

SUR LES CONGRUENCES LINEAIRES  
DE CUBIQUES GAUCHES  
DOUÉES D'UNE SEULE COURBE SINGULIÈRE

PAR

Lucien GODEAUX (Armée belge).

---

Dans un travail publié il y a quelques années, j'avais abordé le problème de la détermination des congruences linéaires de coniques douées d'une seule courbe singulière<sup>1</sup>. J'avais ensuite pu étendre ma méthode au cas de congruences linéaires de courbes planes, sans points singuliers, dotées d'une ou deux courbes singulières (l'une de ces dernières n'étant pas une droite<sup>2</sup>).

A la fin de mon premier travail, j'avais émis l'idée que la même méthode pourrait être utilisée dans la recherche des congruences linéaires de cubiques gauches. C'est dans cet ordre d'idées qu'est écrit le travail suivant. J'ai abordé l'étude des congruences linéaires de cubiques gauches dotées d'une seule courbe singulière. Le résultat auquel je suis arrivé est malheureusement négatif, en ce sens que j'établis que :

*Il n'existe aucune congruence linéaire de cubiques gauches douée d'une seule courbe singulière.*

J'ajouterai que la même méthode peut être appliquée à la recherche des complexes linéaires de cubiques gauches.

---

<sup>1</sup> Recherches sur les systèmes de coniques de l'espace (Thèse présentée à l'Université de Liège). *Mémoires de la Soc. R. des Sc. de Liège*, 1911.

Je rappelle à cette occasion que, par une autre méthode, M. MONTESANO avait auparavant déterminé toutes les congruences linéaires de coniques (*Rend. R. Accad. di Napoli*, 1895).

<sup>2</sup> *Sulle congruenze lineari di curve piane dotate di una sola curva singolare* (*Rend. Circ. di Palermo*, 1912). — *Sur les congruences linéaires de courbes planes* (*Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie*, 1912).

dans un espace linéaire à quatre dimensions, comme j'espère le montrer dans un prochain travail.

La méthode employée ici ne fait appel qu'à des propriétés élémentaires de Géométrie; elle est presque entièrement basée sur cette remarque que dans une congruence linéaire de courbes, une courbe de la congruence ne peut rencontrer une surface engendrée par  $\infty^1$  courbes de la congruence, qu'en des points singuliers.

1. — Soit  $\Sigma$  une congruence linéaire, irréductible, de cubiques gauches, dotée d'une seule courbe singulière  $C$ , d'ordre  $h$ . Supposons que les courbes de  $\Sigma$  ne touchent, le long de  $C$ , aucune surface circonscrite à cette courbe.

Désignons par  $m$  le nombre de courbes de  $\Sigma$  s'appuyant sur deux droites gauches, ne rencontrant ni l'une, ni l'autre  $C$ , par  $\mu$  le nombre de ces courbes passant par  $m$  point de  $C$  et s'appuyant sur une droite ne rencontrant pas  $C$ .

Les cubiques de  $\Sigma$ , s'appuyant sur une droite  $d$ , forment donc, en général, une surface  $F_d$  d'ordre  $m$ , passant  $\mu$  fois par  $C$ .

Une cubique de  $\Sigma$ , n'appartenant pas à  $F_d$ , rencontre cette surface en des points situés sur  $C$ , sans quoi  $\Sigma$  ne serait pas linéaire. De plus, ces points sont en général distincts, sans quoi les courbes de  $\Sigma$  toucheraient, le long de  $C$ , une surface passant par cette courbe. On sait que les cubiques gauches d'une congruence linéaire ont dix points singuliers. On a donc

$$3m = 10\mu ,$$

c'est-à-dire,  $\varepsilon$  étant un entier positif,

$$m = 10\varepsilon , \quad \mu = 3\varepsilon .$$

Deux surfaces  $F_d, F_{d'}$  ont en commun la courbe  $C$ , les  $m$  courbes de  $\Sigma$  s'appuyant sur les droites  $d, d'$  et les courbes exceptionnelles éventuelles de  $\Sigma$ . De plus,  $F_d$  et  $F_{d'}$  ne se touchent pas, en général, le long de  $C$ ; on a donc pour l'intersection de ces deux surfaces, une expression de la forme

$$m^2 = 3m + h\mu^2 + \varphi ,$$

$\rho \geq 0$  provenant de l'existence éventuelle de courbes exceptionnelles.

Par suite,

$$\rho = (100 - 9h)\varepsilon^2 - 30\varepsilon.$$

On a donc

$$(100 - 9h)\varepsilon \geq 30,$$

d'où  $h \leq 11$ .

D'autre part, si la courbe C appartenait à une surface cubique, les courbes de  $\Sigma$  rencontreraient celle-ci en dix points et seraient entièrement sur cette surface, ce qui est absurde. Une courbe d'ordre inférieur à sept se trouvant toujours sur une surface cubique, on a donc  $h > 6$ . Nous parvenons donc à ce premier résultat que :

*La courbe singulière de  $\Sigma$  a l'ordre 7, 8, 9, 10 ou 11.*

2. — Les courbes exceptionnelles de  $\Sigma$  peuvent se ranger en deux catégories ; celles de la première catégorie sont des droites qui, comptées chacune trois fois, forment des cubiques de  $\Sigma$ . De telles droites ne font pas, en général, partie des surfaces  $F_d$  ; elles s'appuient en dix points sur C et ne peuvent par suite exister que si  $h = 11$ .

Les courbes exceptionnelles de la deuxième catégorie sont des droites ou des coniques qui, avec  $\infty^1$  courbes (coniques ou droites) forment des cubiques de  $\Sigma$ . Soit  $r$  une telle courbe. Désignons par R la surface lieu des courbes qui, avec  $r$ , forment des courbes de  $\Sigma$ .

Il ne peut exister une cubique de  $\Sigma$ , non dégénérée, s'appuyant sur  $r$  en un point non situé également sur C, car une telle cubique appartiendrait à toutes les surfaces  $F_d$ , ce qui est absurde. La surface lieu des cubiques de  $\Sigma$  s'appuyant sur  $r$  se scinde donc en la surface R et les surfaces lieux des courbes de  $\Sigma$  passant par les points communs à C et à  $r$  (surfaces d'ordre  $\mu = 3\varepsilon$ ). Il convient d'examiner en détail les différents cas qui peuvent se présenter.

a) Supposons que  $r$  soit une droite qui, avec  $\infty^1$  coniques, forme des courbes de  $\Sigma$ . Une de ces coniques ne peut rencontrer une surface  $F_d$  en dehors de C et de  $r$ , par suite, si  $\alpha$  désigne le nombre de ses points d'appui sur C,  $r$  est multiple d'ordre  $2m - \alpha\mu$ , c'est-à-dire d'ordre  $20\varepsilon - 3\alpha\varepsilon$  pour

$F_d$ . D'autre part, ces coniques étant en nombre  $\infty^1$ , doivent satisfaire à sept conditions dont l'une est la condition de rencontrer  $r$  et les autres des conditions d'appui sur  $C$ . On a donc  $\alpha \geq 6$ , d'où  $\alpha = 6$ . Il en résulte que  $r$  s'appuie en quatre points distincts ou non sur  $C$ . Soit  $\beta$  le nombre de ces points d'appui distincts. La surface  $F_r$ , relative à  $r$ , se scinde en la surface  $R$ , d'ordre  $20\varepsilon - 3\alpha\varepsilon = 2\varepsilon$  et  $\beta$  surfaces d'ordre  $\mu = 3\varepsilon$ , lieu des cubiques de  $\Sigma$  passant par les points d'appui de  $r$  sur  $C$ . On a donc

$$10\varepsilon = 2\varepsilon + 3\beta\varepsilon,$$

équation impossible en nombres entiers. Il n'existe donc pas de droite exceptionnelle de l'espèce étudiée ici.

b) Supposons que  $r$  soit une conique qui, avec  $\infty^1$  droites, forme des courbes de  $\Sigma$ .

On trouve, en raisonnant comme plus haut, que la conique  $r$  s'appuie en huit points distincts ou non sur  $C$  et est multiple d'ordre  $4\varepsilon$  pour les surfaces  $F_d$ . On doit donc avoir, les cubiques de  $\Sigma$  s'appuyant sur  $r$  formant une surface d'ordre  $2m = 20\varepsilon$ ,

$$2m = 4\varepsilon + \beta\mu,$$

$\beta$  étant le nombre d'appuis distincts de  $r$  sur  $C$ . On en conclut  $\beta = \frac{16}{3}$ , ce qui est absurde.

c) Supposons enfin que  $r$  soit une droite qui, comptée deux fois, forme avec  $\infty^1$  droites, engendrant une surface  $R$ ,  $\infty^1$  courbes de  $\Sigma$ . On trouve cette fois que ces  $\infty^1$  droites s'appuient en deux ou en trois points sur  $C$ .

1° Les  $\infty^1$  droites s'appuient en deux points sur  $C$ . Alors  $r$  est multiple d'ordre  $4\varepsilon$  pour les surfaces  $F_d$  et s'appuie en huit points distincts ou non, sur  $C$ . Si  $\beta$  est le nombre d'appuis distincts de  $r$  sur  $C$ , on doit avoir

$$m = 4\varepsilon + \beta\mu,$$

ou  $\beta = 2$ . La courbe  $C$  a son ordre au moins égal à 10.

2° Les  $\infty^1$  droites s'appuient en trois points sur  $C$ . Alors  $r$  est multiple d'indice  $\varepsilon$  pour  $F_d$  et s'appuie en sept points

sur C. Si  $\beta$  a la même signification que tantôt, on doit avoir

$$m = \varepsilon + \beta\mu.$$

d'où  $\beta = 3$ . C a l'ordre au moins égal à 10.

3. — Soient, pour fixer les idées,  $x_1$  le nombre de droites exceptionnelles multiples d'ordre  $4\varepsilon$  pour  $F_d$ ,  $x_2$  celui des droites exceptionnelles multiples d'ordre  $\varepsilon$  pour ces surfaces. On a

$$\rho \geq (16x_1 + x_2)\varepsilon^2,$$

le signe  $>$  n'étant valable que s'il y a contact entre les surfaces  $F_d$  le long des droites exceptionnelles.

On en déduit

$$(100 - 9h - 16x_1 - x_2)\varepsilon \geq 30.$$

Si  $h = 7$ ,  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $\rho = 0$  et on a  $\varepsilon = \frac{30}{31}$ , ce qui est absurde.

Si  $h = 8$ ,  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $\rho = 0$  et  $\varepsilon = \frac{30}{28}$ , ce qui est impossible.

Si  $h = 9$ ,  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\varepsilon = \frac{30}{19}$ , ce qui est impossible.

Lorsque  $h = 10$ , on a

$$(10 - 16x_1 - x_2)\varepsilon \geq 30,$$

d'où  $x_1 = 0$ .

Remarquons d'ailleurs que  $x_2$  ne peut être supérieur à 2, car si  $x_2 = 3$ , la quadrique passant par les trois droites exceptionnelles rencontre C en 21 points et contient donc cette courbe et par suite, toutes les cubiques de  $\Sigma$ , ce qui est absurde.

Lorsque  $h = 11$ , on a

$$(1 - 16x_1 - x_2)\varepsilon \geq 30,$$

d'où  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\varepsilon = 30$ .

Nous aurons donc quatre cas à examiner.

1°  $h = 10$ ,  $x_2 = 0$ ,  $\rho = 0$ .

2°  $h = 10$ ,  $x_2 = 1$ .

3°  $h = 10$ ,  $x_2 = 2$ .

4°  $h = 11$ ,  $\rho = 0$ .

4. — Lorsque la courbe  $C$  est d'ordre 10 et que  $x_2 = 0$ ,  $\Sigma$  ne possède aucune courbe exceptionnelle. On a nécessairement  $\rho = 0$ ,  $\varepsilon = 3$ . Les surfaces  $F_d$  sont d'ordre 30 et passent neuf fois par  $C$ .

La courbe  $C$  possède certainement des trisécantes, car autrement, en la projetant d'un de ses points sur un plan, on verrait que son genre est égal à 28; mais alors, elle appartiendrait à une infinité de quadriques, ce qui est absurde.

Considérons la surface  $F_d$  lorsque  $d$  est une trisécante de  $C$ .  $F_d$  se scinde en quatre surfaces dont trois sont les surfaces d'ordre 9, lieux des cubiques de  $\Sigma$  passant par les points d'appui de  $d$  sur  $C$ . La quatrième est par suite une surface cubique. Nous avons déjà vu que  $C$  ne peut se trouver sur une surface cubique, donc les cubiques de  $\Sigma$  s'appuyant sur une trisécante de  $C$ , forment une surface cubique et s'appuient sur  $C$  en des points fixes. La surface  $F_d$  passant neuf fois par  $C$ , il en résulte qu'une surface, lieu des courbes de  $\Sigma$  passant par un point de  $C$ , passe trois fois par cette courbe. Mais une courbe de  $\Sigma$ , n'appartenant pas à une telle surface, ne peut la rencontrer en dehors de  $C$ . Or on trouve qu'elle la rencontre, sur  $C$  en  $10 \times 3 = 30$  points, ce qui est impossible. On est conduit à une absurdité et on ne peut donc avoir  $d = 10$ ,  $x_2 = 0$ .

5. — Nous traiterons simultanément les cas où l'on a  $h = 10$ ,  $x_2 = 1$  ou  $x_2 = 2$ . Nous avons vu qu'une droite exceptionnelle  $r$  est multiple d'ordre  $\varepsilon$  pour une surface  $F_d$ . Les plans tangents à cette surface et passant par  $r$  sont les plans comptant les  $\varepsilon$  droites qui, avec  $r$ , forment des courbes de  $\Sigma$ , qui s'appuient sur  $d$ . Ils sont donc variables avec  $d$  et on a, par suite,

$$\rho = x_2 \varepsilon^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varepsilon = \frac{30}{10 - x_2}.$$

Or, ni pour  $x_2 = 1$ , ni pour  $x_2 = 2$ ,  $\varepsilon$  n'est entier. On ne peut donc avoir  $h = 10$ ,  $x_2 > 0$ .

On en conclut que si  $\Sigma$  existe, sa courbe singulière  $C$  est d'ordre 11.

6. — Si  $h = 11$ , on a  $\rho = 0$  et, par conséquent,  $\varepsilon = 30$ . Les surfaces  $F_d$  sont d'ordre 300 et passent 90 fois par C.

Considérons un point P non situé sur C. Par ce point il passe une droite s'appuyant en deux points sur chaque cubique de  $\Sigma$ . Le lieu de ces points d'appui est une surface  $\Phi_P$ . Soit  $n$  la classe de  $\Sigma$ , c'est-à-dire le nombre de cubiques de  $\Sigma$  ayant pour bisécante une droite arbitraire. La surface  $\Phi_P$  est rencontrée par une droite passant par P, et en dehors de ce point, en  $2n$  points. D'autre part,  $\Phi_P$  contient la cubique de  $\Sigma$  passant par P et les droites projetant cette cubique de P sont tangentes à  $\Phi_P$  en P. Le point P est donc double pour  $\Phi_P$  et cette surface est d'ordre  $2(n + 1)$ .

Les cubiques de  $\Sigma$  passant par un point de C forment une surface d'ordre 90 passant 27 fois par C, car une cubique quelconque de la congruence ne peut rencontrer cette surface en dehors de C. On peut encore dire que pour deux points de C passent 27 cubiques de  $\Sigma$ . Si  $\nu$  est la multiplicité de C pour la surface  $\Phi_P$ , cela signifie que la droite joignant P à un point P' de C est la corde de  $\nu$  courbes de  $\Sigma$  passant par P'. Il en résulte que la droite PP' rencontre la surface lieu des cubiques de  $\Sigma$  passant par P' en  $\nu$  points en dehors de P', ou encore que P' est multiple d'ordre  $90 - \nu$  pour cette dernière surface.

Considérons une courbe de  $\Sigma$  et soit Q un point où cette courbe rencontre  $\Phi_P$ , en dehors de C. La droite PQ rencontre  $\Phi_P$  en dehors de P et de Q en  $2n - 1$  points dont l'un, d'après la définition de  $\Phi_P$ , est nécessairement situé sur la courbe de  $\Sigma$  envisagée. Comme il n'y a qu'une corde de cette courbe passant par P, cette courbe doit rencontrer  $\Phi_P$  en deux seuls points extérieurs à C. On a donc

$$6(n + 1) = 10\nu + 2, \quad \text{ou} \quad 3n + 2 = 5\nu.$$

Considérons maintenant la surface  $F_d$  relative à une droite  $d$  trisécante de C. Elle se scinde en trois surfaces lieux des courbes de  $\Sigma$  passant par les points d'appui et en une surface  $F_d^*$  lieu des courbes de  $\Sigma$  s'appuyant sur  $d$  en dehors de C, si toutefois la trisécante  $d$  ne fait pas partie d'une courbe dégénérée de  $\Sigma$ . Laissons ce cas de côté pour l'ins-

tant. La surface  $F_d^*$  est d'ordre  $300 - 3 \times 90 = 30$  et passe 9 fois par C, car une cubique de  $\Sigma$  ne peut la rencontrer en dehors de C sans lui appartenir. Un plan passant par  $d$ , rencontre encore la surface  $F_d^*$  en une courbe d'ordre 29, passant 8 fois par les points d'appui de  $d$  sur C. Il y a donc cinq points de rencontre de  $d$  avec cette courbe en dehors de C. Ces points peuvent provenir de courbes de  $\Sigma$  s'appuyant en deux points sur  $d$ , ou de cubiques de  $\Sigma$  passant par un des points d'appui de  $d$  sur C et rencontrant encore  $d$ , ou enfin de courbes de  $\Sigma$  touchant le plan choisi sur  $d$ . Dans tous les cas, comme il y a 27 courbes de  $\Sigma$  passant par deux des points d'appui de  $d$  sur C, on peut écrire que la classe de la congruence est  $n = 3 \times 27 + x$ ,  $x$  étant positif et au plus égal à 5, ou nul. Portons cette valeur de  $n$  dans la formule trouvée plus haut. On trouve

$$\nu = 49 + \frac{3x}{5},$$

d'où  $x = 0$  ou  $x = 5$ ,  $\nu \leq 52$ .

D'après ce que nous avons vu ci-dessus, il en résulte que le point  $P'$  de C est multiple d'ordre  $90 - \nu \geq 38$  pour la surface lieu des cubiques de  $\Sigma$  passant par  $P'$ . Mais alors une trisécante de C passant par  $P'$  rencontre cette surface, d'ordre 90, en  $2 \times 27 = 54$  points sur C en dehors de  $P'$  et en au moins 38 points en  $P'$ , elle fait donc partie de cette surface. Mais cela ne peut se faire que si la trisécante en question fait partie d'une courbe dégénérée de  $\Sigma$ , hypothèse que nous avons exclue. Donc, si la courbe C possède des trisécantes, celles-ci sont des parties de courbes dégénérées de  $\Sigma$ .

Si une trisécante fait partie d'une courbe dégénérée de  $\Sigma$ , elle ne peut rencontrer une surface  $F_d$  arbitraire en dehors de C; ou elle rencontre une telle surface en  $300 - 3 \times 90 = 30$  points en dehors de C. Nous parvenons donc à cette conclusion que la courbe singulière C de  $\Sigma$  ne peut posséder de trisécantes.

7. — Il est facile de prouver qu'il n'existe pas de courbe gauche d'ordre 11 ne possédant pas de trisécantes pouvant



nous convenir. Supposons que la courbe C possède un point  $P_1$  multiple d'ordre  $x_1$ , un point  $P_2$  multiple d'ordre  $x_2$ , ... un point  $P_i$  multiple d'ordre  $x_i$ .

Projetons la courbe d'un de ses points simples. On doit avoir

$$36 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^i x_i(x_i - 1) = 0 .$$

Projetons la courbe de  $P_1$ . La courbe étant rationnelle, on a

$$\frac{1}{2}(10 - x_1)(9 - x_1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^i x_i(x_i - 1) = 0 ,$$

d'où, par soustraction,

$$x_1^2 - 10x_1 + 9 = 0 .$$

Evidemment  $x_1 > 1$ , d'où  $x_1 = 9$  et  $i = 1$ . Mais alors, la courbe C est sur un cône quadratique et ce cône contiendrait toutes les courbes de  $\Sigma$ , ce qui est absurde.

Ainsi est établi le théorème énoncé dans le préambule de notre article.

Front belge, 29 novembre 1917.

---