Bulletin de la Classe des sciences

Sur la surface de genres nuls et de bigenre deux de Castelnuovo

Lucien Godeaux

Résumé
On démontre que la surface de Castelnuovo a le trigenre $P_3 = 1$ et on détermine sa courbe tricanonique.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la surface de genres nuls et de bigenre deux de Castelnuovo

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — On démontre que la surface de Castelnuovo a le trigenre $P_3 = 1$ et on détermine sa courbe tricanonique.

Les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls se partagent en deux catégories: les surfaces dont le système bicanonique est irréductible et celles qui possèdent un faisceau de courbes elliptiques. Nous avons montré que les premières représentent des involutions privées de points unis appartenant à une surface algébrique [1]. Quant aux secondes, on n'en connaît que quelques exemples.

La surface de Castelnuovo, d'ordre sept, possédant une droite triple, une conique double ne rencontrant pas la droite et trois tacnodes dont les plans tacnodaux passent par la droite triple, est un premier exemple. Les plans passant par la droite triple coupent encore la surface suivant des quartiques possédant deux points

---

[1] *Sur les surfaces de genres géométrique et arithmétique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1953, pp. 732-749, 930-932), *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (Journal de Mathématiques pures et appliquées 1965, pp. 25-41). A la page 29, ligne 17, le premier facteur du premier terme de la formule est 12 et non 16, comme le lecteur s'en est sans doute aperçu. *Surfaces non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Mémoires de la Société des Sciences, Arts et Lettres du Hainaut, 1969, pp. 209-224).

doubles sur la conique, donc elliptiques. Ce sont les courbes bicanoniques et on a $P_2 = 2$ (1).

Des exemples intéressants ont été construits par M. Burniat (2). Il s'agit notamment d'une surface F contenant un faisceau de courbes elliptiques $| \Gamma |$ dont $2\alpha + 2$ sont dégénérées en des courbes elliptiques isolées $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2\alpha+2}$ qui, comptées deux fois, sont des courbes Γ. La somme de ces courbes forme l'adjoint aux courbes Γ et le système canonique n'existe pas. Les courbes bicanoniques sont formées des groupes de 2α courbes Γ et on a $P_2 = 2\alpha + 1$. Les courbes tricanoniques sont formées de la somme des courbes γ et des groupes de $2\alpha - 1$ courbes Γ. On a $P_3 = 2\alpha$. D'une manière générale, on a $P_{2i+1} = P_{2i} - 1$. Un autre exemple suppose que $| \Gamma |$ a un nombre impair de courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ analogues aux précédentes.

Considérant la surface possédant une seule courbe bicanonique d'ordre supérieur à zéro (3), nous avons montré qu'elle possède un faisceau de courbes elliptiques $| \Gamma |$ et que celui-ci contient deux courbes elliptiques isolées γ_1, γ_2 qui, comptées trois fois, sont des courbes Γ. La courbe $\gamma_1 + \gamma_2$ est la courbe bicanonique et les courbes Γ sont les courbes tricanoniques. L'adjointe à la courbe γ_1 est la courbe $2\gamma_2$ et l'adjointe à la courbe γ_2, la courbe $2\gamma_1$. On a $P_2 = 1, P_3 = 2$.

Dans cette note, nous montrerons que la surface de Castelnuovo a le trigenre $P_3 = 1$ et nous construirons la courbe tricanonique.

1. Reprenons tout d'abord la construction de la surface due à Castelnuovo.

Soient $f_3 = 0$ une surface cubique générale, r une de ses droites, γ une de ses coniques ne rencontrant pas la droite r. Par r passent cinq plans tangents à la surface cubique dont les points de contact n'appartiennent pas à r. Soient $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ trois de ces plans, A_1, A_2, A_3 leurs points de contact. Soient d'autre part $f_4 = 0$

(1) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche di genere zero* (Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL, 1896, pp. 103-123), *Memorie Scelte* (Bologna, Zanichelli, 1937, pp. 307-334.

(2) P. Burniat, *Surfaces algébriques de genre géométrique nul et de bigenre quelconque* (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 1° sem. 1954, pp. 459-463).

(3) *Sulle superficie algebriche di genere zero e bigenere uno* (Bollettino della Unione Matematica Italiana, 1958, pp. 531-534).

une surface du quatrième ordre passant deux fois par la conique γ et touchant $f_3 = 0$ aux points A_1, A_2, A_3. L'équation

$$f_3^2\varphi + \lambda f_4\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$$

où $\varphi = 0$ est l'équation d'un plan passant par r et λ une constante, représente une surface F du septième ordre passant trois fois par r, deux fois par la conique γ et ayant des tacnodes en A_1, A_2, A_3 ([1]).

Les adjointes à F sont les surfaces cubiques passant deux fois par r, une fois par γ et une fois par chacun des points A_1, A_2, A_3 ([2]). De telles surfaces n'existent pas et on a $p_g = 0$.

Les biadjointes sont des surfaces du sixième ordre passant deux fois par la conique γ et par la droite r de manière que dans l'intersection d'une de ces surfaces et de F, la droite r compte pour 12 unités. La droite r est triple pour les biadjointes, ses nappes touchant la surface F le long de cette droite. De plus, les biadjointes touchent la surface F en A_1, A_2, A_3 ([3]). De telle surfaces contiennent les plans $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ et le plan de la conique γ compté deux fois. Elles sont complétées par les plans passant par r et coupant F suivant les quartiques C ayant deux points doubles sur γ, donc elliptiques. La surface F a donc les genres $P_2 = 2$, $p^{(1)} = 1$, les courbes C étant les courbes bicanoniques.

Observons que le plan ϖ de la conique γ coupe encore la surface F suivant trois droites r_1, r_2, r_3 passant par le point R où le plan ϖ coupe la droite r.

De plus, le plan $\alpha_1 = 0$ par exemple, coupe la surface $f_3 = 0$ suivant deux droites passant par A_1 et par conséquent la surface F suivant ces deux droites comptées chacune deux fois. Il en est de même des plans $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

2. L'adjointe à une courbe C est la droite joignant les deux points doubles de cette courbe, c'est-à-dire la droite s suivant laquelle le plan de C coupe le plan ϖ de γ. La droite s ne rencontre plus la surface

([1]) Nous avons considéré cette surface dans notre exposé *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (Actualités Scientifiques, N° 123, Paris, Hermann, 1934). Un lapsus nous a fait écrire que $\varphi = 0$ était le plan de la conique γ.

([2]) F. Enriques, *Le superficie algebriche* (Bologne, Zanichelli, 1949), p. 76.

([3]) F. Enriques, loc. cit. p. 91.

F qu'au point R commun r et à ϖ. On peut donc dire que les courbes C ont une unique adjointe: le domaine du point R dans le plan ϖ.

Observons d'ailleurs que les surfaces triadjointes à F sont du neuvième ordre. Elles passent trois fois par γ et par la droite r de telle sorte que dans l'intersection de F et d'une triadjointe, la droite r compte pour 18. On en conclut que les triadjointes passent cinq fois par r et touchent le long de cette droite la surface F. De plus, les triadjointes ont des points doubles uniplanaires ordinaires en A_1, A_2, A_3. De telles surfaces sont formées par le plan ϖ de γ compté trois fois et par les plans $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ comptés chacun deux fois. Il existe donc une surface triadjointe à F et cette surface a le trigenre $P_3 = 1$.

La triadjointe passe par les droites r_1, r_2, r_3 et comme d'autre part les courbes bicanoniques sont d'ordre quatre, les courbes tétracanoniques donc d'ordre huit, la courbe tricanonique doit être d'ordre six. C'est donc la courbe $2(r_1 + r_2 + r_3)$.

3. Si F_0 est une surface contenant un faisceau de courbes elliptiques $| \Gamma |$, nous dirons qu'une courbe Γ est singulière si elle se compose d'une ou de plusieurs courbes *elliptiques* isolées dont l'une au moins est comptée plusieurs fois. Si la surface F_0 a les genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$, $P_2 > 0$, trois cas peuvent se présenter :

1° Le faisceau $| \Gamma |$ contient un certain nombre de courbes singulières dont la somme des parties est l'adjointe aux courbes Γ. C'est dans ce cas que rentrent les exemples de M. Burniat.

2° Le faisceau $| \Gamma |$ contient un certain nombre de courbes singulières, l'adjointe à une composante d'une de ces courbes étant une combinaison linéaire des autres composantes. C'est dans ce cas que rentre la surface de genre $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = 2$ dont il a été question dans l'introduction.

3° Le faisceau $| \Gamma |$ ne contient pas de courbes singulières. C'est le cas de la surface de Castelnuovo.

La détermination complète de ces surfaces paraît assez difficile, d'autant plus qu'un modèle de chaque surface trouvée doit être construit pour en montrer l'existence.

Liège, le 25 mai 1970