Bulletin de la Classe des sciences

Surfaces et variétés algébriques de diviseur deux

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de surfaces et de variétés algébriques dont le diviseur de Severi est égal à deux.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Surfaces et variétés algébriques de diviseur deux

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de surfaces et de variétés algébriques dont le diviseur de Severi est égal à deux.

On sait que l'on appelle surface de Veronese la surface obtenue en rapportant projectivement les coniques d'un plan aux hyperplans d'un espace linéaire à cinq dimensions. Nous avons démontré que si, dans les équations d'une surface de Veronese, on remplace les éléments par des formes algébriques du second degré linéairement indépendantes à six variables homogènes, on obtient une surface d'ordre 2^5, dont le diviseur de Severi est égal à deux (1). La méthode suivie peut être généralisée et cette extension est l'objet de cette note.

Nous avons appelé dans des publications antérieures variété de Veronese généralisée la variété à n dimensions et d'ordre 2^n obtenue en rapportant projectivement les hyperquadriques d'un espace linéaire à n dimensions aux hyperplans d'un espace à $m - 1$ dimensions, où $m = (n + 1)(n + 2) : 2$. Nous nous proposons d'établir le théorème suivant:

Si dans les équations d'une variété de Veronese généralisée à n dimensions, située dans un espace à m — 1 dimensions, on remplace les coordonnées courantes par des formes du second degré à m variables

(1) *Construction de surfaces algébriques dont le diviseur de Severi est quelconque.* (Rendiconti del Seminario matematico di Padova, 1956, pp. 10-17).

homogènes, on obtient une variété à n dimensions d'ordre 2^{m-1} dont le diviseur de Severi est égal à deux.

Les sections de cette variété par des espaces linéaires à $m - h$ dimensions $(0 \leqslant h \leqslant n - 2)$ sont des variétés de diviseur deux également.

Rappelons que les équations d'une variété de Veronese généralisée sont obtenues en écrivant que le déterminant

$$\| X_{ik} \| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n)$$

est de caractéristique un $(X_{ik} = x_i x_k)$. Les équations des variétés que nous construisons sont donc obtenues en écrivant que le déterminant

$$\| f_{ik}(x_0, x_1, \ldots, x_{m-h-1}) \| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n)$$

où les f_{ik} sont des formes quadratiques linéairement indépendantes, est de caractéristique un.

Nous donnons ensuite une autre forme des équations des variétés.

1. Posons $m = (n + 1)\ (n + 2) : 2$ et considérons dans un espace S_{m+n} à $m + n$ dimensions, l'homographie biaxiale harmonique H d'équations

$$\rho x'_i = x_i, \qquad (i = 0, 1, \ldots, m - 1)$$

$$\rho y'_k = - y_k, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

dont les axes sont respectivement un espace (x) à $m - 1$ dimensions et un espace (y) à n dimensions.

Les hyperquadriques

$$y_i y_k = f_{ik}(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) = f_{ki}(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}),$$
$$(i, k = 0, 1, \ldots, n)$$

où les f_{ik} sont des formes quadratiques linéairement indépendantes, ont en commun une variété V à n dimensions. Sur cette variété l'homographie H engendre une involution I d'ordre deux, privée de points unis, car V ne rencontre pas les axes de H.

Nous désignerons par W les sections hyperplanes de la variété V, par W_1 celles qui sont découpées par les hyperplans passant par l'axe (y) de H et par W_2 celles qui sont découpées par les hyperplans passant par l'espace (x). Le système $| W_1 |$ a la dimension $m - 1$

et le système $|W_2|$ la dimension n. Enfin nous désignerons par Ω une variété image de l'involution I et par Ω_1, Ω_2 les variétés qui correspondent sur Ω aux variétés W_1, W_2.

D'après la théorie des involutions on a

$$2\Omega_1 \equiv 2\Omega_2$$

et par conséquent le diviseur de Severi de Ω est égal à deux.

2. *Un premier modèle projectif de la variété Ω.* — On peut obtenir un premier modèle projectif de la variété Ω en rapportant projectivement les variétés W_1 aux hyperplans d'un espace S_{m-1} à $m-1$ dimensions ou, ce qui revient au même, en projetant la variété V de l'espace (y) sur l'espace (x). Cela revient à éliminer les y entre les équations de la variété V et le modèle projectif de Ω obtenu a pour équations celles que l'on obtient en écrivant que le déterminant

$$\| f_{ik} \| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n)$$

est de caractéristique un.

Les équations obtenues sont celles que l'on obtiendrait en remplaçant, dans les équations de la variété de Veronese généralisée représentant les hyperquadriques d'un espace à n dimensions, les coordonnées courantes par des formes quadratiques à m variables homogènes.

La variété V est d'ordre 2^m et par conséquent la variété Ω est d'ordre 2^{m-1}.

Les variétés W_2 sont découpées sur V par les hyperplans

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n = 0.$$

En élevant les deux membres de cette équation au carré, il correspond à ces variétés sur Ω des variétés d'ordre 2^{m-1} suivant lesquelles les hyperquadriques

$$\sum_i \sum_k \lambda_i \lambda_k f_{ik} = 0 \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n)$$

touchent la variété.

3. Coupons la variété V par un espace linéaire S_{m+n-h} à $m+n-h$ dimensions intersection de h hyperplans passant par l'axe (y) de $H(0 \leqslant h \leqslant n-2)$. La section est une variété V_0 à $n-h$ dimensions

appartenant à l'involution I. A cette variété correspond sur Ω une variété Ω_0 à $n - h$ dimensions, section de Ω par un espace S_{m-h-1} à $m - h - 1$ dimensions.

On peut supposer que les hyperplans définissant l'espace S_{m+n-h} sont donnés par

$$x_{m-h} = x_{n-h+1} = \cdots = x_{m-1} = 0$$

de sorte que les équations de la variété Ω_0 s'obtiennent en remplaçant dans les équations de la variété de Veronese d'ordre 2^n, les coordonnées courantes par des formes quadratiques à $m - h$ variables homogènes.

En particulier, pour $h = n - 2$, on obtient des surfaces de l'espace ordinaire de diviseur de Severi égal à deux. Dans ce cas, la surface V_0 est régulière et ses genres sont ([2])

$$p_a = p_g = (m^2 - 5m + 8)2^{m-3} - 1.$$

Les genres de la surface Ω_0 sont donc

$$p'_a = p'_g = (m^2 - 5m + 8)2^{m-4} - 1.$$

4. *Un second modèle projectif de la variété Ω.* — Les hyperquadriques de S_{m+n} découpent sur V le système $|\,2W\,|$ et ce système contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution. L'un, que nous désignerons par $|\,(2W)_1\,|$, est découpé par les hyperquadriques ne contenant pas les axes (x), (y) de l'homographie H. L'autre, que nous désignerons par $|\,(2W)_2\,|$ est découpé par les hyperquadriques contenant les axes de H.

Les hyperquadriques découpant sur V le premier système ont pour équations

$$F(x_0,x_1,\ldots,x_{m-1}) + F_1(y_0,y_1,\ldots,y_n) = 0, \qquad (1)$$

elles forment un système de dimension

$$R = \binom{m+1}{2} + \binom{n+2}{2} - 1,$$

mais le système $|\,(2W)_1\,|$ a la dimension $R - m$ car les équations de la variété V font partie des équations précédentes. Ce système contient les variétés $2W_1$, $2W_2$.

([1]) *Sur les courbes et surfaces intersections d'hyperquadriques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1944, pp. 262-269).

Les hyperquadriques découpant sur V le second système ont pour équations

$$\sum_i \sum_k \lambda_{ik} x_i y_k = 0, \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1; k = 0, 1, \ldots, n)$$

et forment un système de dimension $R' = mn + m - 1$.

Le système $|(2W)_2|$ coïncide avec le système $|W_1 + W_2|$.

Rapportons projectivement les hyperquadriques (1) aux hyperplans d'un espace S_R à R dimensions. Aux hyperquadriques $F = 0$ correspond dans un espace Σ_1 à $(m^2 + m - 2){:}2$ dimensions une variété de Veronese généralisée Ψ_{m-1} à $m - 1$ dimensions et aux hyperquadriques $F_1 = 0$ correspond dans une espace Σ_2 à $m - 1$ dimensions, une variété de Veronese généralisée Ψ_n d'ordre 2^n. Aux couples de l'involution engendrée par H dans S_{m+n} correspondent les points de la variété réglée M lieu des droites joignant les points des variétés Ψ_{m-1} et Ψ_n. On remarquera que les espaces Σ_1, Σ_2 ne se rencontrent pas.

A l'involution I de la variété V correspond la section de la variété réglée M par les m hyperplans qui correspondent aux équations de la variété V. Le second modèle projectif de la variété Ω est donc d'ordre 2^{m+n-1} et appartient à un espace à $R - m$ dimensions. Nous le désignerons par Ω' pour le distinguer du premier.

En posant $X_{ik} = x_i x_k$ et $Y_{ik} = y_i y_k$, les équations de la variété Ω' s'obtiennent de la manière suivante:

Les équations des variétés de Veronese Ψ_{m-1}, Ψ_n s'obtiennent en écrivant que les déterminants

$$\| X_{ik} \|, \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

$$\| Y_{ik} \|, \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n)$$

sont de caractéristique un. Simultanément, ces équations représentent le lieu M des droites s'appuyant sur les variétés de Veronese Ψ_{m-1}, Ψ_n.

La forme quadratique f_{ik} en x donne une forme linéaire $\bar{f}_{ik}$ en X et la variété Ω' appartient aux hyperplans

$$Y_{ik} = \bar{f}_{ik}(X_{00}, X_{01}, \ldots, X_{nn}).$$

Quant aux variétés $(2W)_2$ il leur correspond les variétés suivant lesquelles les hyperquadriques

$$\sum \lambda_{ik} \lambda_{jh} X_{ij} Y_{ik} = 0.$$

touchent la variété Ω'.

Le système des sections hyperplanes de Ω' contient les variétés $2\Omega_1$, $2\Omega_2$ et le système homologue de $|(2W)_2|$ contient les variétés $\Omega_1 + \Omega_2$.

5. Un hyperplan ξ passant par l'axe (y) de H coupe l'axe (x) suivant un espace à $m - 2$ dimensions. Désignons par Ψ'_{m-2} la variété de Veronese d'ordre 2^{m-2} représentant les hyperquadriques de cet espace et appartenant à la variété Ψ_{m-1}. Aux couples de points de l'espace ξ homologues dans H correspondent les points d'une variété ξ' appartenant à M, projection de la variété Ψ'_{m-2} à partir de l'espace Σ_2. C'est une variété conique d'ordre 2^{m-2}, de sommet Σ_2, à $2m - 2$ dimensions, appartenant à un espace linéaire ξ'' à $(n^2 - m + n){:}2$ dimensions. La variété ξ' coupe Ω' suivant une variété Ω_1.

De même aux couples de points homologues dans H appartenant à un hyperplan η passant par l'axe (x) correspond dans M un cône η' projetant de Σ_1 une variété de Veronese Ψ'_{n-1} d'ordre 2^{n-1} représentant les hyperquadriques de l'espace à $n - 1$ dimensions suivant lequel l'hyperplan η coupe l'axe (y). Le cône η' rencontre la variété Ω' suivant une variété Ω_2, il a $(m^2 + m + n){:}2$ dimensions et appartient à un espace linéaire η'' à $(m^2 + m + n^2 + n){:}2$ dimensions.

Observons que $\xi + \eta$ est une hyperquadrique dégénérée passant par les axes de l'homographie H. Il lui correspond une hyperquadrique de S_{R-m} touchant la variété Ω' suivant une variété décomposée en deux variétés Ω_1 et Ω_2. Il en résulte que le long de chacune des variétés Ω_1 et Ω_2 il existe un hyperplan touchant la variété Ω'.

Considérons un espace S_{m+n-h} à $m + n - h$ dimensions passant par l'axe (y) de H. Il coupe l'espace (x) suivant un espace à $m - h - 1$ dimensions auquel correspond dans Ψ_{m-1} une variété de Veronese Ψ'_{m-h-1} d'ordre 2^{m-h-1}. Aux couples de points conjugués dans H appartenant à l'espace S_{m+n-h} correspondent dans M les points d'une variété conique projetant Ψ'_{m-h-1} de Σ_2. C'est un cône à $m + n - h$ dimensions et d'ordre 2^{m-h-1}. Il coupe la variété Ω' suivant une variété homologue de Ω_0.

6. Cherchons maintenant ce qui correspond sur le premier modèle projectif de Ω aux systèmes $|2W_1| = |2W_2|$ et $|W_1 + W_2|$.

En tenant compte des équations de la variété V on peut, dans les équations (1), faire disparaître le terme F_1 en remplaçant $y_i y_k$ par

$f_{ik}(x)$, ce qui revient à supposer que le système $|(2W)|$ est représenté par $F(x) = 0$. Dans l'espace S_{m-1} de Ω, il correspond les hyperquadriques de même équation, découpant sur Ω le système $|\Omega_1|$.

Quant un système $|W_1 + W_2|$, d'équation

$$\sum \lambda_{ik} x_i y_k = 0,$$

il correspond sur Ω les variétés de contact de cette variété avec les hypersurfaces

$$\sum \lambda_{ik} \lambda_{jh} x_i x_j f_{kh}(x) = 0$$

ne contenant pas la variété Ω.

Liège, le 23 décembre 1969.