Sur les points d'Eckhardt d'une surface cubique

Lucien Godeaux

Résumé

On démontre que si une surface cubique possède trois points d'Eckardt situés sur une droite n'appartenant pas à la surface, celle-ci possède encore trois points d'Eckardt situés sur une droite n'appartenant pas non plus à la surface en utilisant une représentation plane de la surface.

COMMUNICATION DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Sur les points d'Eckardt d'une surface cubique

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — On démontre que si une surface cubique possède trois points d'Eckardt situés sur une droite n'appartenant pas à la surface, celle-ci possède encore trois points d'Eckardt situés sur une droite n'appartenant pas non plus à la surface en utilisant une représentation plane de la surface.

On sait qu'un point d'Eckardt d'une surface cubique est un point simple en lequel le plan tangent à la surface coupe celle-ci suivant trois droites passant par le point de contact. On connaît des surfaces cubiques qui possèdent soit neuf, soit six points d'Eckardt; elles ont été l'objet d'études de Ciani (1) et de nous-même.

En utilisant la représentation plane de la surface cubique, nous avons obtenu les théorèmes suivants:

Si une surface cubique sans point multiple possède trois points d'Eckardt non situés sur une droite et dont deux n'appartiennent pas à une même droite de la surface, elle possède neuf points d'Eckardt qui sont les points d'inflexion d'une section plane de la surface (2)*;*

Si une surface cubique sans point multiple possède trois points d'Eckardt dont deux appartiennent à une droite de la surface, le troisième n'étant pas situé sur une des droites de la surface passant par

(1) *Sopra un fascio sizigetico di superficie cubiche* (Rendiconti della Accad. dei Lincei, 1° sem. 1935, pp. 551-555, 631-637; *Scritti Geometrici Scelti*, Padova, Cedam, Vol. II, 1937, pp. 893-902).

(2) *Sur les droites d'une surface cubique* (Mathesis, 1933, pp. 333-339). Dans cette note, antérieure à celle de Ciani, nous avions appelé points planaires les points d'Eckardt.

un des deux premiers points, elle possède six points d'Eckardt situés par couples sur trois droites coplanaires de la surface [1].

Ces théorèmes ont été obtenus par Ciani dans les notes citées en utilisant a priori les équations des surfaces cubiques. Nos énoncés nous paraissent plus précis.

Dans cette note, nous considérons une surface cubique sans point multiple possédant trois points d'Eckardt situés sur une droite n'appartenant pas à la surface et nous établissons le théorème suivant:

Si une surface cubique dépourvue de point multiple possède trois points d'Eckardt situés sur une droite n'appartenant pas à la surface, elle en possède trois autres situés également sur une droite n'appartenant pas à la surface.

Nous déterminons ensuite une représentation plane de la surface.

1. Soit F une surface cubique dénuée de point multiple possédant trois points d'Eckardt P_1, P_2, P_3 situés sur une droite p n'appartenant pas à la surface.

Nous désignerons par ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 les plans tangents à F respectivement aux points P_1, P_2, P_3, par p_{11}, p_{12}, p_{13} les droites de F passant par P_1 et situées donc dans le plan ϖ_1, par p_{21}, p_{22}, p_{23}, les droites de F passant par P_2 et situées dans ϖ_2, enfin par p_{31}, p_{32}, p_{33}, les droites de F passant par P_3 et situées dans ϖ_3.

La droite p_{11} coupe le plan ϖ_2 en un seul point qui appartient à l'une des droites p_{21}, p_{22}, p_{23}, pour fixer les idées à la droite p_{21}. On peut de même supposer que les droites p_{12}, p_{22} se rencontrent, de même que les droites p_{13} et p_{23}.

Plus généralement, on peut supposer sans restriction que les droites p_{11}, p_{12}, p_{13} rencontrent respectivement les droites p_{31}, p_{32}, p_{33} et que les droites p_{21}, p_{22}, p_{23}, rencontrent les droites p_{31}, p_{32}, p_{33}. Cela dépend de la numérotation des droites p_{ik}.

Soit Q_1 la quadrique lieu des droites s'appuyant sur les droites deux à deux gauches p_{11}, p_{22}, p_{33}. Cette quadrique contient la droite p. La droite p_{12} ne peut appartenir à Q et rencontre cette quadrique en P_1 et en un second point (p_{12}, p_{22}). Par ce point passe une génératrice r de Q_1 de même mode que p, et qui s'appuie sur p_{11}, p_{33}. Le plan ϖ_1 contient la droite r et rencontre la droite p_{33} en un point

[1] *Sur les surfaces cubiques possédant six points d'Eckardt* (Bulletin de l'Acad. Roy. de Belgique, 1935, pp. 832-840).

qui ne peut être que le second point de rencontre de p_{13} avec Q_1, c'est-à-dire le point (p_{13}, p_{33}), le premier étant P_1. La droite r appartient au plan $\bar{\omega}_1$ mais ne peut appartenir à F car alors $\bar{\omega}_1$ rencontrerait cette surface suivant quatre droites. On en conclut que Q_1 rencontre F suivant les trois droites p_{11}, p_{22}, p_{33} et suivant trois droites a_{11}, a_{12}, a_{13} de même mode que p et r, mais distinctes de r.

Les droites p_{12}, p_{23}, p_{31} ne peuvent appartenir à Q_1 et ne rencontrent par suite pas les droites a_{11}, a_{12}, a_{13}. Ces six droites forment donc un sixain de la surface F.

2. La connaissance de ce sixain nous permet d'établir une représentation biunivoque de F sur un plan σ telle qu'aux sections planes de F correspondent dans σ des cubiques passant par six points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Ces six points ne peuvent appartenir à une même conique et trois d'entre eux ne peuvent appartenir à une droite puisque F est dépourvue de points doubles.

Nous supposerons que les points A_1, A_2, A_3 représentent les droites a_{11}, a_{12}, a_{13} et les points A_4, A_5, A_6 les droites p_{12}, p_{23}, p_{31}.

Rappelons qu'aux autres droites de F correspondent dans σ des droites ou des coniques passant par cinq des points A.

La droite p_{11} s'appuie sur a_{11}, a_{12}, a_{13} donc la courbe qui la représente dans σ passe par les points A_1, A_2, A_3 et est donc une conique. La droite p_{11} rencontrent les droites p_{12} et p_{31}, donc la conique passe par les points A_4, A_6. Nous la désignerons par α_5.

De même, à la droite p_{22} correspond une conique α_6 passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et à la droite p_{33} correspond une conique α_4 passant par les points A_1, A_2, A_3, A_5, A_6.

La quadrique Q_2 de directrices p_{12}, p_{23}, p_{31} rencontre F suivant trois autres droites a_{21}, a_{22}, a_{23} de même mode que p.

A la droite a_{21} qui rencontre les droites p_{12}, p_{23}, p_{31} correspond dans σ une courbe passant par les points A_4, A_5, A_6 donc une conique passant encore par deux des points A_1, A_2, A_3. Nous supposerons qu'elle passe par les deux derniers de ces points et la désignerons par α_1. Cela revient à supposer que la droite a_{21} s'appuie sur les droites a_{12}, a_{13}, ce qui revient à choisir la numérotation des droites a_{21}, a_{22}, a_{23}.

De même, à la droite a_{22} correspond dans σ une conique α_2 passant par les points A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 et à la droite a_{23} une conique α_3

passant par les points A_1, A_2, A_4, A_5, A_6. La droite a_{22} s'appuie sur les droites a_{13}, a_{11} et la droite a_{23} sur les droites a_{11}, a_{12}.

Nous pouvons résumer la représentation plane de F en indiquant sur une première ligne les droites de la surface et sur une seconde ligne ce qui leur correspond dans σ.

$$\begin{cases} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_{12} & p_{23} & p_{31} \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_{11} & p_{22} & p_{33} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_4 \end{cases}$$

3. Voyons maintenant ce qui correspond sur F à la droite A_5A_6. C'est une droite qui doit rencontrer les droites p_{23}, p_{31} et de plus les droites p_{11} et p_{22}, car A_5A_6 rencontre les coniques α_5, α_6 en dehors des points A_5, A_6. Il en résulte qu'à la droite A_5A_6 correspond une droite intersection du plan ϖ_2 et du plan tangent à F au point (p_{11}, p_{31}), plan passant par p. La droite homologue de A_5A_6 passe donc par le point P_2 et est la troisième droite de F située dans le plan ϖ_2, c'est donc la droite p_{21}. Cette droite doit passer par le point (p_{11}, p_{31}) qui appartient aux plans ϖ_1 et ϖ_3. Il en résulte que les plans ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 ont en commun le point (p_{11}, p_{31}). Nous désignerons ce point par R_1. Observons que la droite p_{21} doit rencontrer les droites p_{11} et p_{31}, elle se trouve dans ϖ_2, donc elle passe par R_1.

A la droite A_6A_4 correspond sur F une droite s'appuyant sur p_{31}, p_{12} et sur p_{22}, p_{33} car la droite A_6A_4 coupe les coniques α_6, α_4 en dehors de ces points. La droite en question appartient au plan ϖ_3 et passe par le point (p_{12}, p_{22}), c'est donc la droite p_{32}. Il en résulte que les plans ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 passent par le point (p_{12}, p_{22}), que nous désignerons par R_2. La droite p_{32} passe également par R_2. Le point R_2 est certainement distinct du point R_1, de sorte que les plans ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 passent par une droite $r = R_1R_2$.

La droite r ne peut appartenir à F et rencontre encore cette surface en un point R_3. On voit aisément que ce point est commun aux droites p_{13}, p_{23}, p_{33}.

Le plan tangent ρ_1 à F en R_1 contient les droites p_{11}, p_{21}, p_{31} et est donc un point d'Eckardt. Il en est de même des points R_2, R_3. Les plans tangents à F ρ_1, ρ_2, ρ_3 respectivement en R_1, R_2, R_3 projettent la droite p de ces points.

Le théorème que nous avions énoncé au début est donc démontré.

Observons qu'à la droite A_2A_3 correspond sur F une droite a_{31} s'appuyant sur a_{12}, a_{13} et sur les droites p_{21}, p_{32}, p_{12}. Aux droites A_3A_1 et A_1A_2 correspondent des droites a_{32}, s'appuyant sur les droites a_{12}, a_{13} et a_{33} s'appuyant sur les droites a_{11}, a_{12}. Elles s'appuyent aussi sur p_{21}, p_{32}, p_{13}. La quadrique Q_3 ayant ces dernières droites comme directrices, rencontre encore F suivant a_{31}, a_{32}, a_{33}. Nous pouvons compléter le tableau des correspondances entre F et σ de la manière suivante:

$$\begin{cases} p_{21} & p_{32} & p_{13} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ A_5A_6 & A_6A_4 & A_4A_5 & A_2A_3 & A_3A_1 & A_1A_2 \end{cases}$$

4. Nous avons ainsi déterminé 18 des 27 droites de la surface F. Les neuf autres droites sont représentées dans le plan σ par les droites joignant les sommets du triangle $A_1A_2A_3$ à ceux du triangle $A_4A_5A_6$. Nous indiquerons rapidement la position de ces droites bien que cela ne soit pas nécessaire pour notre objet.

Considérons la droite A_1A_5. Elle rencontre les droites A_2A_3 et A_4A_6 et les coniques α_4, α_5, donc il lui correspond une droite s'appuyant sur a_{11}, p_{23}, a_{31}, p_{32}, a_{21}. De même, à la droite A_2A_5 correspond une droite s'appuyant sur les droites a_{12}, p_{23}, a_{32}, p_{32}, a_{22}, p_{11}. Enfin à la droite A_3A_5, correspond une droite s'appuyant sur a_{13}, p_{23}, a_{33}, p_{32}, a_{23}, p_{11}.

La quadrique Q'_1 lieu des droites s'appuyant sur les droites deux à deux gauches p_{11}, p_{23}, p_{32} rencontre encore la surface F suivant les droites représentées dans σ par les droites A_1A_5, A_2A_5, A_3A_5.

Un raisonnement analogue montre que la quadrique Q'_2 lieu des droites s'appuyant sur les droites p_{22}, p_{13}, p_{31} rencontre encore F suivant les droites représentées dans le plan σ par les droites A_1A_6. A_2A_6, A_3A_6. La quadrique Q'_3 lieu des droites s'appuyant sur p_{33}, p_{12}, p_{21} rencontre encore F suivant les droites représentées dans σ par les droites A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4.

On peut remarquer que les droites de F qui correspondent aux droites A_1A_2, A_1A_5, A_1A_6 forment l'intersection de F avec la quadrique de directrices a_{11}, a_{21}, a_{31}, qui sont deux à deux gauches.

De même, les droites qui s'appuyent sur a_{12}, a_{22}, a_{32} correspondent aux droites A_2A_4, A_2A_5, A_2A_6. Enfin les droites qui s'appuyent sur a_{13}, a_{23}, a_{33} correspondent aux droites A_3A_4, A_3A_5, A_3A_6.

5. Il est facile de former l'équation de la surface F. Si $f_3(x_1,x_2)$, $f_3'(x_3,x_4)$ sont des formes cubiques de leurs arguments, la surface F a pour équation

$$f_3(x_1,x_2)+f_3'(x_3,x_4)=0. \tag{1}$$

Remarquons que la surface F est transformée en soi par l'homographie biaxiale H de période trois, d'équations

$$x_1':x_2':x_3':x_4' = x_1:x_2:\varepsilon x_3:\varepsilon x_4$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité.

La surface F appartient à un système linéaire de dimension sept de surfaces dont l'équation s'obtient en supposant les coefficients variables dans l'équation (1). Ce système est composé au moyen de l'involution I engendrée par H dans l'espace.

Pour obtenir une image de l'involution I, rapportons projectivement les surfaces cubiques envisagées aux hyperplans d'un espace S_7 à sept dimensions, en posant

$$X_1:X_2:X_3:X_4 = x_1^3:x_1^2x_2^1:x_1^1x_2^2:x_2^3,$$
$$Y_1:Y_2:Y_3:Y_4 = x_3^3:x_3^2x_4^1:x_3^1x_4^2:x_4^3,$$

le facteur de proportionnalité étant le même.

Des équations précédentes, on déduit

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2 & X_3 & X_4 \end{matrix} \right\| = 0, \quad \left\| \begin{matrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Ces équations représentent dans l'espace des X une cubique gauche K_1 et dans l'espace des Y une cubique gauche K_2. Dans l'espace S_7, elles représentent une variété W à trois dimensions, d'ordre 9, lieu des droites s'appuyant sur K_1 et K_2. C'est l'image de l'involution I engendrée par H dans l'espace.

A la surface F correspond une section hyperplane Φ de la variété W. Sur F, H engendre une involution douées de six points unis P_1, P_2, P_3, R_1, R_2, R_3 auxquels correspondent sur Φ six points de diramation triples pour la surface. Le cône tangent en P_1 par exemple projette de ce point la cubique K_2.

6. A l'homographie H correspond dans le plan σ une transformation birationnelle H' de période trois transformant en lui-même le système des cubiques $|\gamma|$ passant par les six points Λ.

Observons que H transforme en elles-mêmes les neuf droites p_{ik} et que les droites a_{11}, a_{12}, a_{13} par exemple, qui ne sont pas unies, forment un groupe transformé en lui-même par H'.

Il en résulte que la transformation H' a comme points unis A_4, A_5, A_6 et transforme en elles-mêmes les coniques α_4, α_5, α_6. Les points A_1, A_2, A_3 qui ne sont pas unis, forment un groupe transformé en soi par H'.

Ces observations nous conduisent à prendre comme transformation H' l'homographie cyclique de période trois qui a comme points unis A_4, A_5, A_6 et qui transforme en soi le groupe des points A_1, A_2, A_3.

L'homographie H' transforme en lui-même le système $|\gamma|$ mais une courbe γ n'est pas en général transformée en elle-même par H', car alors les courbes γ passant par un point formeraient un faisceau au lieu d'un réseau.

H' transforme en elles-mêmes les coniques α_4, α_5, α_6.

Aux sections de F par les plans ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 correspondent dans σ les courbes

$$\alpha_4 + A_4A_6, \quad \alpha_5 + A_5A_4, \quad \alpha_6 + A_6A_5 \tag{2}$$

et aux sections de F par les plans ρ_1, ρ_2, ρ_3 correspondent les courbes

$$\alpha_4 + A_4A_5, \quad \alpha_5 + A_5A_6, \quad \alpha_6 + A_6A_4. \tag{3}$$

Chacune de ces courbes est transformée en elle-même par H'. Les courbes (2) doivent appartenir à un faisceau de même que les courbes (3).

Supposons que les courbes (2) n'appartiennent pas à un faisceau. Alors, une courbe (3) n'appartenant certainement pas au réseau des courbes (2), chaque courbe de $|\gamma|$ serait unie pour H', ce que nous avons vu être impossible.

Les courbes (2) forment donc un faisceau de même que les courbes (3).

Cela étant, en rapportant projectivement les courbes γ aux plans de l'espace, on trouve la surface F. C'est donc l'homographie H' qui correspond à H dans σ.

Liège, le 20 janvier 1970.