MÉMOIRE SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES LIÉES À UNE COURBE ALGÉBRIQUE DE GENRE TROIS

La considération des surfaces de Kümmer et, plus tard, celles des surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres, ont conduit à l'étude des involutions doublement infinies, douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique. MM. Enriques et Severi ont tout d'abord démontré qu'une pareille involution, appartenant à la surface de Jacobi (qui représente les couples de points d'une courbe de genre deux) était cyclique ou engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. M. Enriques a ensuite démontré le même théorème pour une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Enfin, généralisant ces deux résultats, nous avons démontré que *toute involution* I_n, *d'ordre* n, *douée d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* F, *était engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même.*

C'était un premier pas vers la théorie complète des involutions considérées; un second consistait à déterminer une surface normale Φ, image de l'involution I_n et à étudier les singularités de cette surface aux points de diramation. Ce problème était relativement simple dans le cas où F a le genre $P_{12} = 1$ (cas où les courbes canonique ou pluricanoniques existantes ont l'ordre zéro), car alors la surface Φ a également le genre $P_{12} = 1$ et elle ne peut posséder que des points au plus doubles. Cela entraine une conséquence importante sur la façon dont l'involution I_n se comporte dans le voisinage de ses points de coïncidence. La considération d'involutions appartenant à des surfaces F pour lesquelles on a $P_{12} > 1$ pouvait donc nous conduire à des résultats nouveaux. C'est ce qui nous a amené à étudier les involutions appartenant à la surface représentant les couples de points d'une courbe de genre trois, non hyperelliptique. Nous avons ainsi rencontré certains faits nouveaux qui nous paraissent présenter un certain intérêt et qui nous servirons à étayer une théorie générale des involutions à laquelle nous travaillons actuellement.

Nous terminerons cet avant-propos par une liste des principaux travaux relatifs aux involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence.

F. ENRIQUES et F. SEVERI. — *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques.* (Acta Mathematica, 1909.)

F. ENRIQUES. — *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno.* (Rend. Accad. Bologna, 1909-1910.)

L. GODEAUX. — *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* (Rend. R. Accad. Lincei, 1914.)

L. GODEAUX. — *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genre un.* (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1914.)

L. GODEAUX. — *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914.)

L. GODEAUX. — *Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un.* (Bull. de la Soc. Mathématique de France, 1915.)

CHAPITRE I

LA SURFACE REPRÉSENTANT LES COUPLES DE POINTS, NON ORDONNÉS, D'UNE COURBE DE GENRE TROIS, ET L'INVOLUTION D'ORDRE DEUX APPARTENANT À CETTE SURFACE.

1. Soit A une courbe algébrique de genre trois, non hyperelliptique. Nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer que cette courbe est une courbe plane du quatrième ordre. Soit F une surface algébrique, dépourvue de courbes exceptionnelles, qui représente les couples de points, non ordonnés, de la courbe A.

La surface F a été rencontrée d'abord par M. Humbert (1), ensuite par MM. F. Severi (2) et M. De Franchis (3), enfin par M. L. Remy (4) qui lui a consacré une étude analytique. Nous supposerons connus les travaux de ces géomètres.

(1) *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois. Journal de Liouville*, 1896, (5), II.

(2) *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica.* Atti della R. Accad. di Torino, 1903, XXXVIII. — *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie.* Mem. della R. Accad. di Torino, 1903, (2), LIV.

(3) *Sulle varietà delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica.* Rend. del Circolo Matematico di Palermo, 1903, XVII.

(4) *Sur une classe de surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois* Annales de l'Ecole Normale Sup., 1909, (3), XXVI. — *Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois. Journal de Liouville*, 1908, (6), IV.

La surface F a les genres

$$p_g = 3, \quad p_a = 0, \quad p^{(1)} = 7, \quad I = 2.$$

Une courbe canonique C de F est l'image d'une g_4^1 canonique de A. En rapportant projectivement les courbes canoniques C du réseau $|C|$ aux droites d'un plan, on obtient un modèle projectif de F sous forme d'un plan sextuple dont la courbe de diramation (à compter deux fois) est du douzième ordre.

Le système canonique $|C|$ est dépourvue de points-base. Le système bicanonique $|2C|$ est, par définition, adjoint à $|C|$. Il est par suite régulier ([1]), et, d'après le théorème de Riemann-Roch, on a donc $P_2 = 7$. De même, on a $P_3 = 19$, $P_4 = 37$, et, en général, pour $i \geqslant 2$,

$$P_i = 3i(i-1) + 1.$$

La surface F possède un système continu Σ, de degré un et d'indice deux, de courbes H, de genre trois, birationnellement identiques à A. Une courbe H provient des couples de points de A dont un point est fixe. Le système Σ a pour enveloppe la courbe K lieu des points de F images des couples de points de A formés de deux points coïncidents.

2. À une g_n^1 de A correspond une courbe T de F. Si nous désignons par x le nombre d'intersections d'une courbe T, de genre π et de degré ν, avec une courbe H du système Σ, par u le nombre d'intersections de T et de K, on a (Severi, De Franchis)

$$8\alpha + 2\nu = 4(\pi - 1) + u.$$

Actuellement, x est égal à $n - 1$ et u est égal au nombre de points doubles de la g_n^1, c'est-à-dire à $2(n+2)$. On a donc

$$3(n-2) + \nu = 2(\pi - 1).$$

Supposons $n > 4$, la série g_n^1 est alors non spéciale et appartient à une g_n^{n-3} complète.

Rapportons projectivement les groupes de cette g_n^{n-3} aux hyperplans d'un S_{n-3}. Nous obtenons une courbe d'ordre n, que nous supposerons simple, birationnellement identique à A. Une g_n^1 est découpée sur cette courbe, que nous désignerons par A^*, par les hyperplans d'un faisceau. Le degré ν est donc égal au nombre de bisécantes de la courbe A^* s'appuyant sur deux S_{n-5}. Pour obtenir ce nombre, nous supposerons que ces deux S_{n-5} sont dans un même hyperplan. Les bisécantes cherchées sont alors

([1]) Picard : *Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions de deux variables indépendantes. Journal de Crelle*, 1905, CXXIX, ou Picard et Simart, t. II, p. 437. — Severi : *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica.* Rend. R. Accad. dei Lincei, 2° sem. 1908, (5), XVII.

les $\frac{1}{2} n (n-1)$ droites joignant les couples de points de A^* situés dans cet hyperplan et les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-3$ bisécantes de A^* s'appuyant sur le S_{n-6} communs aux deux S_{n-5} choisis. On a donc

$$\nu = (n-1)^2 - 3.$$

On trouve alors

$$\pi = \frac{1}{2} n (n+1) - 3.$$

Observons que le système complet $|T|$ a la dimension au moins égale à $\frac{1}{2}(n-1)(n-4)$, d'après le théorème de Riemann-Roch.

Les courbes qui correspondent aux séries g_n^1 *contenues dans une série complète non spéciale et simple, ont le genre* $\frac{1}{2} n (n+1) - 3$, *le degré* $(n-1)^2 - 3$ *et elles forment un système complet de dimension au moins égale à* $\frac{1}{2}(n-1)(n-4)$.

3. Soient P_1 un point quelconque de F; P_{11}, P_{12} les points de A correspondant à P_1. Les deux points P_{11}, P_{12} déterminent un groupe canonique de A; soient P_{21}, P_{22} les points qui, avec P_{11}, F_{12}, forment ce groupe canonique, P_2 le point de F image du couple P_{21}, P_{22}. Le point P_2 ainsi défini dépend rationnellement de P_1 et inversement. Nous avons ainsi construit une transformation birationnelle T de F en elle-même. Cette transformation est involutive; nous désignerons à la fois par Φ l'involution (d'ordre deux) qu'elle engendre ou une surface représentative de cette involution.

D'après la définition même de l'involution Φ, il est clair que le système canonique $|C|$ de F est composé avec cette involution. À une courbe C correspond sur la surface Φ une courbe Γ variable dans un réseau $|\Gamma|$. Le genre géométrique de Φ est donc $p_g = 3$ et, par suite, l'involution Φ ne possède, sur F, qu'un nombre fini de points de coïncidence. Les courbes Γ sont les courbes canoniques de Φ, le réseau $|\Gamma|$ est dépourvu de points-base et son degré est 3. On a donc, pour Φ, $p^{(1)} = 4$.

Supposons que P_1 coïncide avec P_2; alors, sur la courbe A, le point P_{11} coïncide, par exemple, avec P_{21} et P_{12} avec P_{22}. En d'autres termes, la droite $P_{11} P_{12}$ est une bitangente de la courbe A. Inversement, à une bitangente de A correspond un point de coïncidence de Φ sur F. On sait que A possède 28 bitangentes. Par suite, l'involution Φ possède 28 points de coïncidence. Il en résulte que le genre arithmétique de Φ est $p_a = 3$ [1].

Le théorème de Riemann-Roch nous fournit la valeur des plurigenres de la surface Φ; on a $P_2 = 7$, $P_3 = 13$ et, en général,

$$P_i = \frac{1}{2} \cdot 3 i (i-1) + 4,$$

pour $i > 1$.

[1] Voir L. Godeaux: ***Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.*** Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914.

On voit, en particulier, qu'il n'existe pas de modèle projectif bicanonique simple de F, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de surface normale simple, birationnellement identique à F, dont les sections hyperplanes seraient des courbes bicanoniques.

4. On peut pendre, comme modèle projectif de la surface Φ, soit le plan triple canonique dont la courbe de diramation est d'ordre 12 (Severi), soit une surface de sixième ordre de S_3, ayant un point triple, en relation avec la surface de Kümmer (Humbert).

Remarquons que le système bicanonique $|2\Gamma|$ de Φ est simple. S'il était composé, ce ne pourrait être, en effet, qu'au moyen de l'involution d'ordre 3 définie par $|\Gamma|$; mais alors, sur le plan triple auquel cette involution donne naissance, les courbes 2Γ serait des coniques triples; cela est absurde, puisque $|2\Gamma|$ a la dimension $P_2 - 1 = 6$. Rapportons projectivement les courbes de $|2\Gamma|$ aux plans d'un S_6; nous obtenons, dans cet espace, une surface normale, simple, d'ordre 12, à sections hyperplanes de genre 10, *modèle projectif bicanonique* de Φ. Nous savons de plus ([1]) qu'à chaque point de coïncidence de l'involution Φ sur F correspond un point double conique de ce modèle projectif. Désormais, lorsque nous parlerons de la surface Φ, c'est de ce modèle projectif qu'il s'agira.

Appliquons, à la surface Φ le théorème sur les surfaces doubles douées d'un nombre fini de points de diramation, sous la seconde forme que nous avons donnée ([2]); on a

Pour qu'une surface d'ordre 12, à sections hyperplanes de genre 10, de S_6, *représente l'involution* Φ *appartenant à* F, *il faut et il suffit que:*

1°) *elle possède 28 points doubles coniques,*

2°) *parmi les hypersurfaces découpant le système 2k-uple du système des sections hyperplanes, il y en ait qui passent par les 28 points de diramation et qui touchent la surface en chaque point d'intersection.*

Pour pouvoir appliquer ce théorème, il faut choisir k de telle manière que les courbes de F qui correspondent aux courbes $2k\Gamma$ de Φ, appartiennent à un système linéaire plus ample que $|2k\Gamma|$. Actuellement, il suffit de prendre $k = 2$. En effet, le système $|4\Gamma|$ a la dimension $P_4 - 1 = 21$ et son transformé sur F, $|4C|$, a la dimension 36.

Désignons par Γ_0 les courbes de long desquelles les hypersurfaces du quatrième ordre de S_6, passant par les 28 points doubles de Φ, touchent cette surface, dans les conditions de l'énoncé précédent. Le système $|\Gamma_0|$ a le degré 34, le genre 24 et la dimension 14.

Si $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{28}$ sont les courbes rationnelles de degré -2 auxquel-

([1]) L. Godeaux: loc. cit.

([2]) L. Godeaux: loc. cit., n° 6. — Les hypersurfaces, dont il est question dans l'énoncé sont d'ordre 2k, car la surface Φ est dépourvue de courbes multiples. En effet, une courbe d'ordre 12, de S_6, a au plus le genre 10; il en résulte qu'un hyperplan de S_6 découpe Φ en une courbe n'ayant aucun point double ou multiple. Cette remarque nous sera utile plus loin.

les sont équivalentes, au point de vue de la Géométrie Algébrique, les 28 points doubles de Φ, on a

$$2\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots\cdots + \Gamma_{28} \equiv 4\Gamma.$$

On a ce théorème:

Pour qu'une surface d'ordre 12, à sections hyperplanes de genre 10, de S_6, *représente l'involution* Φ *appartenant a la surface* F, *il faut et il suffit qu'elle possède 28 points doubles coniques et qu'il existe, sur elle, un système linéaire de courbes d'ordre 24, de degré 34, de genre 24 et de dimension 14, chaque courbe de ce système ayant un seul point commun avec la courbe rationelle, de degré* -2, *équivalente à l'un quelconque des 28 points doubles.*

5. On peut également introduire la surface Φ par la considération de fonctions Θ, comme l'a fait M. Remy dans son travail cité. Nous allons le montrer rapidement.

Soient $f(x, y) = o$ l'équation de la courbe A, $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$ trois intégrales abéliennes de première espèce, distinctes, de cette courbe.

M. Remy considère les surfaces représentées par les équations paramétriques:

$$X = \Phi_1(u, v, w), \quad Y = \Phi_2(u, v, w), \quad Z = \Phi_3(u, v, w),$$

les Φ étant des fonctions abéliennes à six systèmes de périodes et paires des trois paramètres

$$\begin{aligned} u &= G_1(x_1) + G_1(x_2), \\ v &= G_2(x_1) + G_2(x_2), \\ w &= G_3(x_1) + G_3(x_2), \end{aligned}$$

liés par une fonction thêta normale du premier ordre

$$\vartheta(u, v, w) = 0$$

égalée à zéro.

Considérons le tableau normal de périodes

$$\begin{array}{cccccc} 2i\pi & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 2i\pi & 0 & b & d & e \\ 0 & 0 & 2i\pi & c & e & h, \end{array}$$

et les fonctions $\Theta(u, v, w)$ normales, de caractéristique nulle, du second ordre et paires. Elles sont au nombre de huit, linéairement indépendantes, mais l'une d'elles est $\vartheta^2(u, v, w)$. Soient $\Theta_1(u, v, w)$ ...., $\Theta_7(u, v, w)$ sept fonctions non identiquement nulles, linéairement indépendantes. La surface Φ^*, d'equations

$$\rho X_i = \Theta_i(u, v, w) \qquad (i = 1, 2, \ldots, y)$$

est, d'après le théorème de Poincaré, d'ordre douze.

Aux 28 demi-périodes annulant δ correspondent, sur la surface, 28 points doubles coniques.

M. Remy a considéré la surface que l'on obtient en projetant Φ^* sur un S_3 de trois de ses points doubles. Cette nouvelle surface passe doublement par les arêtes d'un trièdre et, par suite, ses sections planes sont des courbes bicanoniques. Il en résulte que les sections hyperplanes de Φ^* sont des courbes bicanoniques de la surface. Comme d'autre part, à un point de Φ^* correspondent deux couples de points de A situés en ligne droite, Φ^* est bien identique à Φ.

6. Désignons par H' les courbes de la surface F images des g_3^1 spéciales de la courbe A. D'après la construction de la transformation T, cette dernière fait correspondre une courbe H' à une courbe H. Les courbes H' forment un système Σ', de degré un et d'indice deux, et les courbes H' rencontrent les H en deux points.

Considérons un point de coïncidence P de l'involution Φ et les deux courbes H, soient H_1, H_2, passant per ce point. Soient H'_1, H'_2 les courbes de Σ' transformées respectivement de H_1, H_2. Il est facile de voir que H'_1 touche H_1 en P et que H'_2 touche de même H_2 au même point. Or, les courbes $H_1+H'_1$, $H_2+H'_2$ sont des courbes canoniques C, donc les courbes canoniques de F passant par P, y acquièrent un point double à tangentes variables.

On sait (c'est un résultat obtenu par M. Severi et réproduit dans notre Mémoire déjà cité) que P est un point de coïncidence parfaite, donc les courbes Γ de Φ passant par un point de diramation de cette surface, y acquièrent un point double.

7. Supposons actuellement que la courbe A ait des modules arbitraires. Alors, les courbes C, H constitueront, sur la surface F, une base de déterminant -3, donc une base-minima [1]. Or, à la courbe H correspond, sur la surface Φ, une courbe canonique Γ et à la courbe C, sur la même surface, une courbe Γ également, comptée deux fois. Si donc nous considérons, sur la surface F, une courbe D ne passant par aucun des points de coïncidence de l'involution Φ et qui soit donnée par l'égalité symbolique

$$D \equiv \lambda_1 C + \lambda_2 H,$$

il lui correspond, sur Φ, une courbe D^* telle que

$$D^* \equiv (2\lambda_1 + \lambda_2)\,\Gamma.$$

Observons que si $\lambda_2 = 0$, D est composée avec l'involution Φ et il lui correspond, sur la surface Φ, une courbe qui, comptée deux fois, est la courbe D^*.

Lorsque l'on considére une courbe D passant par quelques points de coïncidence de l'involution Φ, il lui correspond, sur Φ, une courbe

$$D^* + \mu_1 \Gamma_1 + \cdots + \mu_{28} \Gamma_{28},$$

(1) Severi: *Corrispondenze...*, loc. cit.

les $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{28}$ étant des entiers convenablement choisis. On a alors

$$D^* + \mu_1 \Gamma + \cdots + \mu_{28\,28} \equiv (\Gamma\, 2\, \lambda_1 + \lambda_2)\, \Gamma .$$

Inversement, une courbe de la surface Φ vérifie toujours une pareille égalité fonctionnelle. Par suite, les 29 courbes $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, {}_2\Gamma_8$ constituent une base de Φ.

Lorsque l'on part d'une courbe de genre trois à modules généraux, la surface Φ a le nombre-base $\rho = 29$. Une base est constituée par une courbe canonique et par les 28 courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux 28 points doubles coniques.

On conclut de là, au moyen de la formule bien connue de M. Picard, que la surface Φ possède, en général, $\rho_0 = 14$ intégrales doubles de seconde espèce, comme l'avait d'ailleurs trouvé M. Remy.

CHAPITRE II

INVOLUTIONS, DOUÉES D'UN NOMBRE FINI DE POINTS DE COÏNCIDENCE, APPARTENANT AUX SURFACES F ET Φ.

8. Supposons qu'il existe, sur la surface F, une involution I_n, d'ordre n (> 1), douée d'un nombre fini de points de coïncidence. Il résulte d'un théorème que nous avons démontré récemment [1] que l'involution I_n est engendrée par un groupe de transformations birationnelles (cycliques) de la surface F en elle-même. Soit T_1 une de ces transformations qui soit différente de l'identité et de la transformation T engendrant l'involution Φ. Nous allons démontrer qu'il lui correspond une transformation birationnelle de la courbe A en elle-même.

On sait que si une surface admet une transformation birationnelle en elle-même, celle-ci transforme une courbe canonique de la surface en une courbe canonique. Par conséquent T_1 transforme $|C|$ en lui-même.

Une courbe H de Σ est transformée, par T_1, en une courbe $\overline{H}$ de genre trois; de plus, H étant spéciale, il en est de même de $\overline{H}$. Soit P le point de la courbe plane A qui correspond à la courbe H envisagée. Les couples de points de A images des points de $\overline{H}$ sont, puisque $\overline{H}$ est spéciale, alignés sur un point P' du plan de A. Lorsque P parcourt A, P' parcourt une certaine courbe du plan de A, algébrique, qui a certainement quelques points communs avec A. Par conséquent, pour certaines courbes H, il arrive que la courbe $\overline{H}$ correspondante soit, soit une courbe de Σ, soit une courbe de Σ'.

Dans le premier cas, ont voit que les courbes H et $\overline{H}$ ont un seul point

[1] *Sur les involutions, douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* Rend. R. Accad. Lincei, 1914, (5), XXIII.

commun. Si toutes les courbes $\overline{H}$ n'appartiennent pas à Σ, les couples de courbes de Σ ayant un point commun sur une courbe $\overline{H}$ quelconque (n'appartenant pas à Σ) déterminent, sur la courbe K (de genre trois) une involution $\gamma_2{}^1$ de genre trois, ce qui est absurde.

On en conclut que T_1 transforme en lui-même le système Σ (birationnellement identique à A) et que, par suite, il existe une transformation birationnelle τ de A en elle-même.

On ramène le second cas au premier en considérant la transformation TT_1. On conclut alors que TT_1 transforme Σ en lui-même et qu'il existe par suite une transformation birationnelle de A en elle-même.

Observation. — On démontrerait de la même manière que si F admet une transformation birationnelle non périodique en elle-même, il lui correspond une transformation non périodique de A en elle-même, ce qui est absurde, donc:

Toute transformation birationnelle de F *en elle-même est périodique.*

9. Partons actuellement de la transformation τ de A en elle-même et soient P un point de F, P_{11}, P_{12} les points du couple correspondant de A. À P_{11}, P_{12}, τ fait correspondre des points P_{21}, P_{22}. Soit P_2 le point de F représentant le couple P_{21}, P_{22}. La transformation T'_1 faisant passer de P_1 à P_2 ainsi définie a la même période que τ et elle transforme Σ en lui-même.

Soient P'_{11}, P'_{12} les points qui, avec P_{11}, P_{12}, forment un groupe canonique de A; P'_{21}, P'_{22} ceux qui forment un groupe canonique avec P_{21}, P_{22}; P'_1, P'_2 les points de F images des couples P'_{11}, P'_{12}; P'_{21}, P'_{22}. La transformation τ change un groupe canonique de A en un groupe canonique, donc elle transforme les points P'_{11}, P'_{12} en P'_{21}, P'_{22} (dans un certain ordre). Sur F, cela signifie que T'_1 fait passer de P'_1 à P'_2. Or, T fait passer de P_1 à P'_1 et de P_2 à P'_2, donc on a $TT'_1 = T'_1T$, c'est-à-dire que T et T'_1 sont permutables.

Reprenons la transformation T_1 considérée plus haut.

Si T_1 change Σ en lui-même, elle coïncide avec la transformation T'_1 qui vient d'être définie.

Si au contraire, T_1 change Σ en Σ', c'est T_1T qui coïncide avec T'_1. On a alors $T.\ T_1T = T_1T.\ T = T_1$, ou encore $TT_1 = T_1T$. Les transformations T, T_1 sont donc toujours permutables. De plus T_1T ayant la même période que T_1, T_1 et τ ont également la même période.

10. Considérons, sur la courbe A, une involution γ'_2, d'ordre 2. On sait que cette courbe A peut toujours être supposée avoir l'équation

$$y^4 + y^2 f_2(x) + f_4(x) = 0,$$

où $f_2(x)$, $f_4(x)$ sont des fonctions de x de degrés 2, 4 respectivement. La γ'_2 est elliptique.

À cette involution γ'_2 correspond, sur F, une involution I_2, d'ordre deux, construite suivant le procédé indiqué plus haut. Aux couples de points de A formant des groupes de la γ'_2 correspondent des points de F

situés sur une courbe L. Tout point de cette courbe est une coïncidence pour l'involution I_2.

Remarquons que la courbe L est transformée en elle-même par T et soit T' la transformation de F en elle-même engendrant I_2. La transformation TT' engendre une involution d'ordre 2 ayant également une courbe de coïncidence. Les points de celle-ci sont les images des couples de points de A ne formant pas des groupes de γ'_2, les points d'un couple ayant même abscisse.

Inversement, à une involution I_2 d'ordre 2 donnée sur F correspond une involution γ_2 d'ordre 2 sur A. Que la transformation génératrice de I_2 change Σ en lui-même ou en Σ', on voit qu'elle possède une infinité de points invariants sur F.

Si nous considérons, sur F, une trasformation birationnelle T_1 de période 2ε $(\varepsilon > 1)$, T_1^ε sera de période 2 et différente de T. De plus T_1^ε aura une infinité de points invariants et par suite:

Une involution douée d'un nombre fini de coïncidences, appartenant à F *et non composée avec l'involution* Φ, *est engendrée par un groupe de transformations birationnelles cycliques de périodes impaires de* F *en elle-même. A chacune de ces transformations correspond une transformation birationnelle de même période de la courbe* A *en elle-même. De plus, chacune de ces transformations est permutable avec* A.

Il est d'ailleurs bien clair que l'on peut se borner à l'étude des transformations laissant le système Σ invariant.

11. Considérons maintenant une involution I_n, d'ordre n, appartenant à la surface Φ et douée d'un nombre fini de points de coïncidence. Elle est engendrée par un groupe fini de transformations birationnelles de la surface en elle-même, d'après le théorème que nous avons invoqué plus haut.

À l'involution I_n correspond, sur la surface F, une involution I'_{2n}, d'ordre 2^n, composée avec l'involution Φ, et dotée d'un nombre fini de points de coïncidence. Soient T_1, T_2, ..., T_k, T les transformations birationnelles de F en elle-même engendrant I'_{2n}. Les transformations T_1, T_2, ..., T_k engendrent une involution d'ordre n. On en conclut que:

Une involution douée d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à Φ, *est d'ordre impair. Elle correspond à une involution de même ordre, appartenant à la courbe* A *et engendrée par des transformations birationnelles de cette courbe en elle-même.*

12. Nous avons vu que les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à F, et non composées avec l'involution Φ, sont engendrées par les transformations birationnelles de F correspondant aux transformations birationnelles de périodes impaires de A en elle-même. Or, celles-ci sont connues; elles ont été déterminées par S. Kantor [1] et, d'une manière plus précise, par M. A. Wiman [2]. Ces trans-

[1] *Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene.* Acta Mathematica, 1895, XIX.

[2] *Ueber die hyperelliptischen Kurven und diejenigen von Geschlecht $p = 3$, welche*

formations ont les périodes 3, 7 ou 9. En se reportant aux résultats qui viennent d'être invoqués, on a le théorème suivant:

Les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à la surface F *et non composées avec l'involution* Φ, *sont au nombre de quatre:*

I. *Une involution d'ordre trois sur la surface* F *représentant les couples de points de la courbe*

$$x_1^3 x_2 + f_4(x_2, x_3) = 0,$$

$f_4(x_2, x_3)$ *étant un polynôme homogène de degré quatre.*

II. *Une involution d'ordre trois sur la surface* F *image des couples de points de la courbe*

$$a x_3^4 + b x_3^2 x_1 x_2 + c x_3 x_1^3 + d x_3 x_2^3 + e x_1^2 x_2^e = 0.$$

III. *Une involution d'ordre 7 sur la surface* F *image des couples de points de la courbe (de Klein)*

$$x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 + x_3 x_1^3 = 0.$$

IV. *Une involution d'ordre 9 sur la surface* F *représentant les couples de points de la quartique*

$$x_3^3 x_2 + x_1^4 + x_1 x_2^3 = 0.$$

Nous étudierons, dans les chapitres suivants, les quatre involutions précédentes, ainsi que les involutions auxquelles elles donnent naissance sur la surface Φ. Nous construirons des modèles projectifs de surfaces représentant ces différentes involutions.

CHAPITRE III

L'involution d'ordre trois appartenant à la surface représentant les couples de points de la courbe $x_1^3 x_2 + f_4(x_2, x_3) = 0$.

13. La courbe d'ordre quatre et de genre trois

$$x_1^3 x_2 + f_4(x_2, x_3) = 0,$$

où $f_4(x_2, x_3)$ est un polynome homogène du quatrième degré, est invariante pour l'homologie

$$\tau = \begin{pmatrix} \varepsilon x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

eindeutigen Transformationen in sich zulassen. Bihang till K. Svenska Akad. Handl. 1895, XXI. — *Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationnalen Transformationen in der Ebene.* Mathem. Annalen, 1897, XLVIII.

$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ étant une racine primitive cubique de l'unité. La transformation τ engendre une involution rationnelle d'ordre trois et laisse cinq points invariants, à savoir: Q_0, centre d'homologie et Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, situés sur l'axe d'homologie $x_1 = 0$. Les quatre droites $Q_1 Q_0$, $Q_2 Q_0$, $Q_3 Q_0$, $Q_4 Q_0$ sont des tangentes d'inflexión en Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, et la tangente en Q_0 a, avec A, un contact quartiponctuel (point d'ondulation).

On a d'ailleurs

$$|4 Q_0| = |Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4|.$$

Considérons la surface F qui représente, sans exception, les couples de points (non ordonnés) de la courbe A. À τ correspond une transformation birationnelle T_1 de F en elle-même, engendrant une involution I_3, d'ordre trois.

Cette involution I_3 possède quinze points de coïncidence, à savoir:

P_{00} représentant le couple formé par le point Q_0 compté deux fois:

P_{0i} $(i = 1, 2, 3, 4)$ représentant le couple $Q_0 Q_i$;
P_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ représentant le couple $Q_i Q_k$.

Désignons par H_0, H_1, H_2, H_3, H_4 les courbes de Σ passant respectivement par les point $P_{00}, P_{11}, P_{22}, P_{33}, P_{44}$ (qui se trouvent sur K). Le point P_{ik} $(i \gtreqless k)$ se trouve à l'intersection des courbes H_i, H_k $(i, k = 0, 1, 2, 3, 4)$.

14. La transformation T_1 change en lui même le système canonique $|C|$ de F. En particulier, elle change en elles-mêmes les courbes C passant par les six points $P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34}$ et la courbe C composée de H_0 et de la courbe H'_0 que la transformation T fait correspondre à H_0.

Soit F^* une surface image de l'involution I_3. À une courbe C correspond, sur F^*, une courbe C^* de genre 7, ayant 6 points doubles variables. La courbe C^* a donc le genre virtuel 7. Son degré virtuel est égal en degré effectif 6 augmenté du double du nombre de points doubles variables, donc à 18.

Le système linéaire $|C^*|$ a la dimension r donnée par le théorème de Riemann-Roch,

$$r \geqslant \pi_a + 18 - 13 + 1 \geqslant 6,$$

π_a étant le genre arithmétique de F^*.

Rapportons projectivement les courbes C^* aux hyperplans d'un S_r, nous obtenons une surface d'ordre 18, birationnellement, identique a F^*, que nous désignerons toujours par F^*.

À l'involution I_3 correspond sur Φ une involution I'_3 dont nous désignerons par Φ^* une surface image. Opérant sur $|\Gamma|$ comme nous avons opéré sur $|C|$, nour formons, sur Φ^*, un système linéaire $|\Gamma^*|$, de genre 7 et de degré 9. La surface Φ étant régulière, il en est de même de Φ^* et la dimension de $|\Gamma^*|$ est donc (Riemann-Roch) égale à $\pi'_a + 3$. Or $\pi'_a < 3$, car $|C|$ n'est pas composé avec I_3, donc la dimension de $|\Gamma^*|$, au plus égale à 5, est inférieure à celle de $|C^*|$, qui est donc simple. La surface F^*, de S_r, est donc simple.

Au système $|C^*|$ correspond, sur F, un système dont les courbes sont contenues totalement dans le système tricanonique $|3C|$.

15. Nons allons étudier les points de coïncidence $P_{12}, P_{13}, \ldots, P_{34}$.

Remarquons que les courbes de $|C|$ passant par un de ces points, passent également par les cinq autres. De plus, ces courbes, qui forment un faisceau, ne peuvent se toucher en ces points.

Une de ces courbes étant transformée en elle-même par T_1, il en résulte que les points en question sont des *points de coïncidence parfaits* pour I_3.

Trois courbes C passant par les six points considérés forment une courbe du système $|3C|$; par conséquent les courbes de $|3C|$ qui sont des transformées de courbes C^* de F^* et qui passent par P_{12}, par exemple, ont en ce point une multiplicité i au plus égale à 3. Considérons une de ces courbes et son homologue C^* sur F^*. Soit x le genre de cette courbe (qui passe par le point de diramation P^*_{12} correspondant a P_{12}). La formule de Zeuthen donne

$$6(x-1)+i(i+1)=72.$$

On en conclut que $i(i+1)$ est multiple de 3. Mais d'autre part, le degré *effectif* des courbes $3C$ passant par P_{12} et transformées de courbes C^* est multiple de 3. Or, ce degré est $36-i^2$, car ces courbes ne peuvent pas se toucher. On voit donc que $i=3$ et que, par suite, $x=11$.

Par conséquent, la surface F^* possède en P^*_{12} une singularité qui abaisse de deux unités le genre d'une section hyperplane. La courbe C^* passant par P^*_{12} a pour transformée sur F une courbe $3C$ ayant un point triple en P_{12} et sur chaque branche de cette courbe en ce point il y a un groupe de I_3 infiniment voisin. Donc la courbe C^* a un point triple en P^*_{12} et ce point est un point conique triple à cône tangent rationnel de F^*.

La surface F^* *possède six points de diramation* $\mathrm{P}^*_{12}, \mathrm{P}^*_{13}, \ldots, \mathrm{P}^*_{34}$, *qui sont des points triples coniques à cônes tangents rationnels.*

16. Examinons maintenant les points $P_{00}, P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04}, P_{11}, P_{22}, P_{33}, P_{44}$.

Considérons par exemple le couple P_{01}, P_{11}. Les courbes C passant par l'un de ces point s'osculent en chacun d'un en touchant la courbe H_1 en P_{11}, la courbe H_0 en P_{01}. Mais une de ces courbes C n'est pas, en général, invariante pour T_1. Parmi les courbes C passant par P_{01} et P_{11}, il y en a deux invariantes pour T_1, l'une est constituée par les courbes H_0, H'_0, l'autre par les courbes H_1, H'_1. Remarquons que la courbe H'_0 touche H_1 en P_{11} et que la courbe H'_1 touche K en P_{11} et H_0 en P_{01}. Nous connaisons donc, en chacun des points considérés, deux directions invariantes pour T_1, à savoir: en P_{11}, les directions tangentes respectivement à K et H_1; en P_{01}, les directions tangentes à H_1 et à H_0.

Supposons que P_{11} soit un point de coïncidence parfaite. Alors, le point de diramation P_{11}^* correspondant sur F^* est un point triple conique, a cône tangent rationnel. Considérons une courbe C passant par P_{11} et non invariante pour T_1. Cette courbe, jointe a ces transformées par T_1, donne une courbe de $|3C|$ à laquelle correspond, sur F^*, une courbe C^* ayant un point triple avec une seule tangente en P_{11}^*. Mais on peut former ∞^1 courbes C^* analogues, la tangente en P_{11}^* restant la même. Le cône des tangentes en P_{11}^* devrait donc être dégénéré en trois plans concourants, la droite commune correspondant à la diréction tangente à H_1 en P_{11}. Considérons maintenant la courbe $3(H_0 + H'_0) \equiv 3C$. Il lui correspond, sur F^*, une courbe C^* située dans un hyperplan ne passant pas par la droite triple du cône tangent à F^* en P_{11}^*, mais dont la tangente en P_{11}^* est unique. Il faudrait donc que le cône tangent en P_{11}^* à F^* se réduise à un plan triple. Cela revient à admetre que les courbes de $|3C|$, invariantes pour T_1, passant par P_{11}, y ont un point triple a tangente unique, tout en formant un système linéaire. Cela est absurde, donc P_{11} n'est pas un point de coïncidence parfaite. Il est de même de P_{01}.

On arrive de la même manière à la même conclusion pour les points P_{22}, P_{02}, P_{33}, P_{03}, P_{44}, P_{04}. Pour P_{00}, la démonstration est un peu différente, mais repose sur les mêmes principes. Les courbes C, passant par P_{00}, y acquièrent un point double dont les branches touchent K en P_{00}. À trois de ces courbes transformées l'une dans l'autre par T_1 correspond une courbe C^* ayant en P_{00}^{**} un point sextuple à deux tangentes triples. Si donc P_{00} était un point de coïncidence parfaite, le cône tangent à F^* en P_{00}^* devrait se réduire à trois plans confondus, ce qui est absurde.

On sait qu'à un point de coïncidence non parfaite correspond un point double biplanaire ordinaire de diramation, donc:

La surface F^* *possède neuf points de diramation* $P_{00}^*, P_{11}^*, \ldots, P_{44}^*, P_{01}^*, P_{04}^*$ *qui sont des points doubles biplanaires ordinaires.*

17. On sait que si une surface possède un point triple, ses adjointes passent par ce point; en d'autres termes, les courbes canoniques de F^* doidoivent rencontrer en un point les courbes auxquelles sont équivalents, au point de vue algébrique, les six points triples de F^*. D'autre part, une courbe canonique $\bar{C}^*$ de F^* doit se transformer en une courbe canonique de F. On en conclut que les courbes canoniques de F^* correspondent aux courbes C passant par P_{12}, P_{13}, ..., P_{34}. On a donc, sur F^*, un faisceau de courbes canoniques $|\bar{C}^*|$, $p_g = 2$.

On voit aisement que les courbes $\bar{C}^*$ sont elliptiques et que, par suite, on a, pour F^*, $p^{(1)} = 1$.

Soit δ le nombre de courbes $\bar{C}^*$ ayant un point double en dehors des points de diramation. Comme un point double biplanaire ordinaire abaisse la classe d'une surface de trois unités, l'invariant de Zeuthen-Segre I de F^*, calculé au moyen du faisceau $|\bar{C}^*|$, est

$$I = \delta + 23.$$

L'invariant de Zeuthen-Segre de F est d'une part égal à 2 et d'autre part, calculé au moyen du faisceau formé par les C passant par $P_{12}, \ldots, P_{34}$, égal à $3\delta - 25$. On en conclut $\delta = 9$ et $I = 32$.

Par la formule

$$I + p^{(1)} = 12 p_a + 9,$$

on trouve que le genre arithmétique de F^* est $p_a = 2$. F^* est donc régulière. Par suite, la dimension de $|C^*|$ est, d'après le théorème de Riemann-Roch, égale à 8, donc:

La surface F^*, *image de l'involution* I_3, *est d'ordre 18, à sections hyperplanes de genre 13, dans un espace* S_8. *Elle possède six points triples à cônes tangents rationnels et neuf points doubles biplanaires ordinaires. Elle a les genres* $p^{(1)} = 1$, $p_g = p_a = 2$, $P_2 = 3$, $P_3 = 4, \ldots$.

18. Considérons l'involution d'ordre 6 engendrée sur F par les transformations (permutables) T et T_1. Nous avons déjà prouvé l'existence, sur la surface Φ^* image de cette involution, d'un système linéaire $|\Gamma^*|$, de genre 7 et de degré 9, de dimension r au moins égale à 3 et au plus égale à 5. Rapportons projectivement les courbes Γ^* aux hyperplans d'un S_r. Nous obtenons, dans cet espace, une surface d'ordre 9 birationnellement identique à Φ^*. C'est cette surface que nous désignerons dorénavant par Φ^*.

L'involution d'ordre 6 considérée possède:

a) Un point de coïncidence d'ordre 6, P_{00}, invariant à la fois pour T et T_1. Ce point est évidemment une coïncidence non parfaite.

b) Six points de coïncidence parfaite triple $P_{12}, \ldots, P_{34}$.

c) Huit points de coïncidence triple non parfaite $P_{11}, P_{22}, P_{33}, P_{44}, P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04}$.

d) Vingt-sept points de coïncidence parfaite double (invariants pour T).

Ainsi que nous l'avons fait dans des travaux antérieurs déjà cités plus haut, on établit qu'au point de coïncidence sextuple correspond, sur Φ^*, un point de diramation qui est un point double biplanaire formé d'une suite de trois points doubles infiniment voisins successifs dont le dernier est conique.

Aux six points de coïncidence triple $P_{12}, \ldots, P_{34}$ correspondent trois points de diramation qui sont des points triples coniques à cônes tangents rationnels de Φ^*.

Aux huit autres points de coïncidence triple correspondent quatre points de diramation qui sont des points doubles biplanaires ordinaires de Φ^*.

Enfin, aux vingt-sept points de coïncidence double correspondent neuf points de diramation qui sont des points doubles coniques de Φ^*.

19. Le système $|C|$ étant composé avec l'involution Φ, il correspond sur Φ, aux courbes $\bar{C}^*$ de F^*, ∞^1 courbes $\bar{\Gamma}^*$ qui sont nécessairement les courbes canoniques de Φ^*. On a donc, pour cette dernière surface, $p_g = 2$, $p^{(1)} = 2$. De plus, la surface étant nécessairement régulière, on a $p_a = 2$,

$P_2 = 3$, $P_3 = 4$, ... Par conséquent, on a (théorème de Riemann-Roch) $r = 5$, et

L'involution d'ordre six engendrée sur F *par les transformations* T *et* T_1, *a pour image une surface d'ordre 9, à sections hyperplanes de genre 7, de* S_5, *possédant:*

un point double biplanaire formé d'une suite de trois points doubles infiniment voisins successifs dont le dernier est conique;

trois points triples coniques a cônes tangents rationnels;

quatre points doubles biplanaires ordinaires;

neuf points doubles coniques.

Cette surface a les genres $p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 1$.

CHAPITRE IV

L'INVOLUTION D'ORDRE TROIS APPARTENANT À LA SURFACE REPRÉSENTANT LES COUPLES DE POINTS DE LA QUARTIQUE:

$$a\, x_3^4 + b\, x_3^2\, x_1\, x_2 + c\, x_3\, x_1^3 + d\, x_3\, x_2^3 + e\, x_1^2\, x_2^2 = 0.$$

20. La quartique A, d'équation

$$a\, x_3^4 + b\, x_3^2\, x_1\, x_2 + c\, x_3\, x_1^3 + d\, x_3\, x_2^3 + e\, x_1^2\, x_2^2 = 0$$

est invariante pour l'homographie

$$\tau = \begin{pmatrix} \varepsilon\, x_1 & \varepsilon^2\, x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

où $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine cubique primitive de l'unité.

La transformation τ engendre, sur A, une involution γ'_3, elliptique, d'ordre trois, possédant deux points unis Q_1 $(x_2 = x_3 = 0)$ et Q_2 $(x_1 = x_3 = 0)$. Le troisième point uni de l'homographie, Q $(x_1 = x_2 = 0)$ n'appartient pas à la courbe.

La surface F, image des couples de points (non-ordonnés) de la courbe A possède une involution I_3 engendrée par une transformation birationnelle T_1 de F en elle-même construite au moyen de τ comme cela a été indiqué au chapitre II.

L'involution I_3 possède, sur la surface F, trois points de coïncidence, qui sont:

1°) Le point P_{11}, image du couple de points Q_1, Q_1.

2°) Le point P_{12}, image du couple Q_1, Q_2.

3°) Le point P_{22}, image du couple Q_2, Q_2.

Soient H_1, H_2 les courbes H passant par P_{11}, P_{22}; H'_1, H'_2 les courbes de Σ qui correspondent à H_1, H_2 par la transformation T. Le point P_{12} est situé a l'intersection de H_1 et H_2; P_{11}, P_{22} sont sur K. Remarquons que la droite $Q_1 Q_2$ étant une bitangente de la quartique A, le point P_{12} est en même temps invariant pour T.

21. La transformation T_1 laisse invariantes trois courbes canoniques de F, à savoir:

1°) La courbe C_0 dont les points représentent les couples de points de A aliqués sur le point Q.

2°) La courbe $C_1 \equiv H_1 + H'_1$.

3°) La courbe $C_2 \equiv H_2 + H'_2$.

Les courbes canoniques C passant par un des points de coïncidence, passent nécessairement par les deux autres; elles ont un point double en P_{12} et des points simples en P_{11}, P_{22}. De plus, le faisceau formé par ces courbes est invariant pour T_1, mais une de ces courbes n'est pas, en général, invariante pour T_1.

Si les points de coïncidence P_{11}, P_{12}, P_{22} étaient des coïncidences parfaites, les courbes C passant par ces points devraient s'y toucher. Mais alors, ces courbes auraient plus de six points communs, ce qui est absurde, puisque $|C|$ est de degré six. On en conclut que I_3 possède trois points de coïncidence non parfaite.

22. À une courbe C correspond, sur une surface F^* image de l'involution I_3, une courbe C^* de genre et de degré effectifs 7 et 6, mais possédant six points doubles variables. Le système $|C^*|$ a donc les genre et degré virtuels égaux à 13 et 18. Il lui correspond, sur F, le système tricanonique $|3\,C|$.

Considérons un faisceau de courbes C^*. Nous savons que celles qui passent par un point de diramation y acquièrent un point double et que, comme ce point double équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à deux courbes rationnelles de degré -2 ayant un point commun, il doit compter, dans le calcul de l'invariant de Zeuthen-Segre, pour trois unités. Soit δ le nombre de courbes du faisceau considéré qui ont un point double ordinaire. L'invariant de Zeuthen-Segre de F^* est égal à

$$12\,p_a + 9 - p^{(1)} = \delta - 61,$$

p_a et $p^{(1)}$ étant les genres arithmétique et linéaire de P^*.

L'invariant de Zeuthen-Segre de P, calculé au moyen du faisceau correspondant de $|3\,C|$, donne $\delta = 67$. On en conclut

$$12\,p_a + 3 = p^{(1)}.$$

Or, le genre linéaire de F^* est inférieur à celui, 7, de F, donc $p^{(1)} < 7$ et par suite $p_a = 0$, $p^{(1)} = 3$.

La courbe canonique de F^* a pour transformée une courbe canonique de F et cette courbe ne doit pas passer par les points de coïncidence de I_3. On en conclut que la courbe canonique de F^* est la courbe C_0^* qui a pour correspondante C_0 sur F. On a, pour P^*, $p_g = 1$.

23. Considérons l'involution d'ordre six engendrée par T et T_1 sur F. En opérant sur le système $|C|$ comme on l'a fait tantôt et en remarquant que ce système est composé avec l'involution Φ, on construit, sur une surface Φ^* image de cette involution, un système $|\Gamma^*|$, de degré et genre virtuels 9 et 7.

La surface Φ^*, étant également l'image d'une involution d'ordre trois existant sur la surface régulière Φ, est régulière. Soit $\Gamma_0{}^*$ la courbe qui correspond sur Φ^* à C_0; comme elle correspond également à la courbe canonique $C_0{}^*$ de F^*, c'est la courbe canonique de Φ^* et on a, pour cette surface, $p_a = p_g = 1$. La courbe C_0 ne passant par aucun point de coïncidence de I_3 ni de Φ, la courbe $\Gamma_0{}^*$ a le genre 2 et Φ^* a donc le genre linéaire $p^{(1)} = 2$. On en conclut que ses plurigenres sont $P_2 = 3$, $P_3 = 5$, ...,

$$P_i = \frac{1}{2}\, i\,(i-1) + 2 \; (i > 1).$$

Le système $|\Gamma^*|$, qui est le système tricanonique de Φ^*, a la dimension $P_3 - 1 = 4$. Rapportant projectivement les courbes de $|\Gamma^*|$ aux hyperplans d'un S_4, nous obtenons une surface birationnellement identique à Φ^* (et que nous désignerons encore par cette même lettre), qui est d'ordre 9.

L'involution d'ordre 6, engendrée par T et T_1 sur F, possède:

a) un point de coïncidence sextuple P_{12},

b) deux points de coïncidence triple P_{11}, P_{22}.

Ces trois points sont des coïncidences non parfaites.

c) ving-sept points de coïncidence double.

Par suite, on peut énoncer le théorème suivant:

L'involution d'ordre six engendrée sur F *par* T *et* T_1 *a pour image une surface d'ordre 9, à sections hyperplanes de genre 7, de* S_4, *possédant:*

un point double biplanaire constitué par une suite de trois points doubles infiniment voisins successifs, le dernier étant conique,

un point double biplanaire ordinaire;

neuf points doubles coniques.

Cette surface a les genres $\mathrm{p}^{(1)} = 2$, $\mathrm{p_a} = \mathrm{p_g} = 1$, $P_2 = 3$, $P_3 = 5$, ..., $\mathrm{P_i} = \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\mathrm{i}-1) + 2\;(\mathrm{i} > 1)$.

On sait que M. Enriques (1) a déterminé le type général d'une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 2$. Le tipe normal de cette surface est la surface tricanonique d'ordre 9, à sections hyperplanes de genre 7, de S_4, possédant une droite double ou triple, image de la courbe canonique. Cette droite est précisément double quand la $g_3{}^1$ découpée sur la courbe canonique par les courbes tricanoniques, a un point fixe. Cela n'a pas lieu dans le cas de la surface Φ^*, donc cette surface possède une droite triple, image de la courbe $\Gamma_0{}^*$.

(1) *Le superficie algebriche di genere lineare* $\mathrm{p}^{(1)} = 2$. Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1897, (5), VI.

24. Reprenons la surface F^*. Le système $|C^*|$ a, d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension $r \geqslant 6$. Rapportons projectivement les courbes C^* aux hyperplans d'un S_r, nous obtenons une surface d'ordre 18, que nous désignerons toujours par F^*. Cette surface est simple, puisque Φ^* est dans un S_4.

Correspondant aux trois points de coïncidence P_{11}, P_{12}, P_{22}, F^* possède trois points de diramation qui sont des points doubles biplanaires ordinaires.

Le système bicanonique de Φ^* a la dimension 2, donc celui de F^* a la dimension au moins égale à 2. On ne peut pas dire que le système bicanonique de F^* est régulier, car le théorème de Picard-Severi [1] peut s'énoncer: «*Le système adjoint à une courbe apte à définir un système continu qui n'est pas un faisceau irrationnel, est régulier*» et la courbe canonique C_0^* de F^* est isolée. Mais le théorème qui vient d'être invoqué permet de dire que le système tricanonique $|C^*|$ est régulier et que, par suite, pour F^*, $P_3 = 7$. En général, $P_i = i(i-1) + 1$ $(i > 2)$.

L'involution I_3 *est birationnellement identique à une surface d'ordre 18, à sections hyperplanes de genre 13, de* S_6, *possédant trois points doubles biplanaires ordinaires. Cette surface a les genres* $p^{(1)} = 3$, $p_a = 0$, $p_g = 1$, $P_2 \geqslant 3$, $P_3 = 7$, ..., $P_i = i(i-1) + 1$ $(i > 2)$.

LUCIEN GODEAUX

Front Belge, 17 Janvier 1917

[1] Loc. cit. (Chap. I).

(à suivre)