

# **CHAPITRE 2**

**EFFET DE LA VITESSE DE DEFORMATION SUR LES  
PROPRIETES MECANQUES DES MATERIAUX**

## 2.1. INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est de donner un résumé de l'état actuel des connaissances dans le domaine de l'influence de la vitesse de déformation sur le comportement dynamique des matériaux, développé par divers chercheurs en s'intéressant plus particulièrement aux aciers de construction.

On décrit en détail les modèles constitutifs, aussi bien en traction-compression qu'en cisaillement pur, utilisés dans le cadre de ce travail. En fin, on donne l'influence de la vitesse de déformation et éventuellement de la température sur les différentes caractéristiques mécaniques de l'acier.

## 2.2. DOMAINE D'APPLICATION DE L'EFFET DE LA VITESSE DE DEFORMATION

Les problèmes du comportement dynamique des structures ont une importance technique considérable. Parmi de nombreuses applications plus particulièrement dans le domaine du Génie Civil pour lesquelles la prise en compte de l'effet de la vitesse de déformation est nécessaire, on peut citer les problèmes de prévision de la durée de vie, d'estimation de la sûreté et de la fiabilité des structures. On s'en sert dans l'analyse du comportement dynamique non linéaire des structures sollicitées au-delà de la limite élastique ; comme le cas des éléments d'une structure exposée aux chocs ou d'une structure soumise aux sollicitations violentes comme le cas des sollicitations sismiques. L'effet de la vitesse de déformation peut entraîner la mise hors service de la structure ou de ses éléments constitutifs et causer des dommages matériels et des pertes humaines. Ce comportement agit par le biais de la rupture fragile qui résulte d'une réduction des déformations plastiques et de la capacité dissipative de la structure. Vu son degré de gravité, ce comportement peut être déterminant dans le dimensionnement d'une structure et envisageable comme un état limite ultime (ELU) à vérifier parmi d'autres.

Grâce aux ordinateurs et à l'application des modèles numériques, il devient possible de prendre en compte le comportement des matériaux de plus en plus complexes. Cela conduit à repousser les frontières des connaissances aussi bien théoriques que calculatrices de la mécanique des structures. Plusieurs modèles constitutifs considérant l'effet de la vitesse de déformation sont actuellement proposés et développés MILLER [M1], WOZNICA [W1]. De nombreux logiciels commercialisés contiennent des modules permettant d'effectuer le calcul des structures tenant compte de l'effet de la vitesse de déformation. Ces logiciels restent toujours sans intérêt pour nous, car les éléments finis qu'ils utilisent ne sont pas adaptés aux structures du Génie Civil. Nous avons opté pour utiliser le logiciel DRAIN-2D [A1], dans lequel nous avons introduit l'effet de la vitesse de déformation aux moyens d'artifices numériques très simples, ces artifices sont largement détaillés au chapitre 4. Nous avons utilisé des modèles constitutifs unidirectionnels travaillant en traction compression et permettant d'effectuer les calculs dans le domaine des vitesses de déformation en traction compression, nous avons également utilisé des modèles constitutifs en cisaillement pur considérant l'effet de la vitesse de rotation due au cisaillement dans le panneau d'âme de la colonne ; les déformations de cisaillement sont supposées rester élastiques dans les poutres et les colonnes, c'est la seule limitation.

D'une part, les résultats expérimentaux ont montré qu'au-delà d'un certain seuil, les propriétés mécaniques des matériaux sont, en général, fonction de la vitesse de déformation. D'autre part, la température influence la limite élastique et change la sensibilité du matériau à la vitesse de déformation inélastique.

Les actions prolongées, répétées et variables dans le temps telles que celles induites par un événement sismique entraînent des sollicitations qui font travailler les matériaux au-delà de

leurs limites élastiques et des vitesses de déformation très élevées. Ceci fait qu'il est important de tenir compte des propriétés mécaniques des matériaux en cas de vitesses d'allongement élevées. PERZYNA [P1] présente dans son ouvrage une analyse approfondie de nombreux travaux qui ont été consacrés à ce sujet. La différence entre le comportement statique et dynamique du métal est si importante que l'on ne peut pas utiliser les résultats des études statiques pour évaluer l'état dynamique, écrit-il. De ce fait on observe, depuis une quarantaine d'années, l'apparition de nombreuses théories et approches qui essaient d'établir une formulation des lois de comportement considérant l'effet de la vitesse d'allongement. Seulement les plus simples d'entre elles trouvent usage dans les calculs des structures. La façon dont sont pris en considération les phénomènes liés à la vitesse de déformation pour résoudre le comportement des structures dans diverses études fait l'objet de l'introduction du travail de KLOSOWSKI, WOZNICA et WELCHERT. [K1]

On peut citer plusieurs publications où le comportement des structures inélastiques a été traité en tenant compte de l'effet de la vitesse de déformation. La plupart d'entre elles ne présentent pas d'intérêt direct pour nous, car elles traitent de structures telle que plaques, coques cylindriques et sphériques à parois minces, sans faire d'étude comparative avec et sans vitesse de déformation. Par exemple, ZIENKIEWICZ, CORMEAU [Z1], HUGHES et TAYLOR [H1] ont développé un algorithme basé sur la méthode des éléments finis pour étudier les problèmes quasi-statiques des plaques et coques en tenant compte de l'effet de la vitesse de déformation. La même technique est utilisée par DINIS et OWEN [D1] pour résoudre le problème d'une plaque rectangulaire fléchie. Dans GOLINVAL [G1], plusieurs méthodes d'intégration des lois inélastiques sont discutées et un code d'éléments finis est utilisé dans le domaine des petites vitesses de déformation. JONES [J1] a développé une procédure théorique approximative pour évaluer les grands déplacements transversaux permanents de poutres et de plaques de forme quelconque parfaitement rigide-plastique. MAIER et CORRADI [M2] ont étudié des structures continues arbitraires élasto-parfaitement plastiques en présence de forces significatives d'inertie. SPERLING et PARTOM [S1] calculent la réponse d'une poutre élasto-parfaitement plastique, soumise à une charge dynamique avec de grands déplacements et comparent les résultats obtenus au modèle tenant compte de l'effet de la vitesse de déformation.

Les solutions exactes de la dynamique des structures considérant l'effet de la vitesse de déformation ont été obtenues seulement dans les cas les plus simples. Diverses approximations techniques ont été proposées également. PERRON [P2] a introduit une correction permettant de tenir compte de la sensibilité à la vitesse de déformation sous forme d'une modification empirique de la limite élastique statique, correspondant à la valeur estimée de la vitesse initiale de déformation. Dans KALISZKY [K2], on peut trouver une série de méthodes approximatives basées sur une simple rigide viscoplastique idéalisation appliquée à un modèle discret d'une poutre avec deux masses concentrées, soumise à un chargement dynamique de courte durée.

Le développement de la méthode des éléments finis a permis la résolution des problèmes dynamiques en grands déplacements et déformations par LEE et SYMONDS [L1] ; pour intégrer les équations du mouvement, ces auteurs appliquent la méthode des différences centrées. La solution incrémentale a été basée sur la discrétisation des structures par la méthode des éléments finis. La même méthode a été choisie, à cause de sa simplicité et de son efficacité, dans les travaux de LEE, SYMONDS [L1] , KLOSOWSKI, SCHMIDT [K3, K4, K5], KLOSOWSKI , WOZNICA, WEICHERT [K6, K7, K8, K9] et WOZNICA [W2].

Un travail très intéressant a été publié par GHOSH et KIKUCHI [G2], dans lequel un élément fini tridimensionnel a été employé dans l'analyse des éléments métalliques pour les grands déplacements et déformations. Les résultats des essais expérimentaux sont rarement publiés.

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, le développement des moyens de calcul permet d'utiliser des modélisations du comportement des structures de plus en plus fines et d'appliquer des lois constitutives de plus en plus sophistiquées. Etant donné le grand nombre de formulations considérant l'effet de la vitesse de déformation, des questions se posent : quelle loi choisir et pour quelle formulation? Au cours de cette recherche, on a constaté que, dans la majorité des publications des années 60-70, seule la loi de PERZYNA est utilisée. On peut supposer que ce choix a été imposé par la simplicité de la formulation mathématique et par les moyens de calcul de cette époque. Nous avons également utilisé cette loi dans notre simulation. Ce choix a été dicté par la nature des éléments finis utilisés et par la facilité d'accès aux données expérimentales relatives aux lois de comportement. De plus, cette loi est admise à être utilisée dans un domaine des vitesses de déformation plus étendues allant de toutes petites ( $10^{-8} \text{ s}^{-1}$ ) jusqu'aux très grandes ( $10^5 \text{ s}^{-1}$ ). De nombreux programmes numériques, contenant l'effet de la vitesse de déformation, cas du fluage par exemple, sont proposés actuellement aux utilisateurs dans le domaine statique. Il n'en est pas de même avec les structures sollicitées dynamiquement. Pour cette raison, nous avons voulu dans ce travail, présenter le problème de calcul des structures soumises à des charges dynamiques considérant l'effet de la vitesse de déformation en exploitant un logiciel qui est destiné spécialement à l'analyse dynamique non linéaire des structures en zones sismiques et qui contient des éléments fibres et des éléments ressorts. On y a incorporé la loi de PERZYNA restreinte à l'allongement simple pour les éléments poutre et poteau et restreinte au cisaillement pur pour le panneau d'âme de la colonne.

Dans les paragraphes suivants, nous présentons un aperçu de lois constitutives tenant compte de la sensibilité à la vitesse de déformation établie par plusieurs auteurs. On montre l'importance de la loi de PERZYNA que nous avons utilisée [P1, P3]. On définit son domaine d'application qui concerne plutôt les petites déformations sans tenir compte de l'endommagement. Nous nous sommes particulièrement intéressés aux gammes des vitesses de déformation pour lesquelles ces lois peuvent être utilisées, ce qui est important dans l'étude des problèmes dynamiques. Une bonne partie du travail dans un chapitre ultérieur est consacré à la description des calculs des structures soumises au chargement dynamique par la méthode des éléments finis. Les formulations directes et incrémentales de l'équation du mouvement sont expliquées. Ensuite, on décrit les méthodes d'intégration numérique aussi bien de l'équation du mouvement que des lois constitutives.

## **2.3. LOIS CONSTITUTIVES CONSIDERANT L'EFFET DE LA VITESSE DE DEFORMATION**

### **2.3.1. GENERALITES**

Dans le comportement d'un élément au sein d'une structure soumise aux sollicitations dynamiques au-delà de la limite élastique, on observe l'influence des effets temporels liés à des propriétés rhéologiques. Les effets de la vitesse de déformation sur la loi de comportement du matériau peuvent être d'une importance non négligeable. De ce fait, il faut en tenir compte dans la description de la réponse du matériau.

De nombreux travaux de recherche ont été consacrés à l'étude de l'influence de la vitesse de déformation à la limite élastique. Ce domaine, a suscité un grand intérêt depuis le début des années 40, MANJOINE [M3], TAYLOR [T1], WHIFFIN [W3], DUWEZ [D2], JOHNSON [J2, J3], CAMPBELL [C1] ont montré que, dans les essais dynamiques, on assiste à une augmentation de la limite élastique par rapport à ce que l'on observe pendant des essais statiques. Selon PERZYNA [P1], on peut considérer les essais comme statiques pour des vitesses de déformation d'ordre  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$  et inférieures. CRISTESSCU et CULICIU [C2]

distinguent trois types de tests de propriétés mécaniques de matériaux en fonction de la valeur de la vitesse de déformation : les tests statiques avec des vitesses de déformation allant de  $10^{-5}$  à  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , les tests intermédiaires dont les vitesses de déformation varient de  $10^{-2}$  à  $10^2 \text{ s}^{-1}$  et plus. L'analyse des tests dits dynamiques présente une particularité, si on désire les utiliser dans l'analyse dynamique d'une structure, les forces d'inertie et les phénomènes de propagation des ondes doivent être pris en considération. Il arrive parfois que l'on tienne compte des forces d'inertie dans les problèmes où la vitesse de déformation atteint environ  $1.0 \text{ s}^{-1}$ .

Pour mieux comprendre le processus de déformation et les domaines des vitesses de déformation le concernant nous pouvons citer divers classements proposés par: DUNKAN [D3], VALOTAIRE [V1], KLEPACZKO [K10].

Dans le cas des structures du Génie Civil, les vitesses de déformation pour différents types de chargement sont données dans le tableau 2.1 selon le classement de VOLATAIRE [V1].

Type de chargement	Vitesse de déformation ( $\text{s}^{-1}$ )
Tremblement de terre	de $10^{-3}$ à $10^{-1}$
Impact d'une automobile	de $10^{-2}$ à $10^0$
Impact d'un avion	de $5.10^{-2}$ à $2.10^0$
Impact dur	de $10^0$ à $5.10^1$
Impact non déformable à grande vitesse	de $10^2$ à $10^5$

**Tableau 2.1** – Vitesses de déformation en fonction du type de chargement

Pour illustrer l'ordre de grandeur des vitesses de déformation données au tableau 2.1 dans le cas d'une structure soumise à un tremblement de terre, on peut utiliser les expressions analytiques approximatives suivantes:

- GIONCU [G13] propose la relation suivante:

$$\dot{\epsilon} = \frac{2 v_g h}{H b} \quad (2.1)$$

$v_g$  : vitesse de déplacement du sol

$h$  : hauteur de la section

$b$  : largeur de la semelle

$H$  : hauteur du centre de gravité de la structure entière

On constate selon la formule (2.1) que la vitesse de déformation dépend des dimensions de la section de l'élément, de la distribution de la masse et de la vitesse de déplacement du sol. Si on prend un bâtiment de  $10 \text{ m}$  de hauteur dont le centre de gravité se situe au milieu, soit  $H = 5 \text{ m}$ . Les poutres de l'ossature sont des profilés IPE, soit  $h=300 \text{ cm}$  et  $b=150 \text{ cm}$ . Ce bâtiment est soumis à un tremblement de terre dont la vitesse de déplacement du sol  $v_g = 125 \text{ cm/s}$ . Par application de la formule (2.1), il vient :

$$\dot{\epsilon} = \frac{2 \times 0.125 \times 0.3}{5 \times 0.12} = 0.1 \text{ s}^{-1}$$

- HASHIDA [H12] propose la relation suivante:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{2\pi}{T} \varepsilon_{\max} \quad (2.2)$$

$\varepsilon_{\max}$  : déformation maximale enregistrée

$T$  : période fondamentale de vibration de la structure

Si on prend un bâtiment de période propre  $T = 1.5$  s et  $\varepsilon_{\max} = 25 \cdot 10^{-3}$ , la vitesse de déformation évaluée selon la formule (2.2) est :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{2 \times 3.14}{1.5} \times 25 \cdot 10^{-3} = 0.104 \text{ s}^{-1}$$

Les plus sensibles à la vitesse de déformation sont des matériaux dont la limite élastique est bien apparente WHITE [W4], MIKLOWITZ [M4], CAMPBELL [C1], HOPLANS [H2], par exemple l'acier doux ou le fer pur.

Des résultats expérimentaux concernant le même problème sont donnés par HAUSER, SIMONS et DORN [H3], MARSH et CAMPBELL [M5], LINDHOLM et YEAKLEY [L2], CAMPBELL [C3], YEN et YEW [Y1], LINDHOLM et BESSY. [L3], RANDELL et CAMPBELL [R1].

La vitesse de déformation n'influence pas que la limite élastique. Elle provoque aussi le changement du comportement mécanique pendant le chargement. Dans plusieurs travaux [B1, C4, C5, D4, H4, H5, K11, K12, K13, L4, L5, L2, M5, R1, R2], on trouve des résultats expérimentaux, en forme de courbes contrainte-déformation, en fonction de différentes vitesses de déformation qui montrent que l'effet de la vitesse de déformation pour des métaux, tels que le fer, l'acier, l'aluminium, le magnésium, l'étain, le zinc, le plomb, le béryllium ou le titane est important. Par contre les alliages d'aluminium ne sont pas sensibles à des changements de vitesse de déformation [D4, H6, K11, M6, N1]. Les essais cités ci-dessus ont été effectués dans le domaine des vitesses de déformation allant  $10^{-8} \text{ s}^{-1}$  jusqu'à  $10^4 \text{ s}^{-1}$

Pendant les essais de matériaux soumis à un chargement dynamique, il a été remarqué qu'un retard apparaît pendant le processus de la plastification. Les études du retard entre le temps d'application de la force et le temps de l'apparition de l'écoulement plastique ont fait l'objet des travaux de [C3, C6, C7, C8, K14, T2]

La sensibilité de matériaux à la vitesse de déformation dépend également de la température. Parmi les premières publications concernant ce problème on peut citer plusieurs travaux de recherche [C9, K15, M7, N2, S2, T3]. D'autres travaux [I1, K16, M8, S3] confirment ce phénomène.

Les travaux expérimentaux effectués pour des vitesses de déformation allant de  $10^{-3}$  à  $10^3 \text{ s}^{-1}$  et pour des températures de  $-196$  à  $1000 \text{ }^\circ\text{C}$  [C10, N3, S3], ont montré que la sensibilité à la vitesse de déformation de l'acier doux croît avec l'augmentation de la température. Par contre dans le cas de l'aluminium [L2, S2, S3], on remarque une augmentation de la sensibilité de la contrainte à la vitesse de déformation en fonction de la température. Ajoutons encore que l'histoire de variations de la température a une grande influence sur le comportement des métaux [K16, K17, K18, L6, S4].

Des résultats intéressants ont été obtenus avec des essais de traction sur des éprouvettes, sous une charge de très courte durée, à répétition, et d'une très grande vitesse de déformation, environ  $10^3 \text{ s}^{-1}$  HARDING [H3]. Ils montrent une nette augmentation de la limite élastique en fonction du nombre de chocs et un changement de la courbe contrainte-déformation. Le même problème faisait l'objet de travaux de CLYENS et CAMPBELL [C11] pour la torsion, CAMPBELL et MAIDEN [C12] pour la compression.

Cette brève analyse des résultats des essais dynamiques des matériaux et plus particulièrement de l'acier montre que la vitesse de déformation et la température changent la limite élastique et les propriétés mécaniques du matériau. On assiste à un changement de l'allure de la courbe contrainte-déformation, avec des modifications de l'écroutissage et de la valeur de la contrainte de rupture PERZYNA [P1].

### **2.3.2. LES PHENOMENES PHYSIQUES LIES A L'EFFET DE LA VITESSE DE DEFORMATION**

Pour étudier l'effet de la vitesse de déformation il faut connaître au moins les mécanismes liés à cet effet, on distingue deux types de mécanismes :

#### **2.3.2.1. Dislocations**

Nous allons nous limiter à une description très modérée du phénomène de dislocations, car ces dernières sont de nature très variable et très complexe COHEUR [C13]. Les dislocations peuvent être définies comme des imperfections du réseau cristallin; les cristaux parfaits avec un empilement périodique se rencontrent très rarement dans la pratique.

Les matériaux réels n'échappent pas à cette règle et l'on constate deux différences essentielles par rapport à un modèle théorique du réseau cristallin parfait. D'une part, les cristaux des métaux réels comportent des défauts d'empilement; d'autre part, les métaux réels ne sont pas constitués d'un seul cristal, ils sont polycristallins.

Certaines propriétés des métaux, telle que la densité, le coefficient de dilatation, le module d'Young, le coefficient de Poisson, ne sont pas influencées par la présence de défauts cristallins. Il n'en est pas de même de beaucoup d'autres propriétés mécaniques, tel que la limite élastique, la limite de rupture, la déformabilité, et la ténacité, qui ne peuvent être estimées correctement qu'en tenant compte du défaut cristallin.

Les imperfections des réseaux cristallins sont des perturbations de l'ordonnement réel du réseau. Ces perturbations induisent des tensions dans le réseau et modifient les propriétés. Au cours d'une déformation plastique, le nombre de dislocations se multiplie.

La théorie des dislocations permet d'expliquer un bon nombre de comportements des matériaux métalliques. Par exemple, suite à une augmentation de la vitesse de déformation, les déplacements de dislocation sont entravés, ce qui produit inévitablement le durcissement du matériau et la déformation macroscopique n'apparaît qu'au bout d'un certain temps d'incubation.

La température a un effet sur le mécanisme qui régit les dislocations. Une interaction existe entre l'effet de la température et de la vitesse de déformation; par exemple, à  $-100^{\circ}\text{C}$ , il n'y a pas d'effet de la vitesse de déformation ; à la température ambiante  $+18^{\circ}\text{C}$ , l'effet de la vitesse de déformation est déjà plus marqué, à  $+100^{\circ}\text{C}$  cet effet l'est encore plus.

Les atomes étrangers, même en faibles quantités, modifient fortement le comportement dynamique des matériaux, par exemple, dans le cas de l'aluminium 0,5% d'impureté triple l'effet de la vitesse de déformation COHEUR [C13], ceci explique également la sensibilité des aciers au carbone (aciers ductiles) à la vitesse de déformation par rapport aux aciers purs, car ces impuretés forment des nuages et ancrent les dislocations.

#### **2.3.2.2. Dissipation**

On peut distinguer deux types de dissipations internes, PERZYNA [P1]. Le premier est dû au frottement interne engendré par les dislocations et il provoque des effets rhéologiques dans le matériau. Le second se retrouve dans le mécanisme de l'écoulement plastique

accompagné des déformations permanentes. Dans ce dernier cas, les déformations permanentes sont la résultante des phénomènes rhéologiques et plastiques couplés.

Les effets visqueux du matériau s'expliquent par le mécanisme de frottement interne et peuvent se produire dans le matériau, aussi bien en état élastique que plastique, cet effet est prépondérant dans l'état plastique. Il s'agit donc d'une dissipation interne non accompagnée de déformations permanentes. La cause principale des ces effets dissipatifs est l'amortissement de vibration du réseau cristallin. Le frottement interne peut être expliqué par différents mécanismes physiques ZENER [Z2], NABARRO [N4].

Les déformations plastiques dans les métaux sont principalement dues aux mouvements des défauts appelés dislocations PERZINA [P1]. Les dislocations en mouvement franchissent des obstacles rencontrés sur leur trajet ce qui permet de freiner leur mouvement.

En étudiant le comportement des matériaux en fonction de la vitesse de déformation et de la température, on distingue quatre zones qui correspondent aux différents mécanismes engendrant les déformations plastiques PERZYNA [P1], ROSENFELD et HAHN [R3].

La première zone, correspond aux petites vitesses de déformation et aux températures assez élevées. Dans cette zone, la limite élastique est peu sensible à la vitesse de déformation et au changement de température. L'écoulement plastique a un caractère athermique.

La deuxième zone, se caractérise par une grande sensibilité de la limite élastique aussi bien à la température qu'à la vitesse de déformation. Son domaine allant de très petites vitesses de déformation jusqu'à  $10^2 \text{ s}^{-1}$  et s'étendent de la température ambiante jusqu'à de très hautes températures dans le cas de l'acier par exemple [R3].

La troisième zone, pour les basses températures et une large gamme de vitesses de déformation, concerne le domaine où la limite élastique est moins sensible à la vitesse de déformation et à la température.

La quatrième zone, pour de très grandes vitesses (pour l'acier doux au-delà de  $10^3 \text{ s}^{-1}$ ), la limite élastique devient très sensible à la vitesse de déformation.

Le mécanisme du frottement interne explique les effets de la vitesse de déformation. Il est lié à la dissipation interne sans être accompagné de déformations permanentes. La cause principale des effets de dissipation est l'amortissement du mouvement vibratoire du réseau cristallin. Elle peut être superposée à des effets des mouvements de dislocations dans les cristaux. L'existence de défauts dans un cristal peut augmenter le frottement interne [N4].

L'écoulement plastique induit l'apparition des réseaux de dislocation. La distribution non homogène des dislocations dans les cristaux provoque l'augmentation des contraintes internes qui se développent quand le matériau est soumis à des contraintes extérieures. La contrainte interne répartie dans tout le volume du matériau est définie par une variable tensorielle  $X$  associée à l'écrouissage cinématique.

Pendant la déformation non élastique, la densité des dislocations et de divers obstacles s'accroît et s'oppose aux mouvements de dislocations en augmentant des blocages au fur et à mesure que les déformations s'accumulent en conduisant au durcissement, la structure du matériau change. La plupart de ces changements ont un caractère isotrope [A2], et peuvent être modélisées par une variable scalaire  $R$ ; la contrainte interne associée à l'écrouissage isotrope. La contrainte interne  $R$ , mesure la variation de la taille du domaine élastique.

### 2.3.3. FORMULATION DES LOIS CONSTITUTIVES TENANT COMPTE DE L'EFFET DE LA VITESSE DE DEFORMATION

On se place toujours dans le cadre de l'hypothèse de petites déformations en décomposant la déformation totale en une déformation élastique et une déformation inélastique.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.3)$$



Les lois de comportement considérant l'effet de la vitesse de déformation contiennent des termes qui prennent des formes plus au moins complexes en fonction des modèles qu'ils représentent. Elles dépendent des paramètres fortement influencés par la température. Leur nombre varie en fonction de la complexité du comportement que l'on désire traduire.

Nous donnons, par la suite, quelques exemples des lois constitutives, faisant intervenir l'effet de la vitesse de déformation, développées ces dernières années. Dans cette partie, nous nous limitons aux modèles dits unifiés, tenant compte des effets plastiques et visqueux couplés, ne faisant pas la distinction entre la déformation plastique et visqueuse.

### 2.3.3.1. Modèle de PERZYNA

Dans les années 1960, PERZYNA s'inspirant du modèle de BINGHAM [B2], propose une loi constitutive tenant compte de l'effet de la vitesse de déformation, PERZYNA [P1, P4]. Son principe est basé sur la loi de comportement plastique avec la règle de normalité.

On désigne par :  $\sigma_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 3$  le tenseur de contrainte

$\varepsilon_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 3$  le tenseur de déformation

On pose  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}$  avec  $e = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}$

$s_{ij} = \sigma_{ij} - s\delta_{ij}$  avec  $s = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$

$e_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 3$  tenseur déviateur des déformations

$s_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 3$  tenseur déviateur des contraintes

$e$  : tenseur isotrope de déformation

$s$  : tenseur isotrope des contraintes

$$\lambda = \frac{E\nu}{3(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4)$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes relatives à la dilatation et au cisaillement du matériau. Elles sont homogènes à une contrainte.

$\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker.

$$e_{ij}^e = \frac{1}{2\mu}s_{ij}, \quad e^e = \frac{1}{3\lambda}s \quad (2.5)$$

La décomposition incrémentale des déformations s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (2.6)$$

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^p) = \frac{f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^p)}{\kappa} - 1 \quad (2.7)$$

La fonction  $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^p)$  dépend de l'état de contrainte et de déformation plastique. Le paramètre  $\kappa$  est défini par l'expression

$$\kappa = \kappa(W_p) = \kappa \left( \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^p \right) \quad (2.8)$$

Cette quantité est appelée le paramètre d'écrouissage, une discussion détaillée de ce paramètre se trouve dans HILL [H7] et NAGHDI [N5, N6].

La fonction  $F=0$  définit la surface d'écoulement. On suppose qu'elle est régulière et convexe, nous supposons une loi constitutive dans le domaine d'écrouissage tenant compte de la sensibilité à la vitesse de déformation du matériau. Cette loi peut s'écrire sous la forme suivante [P3] :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{s} \delta_{ij} + \gamma^0 \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.9)$$

Où la représentation symbolique

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } F \leq 0 \\ \Phi(F) & \text{si } F > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$\gamma^0(T)$  désigne le coefficient de viscosité, il est fonction de la température  $T$ .

Le coefficient  $\gamma^0(T)$  pour l'acier doux, établi expérimentalement par MANJOINE [M3] et MAIDEN et CAMPBELL [M9]

$$\gamma^0(T) = \frac{\sqrt{3}}{3} .60,24 \left[ 1 + 2,6 \left( \frac{220-T}{273} \right)^2 \right] \quad (s^{-1}) \quad (2.11)$$

où la température  $T$  est exprimée en [°K]

La fonction  $\Phi(F)$  est choisie adéquatement pour représenter expérimentalement le comportement du métal sous une charge dynamique. Il convient d'écrire l'équation (2.9) sous une forme légèrement modifiée en remplaçant

$$F(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}^p) = \frac{f(\sigma_{ij}, \epsilon_{kl}^p)}{\kappa} - 1 \quad (2.12)$$

On pose  $\gamma = \gamma^0 / \kappa$  : constante de viscosité du matériau

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{s} \delta_{ij} + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.13)$$

La relation (2.13) implique l'hypothèse suivant : l'incrément du tenseur de déformation plastique est fonction d'un excès de contrainte par rapport au critère de plastification statique. La composante élastique de l'incrément du tenseur de déformation ne dépend pas de la vitesse de déformation.

Pour discuter l'équation constitutive (2.13) d'une façon plus précise, on considère seulement la composante inélastique de l'incrément du tenseur de déformation

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \gamma \Phi(F) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.14)$$

De l'équation (2.14), on déduit le deuxième invariant de l'incrément de la vitesse de déformation plastique.

$$I_2^p = \frac{1}{2} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2.15)$$

$$(I_2^p)^{1/2} = \left( \frac{1}{2} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \right)^{1/2} \quad (2.16)$$

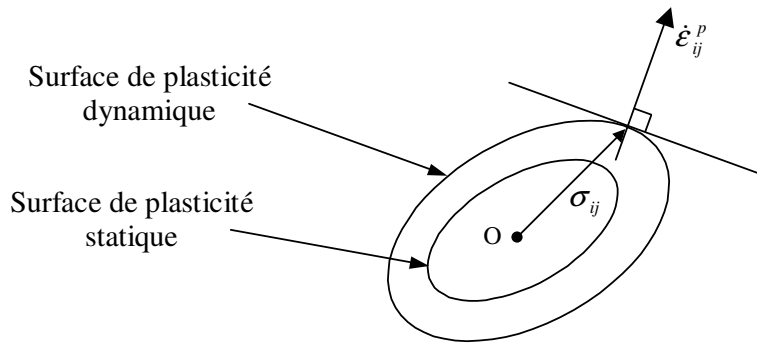
soit

$$(I_2^p)^{1/2} = \gamma \cdot \Phi(F) \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{1/2} \quad (2.17)$$

Selon l'équation (2.17) nous avons:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^p) = \kappa(W_p) \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[ \frac{(I_2^p)^{1/2}}{\gamma} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \right)^{-1/2} \right] \right\} \quad (2.18)$$

L'expression (2.18) représente implicitement le critère de plastification dynamique et met en évidence la dépendance du critère de plastification de la vitesse de déformation du matériau. Sur la base des équations (2.14) et (2.18) on constate que le tenseur des vitesses des déformations plastiques considéré comme un vecteur appartenant à un espace vectoriel de dimension 9, il est toujours normal à la surface de chargement dynamique (figure 2.1). Les changements dans la surface de plasticité dynamique durant le processus de déformation sont d'une part causés par les écrouissages cinématique et isotropes et d'autre part par l'influence de l'effet de la vitesse de déformation.



**Figure 2.1.** Surface de chargement dynamique et vecteur vitesse de déformation

### 2.3.3.1.1 Cas particulier des lois constitutives.

On restreint notre étude au cas de l'écrouissage isotrope. La formule (2.18) décrit les lois de comportement dynamique sans aucune restriction. Dans la formule (2.19), on suppose que les fonctions  $F$  et  $f$  ne dépendent que de l'état des contraintes et sont indépendantes de l'état des déformations plastiques, soit:

$$F(\sigma_{ij}) = \frac{f(\sigma_{ij})}{\kappa} - 1 \quad (2.19)$$

Puisque  $f(\sigma_{ij})$  ne dépend que de l'état des contraintes donc on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$f(\sigma_{ij}) = f(J_1', J_2, J_3) \quad (2.20)$$

où  $J_1'$  : premier invariant de l'état de contrainte

$J_2$  : deuxième invariant du déviateur de contraintes  $s_{ij}$

$J_3$  : troisième invariant du déviateur de contraintes  $s_{ij}$

En considérant les dérivés partielles de  $f$  par rapport aux invariants  $J_1'$ ,  $J_2$  et  $J_3$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial J_1'} \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial J_2} s_{ij} + \frac{\partial f}{\partial J_3} t_{ij} \quad (2.21)$$

$$\text{avec } t_{ij} = s_{ik}s_{kj} - \frac{2}{3}J_2\delta_{ij} \quad (2.22)$$

Dans ce cas, l'équation constitutive (2.14) prend la forme suivante.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = A(J_1', J_2, J_3, \kappa) \delta_{ij} + B(J_1', J_2, J_3, \kappa) s_{ij} + C(J_1', J_2, J_3, \kappa) t_{ij} \quad (2.23)$$

Dans la formule (2.23) on a introduit les notations suivantes :

$$\begin{cases} A(J_1', J_2, J_3, \kappa) = \gamma \Phi \left( \frac{f}{\kappa} - 1 \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial J_1'} \\ B(J_1', J_2, J_3, \kappa) = \gamma \Phi \left( \frac{f}{\kappa} - 1 \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial J_2} \\ C(J_1', J_2, J_3, \kappa) = \gamma \Phi \left( \frac{f}{\kappa} - 1 \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial J_3} \end{cases} \quad (2.24)$$

### 2.3.3.1.2. Application au cas du métal

On suppose que la composante plastique des déformations ne produit pas de changement de volume ( $\nu = 0,5$ ), partie plastique incompressible  $\dot{\varepsilon}_{ii}^p = 0$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial J_1} = 0$ ,

Soit  $A(J_1', J_2, J_3, \kappa) = 0$

L'équation constitutive tenant compte de la sensibilité du métal à la vitesse de déformation pourra s'écrire :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = B^*(J_2, J_3, \kappa) s_{ij} + C^*(J_2, J_3, \kappa) t_{ij} \quad (2.25)$$

Si on adopte le critère de plastification de HUBER-MISES c'est à dire:  $f(\sigma_{ij}) = (J_2)^{1/2}$ . A partir de l'équation (2.13) nous obtenons :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{\sqrt{J_2}}{\kappa} - 1 \right) \right\rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}} \quad (2.26)$$

Selon la formule (2.18) le critère de plastification dynamique prendra la forme :

$$\sqrt{J_2} = \kappa \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \right) \right] \quad (2.27)$$

Dans le cas d'un chargement unidirectionnel, la formule (2.26) nous fournit la vitesse de déformation suivante :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \left\langle \Phi \left[ \frac{\sigma}{\phi(\varepsilon^p)} - 1 \right] \right\rangle \quad (2.28)$$

$$\text{avec } \gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma, \quad \phi(\varepsilon^p) = \sqrt{3} \cdot \kappa (Wp) \quad (2.29)$$

Dans le cas d'un cisaillement pur, la formule (2.26) nous fournit la vitesse de déformation de cisaillement

$$\dot{\nu} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{\tau}{\kappa} - 1 \right) \right\rangle \tag{2.30}$$

Avec  $\dot{\nu}$  désigne la vitesse de déformation de cisaillement et  $\tau$  la contrainte de cisaillement. MALVERN [M10, M11] est le premier à avoir introduit la relation (2.26). A partir de la relation (2.27) on déduit :

- Dans le cas d'un chargement unidirectionnel la dépendance de la contrainte  $\sigma$  de la vitesse de déformation.

$$\sigma = \phi(\epsilon^p) \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\dot{\epsilon}^p}{\gamma^*} \right) \right] \tag{2.31}$$

La loi  $\sigma = \phi(\epsilon^p)$  représente la loi contrainte-déformation plastique à l'état statique dans le cas d'un simple allongement, raccourcissement

- Dans le cas d'un cisaillement pur la dépendance de  $\tau$  de la vitesse de déformation

$$\tau = \kappa \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\dot{\nu}^p}{\gamma} \right) \right] \tag{2.32}$$

La loi  $\tau = \kappa(W_p(v^p))$  représente la loi contrainte de cisaillement-déformation de cisaillement plastique à l'état statique dans le cas d'un cisaillement pur.

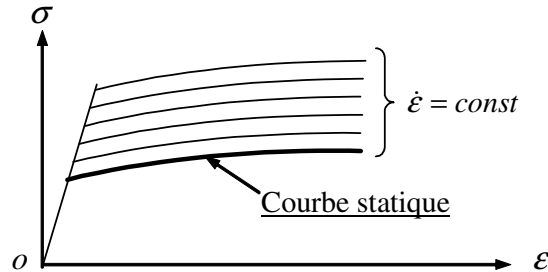


Figure 2.2. Courbes contrainte-déformation dynamique avec  $\dot{\epsilon}$  constante

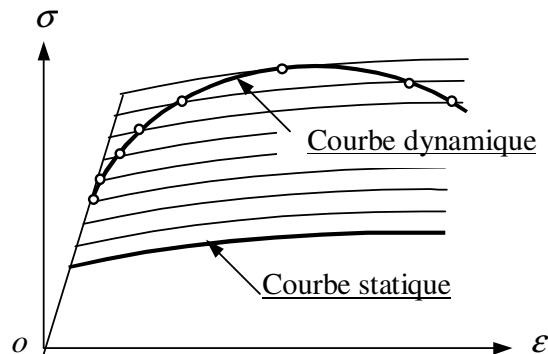


Figure 2.3. Courbes contrainte-déformation dynamique avec  $\dot{\epsilon}$  variable

Les équations (2.31) et (2.32) décrivent les lois de comportement dynamique dans le domaine plastique respectivement pour une traction-compression simple et pour un cisaillement pur. Dans le cas d'une traction-compression simple, les résultats sont illustrés à la figure 2.2, le cas le plus réaliste est illustré à la figure 2.3. Dans le cas d'un cisaillement pur les diagrammes sont semblables à ceux qui représentent le comportement en traction-compression simple

### 2.3.3.1.3. Cas élasto-parfaitement plastique

Comme second cas, on examine le comportement élasto-parfaitement plastique. Ce cas est obtenu en supposant que la fonction  $F$  est indépendante de l'état de déformation plastique, c'est à dire le paramètre d'érouissage  $\kappa$  est indépendant de l'état de déformation plastique soit  $\kappa = c = \text{constante}$

$$F = \frac{f(J_2, J_3)}{c} - 1 \quad (2.33)$$

L'équation constitutive (2.13) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \left\langle \Phi \left[ \frac{f(J_2, J_3)}{c} - 1 \right] \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\gamma^0}{c} \quad (2.34)$$

On remplace  $\kappa$  par  $c$  dans l'équation (2.18)

$$f(J_2, J_3) = c \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[ \frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (2.35)$$

Et on suppose que

$$F = \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \quad (2.36)$$

$k$  désigne la limite élastique statique de cisaillement

L'équation (2.34) devient

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \left\langle \Phi \left[ \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right] \right\rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}} \quad (2.37)$$

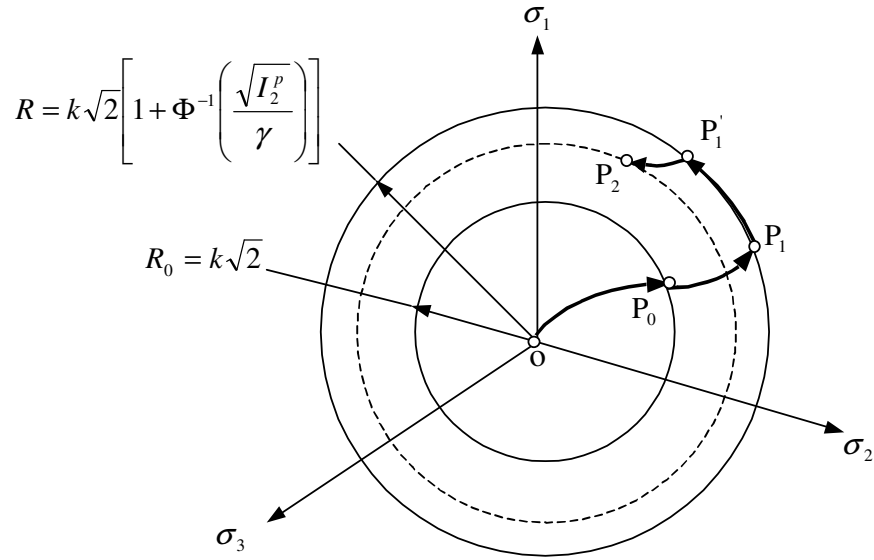
Le critère dynamique de plastification s'écrit alors :

$$\sqrt{J_2} = k \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \right) \right] \quad (2.38)$$

On voit que la surface de plasticité dynamique est un cylindre de rayon  $R$  qui ne dépend pas de l'état de déformation plastique, il dépend seulement de la vitesse de déformation.

$$R = R_0 \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma} \right) \right], \quad R_0 = k\sqrt{2} \quad (2.39)$$

$R_0$  désigne le rayon de la surface de plasticité statique (voir figure 2.4).



**Figure 2.4.** Courbe de chargement dynamique pour un matériau élasto-plastique parfait

Les relations (2.37) et (2.38) conduisent aux équations suivantes :

- Dans le cas d'un chargement unidirectionnel

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \left\langle \Phi \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) \right\rangle \quad (2.40)$$

$$\sigma = \sigma_0 \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\dot{\epsilon}^p}{\gamma^*} \right) \right] \quad (2.41)$$

Où  $\sigma_0$  est la limite élastique statique en compression traction.

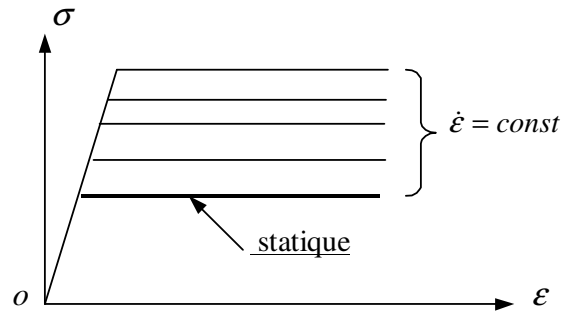
- Dans le cas d'un cisaillement pur

$$\dot{\nu} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{\tau}{\tau_0} - 1 \right) \right\rangle \quad (2.42)$$

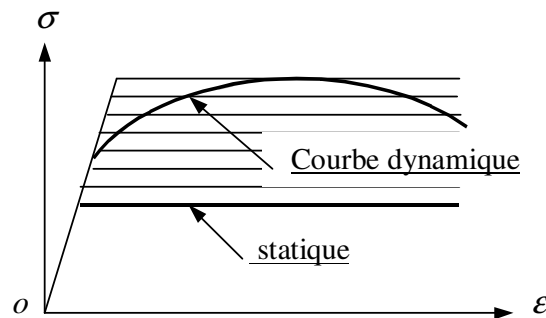
$$\tau = \tau_0 \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\dot{\nu}^p}{\gamma} \right) \right] \quad (2.43)$$

Où  $\tau_0$  est la limite élastique statique en cisaillement pur.

Les équations (2.40) et (2.42) décrivent les lois de comportement dynamique dans le domaine plastique avec un comportement élasto-plastique parfait sous l'influence de la vitesse de déformation, dans le cas d'une traction-compression simple, les résultats sont illustrés à la figure 2.5 et le cas le plus réaliste est illustré à la figure 2.6. Dans le cas d'un cisaillement pur les diagrammes sont semblables à ceux de la traction-compression.



**Figure 2.5.** Courbes contrainte-déformation dynamique pour un matériau élasto-plastique parfait avec  $\dot{\varepsilon}$  constante



**Figure 2.6.** Courbes contrainte-déformation dynamique pour un matériau élasto-plastique parfait avec  $\dot{\varepsilon}$  variable

Quand la déformation élastique est négligeable vis à vis de la déformation plastique et pour une fonction linéaire  $\Phi(F)$ , la relation (2.37) nous fournit la première loi constitutive de HOHENEMSER et PRAGER [H8] .

#### 2.3.3.1.4 Comparaison avec les données expérimentales

Nous avons vu au premier paragraphe 2.3.3.1, qu'il est indispensable de choisir adéquatement la fonction  $\Phi(F)$ , nous introduisons ici les types de fonctions spéciales citées dans les références [P5, P6].

$$\begin{cases} \Phi(F) = F^\delta, \quad \Phi(F) = F, \quad \Phi(F) = -1 + \exp(F) \\ \Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha \left[ -1 + \exp(F^\alpha) \right], \quad \Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha F^\alpha \end{cases} \quad (2.44)$$

Quand la déformation élastique est négligeable en comparaison avec la déformation plastique et en substituant la première expression de la fonction  $\Phi(F)$  de l'équation (2.44) dans les relations (2.40) et (2.42), on obtient :

- sous l'hypothèse d'un chargement unidirectionnel

$$\dot{\varepsilon} = \gamma^* \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^\delta \quad (2.45)$$



- sous l'hypothèse d'un cisaillement pur

$$\dot{\nu} = \gamma \left( \frac{\tau}{\tau_0} - 1 \right)^\delta \quad (2.46)$$

La relation (2.45), dans le cas où  $\Phi(F) = F^\alpha$  est équivalente à une loi très connue de BODNER, SYMONDS [B3], COWPER et SYMONDS [C14]. Si on introduit la première expression de l'équation (2.44) dans la relation (2.37) on obtient des lois équivalentes à celles de FREUDENTHAL [F1].

Dans le cas d'un chargement unidirectionnel, et si on substitue  $\Phi = -1 + \exp(F)$  dans la relation (2.40) on obtient :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \left[ \exp\left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right) - 1 \right] \quad (2.47)$$

Cette loi est légèrement différente de la loi introduite par MALVERN [M10, M11].

Nous examinons le type de fonctions  $\Phi(F)$ , en considérant les données expérimentales. Les constantes  $\delta$ ,  $\gamma^*$ ,  $\gamma$ ,  $A_\alpha^*$  et  $B_\alpha^*$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ) sont déterminées expérimentalement. CLARK et DUWEZK [C15], dans une longue investigation expérimentale, ont déterminé des courbes de la contrainte  $\sigma$  en fonction de la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  dans le domaine des vitesses de déformation allant de 0 à 200 s<sup>-1</sup>, ils ont constaté qu'au-delà de 200 s<sup>-1</sup>, il n'y a aucune augmentation supplémentaire notable de la limite élastique.

Selon les trois premiers types de fonctions obtenues à l'équation (2.44) nous pouvons envisager deux cas :

- Cas d'une traction-compression pure

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0 \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}^p}{\gamma^*} \right)^{1/\delta} \right] \\ \sigma = \sigma_0 \left[ 1 + \frac{\dot{\epsilon}^p}{\gamma^*} \right] \\ \sigma = \sigma_0 \left[ 1 + \log \left( 1 + \frac{\dot{\epsilon}^p}{\gamma^*} \right) \right] \end{cases} \quad (2.48)$$

- Cas d'un cisaillement pur

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\nu}^p}{\gamma} \right)^{1/\delta} \right] \\ \tau = \tau_0 \left[ 1 + \frac{\dot{\nu}^p}{\gamma} \right] \\ \tau = \tau_0 \left[ 1 + \log \left( 1 + \frac{\dot{\nu}^p}{\gamma} \right) \right] \end{cases} \quad (2.49)$$

Selon les études expérimentales menées par CLARK et DUWEZ [C15]

$$\delta = 5, \gamma^* = 40.4 \text{ s}^{-1}.$$

Selon les études menées par BODNER et SYMONDS [B3, B4]

$$\delta = 3, \gamma^* = 180 \text{ s}^{-1}, \delta = 3, \gamma^* = 240 \text{ s}^{-1}$$

Pour déterminer les constantes  $A_\alpha^*$  et  $B_\alpha^*$ , on pose  $X_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_0} - 1$ , on utilise les données de

CLARK et DUWEZ [C15] qui donnent la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  en fonction de  $\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1$

en un certain nombre de points nous écrivons deux systèmes d'équations linéaires en  $A_\alpha^*$  et  $B_\alpha^*$

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha^* \left[ \exp\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} - 1\right)^\alpha - 1 \right] = \dot{\epsilon}(X_i) & i = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha^* \left[ \exp\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} - 1\right)^\alpha \right] = \dot{\epsilon}(X_i) & i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (2.50)$$

Les contraintes  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$  et les vitesses de déformation  $\dot{\epsilon}(X_i)$  sont déterminées expérimentalement.

On donne la loi de PERZYNA, selon le type de fonction  $\Phi$  avec la prise en compte des déformations élastiques.

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^\delta \\ \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) \\ \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \left[ \exp\left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right) - 1 \right] \\ \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha^* \left[ \exp\left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right)^\alpha - 1 \right] \\ \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha^* \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^\alpha \end{cases} \quad (2.51)$$

Les valeurs des paramètres  $\delta$  et  $\gamma$  sont des coefficients caractéristiques de chaque matériau et de la température, ils dépendent généralement du domaine de vitesses considéré LEMAITRE et CHABOCHE [L7]. Pour les grandes vitesses les valeurs de  $\delta$  sont généralement plus grandes, pour les faibles vitesses, les valeurs de  $\delta$  ont tendance à diminuer. L'approximation des courbes expérimentales des contraintes  $\sigma$  en fonction de  $\dot{\epsilon}$  est obtenue en utilisant les fonctions suivantes :

$$\Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N A_\alpha \left[ \exp F^\alpha - 1 \right] \text{ et } \Phi(F) = \sum_{\alpha=1}^N B_\alpha F^\alpha \text{ pour } N = 5 \quad (2.52)$$

Les paramètres  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  sont donnés au tableau 2.2.

$\alpha$	1	2	3	4	5
$A_\alpha^*$ (s <sup>-1</sup> )	217,56	-654,11	874,52	-484,15	93,56
$B_\alpha^*$ (s <sup>-1</sup> )	337,53	-1470,56	3271,71	-3339,98	1280,06

**Tableau 2.2.** Valeurs des paramètres  $A_\alpha^*$  et  $B_\alpha^*$  pour  $N = 5$

### 2.3.3.2. Effet de la température sur la sensibilité à la vitesse de déformation du métal

L'influence de la vitesse de déformation sur les propriétés mécaniques du métal dépend nettement de la température. Il a été démontré expérimentalement qu'à  $-180$  °C la limite élastique de l'acier reste la même quelle que soit la valeur de la vitesse de déformation PUGH et CHANG [P7]. Des résultats similaires ont été obtenus par KRAFT, SULLIVAN et TRIPPER [K19].

Par contre pour des températures élevées une légère variation de la vitesse de déformation peut produire une grande variation de la limite élastique. La dépendance des lois constitutives de la température et de la vitesse de déformation est largement discutée par OLSZAK et PERZYNA [O1].

Si la température n'influe que les paramètres  $\sigma_0 = \sigma_0(T)$ ,  $\kappa = \kappa(T)$ ,  $\gamma = \gamma(T)$  de la loi constitutive, la relation (2.13) peut être utilisée pour décrire l'effet simultané de la vitesse de déformation et de la température sur la loi de comportement, la loi constitutive prend la forme suivante :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma(T) \left\langle \Phi \left[ \frac{f(\sigma_{kl}, \epsilon_{pq}^p)}{\kappa(T)} - 1 \right] \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.53)$$

Considérons la composante plastique du tenseur des vitesses de déformation, en adoptant le critère de plastification de Huber-Mises. Sur la base de la relation (2.53), nous obtenons.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \gamma(T) \Phi \left[ \frac{\sqrt{J_2}}{\kappa(T)} - 1 \right] \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}} \quad \text{pour } \sqrt{J_2} > \kappa(T) \quad (2.54)$$

La relation (2.54) est équivalente à la relation suivante :

$$\sqrt{J_2} = \kappa(T) \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[ \frac{\sqrt{I_2^p}}{\gamma(T)} \right] \right\} \quad (2.55)$$

Dans le cas d'un chargement unidirectionnel les relations (2.54) et (2.55) se transforment aux équations (2.56) et (2.57) en comparaison avec les relations (2.40) et (2.41).

$$\dot{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma(T) \Phi \left[ \frac{\sigma}{\sigma_0(T)} - 1 \right] \quad (2.56)$$

$$\sigma(\dot{\epsilon}, T) = \sigma_0(T) \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[ \frac{\sqrt{3} \dot{\epsilon}^p}{2\gamma(T)} \right] \right\} \quad (2.57)$$

En général, les fonctions  $\Phi$  et  $F$  dépendent de la température, mais ce cas est étudié dans la littérature. Les cas les plus étudiés expérimentalement sont ceux dans lesquels  $\sigma_0$  et  $\gamma$  varient avec la température. Dans la suite de ce paragraphe, on donne les expressions de  $\sigma_0(T)$ ,  $\gamma(T)$  et  $\delta$  obtenues expérimentalement par quelques auteurs :

- MAIDEN et CAMPBELL [M12], MANJOINE [M3] – Acier doux

$$\sigma_0(T) = 40.0 \exp \left[ 0.5 \left( \frac{288}{T} - 1 \right) \right] \quad (2.58)$$

$$\gamma(T) = 14,9 \left[ 1 + 2.6 \left( \frac{220 - T}{273} \right)^2 \right] \quad (2.59)$$

$$\delta = 10$$

- KRAFT, SULLIVAN, TRIPPER [K19] – Acier doux

$$\sigma_0(T) = 73\,000 - 7140(T - 125)^{1/3} \quad (2.60)$$

$$\gamma(T) = 4 \left[ 1 + 297 \left( \frac{273 - T}{273} \right)^4 \right] \quad (2.61)$$

$$\delta = 10$$

### 2.3.3.3 Modèle de CHABOCHE

Un élargissement de la formulation de PERZYNA a été proposé par CHABOCHE [C16,C17], cette loi suppose l'existence d'un potentiel de dissipation et fait intervenir beaucoup de paramètres, l'expression simplifiée de la loi de CHABOCHE est donnée par la relation suivante :

$$\sigma = k + K \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\gamma} \right)^{1/\delta} \quad (2.62)$$

Où les paramètres  $k$  et  $K$  désignent respectivement la limite élastique initiale et la fonction de résistance plastique.

### 2.3.3.4. Modèle de BODNER-PARTOM

La loi proposée par BODNER-PARTOM [B5] permet de modéliser le comportement du matériau sans faire référence à la surface d'écoulement plastique. Cette loi fait intervenir également beaucoup de paramètres et son expression simplifiée peut être écrite sous la forme suivante:

$$\sigma = \frac{R_0}{\left[ \frac{2\delta}{2\delta + 1} \log \left( \frac{2D_0}{\sqrt{3}\dot{\epsilon}} \right) \right]^{1/2\delta}} \quad (2.63)$$

Où les constantes  $D_0$  et  $R_0$  représentent respectivement la valeur limite du taux de déformation plastique en cisaillement et la valeur de la contrainte initiale associée à l'écrouissage isotrope.

**2.3.3.5. Etude comparative des lois constitutives de PERZYNA, de CHABOCHE et de BODNER-PARTOM**

Nous proposons une brève étude comparative des trois lois citées ci-dessus, sachant que la loi de PERZYNA est celle que nous appliquerons plus tard dans l’analyse du comportement dynamique des structures pour tenir compte de l’effet de la vitesse de déformation. La loi constitutive de BODNER-PARTOM contrairement aux formulations de PERZYNA et CHABOCHE n’introduit pas la notion de limite élastique et ne considère que les phénomènes qui apparaissent dès le début du processus de déformation. Il est facile de remarquer que dans le cas particulier où on ne tient pas compte de l’écrouissage cinématique la loi de CHABOCHE coïncide avec la loi de PERZYNA.

Loi de Perzyna	Loi de Chaboche	Loi de Bodner-Partom
$\sigma = k + k \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\delta}}$	$\sigma = k + K \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\delta}}$	$\sigma = \frac{R_0}{\left[ \frac{2\delta}{2\delta+1} \log \left( \frac{2D_0}{\sqrt{3}\dot{\epsilon}} \right) \right]^{\frac{1}{2\delta}}}$

**Tableau 2.3.** Lois constitutives de Perzyna, de Chaboche et de Bodner-Partom

Ces lois sont souvent discutées et comparées pour des petites vitesses de déformation dans le cas quasi-statique. Selon la loi de CHABOCHE et celle de PERZYNA, lorsque  $\dot{\epsilon}$  tend vers 0,  $\sigma$  tend vers  $k$ . Par contre, dans le cas la loi de BODNER-PARTOM, lorsque  $\dot{\epsilon}$  tend vers 0,  $\sigma$  tend vers 0, résultat qui est en accord avec les hypothèses posées par les auteurs. Pour pouvoir comparer les valeurs de  $\sigma$  pour des petites vitesses de déformation on peut rappeler qu’habituellement la limite élastique "statique" est déterminée au cours des essais quasi-statiques, avec des vitesses de déformation très petites, ne dépassant pas  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . On peut observer que pour les grandes valeurs de l’exposant  $\frac{1}{\delta}$ , la limite élastique dans la loi de PERZYNA et de CHABOCHE devient insensible à la vitesse de déformation. On se retrouve alors dans le domaine de la plasticité. De même, on a, pour  $\gamma$  très grand, dans le modèle de PERZYNA et lorsque  $K$  tend vers 0, dans la formulation de CHABOCHE. Dans ces deux cas la contrainte  $\sigma$  tend vers  $k$ .

L’influence des paramètres dans le modèle de BODNER-PARTOM paraît moins évidente. Le paramètre  $D_0$  désigne la limite de la vitesse de déformation en cisaillement et assure la validité du domaine des vitesses. Les petites valeurs de la contrainte initiale  $R_0$ , associée à l’écrouissage isotrope, abaissent la limite élastique et la rendent peu sensible à l’accroissement de la vitesse de déformation. L’exposant  $\delta$ , en diminuant, réduit aussi la limite élastique mais donne plus de sensibilité à la vitesse de déformation.

**2.3.3.6. Les principaux paramètres influençant la sensibilité des matériaux à la vitesse de déformation**

Dans l’objectif de comprendre les dispersions observées dans les résultats des essais, certains chercheurs ont étudié expérimentalement, l’effet de quelques facteurs sur la sensibilité à la vitesse de déformation. Ils ont constaté que la valeur de la limite élastique est la source principale des dispersions et les autres facteurs n’influencent pas notablement cette sensibilité. SOROUSHIAN et CHOI [S5] ont étudié expérimentalement l’effet de la vitesse

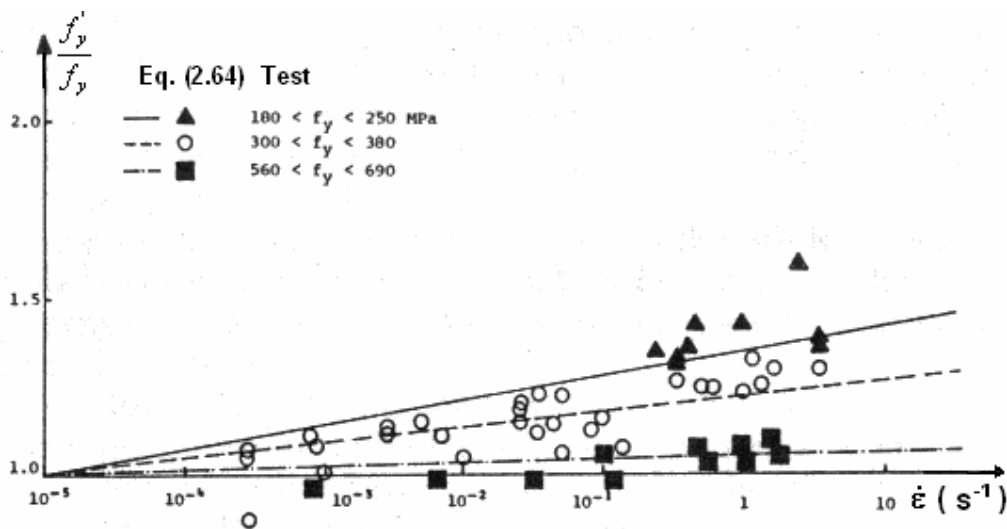
de déformation sur toutes les caractéristiques mécaniques de l'acier qui sont : la limite élastique, la contrainte ultime, la déformation limite élastique, la déformation ultime et le module d'écroutissage. Ils ont constaté que les dispersions dans les résultats des essais sont considérablement réduites quand ces résultats sont présentés séparément pour différents intervalles de la limite élastique. Les résultats présentés graphiquement dans [S5] et qui donnent directement les caractéristiques mécaniques obtenues en fonction de la vitesse de déformation pour différentes valeurs de la limite élastique montrent clairement que l'effet de la vitesse de déformation devient moins significatif quand la limite élastique statique augmente.

### 2.3.3.6.1. Effet de la limite élastique sur la sensibilité des caractéristiques mécaniques de l'acier à la vitesse de déformation

En considérant l'influence de la limite élastique sur la sensibilité des caractéristiques mécaniques de l'acier, SOROUSHIAN et CHOI [S5] ont établi des expressions en terme de rapport entre les caractéristiques mécaniques dynamiques et les caractéristiques mécaniques statiques, à titre indicatif, certains aciers manifestent deux limites d'élasticité, la limite élastique inférieure et une limite élastique supérieure et qui sont influencées toutes les deux par la vitesse de déformation, mais dans la pratique on ne considère que la limite élastique inférieure :

- Limite élastique inférieure

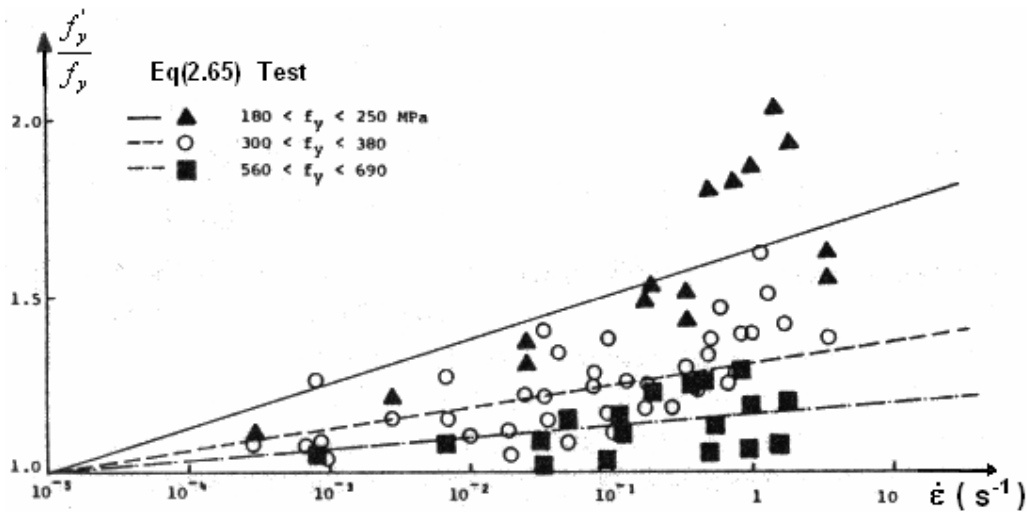
$$\frac{f_y'}{f_y} = (-0.451 \times 10^{-6} f_y + 1.46) + (-9.20 \times 10^{-7} f_y + 0.0927) \text{Log}(\dot{\epsilon}) \quad (2.64)$$



**Figure 2.7.** Effet de la vitesse de déformation sur la limite élastique inférieure des différentes nuances d'aciers

- Limite élastique supérieure

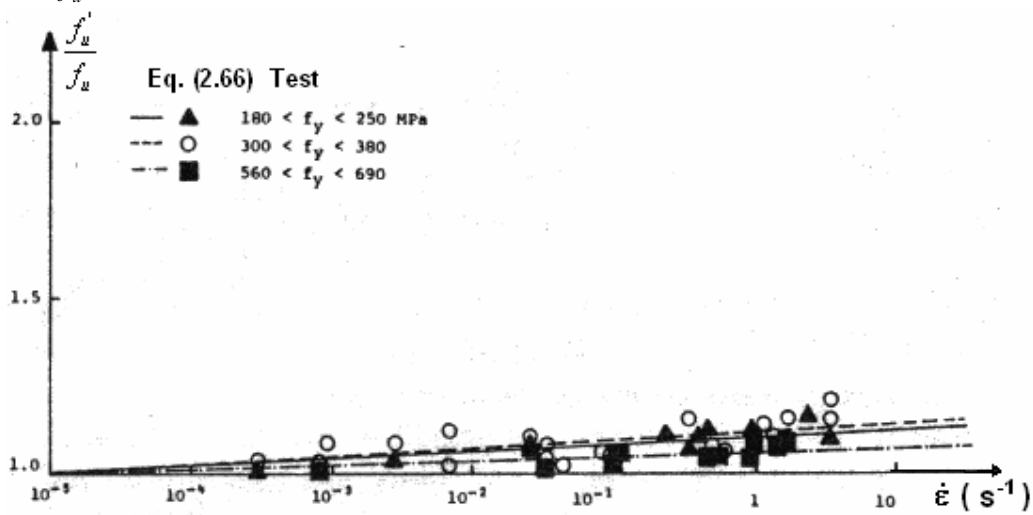
$$\frac{f_y'}{f_y} = (-6.83 \times 10^{-6} f_y + 1.72) + (-1.37 \times 10^{-6} f_y + 0.144) \text{Log}(\dot{\epsilon}) \quad (2.65)$$



**Figure 2.8.** Effet de la vitesse de déformation sur la limite élastique supérieure des différentes nuances d'aciers

- La contrainte ultime

$$\frac{f_u'}{f_u} = (-7.71 \times 10^{-7} f_y + 1.15) + (-2.44 \times 10^{-7} f_y + 0.04969) \text{Log}(\dot{\epsilon}) \quad (2.66)$$



**Figure 2.9.** Effet de la vitesse de déformation sur la contrainte ultime des différentes nuances d'aciers

- La déformation élastique

$$\frac{\epsilon_y'}{\epsilon_y} = (-4.21 \times 10^{-5} f_y + 4.46) + (-8.41 \times 10^{-6} f_y + 0.693) \text{Log}(\dot{\epsilon}) \quad (2.67)$$

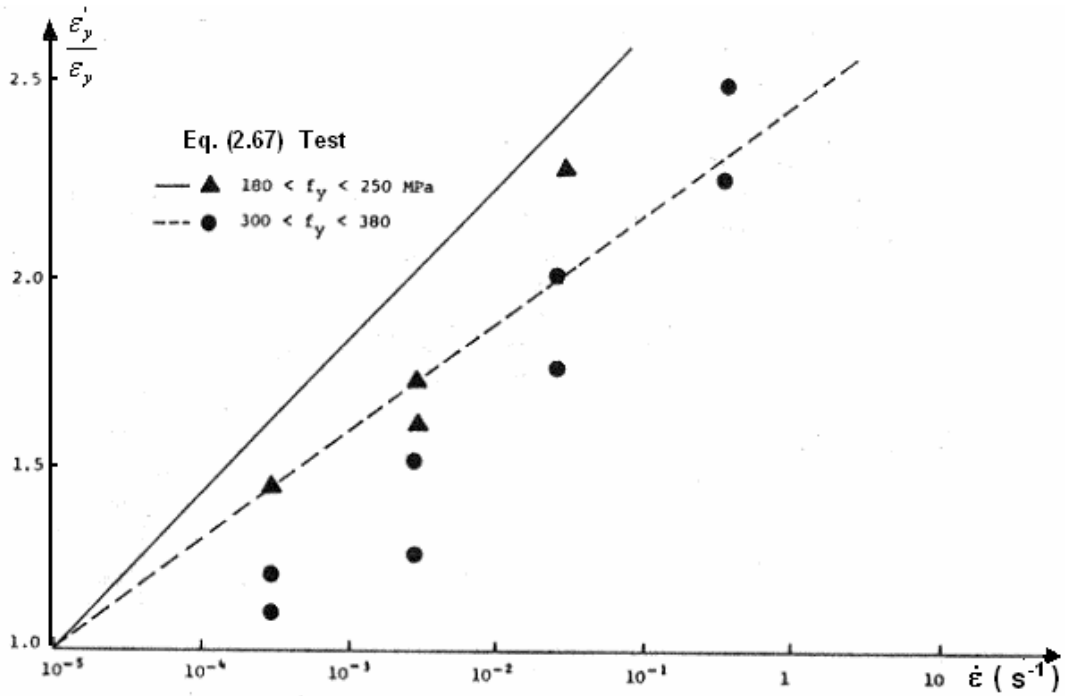


Figure 2.10. Effet de la vitesse de déformation sur la déformation élastique des différentes nuances d'aciers

- La déformation ultime

$$\frac{\epsilon'_u}{\epsilon_u} = (-8.93 \times 10^{-6} f_y + 1.4) + (-1.79 \times 10^{-6} f_y + 0.0827) \text{Log}(\dot{\epsilon}) \quad (2.68)$$

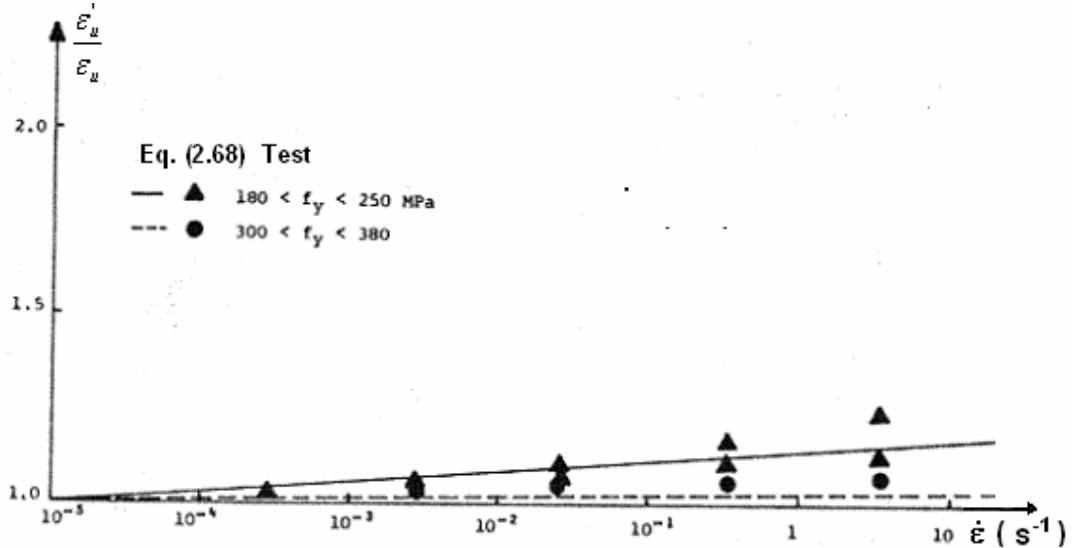


Figure 2.11. Effet de la vitesse de déformation sur la déformation ultime des différentes nuances d'aciers

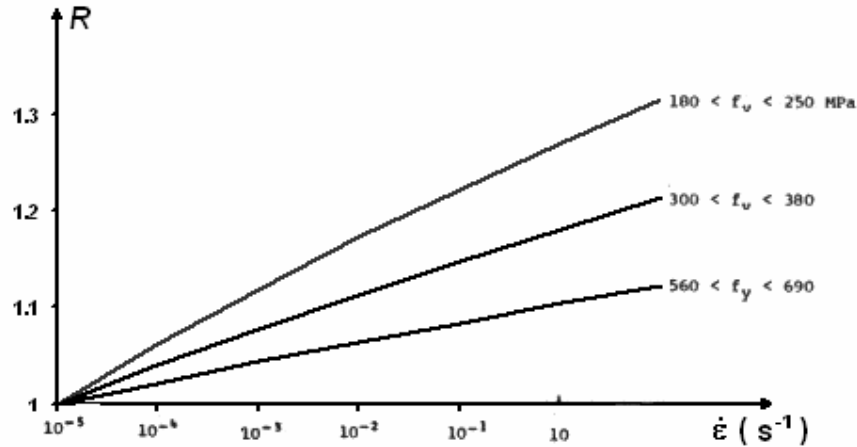
- Le rapport entre la limite élastique et la contrainte ultime normalisé est défini par :

$$R = \frac{\rho'_y}{\rho_y} \quad (2.69)$$



$\rho_y = \frac{f_y}{f_u}$  est le rapport entre la limite élastique et la contrainte ultime statique

$\rho'_y = \frac{f'_y}{f'_u}$  est le rapport entre la limite élastique et la contrainte ultime dynamique sous la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$



**Figure 2.12.** Effet de la vitesse de déformation sur le rapport entre la limite élastique et la contrainte ultime des différentes nuances d'aciers

- Loi constitutive

$$\sigma' = \begin{cases} E \cdot \epsilon & \text{si } \epsilon < \frac{f'_y}{E} \\ f'_y \left[ \frac{112(\epsilon - \epsilon'_y) + 2}{60(\epsilon - \epsilon'_y) + 2} + \frac{(\epsilon - \epsilon'_y)}{(\epsilon - \epsilon'_y)} \left( \frac{f'_u}{f'_y} - 1.7 \right) \right] & \text{si } \epsilon'_y < \epsilon < \epsilon'_u \end{cases} \quad (2.69)$$

- Loi constitutive simplifiée

$$\sigma' = \begin{cases} E \cdot \epsilon & \text{si } \epsilon < \frac{f'_y}{E} \\ f'_y + E'_h \left( \epsilon - \frac{f'_y}{E} \right) & \text{si } \epsilon'_y < \epsilon < \epsilon'_u \end{cases} \quad (2.70)$$

- Loi constitutive simplifiée

$$E'_h = E_h \left[ (2 \times 10^{-5} f_y + 0.0770) + (4 \times 10^{-6} f_y - 0.185) \text{Log}(\dot{\epsilon}) \right] < E_h \quad (2.71)$$

$f_y$  et  $f_u$  sont respectivement la limite élastique et la contrainte ultime statique

$f'_y$  et  $f'_u$  sont respectivement la limite élastique et la contrainte ultime dynamique sous la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$

$\epsilon_y$  et  $\epsilon_u$  sont respectivement la déformation et la déformation ultime statique

$E_h$  est le module d'érouissage statique du matériau

$E'_h$  est le module d'érouissage dynamique sous la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$

### 2.3.3.7. Etude expérimentale de l'effet de la vitesse de déformation sur les caractéristiques de résistance

Plusieurs lois expérimentales applicables dans le cas sismique ont été établies. Ces lois sont valables dans des domaines de vitesse de déformation et des nuances d'aciers bien définis. Nous citons ci-dessous les lois ainsi proposées dans l'ordre chronologique :

- WRIGHT et HALL [W5]

$$\frac{f_y'}{f_y} = 1 + 2.77 \exp[0.162(\text{Log}(\dot{\epsilon} - 3.74))] \quad 10^{-6} < \dot{\epsilon} < 10^3 \quad (2.72)$$

- RAO, LOHRAMANN et TALL [R4]

$$\frac{f_y'}{f_y} = 1 + 0.021(\dot{\epsilon})^{0.26}, \quad 0 < \dot{\epsilon} < 1.4, \quad F_e 360 \quad (2.73)$$

- SOROUSHIAN et CHOI [S5]

$$\begin{cases} \frac{f_y'}{f_y} = (-0.451 \times 10^{-6} f_y + 1.46) + (-9.20 \times 10^{-7} f_y + 0.0927) \text{Log}(\dot{\epsilon}) \\ \frac{f_u'}{f_u} = (-7.71 \times 10^{-7} f_y + 1.15) + (-2.44 \times 10^{-7} f_y + 0.0497) \text{Log}(\dot{\epsilon}) \end{cases} \quad \text{si } 10^{-4} < \dot{\epsilon} < 10^1 \quad (2.74)$$

- WALLACE et KRAWINKLER [W6]

$$\frac{f_y'}{f_y} = 0.973 + 0.45(\dot{\epsilon})^{0.53} \quad 10^{-5} < \dot{\epsilon} < 10^{-1} \quad (2.75)$$

- KASSAR et YU [K20]

$$\begin{cases} \frac{f_y'}{f_y} = 1.289 + 0.109 \text{Log} \dot{\epsilon} + 0.009 (\text{Log} \dot{\epsilon})^2 & f_y = 320 \text{ N/mm}^2 \\ \frac{f_y'}{f_y} = 1.104 + 0.302 \text{Log} \dot{\epsilon} + 0.002 (\text{Log} \dot{\epsilon})^2 & f_y = 495 \text{ N/mm}^2 \end{cases} \quad 10^{-4} < \dot{\epsilon} < 1 \quad (2.76)$$

- KANEKO [K21]

$$\begin{cases} \frac{f_y'}{f_y} = 1 + \frac{21}{f_y} \text{Log} \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} & \dot{\epsilon}_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1} \\ \frac{f_y'}{f_y} = 1 + \frac{7.4}{f_y} \text{Log} \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} & \dot{\epsilon}_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1} \end{cases} \quad 10^{-4} < \dot{\epsilon} < 1 \quad (2.77)$$

- SOROUSHIAN et CHOI [S5]

$$\frac{\rho_y'}{\rho_y} = \frac{1.46 + 0.0925 \text{Log} \dot{\epsilon}}{1.15 + 0.00496 \text{Log} \dot{\epsilon}} \quad (2.78)$$

- KANEKO [K21]

$$\frac{\rho_y'}{\rho_y} = \frac{1 + \frac{21}{f_y} \text{Log} \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0}}{1 + \frac{7.4}{f_y} \text{Log} \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0}} \quad (2.79)$$

$\rho_y = \frac{f_y}{f_u}$  est le rapport entre la limite élastique et la contrainte ultime statique

$\rho_y' = \frac{f_y'}{f_u'}$  est le rapport entre la limite élastique et la contrainte ultime dynamique sous la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$

$\dot{\epsilon}_0$  est le seuil de la vitesse de déformation à partir duquel les propriétés mécaniques du matériau deviennent substantiellement sensibles à la vitesse de déformation

### 2.3.3.8. Influence de la vitesse de déformation de cisaillement sur le comportement au cisaillement pur de l'acier doux

Divers chercheurs ont réalisé des études expérimentales et ont développé des lois pour confirmer l'effet de la vitesse de déformation sur le comportement dynamique des matériaux. Cependant la majorité des résultats sont obtenus sur la base des essais de traction-compression. Rare sont les auteurs qui se sont intéressés à l'étude de l'effet de la vitesse de déformation de cisaillement sur le comportement au cisaillement de l'acier. Des études expérimentales dans ce domaine sont réalisées par KLEPACZKO [K5], BENNET et SINCLAIRE [B6]. Ces auteurs ont effectué des essais dynamiques sous des conditions de cisaillement en utilisant des spécimens cylindriques creux de faible épaisseur, sollicités en torsion dans l'intervalle des déformations de cisaillement  $0 < \nu \leq 0.4$  rad sous des vitesses de déformation de cisaillement allant de  $10^{-5}$  rad s<sup>-1</sup> à  $10^2$  rad s<sup>-1</sup>.

Des courbes dans le domaine d'écrouissage reliant  $\tau$  à  $\nu$  sont obtenues pour six vitesses de déformation de cisaillement constantes  $\dot{\nu}_1 = 1.17 \cdot 10^{-5}$  rad s<sup>-1</sup>,  $\dot{\nu}_2 = 1.31 \cdot 10^{-4}$  rad s<sup>-1</sup>,  $\dot{\nu}_3 = 2.77 \cdot 10^{-3}$  rad s<sup>-1</sup>,  $\dot{\nu}_4 = 2.85 \cdot 10^{-2}$  rad s<sup>-1</sup>,  $\dot{\nu}_5 = 4.4 \cdot 10^{-1}$  rad s<sup>-1</sup>,  $\dot{\nu}_6 = 55$  rad s<sup>-1</sup>. Quatre essais sont effectués pour chacune des six vitesses de déformation de cisaillement mentionnées ci-dessus. Chaque courbe  $\tau - \nu$  est obtenue en moyennant les résultats des quatre essais. La description de l'effet de la vitesse de déformation de cisaillement sur le comportement dynamique de l'acier est faite sur la base des résultats de cette étude expérimentale. Les courbes  $\tau = \tau(\nu, \dot{\nu})$  présentées dans KLAPEKZKO [K12] montrent clairement que l'acier doux est extrêmement sensible à l'effet de la vitesse de déformation de cisaillement. Tous les spécimens testés ont montré une limite élastique supérieure et une limite élastique inférieure de cisaillement, la différence entre ces deux limites élastiques décroît quand la vitesse de déformation de cisaillement décroît, et la limite élastique supérieure de cisaillement disparaît complètement pour  $\dot{\nu}_1 = 1.17 \cdot 10^{-5}$  rad s<sup>-1</sup>, mais la courbe  $\tau = \tau(\nu, \dot{\nu}_1)$  obtenue pour cette valeur de  $\dot{\nu}_1$  dans le domaine d'écrouissage reste supérieure aux courbes  $\tau = \tau(\nu, \dot{\nu})$  obtenues pour les deux vitesses de déformation de cisaillement immédiatement supérieures à  $\dot{\nu}_1$ , à savoir  $\dot{\nu}_2 = 1.31 \cdot 10^{-4}$  rad s<sup>-1</sup> et  $\dot{\nu}_3 = 2.77 \cdot 10^{-3}$  rad s<sup>-1</sup>. Il est intéressant de noter que les courbes  $\tau = \tau(\nu, \dot{\nu})$  pour les faibles vitesses de déformation

de cisaillement montrent un taux d'écrouissage  $\frac{d\tau}{d\nu}$  assez faible par rapport aux autres courbes.

Les spécimens testés sous de faibles vitesses de déformation de cisaillement ont perdu leur stabilité de façon prématurée, alors que les spécimens testés sous des vitesses de déformation élevées ont montré d'importantes déformations de cisaillement.

KLAPECZKO [K12] a donné une loi de comportement dans le cas du cisaillement pur tenant compte de l'effet de la vitesse de déformation de cisaillement. Cette loi est ajustée selon le modèle de PERZYNA, en utilisant les résultats de l'étude expérimentale précédente.

La fonction  $\Phi(F)$  est supposée égale à  $F^\delta$

La loi de PERZYNA sous sa forme générale est donnée par l'expression suivante:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}} \quad (2.80)$$

Pour restreindre cette loi au cas du cisaillement pur, on prend :

$$\Phi(F) = F^\delta \quad (2.81)$$

on pose  $\dot{\nu} = \gamma^* F^\delta$  où  $F = \beta \dot{\nu}^\eta$

Finalement la contrainte de cisaillement dynamique peut être écrite sous la forme :

$$\tau = \tau_{stat}(\nu)(1 + \beta \dot{\nu}^\eta) \quad (2.82)$$

$$\text{où } \eta = \frac{1}{\delta}, \quad \beta = \frac{1}{(\gamma^*)^{1/\delta}}$$

$\eta$  caractérise la sensibilité du matériau à l'effet de la vitesse de cisaillement, il est donné par

$$\eta = \frac{\partial \log \tau}{\partial \log \dot{\nu}} \quad (2.83)$$

La fonction  $F$  est une fonction de la déformation de cisaillement et de la vitesse de cisaillement:

$$F = \beta \dot{\nu}^\eta \quad (2.84)$$

L'étude expérimentale présentée dans [K12] montre que le seuil de la vitesse de déformation de cisaillement statique  $\dot{\nu}_0$  est considéré comme égale à  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$  et au-delà de cette valeur limite les arguments de la fonction  $F$  dépendent de façon très significative de la déformation et de la vitesse de déformation de cisaillement.

La relation  $F = \beta \dot{\nu}^\eta$  implique une variation linéaire de  $\log F$  en fonction de  $\log \dot{\nu}$ , dont la pente est égale à  $\eta$ , cette pente est évaluée par KLAPECZKO [K12] en représentant graphiquement en coordonnées double logarithmiques la fonction  $F = F(\nu, \dot{\nu})$  pour différentes valeurs de la vitesse de déformation de cisaillement ( $\dot{\nu} = \text{constante}$ ) dans les domaines des déformations et des vitesses de déformation de cisaillement suivantes :

$$\nu_0 \leq \nu \leq 0,4 \text{ et } 10^{-3} \leq \dot{\nu} \leq 10^2 \text{ s}^{-1}$$

$\nu_0$  est la déformation de cisaillement correspondante à la limite élastique supérieure de cisaillement. En plus, cette étude a permis d'obtenir pour chaque valeur de  $\nu$  les valeurs de  $\beta$  et des constantes du matériau  $\gamma^*$  et  $\delta$ . Les résultats obtenus sont montrés au tableau 2.4, ces résultats conduisent aux conclusions suivantes : la valeur de  $\beta$  dépend fortement de la déformation  $\nu$  alors que  $\eta$  et  $\delta$  dont les valeurs se trouvent dans une marge assez

restreinte et peuvent être reconnues comme des constantes du matériau. Les valeurs moyennes calculées de  $\eta$  et  $\delta$  sont  $\bar{\eta} = 0.187$  et  $\bar{\delta} = 5.33$

Dans l'objectif de décrire d'une façon plus précise l'effet de la vitesse de déformation de cisaillement sur le comportement dynamique du matériau soumis au cisaillement les modifications suivantes dans les relations (2.81) peuvent être introduites à savoir :

$$\begin{cases} F = \beta(v) \cdot \dot{v}^\eta \\ \dot{v} = \gamma^*(v) F^\delta \end{cases} \quad (2.85)$$

Ces modifications conduisent à la loi suivante :

$$\tau = \tau_{stat}(v) [1 + \beta(v) \cdot \dot{v}^\eta] \quad (2.86)$$

Où la fonction  $\beta(v)$  est une fonction décroissante de  $v$ , les valeurs de  $\beta$  sont obtenues expérimentalement (voir tableau 2.4). La fonction  $F = \beta \cdot \dot{v}^\eta$  constitue une très bonne approximation pour représenter le comportement dynamique du matériau correspondant à des valeurs constantes de la déformation de cisaillement  $v$

$v$	$\eta$	$\delta$	$\beta$	$\gamma^*$
$v_0$	0,200	5,000	1,1780	0,44
<b>0,015</b>	0,193	5,181	0,9074	1,65
<b>0,030</b>	0,195	5,128	0,7320	4,95
<b>0,050</b>	0,190	5,263	0,5857	16,70
<b>0,070</b>	0,189	5,291	0,4682	55,45
<b>0,150</b>	0,187	5,348	0,3595	237,70
<b>0,250</b>	0,177	5,650	0,2619	1940,00
<b>0,400</b>	0,169	5,917	0,2043	12060,00

**Tableau 2.4.** Constantes du matériau déterminées expérimentalement

## 2.4. CONCLUSION

Cette revue de la littérature et les diagrammes des figures 2.7 à 2.12 mettent en évidence les conclusions suivantes:

- Toutes les caractéristiques mécaniques de déformabilité et de résistance augmentent avec la vitesse de déformation et diminuent avec la température
- La limite élastique  $f_y$  est plus sensible à la vitesse de déformation que la contrainte ultime  $f_u$ .
- Le rapport  $\frac{f_y}{f_u}$  tend vers 1 lorsque la vitesse de déformation augmente.
- Le module d'élasticité  $E$  est indépendant de la vitesse de déformation

- La fonction principale influençant la sensibilité du matériau à la vitesse de déformation est la limite élastique statique
- Les caractéristiques mécaniques des matériaux ayant une limite élastique faible sont très sensibles à l'effet de la vitesse de déformation
- Les modèles empiriques proposés pour représenter l'effet de la vitesse de déformation sur le comportement dynamique des matériaux sont en très bonne concordance avec les résultats des essais.
- Aucune différence considérable n'est observée entre le comportement dynamique des aciers de construction et des aciers à béton.
- L'influence de la vitesse de déformation sur le comportement dynamique des matériaux prend effet à partir de  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$  aussi bien en cisaillement pur qu'en traction-compression.
- Durant l'événement sismique, au voisinage de l'épicentre, des valeurs assez élevées des vitesses aussi bien horizontales que verticales sont enregistrées, donc de très importantes valeurs de la vitesse de déformation sont induites dans les structures, ces valeurs peuvent dépasser largement les valeurs limites de la vitesse de déformation qui sont admises comme normales.
- L'effet principal de la vitesse de déformation est l'augmentation du rapport  $\frac{f_y}{f_u}$  et par conséquent à partir d'un certain seuil les transformations plastiques ductiles se transforment en rupture fragile, car le durcissement du matériau ( $f_u \gg f_y$ ) est une condition nécessaire de propagation de la plasticité.
- Dans le cas d'un chargement dynamique cyclique au voisinage de l'épicentre, le nombre de cycles à la rupture peut être substantiellement réduit.
- Tous les auteurs sont unanimes pour dire que l'effet de la vitesse de déformation doit être considéré dans le dimensionnement des ouvrages exposés à l'action sismique au voisinage de l'épicentre.