. Par suite, on a $k = 2$ et les courbes considérées sont les courbes C_2 .

Le degré virtuel de $|\Gamma_2|$ est égal à (par la formule de Zeuthen)

$$\xi = 2 \cdot 12(\pi - 1) - 12.$$

Le genre des $|\Gamma_2|$ est donc $12(\pi - 1) - 5$; la dimension de ce système est, comme nous venons de le voir, $12(\pi - 1) - 4$. Il n'y a pas là contradiction, car les Γ_2 sont découpées par les hyperplans contenant la droite simple de Φ infiniment voisine de P' .

Sur une C_2 , il y a deux groupes de I_2 , infiniment voisins de P . De plus les C_2 ont les branches variables. On en conclut que les Γ_2 ont, dans le domaine du troisième ordre de P' , deux points simples variables.

En rapprochant ceci de ce qui a été dit à la fin du numéro précédent, on voit que le point P' est un point uniplanaire de deuxième espèce de Φ (1).

(1) C'est-à-dire un point uniplanaire dont deux des tangentes quadripunctuelles sont

Un point de diramation d'ordre 12 de Φ est, pour cette surface, un point uniplanaire de deuxième espèce.

41. Nous allons maintenant déterminer le nombre des points de coïncidence de diverses espèces de l'involution $I_{2,1}$.

Soient, sur Φ , x_1 le nombre de points de diramation double, x_2 celui des points de diramation triple, x_3 celui des points de diramation quadruple, x_4 celui des points de diramation sextuple, et enfin x_5 celui des points de diramation 12-uple.

Calculons l'invariant de Zeuthen-Segre $I = 20$ de Φ . Pour cela, désignons par m la classe effective de cette surface et rappelons-nous que la classe d'une surface est abaissée de sept unités par la présence d'un point uniplanaire de deuxième espèce. On obtient

$$I = 20 = m + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 - 6 \cdot 12(\pi - 1) - 4.$$

Le calcul de l'invariant de Zeuthen-Segre de F se fait seulement en remarquant qu'une courbe ayant un point quadruple ayant deux points doubles ordinaires dans son domaine du premier ordre équivaut à treize courbes ayant un point double (1). On trouve

$$I = 20 = 12m + 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 13x_5 - 6 \cdot 12^2(\pi - 1) - 4.$$

L'élimination de m entre ces formules donne

$$(1) \quad 18x_1 + 32x_2 + 45x_3 + 70x_4 + 71x_5 = 11 \times 24.$$

Considérons l'involution d'ordre 2 engendrée sur F par Θ_1^2 . Cette involution possède $6x_1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5$ coïncidences, donc on a

$$(2) \quad 6x_1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 8.$$

Considérons l'involution d'ordre 3 engendrée sur F par Θ_2 . Elle possède $4x_2 + 2x_4 + x_5$ coïncidences, donc

$$(3) \quad 4x_2 + 2x_4 + x_5 = 6.$$

infiniment voisins. Un tel point abaisse la classe d'une surface de sept unités. On l'obtient en rendant biplanaire un des trois points infiniment voisins du point double uniplanaire. Deux de ces trois points sont alors situés sur un cycle du troisième ordre [SEGRE, *Sulla scomposizione (loc. cit.)*].

(1) Voir la Note à la fin du Mémoire.

Enfin, considérons l'involution cyclique d'ordre 6 engendrée sur F par $\Theta_2\Theta_1^2$. Elle possède $2x_4 + x_5$ coïncidences sextuples, donc on a (Chap. V, § 1)

$$(4) \quad 2x_4 + x_5 = 2.$$

On trouve facilement que les équations (1), (2), (3) et (4) admettent l'unique solution en nombres entiers positifs ou nuls

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 2.$$

Une involution d'ordre 12 et de genres 1, sur une surface de genres 1, possède deux points de coïncidence d'ordre 12, six points de coïncidence quadruple et quatre points de coïncidence triple.

On peut prendre, comme surface représentative de cette involution, une surface normale possédant deux points uniplanaires de deuxième espèce, deux points biplanaires de deuxième espèce et un point biplanair ordinaire.

III. — Involution d'ordre 24.

42. Il nous reste à étudier les involutions d'ordre $24 (d=3) I_{3,1}$. Mais ici, nous n'aurons pas même besoin de rechercher quelle serait la singularité de la surface Φ en un point de diramation 24-uple.

L'involution $I_{3,1}$ est engendrée par trois transformations birationnelles cycliques de F en elle-même $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$. Les deux premières ont la période 4, la troisième la période 3.

En remarquant que Θ_1, Θ_2 doivent engendrer une involution d'ordre 8, Θ_1, Θ_3 une d'ordre 12 et Θ_2, Θ_3 également une involution d'ordre 12, on voit que l'on doit avoir les trois relations

$$\Theta_1^2 = \Theta_2^2, \quad \Theta_1^{-1}\Theta_3\Theta_1 = \Theta_3^2, \quad \Theta_2^{-1}\Theta_3\Theta_2 = \Theta_3^2.$$

On vérifie sans aucune peine que $\Theta_1^2 = \Theta_2^2$ est la seule transformation de période 2 laissant invariant tout groupe de $I_{3,1}$ et que, de même, Θ_3 et Θ_3^2 sont les seules transformations de période 3 jouissant de la même propriété.

Supposons que l'involution $I_{3,1}$ possède x_1 groupes de douze points de coïncidence double, x_2 groupes de huit points de coïncidence triple, x_3 groupes de six points de coïncidence quadruple, x_4 groupes de quatre points de coïncidence sextuple, x_5 groupes de trois points de

coïncidence octuple, x_6 groupes de deux points de coïncidence d'ordre 12 et enfin x_7 points de coïncidence d'ordre 24.

Considérons l'involution d'ordre 2 engendrée par la transformation $\Theta_1^2 = \Theta_2^2$; elle possède $12x_1 + 6x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7$ points de coïncidence, donc on a

$$(1) \quad 12x_1 + 6x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 = 8.$$

La considération de l'involution d'ordre 3 engendrée par Θ_3 donne de même

$$(2) \quad 8x_2 + 4x_4 + 2x_6 + x_7 = 6.$$

De ces formules on déduit d'abord $x_1 = x_2 = 0$, car les x sont positifs ou nuls. Soustrayant alors (2) de (1), on trouve

$$6x_3 + 3x_5 = 2,$$

équation impossible en nombres entiers.

Il n'existe pas d'involution d'ordre supérieur à 12 et de genres 1 sur une surface de genres 1.

Résumé.

43. Nous pouvons résumer la classification des involutions de genres 1 existant sur une surface de genres 1 par le Tableau suivant :

Tableau des involutions de genres 1 sur une surface de genres 1.

Ordre de l'involution.	Nombre de groupes composés de points de coïncidence d'ordre						Observations sur la génération des involutions.
	2.	3.	4.	6.	8.	12.	
2	8	0	0	0	0	0	Cyclique.
3	0	6	0	0	0	0	Cyclique.
4	2	0	4	0	0	0	Cyclique.
6	2	2	0	2	0	0	Cyclique.
8	1	0	0	0	4	0	Engendrée par deux transformations cycliques de période 4 dont les carrés coïncident.
8	0	0	3	0	2	0	
12	0	1	2	0	0	2	Engendrée par deux transformations Θ_1, Θ_2 respectivement de périodes 4, 3, telles que $\Theta_1^{-1} \Theta_2 \Theta_1 = \Theta_2^3.$

44. Appelons *surface de genres 1 et de rang n* une surface de genres 1 qui représente une involution d'ordre n appartenant à une surface de genres 1. Nous avons les théorèmes suivants :

I. *Une surface normale de genres 1 et de rang 2 possède huit points doubles coniques.*

II. *Une surface normale de genres 1 et de rang 3 possède six points doubles biplanaires ordinaires.*

III. *Une surface normale de genres 1 et de rang 4 possède quatre points doubles biplanaires ayant, dans leur domaine du premier ordre, un point double conique et deux points doubles coniques.*

IV. *Une surface normale de genres 1 et de rang 6 possède deux points doubles coniques, deux points doubles biplanaires ordinaires et deux points doubles biplanaires ayant, dans leur domaine du premier ordre, un point double bipolaire et, dans leur domaine du second ordre, un point double conique.*

V. *Une surface normale de genres 1 et de rang 8 possède soit quatre points doubles uniplanaires ordinaires et un point double conique, soit deux points doubles uniplanaires ordinaires et trois points doubles biplanaires ayant, dans leur domaine du premier ordre, un point double conique.*

VI. *Une surface normale de genres 1 et de rang 12 possède un point double bipolaire ordinaire, deux points doubles biplanaires ayant, dans leur domaine du premier ordre, un point double conique, et deux points doubles uniplanaires dont deux des trois tangentes singulières sont infiniment voisines.*

Note sur le calcul de l'invariant de Zeuthen-Segre.

45. Étant donné, sur une surface algébrique S , un faisceau linéaire de courbes $|C|$, de degré n , de genre π , M. Segre a démontré que l'expression

$$I = \delta - n - 4\pi,$$

où δ est le nombre de courbes C ayant un point double en un point simple de S , est indépendante du choix du faisceau $|C|$ (¹),

(¹) SEGRE, *Interno ad un carattere...* Les notations employées ici n'ont évidemment plus la même signification que plus haut.

Nous avons été amené, dans le cours de notre travail, à chercher l'influence sur δ produite par la présence d'une courbe C ayant un point quadruple avec deux points doubles infiniment voisins. Nous avons dit que cette influence était de treize unités. Nous allons actuellement le démontrer.

Soient $|C'|$ un autre faisceau de courbes de S , indépendant de $|C|$, n' son degré et π' son genre.

Pour arriver à son théorème, M. Segre considère la courbe T lieu des points de contact des courbes C et C' se touchant. Les courbes C marquent, sur T , une série linéaire d'ordre $2(m + \pi - 1)$, m étant le nombre des intersections d'une C et d'une C' générique. Les points communs à une C et à T sont en effet les points doubles de la g_m^1 marquée sur la C considérée par les C' . M. Segre démontre ensuite que les points doubles de la $g_M^1 [M = 2(m + \pi + 1)]$ définie sur T sont, ou des points où une C et une C' ont un contact double, ou des points singuliers pour les C .

Considérons une C (soit C_1) ayant un point quadruple P avec deux points doubles ordinaires dans le domaine du premier ordre de P . La C_1 a le genre $\pi - 8$. Par suite, la g_m^1 marquée sur C_1 par les C' a $2(m + \pi - 8 - 1) = 2m + 2\pi - 18$ points doubles. Mais pour une C quelconque, ce nombre est $2m + 2\pi - 2$, par suite C_1 rencontre T en $2m + 2\pi - 18$ points simples et en seize points confondus en P . Il faut donc que \bar{P} ait en P un point triple ordinaire dont deux branches passent respectivement par les points doubles infiniment voisins de P . Considérons alors la g_M^1 définie sur T . Sur une branche de T en P touchant C_1 (et passant donc par un des points doubles), il y a $4 + 2 = 6$ points confondus de cette g_M^1 . Sur la branche de T ne touchant pas C_1 en P , il y a quatre points confondus de cette g_M^1 . Or, un point x -uple pour les groupes d'une g_M^1 équivaut à $x - 1$ points doubles, par suite le point P entraîne, pour 3 , un accroissement de $2(6 - 1) + (4 - 1) = 13$.

C. Q. F. D.

