GÉOMÉTRIE. — *Sur les involutions appartenant aux surfaces algébriques.* Note de M. LUCIEN GODEAUX.

Soit F une surface algébrique possédant une involution I_n, ∞^2, d'ordre premier n, douée d'un nombre fini de points de coïncidence. Nous savons (*Comptes rendus*, t. 158, 1914, p. 851 et 1261) que ces points peuvent être de deux espèces : les points de coïncidence parfaite, dont tous les points infiniment voisins sur la surface sont des coïncidences pour l'involution I_n, et les points de coïncidence non parfaite, qui n'ont dans leur domaine du premier ordre que deux points de coïncidence pour I_n. Désignons par γ_1, γ_2 les nombres respectifs de ces points de coïncidence.

Désignons par Φ une surface normale image de l'involution I_n. On sait qu'à un point de coïncidence parfaite correspond un point de diramation qui est un point n-uple conique, à cône rationnel. A un point de coïncidence non parfaite correspond un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(n-3)$ points doubles dont le dernier est biplanaire. La surface Φ possède donc γ_1 points n-uples coniques, à cône tangent rationnel, et γ_2 points doubles de l'espèce indiquée ci-dessus. Chacun des γ_1 points n-uples est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré $-n$.

On démontre que les courbes canoniques de la surface Φ rencontrent chacune des γ_1 courbes rationnelles dont il vient d'être question, en $n-2$ points. On peut donc calculer la relation existant entre les genres linéaires $p^{(1)}$ de F et $\pi^{(1)}$ de Φ. On a précisément

$$p^{(1)}-1=n(\pi^{(1)}-1)+(n-1)(n-2)\gamma_1.$$

D'autre part, si l'on désigne par δ la classe de Φ et si l'on considère un faisceau arbitraire de sections hyperplanes de cette surface, on trouve pour son invariant de Zeuthen-Segre i la valeur

$$i=\delta+n(\gamma_1+\gamma_2)-\nu-4\pi,$$

ν et π étant respectivement l'ordre de Φ et le genre de ses sections hyperplanes. La considération du faisceau de courbes de F transformé du faisceau considéré sur Φ donne, pour l'invariant de Zeuthen-Segre I de F, la valeur

$$I = n\delta + (n-1)^2\gamma_1 + \gamma_2 - n\nu - 4n\pi + 4n - 4.$$

De ces deux formules on déduit

$$n(i+4) - (I+4) = (2n-1)\gamma_1 + (n^2-1)\gamma_2.$$

Comme on a

$$p^{(1)} + I = 12p_a + 9, \qquad \pi^{(1)} + i = 12\pi_a + 9,$$

on trouve, entre les genres arithmétiques p_a de F et π_a de Φ, la relation

$$n(\pi_a + 1) - (p_a + 1) = \frac{1}{12}[n+1)\gamma_1 + (n^2-1)\gamma_2].$$

On peut aisément construire des surfaces telles que F. Considérons, en effet, deux nombres n_1, n_2, premiers entre eux et premiers avec n, dont la somme soit n. Considérons maintenant la surface

$$x_1 x_2(x_1^n + a x_2^n) + f(x_3, x_4) = 0, \tag{1}$$

$f(x_3, x_4)$ étant une fonction homogène e, de degré $n+2$, complète, de x_3, x_4. La surface (1) est invariante pour l'homographie de période n

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = \varepsilon^{n_1} x_1 : \varepsilon^{n_2} x_2 : x_3 : x_4 \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}\right).$$

Celle-ci engendre sur F une involution d'ordre n possédant $n+4$ points de coïncidence, à savoir les points

$$x_1 = x_2 = 0, \quad f(x_3, x_4) = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

On voit aisément que l'on a

$$\gamma_1 = 2, \qquad \gamma_2 = n + 2.$$

(*Comptes rendus*, t. **163**, p. 261, séance du 11 septembre 1916.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
57250 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.