



UNIVERSITÉ de Liège

Académie Universitaire Wallonie-Europe
Faculté des Sciences
Département AGO
Service IFPA

Mécanique quantique avec un principe d'incertitude généralisé. Application à l'interaction $1/r^2$

Djamil Bouaziz

Thèse présentée en vue de l'obtention
du grade de docteur en sciences
Spécialité : Physique théorique
Promoteur : Michel Bawin

Juin 2009

Table des matières

1	Introduction générale	1
2	Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée	6
2.1	Longueur minimale	6
2.2	Principe d'incertitude généralisé (GUP)	7
2.3	Représentation théorique et conséquences de la relation d'incertitude généralisée	9
2.3.1	Hermiticité et états propres de l'opérateur de position	11
2.3.2	Représentation dans l'espace des impulsions	12
2.3.3	Quasi-représentation de configuration : États à localisation maximale	18
2.4	Généralisation à plusieurs dimensions	22
2.4.1	Relation d'incertitude généralisée à N dimensions	22
2.4.2	Quasi-représentation de position	25
2.4.3	Représentation du groupe de rotation	26
3	Systèmes simples avec une longueur élémentaire	28
3.1	Potentiel delta de Dirac à une dimension	28
3.2	Atome d'hydrogène : traitement perturbatif	31
4	Le potentiel singulier $-\alpha/r^2$ à 3 dimensions spatiales en mécanique quantique ordinaire	38
4.1	Équation de Schrödinger dans l'espace des coordonnées	38
4.1.1	Fonctions propres et valeurs propres	38
4.1.2	Écart quadratique moyen	40
4.2	Solution dans l'espace des impulsions	41
4.2.1	Équation de Schrödinger	42
4.2.2	Fonction d'onde	42

4.2.3	Spectre d'énergie	44
4.3	Régularisation du potentiel $-\alpha/r^2$ en mécanique quantique	47
5	Le potentiel $-\alpha/r^2$ avec une longueur élémentaire	49
5.1	Équation de Schrödinger	49
5.1.1	Équation intégrale	51
5.1.2	Transformations et changement de variable	53
5.2	Solution à énergie nulle	54
5.2.1	Limite $p \rightarrow \infty$	57
5.3	Solution à énergie non nulle	59
5.4	Problème des valeurs propres	62
5.4.1	Cas particulier $\beta = \beta'$	62
5.4.2	Calcul du spectre d'énergie	63
5.4.3	Généralisation au cas $\beta \neq \beta'$	68
5.5	Conclusions	69
6	Le potentiel $\frac{-\alpha}{r^2}$ à N dimensions avec une longueur élémentaire	70
6.1	Équation de Schrödinger	70
6.2	Fonctions propres	72
6.3	Conclusions	77
7	Dipôle dans le champ d'une corde cosmique avec une longueur élémentaire	78
7.1	Défauts topologiques de l'univers et cordes cosmiques	78
7.2	Interaction entre un dipôle et une corde cosmique	79
7.2.1	Fonction d'onde	80
7.2.2	Énergies propres	81
7.3	Conclusions	86
8	Le potentiel $-\alpha/x^2$ en mécanique quantique avec une longueur élémentaire	87
8.1	Le potentiel $-\alpha/x^2$ en mécanique quantique ordinaire	87
8.2	Le potentiel $-\alpha/x^2$ en présence d'une longueur élémentaire	89
8.2.1	Équation de Schrödinger	89
8.2.2	Problème des états liés	90
8.3	Conclusions	94
9	Conclusion générale	95

A	Limites de la solution (5.60)	99
A.1	Limite $\beta, \beta' \ll 1$	99
A.2	Limite $p \rightarrow \infty$	100
A.3	Limite $E \rightarrow 0$	101

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Michel Bawin qui m'a donné la chance de préparer cette thèse sous sa direction. Ses conseils et les multiples discussions que j'ai eues avec lui m'ont été indispensables pour réaliser ce travail. C'est grâce à lui que j'ai appris qu'il y avait des potentiels singuliers en mécanique quantique. Ceci m'a permis de revoir les notions fondamentales de cette théorie et d'apprendre pas mal de choses.

Je remercie également Monsieur le Professeur Joseph Cugnon d'avoir accepté de m'accueillir dans son groupe, et d'avoir mis à ma disposition tous les moyens nécessaires à mon travail de recherche.

Mes remerciements vont aussi à tous les membres de notre groupe, plus particulièrement à Monsieur Jean-René Cudell qui répondait toujours présent pour m'aider chaque fois que j'avais un problème informatique.

Je ne peux pas omettre de remercier le Professeur Tahar Boudjedaa pour les précieuses discussions que j'avais avec lui en Algérie. Je n'oublierai jamais la première fois que je lui montrai l'équation (5.8) ; il m'affirma aussitôt que celle-ci ne serait qu'une équation différentielle du type de Heun. Les transformations et les longs calculs qui ont suivi montrèrent qu'il avait raison.

Je remercie aussi le Professeur Khireddine Nouicer qui est à l'origine de ma découverte de la relation d'incertitude généralisée.

Cette thèse a été réalisée grâce à l'appui financier du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique Algérien et de la Coopération Technique Belge (CTB). Je remercie tout le personnel de la CTB, plus particulièrement Mesdames, Charlotte Standaert, Liesbet Vastenavondt, Christine Leroy et Lynda Khelifi qui ont fait de leur mieux pour réunir les meilleures conditions de vie et de travail en Belgique.

En fin, je ne saurais assez remercier toute ma famille, plus particulièrement mon père, qui m'a toujours encouragé à étudier depuis mon enfance jusqu'à maintenant, et mon épouse pour son soutien durant la rédaction de cette thèse.

Liège, 18/06/2009

Résumé

Nous présentons les outils fondamentaux du formalisme de la mécanique quantique non relativiste basée sur un principe d'incertitude généralisé, impliquant l'existence d'une longueur élémentaire. En considérant deux systèmes simples, à savoir le potentiel delta de Dirac à 1 dimension et le potentiel de Coulomb à 3 dimensions, nous illustrons comment on peut résoudre l'équation de Schrödinger et extraire le spectre d'énergie, analytiquement ou perturbativement, dans ce formalisme.

Nous appliquons ce formalisme au potentiel singulier $-\alpha/r^2$ ($\alpha > 0$) à 3 dimensions, qui nécessite une régularisation aux petites distances en mécanique quantique ordinaire. Nous étudions la solution de l'équation de Schrödinger dans l'espace des impulsions. Nous montrons que la longueur élémentaire régularise le potentiel naturellement. Le spectre d'énergie est calculé comme dans le cas des potentiels réguliers, sans introduction d'un paramètre arbitraire, et le système possède un état fondamental avec une énergie finie.

Nous généralisons notre étude en étudiant l'équation de Schrödinger déformée pour le potentiel $-\alpha/r^2$ à N dimensions, pour toutes les valeurs du nombre quantique du moment orbital l . La solution analytique est une fonction de Heun qui se réduit à une fonction hypergéométrique dans certains cas particuliers.

Nous appliquons nos résultats à 2 dimensions spatiales au problème d'un dipôle dans le champ d'une corde cosmique. Nous étudions en détail l'existence des états liés du système pour différentes valeurs de la constante de couplage, qui dépend de l'angle (θ) entre la corde cosmique et le dipôle. Nous montrons en particulier que la corde cosmique ne peut pas lier le dipôle si $\theta \leq \pi/4$.

Nous examinons également le nombre des états liés du potentiel $-\alpha/x^2$ à 1 dimension dans ce nouveau formalisme de la mécanique quantique. Les résultats sont en accord qualitatif avec ceux de la mécanique quantique ordinaire.

Nous concluons que dans une théorie quantique non relativiste incluant une longueur élémentaire, celle-ci représenterait une dimension intrinsèque du système étudié. Le formalisme de cette nouvelle version de la mécanique quantique serait utile pour résoudre des problèmes caractérisés par des anomalies dues à des singularités aux petites distances.

Abstract

We discuss the fundamental tools of the formalism of nonrelativistic quantum mechanics based on a generalized uncertainty principle, implying the existence of a minimal length. We consider two simple systems, namely the one-dimensional Dirac delta potential and the three-dimensional Coulomb potential to illustrate how the Schrödinger equation and the eigenvalue problem in the presence of the minimal length can be solved exactly or perturbatively.

We apply this formalism to the singular potential $-\alpha/r^2$ ($\alpha > 0$), whose short distance behavior must be regularized in ordinary quantum mechanics. We solve analytically the three-dimensional Schrödinger equation in momentum space. We show that the presence of a minimal length in the formalism regularizes the potential in a natural way. The energy spectrum is calculated as in the case of regular potentials, without introducing any arbitrary parameters, and the system possesses a finite energy in the ground state.

We generalize our study by solving analytically the deformed Schrödinger equation for the potential $-\alpha/r^2$ in N -dimensions, and for all values of orbital momentum quantum number l . The solution is a Heun function which reduces to a hypergeometric function in some special cases.

We apply our results in two spatial dimensions to the problem of a dipole in a cosmic string background. We study in detail the existence of bound states of the system for all values of the coupling constant, depending on the angle (θ) between the cosmic string and the dipole. We show in particular that the cosmic string cannot bind the dipole if $\theta \leq \pi/4$.

We investigate also the number of bound states for the one-dimensional $-\alpha/x^2$ potential in this new formalism of quantum mechanics. The results are in qualitative agreement with those of ordinary quantum mechanics.

We conclude that the minimal length in a non relativistic quantum theory may represent an intrinsic dimension of the system under study. The formalism of this deformed version of quantum mechanics would be useful to solve problems characterized by anomalies due to singularities at small distances.

Chapitre 1

Introduction générale

Le concept de longueur élémentaire n'est pas nouveau en physique. Il a été introduit en particulier en relation avec le problème fondamental de la physique moderne, à savoir l'unification des interactions gravitationnelles et des interactions fortes, électromagnétiques et faibles. En effet, l'introduction des forces gravitationnelles dans la théorie des champs quantiques fait apparaître des divergences qui rendent la théorie non renormalisable. Plusieurs scénarios ont été proposés pour résoudre ce problème, notamment l'existence de dimensions supplémentaires de l'espace-temps, ou l'existence d'une longueur minimale en dessous de laquelle la physique est inaccessible [1, 2, 3, 4, 5]. Ainsi, la gravitation devrait mener à une coupure à la limite de l'ultraviolet étant donné que la résolution de l'espace jusqu'aux très petites distances nécessite une très haute énergie. Par conséquent, la structure de l'espace-temps va être perturbée par les effets gravitationnels, et une limite inférieure de résolution de l'espace devient inévitable [6, 7, 8]. Cette longueur minimale est supposée être proche de la longueur de Planck ($l_p \approx 10^{-35}$ m).

Le concept de longueur élémentaire est aussi apparu dans le contexte de la théorie des cordes [9, 10, 11], candidate à l'unification des interactions fondamentales. Dans cette théorie, une échelle minimale est naturelle puisque les particules, qui sont considérées comme des cordes, ne peuvent pas résoudre des distances plus petites que la dimension de la corde. Si l'énergie de la corde atteint une certaine échelle M_s , des excitations de la corde peuvent survenir et auront comme effet l'élargissement de l'extension spatiale de la corde. En particulier, la théorie de diffusion des cordes à haute énergie montre que l'extension de la corde s'accroît proportionnellement à son énergie à chaque ordre de la théorie

des perturbations [13, 14]. De ce fait, une longueur élémentaire, au-dessous de laquelle la résolution de l'espace est impossible, est nécessaire dans cette théorie.

L'introduction de cette longueur élémentaire est équivalente à une incertitude supplémentaire sur la mesure de la position, de sorte que l'incertitude minimale ne peut jamais être nulle. De ce fait, plusieurs études en théorie des cordes et en théorie de la gravitation proposent des petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg de la forme [1, 2, 15] : $(\Delta X)(\Delta P) \geq (\hbar/2) [1 + \beta(\Delta P)^2 + \dots]$. Cette correction a comme conséquence, la modification de la relation de commutation entre l'opérateur de position et l'opérateur d'impulsion qui devient : $[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2 + \dots)$. L'étude des implications de ces modifications de l'algèbre de Heisenberg en mécanique quantique non relativiste, a été un sujet de grande importance ces dernières années. En effet, cette incertitude minimale non nulle, conséquence de la relation d'incertitude modifiée, peut être reliée à la dimension des particules [1, 12]. Par conséquent, une mécanique quantique découlant de cette algèbre modifiée pourrait constituer une théorie effective à basse énergie des particules non ponctuelles telles que les quasi-particules dans les solides et les hadrons en physique nucléaire [1, 22]. De plus, l'introduction de la longueur élémentaire dans la théorie est équivalente à une régularisation ; en particulier, elle permet l'absorption des divergences ultraviolettes qui apparaissent en théorie des champs quantiques [39, 16].

Ces dernières années, plusieurs problèmes ont été étudiés dans le cadre de cette version déformée de la mécanique quantique : le spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène a été obtenu perturbativement dans l'espace des coordonnées par plusieurs auteurs [17, 18, 19, 20], alors que son traitement dans l'espace des impulsions a été étudié dans la référence [21]. En exploitant les données expérimentales de la spectroscopie de l'atome d'hydrogène concernant le décalage de Lamb (Lamb shift), une limite supérieure de la longueur minimale de l'ordre de 0.01 – 0.1 fm a été trouvée dans ces références. L'oscillateur harmonique à une et à plusieurs dimensions a été résolu exactement [23], et perturbativement [17, 22]. Dans la référence [23], une limite supérieure de la longueur élémentaire a été calculée en confrontant les résultats théoriques à la précision de mesure des niveaux d'énergie d'un électron piégé dans un champ magnétique intense, c.-à-d., dans ce que l'on appelle *le piège de Penning* ; elle est du même ordre que celle obtenue dans le problème de l'atome d'hydrogène. L'influence de la longueur élémentaire sur l'énergie de Casimir entre deux plaques parallèles a été examinée également

[24, 25]. Le problème d'une particule chargée de spin $1/2$ se mouvant dans un champ magnétique constant a été traité aussi dans ce formalisme, et les propriétés thermodynamiques du système à haute température ont été examinées [26]. La longueur minimale a été introduite dans l'équation de Dirac dans la référence [27], où l'oscillateur de Dirac à une dimension a été résolu exactement ; à trois dimensions, ce problème a été résolu en utilisant la mécanique quantique supersymétrique [28]. Les modifications du moment gyromagnétique de l'électron et du muon dues à cette longueur minimale ont été discutées dans la référence [29]. Le problème des neutrons dans un puits gravitationnel quantique a été traité perturbativement dans la référence [33]. Plus récemment, plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude de l'effet de la longueur élémentaire sur la thermodynamique des trous noirs [34]. Il a été montré en particulier que la longueur minimale, qui serait de l'ordre de la longueur de Planck, empêche les trous noirs de s'évaporer totalement, exactement comme le principe d'incertitude standard de Heisenberg empêche l'atome d'hydrogène de s'effondrer (existence d'un état fondamental).

Le but de cette thèse est de poursuivre l'étude de cette nouvelle algèbre de Heisenberg modifiée dans le cadre de potentiels exactement solubles en mécanique quantique non relativiste ordinaire. Nous avons choisi d'étudier le potentiel α/r^2 en introduisant cette longueur élémentaire via le formalisme développé par Kempf et ses collaborateurs [1, 2].

L'idée d'associer une longueur élémentaire à des potentiels singuliers du type α/r^2 est assez naturelle. En effet, le potentiel attractif α/r^2 nécessite un traitement particulier en mécanique quantique pour en extraire des observables physiques. En particulier, la condition d'intégrabilité du carré des fonctions propres du hamiltonien ne suffit pas pour obtenir un ensemble orthogonal avec leur valeurs propres correspondantes [35, 36]. Ceci est dû au fait que le hamiltonien n'est pas auto-adjoint [37] ; il est nécessaire de définir les extensions self-adjointes du hamiltonien, ce qui est équivalent à imposer l'orthogonalité des fonctions d'onde [35]. De plus, ce potentiel n'a pas un état fondamental avec une énergie finie et les fonctions propres du hamiltonien s'expriment en fonction d'une phase arbitraire, nécessaire pour rendre le hamiltonien auto-adjoint. Le spectre d'énergie, quant à lui, contient une constante arbitraire.

Ce type de potentiel a une grande importance en physique. Ainsi, le problème d'un atome neutre interagissant avec un fil chargé, qui fournit un modèle utile pour le développement des dispositifs optiques de l'atome à l'échelle du

nanomètre, est décrit aux grandes distances par une interaction de type α/r^2 à 2 dimensions [61, 62]. Il en est de même pour l'interaction d'un dipôle avec une corde cosmique en relativité générale en $2 + 1$ dimensions [88, 89]. La partie à longue portée du potentiel décrivant l'interaction entre une charge et une molécule polaire est décrite aussi par ce potentiel à 3 dimensions spatiales [63, 64, 65]. L'effet Efimov dans les systèmes à trois corps en mécanique quantique non relativiste [76] est dû à l'existence d'un potentiel effectif α/R^2 , où R est le "rayon" en coordonnées sphériques de Jacobi décrivant les distances relatives dans le problème à 3 corps. Dans la physique des trous noirs, l'interaction α/r^2 apparaît naturellement dans l'analyse des propriétés du voisinage de l'horizon des trous noirs, dans le calcul de l'entropie de Bekenstein-Hawking et dans la désintégration des trous noirs [80]. Enfin, le potentiel α/x^2 à une dimension joue un rôle fondamental dans l'étude du phénomène de mouillage (wetting) entre deux surfaces [81].

Vu l'intérêt de ce potentiel, de nombreux travaux lui ont été consacrés. On peut consulter, par exemple, les références [67, 68] pour une revue très complète. Récemment, ce potentiel a été réexaminé par plusieurs auteurs [71, 72, 73, 78] dans le contexte du groupe de renormalisation. Ce potentiel fournit en effet un exemple très simple de cycle limite dans les équations du groupe de renormalisation.

Dans ce travail, nous allons étudier en détail le potentiel α/r^2 dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste basée sur des relations de commutation déformées. Nous allons montrer en détail que les paramètres de déformation dans le formalisme de Kempf [1] régularisent ce potentiel, et que le traitement de celui-ci dans ce formalisme est similaire au traitement des potentiels réguliers en mécanique quantique ordinaire.

Cette thèse est organisée comme suit : le prochain chapitre sera consacré à l'étude de la mécanique quantique avec un principe d'incertitude généralisé impliquant l'existence d'une longueur élémentaire. Nous présenterons le formalisme nécessaire développé essentiellement par Kempf et ses collaborateurs. Dans le troisième chapitre, nous illustrerons la résolution de l'équation de Schrödinger avec une longueur minimale en traitant deux potentiels simples, à savoir la fonction delta de Dirac à une dimension et l'atome d'hydrogène en théorie des perturbations. Dans le quatrième chapitre, nous étudierons en détail le potentiel singulier $-\alpha/r^2$ ($\alpha > 0$), en mécanique quantique ordinaire, dans l'espace des

impulsions, qui est l'espace naturel de la mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée. Dans le chapitre 5, qui constitue la partie principale de ce travail, le potentiel $-\alpha/r^2$ à trois dimensions, sera étudié dans le cadre de cette nouvelle version de la mécanique quantique : nous montrerons que l'introduction d'une longueur élémentaire régularise naturellement le potentiel. Dans le chapitre 6, nous étudierons le potentiel α/r^2 dans un espace à N dimensions. Dans le chapitre 7, nous étudierons la dynamique d'un dipôle dans le champ d'une corde cosmique. Le chapitre 8 sera consacré à l'examen de l'effet de la longueur minimale sur le nombre des états liés du potentiel $-\alpha/x^2$ à une dimension. Le dernier chapitre sera consacré à un récapitulatif des principaux résultats et à nos conclusions générales.

Chapitre 2

Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée

2.1 Longueur minimale

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, l'hypothèse de l'existence d'une longueur élémentaire a été faite, depuis longtemps en physique, pour des raisons aussi bien conceptuelles que techniques [41]. Dans ce contexte, des études récentes en théorie des cordes et en théorie de la gravitation quantique proposent des petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg [1, 2, 15, 16] qui impliquent une incertitude minimale non nulle $(\Delta x)_{\min}$ sur la position correspondant à cette longueur élémentaire.

Cette incertitude minimale peut être vue comme étant une conséquence du caractère "flou" (fuzzy) de l'espace temps à des échelles de distances de l'ordre de la longueur de Planck $\ell_p = 10^{-35}\text{m}$, ou aussi comme une limite naturelle exprimant la nature non ponctuelle des particules élémentaires [22]. En effet, le caractère ponctuel des particules est un postulat de base en mécanique quantique ; l'une des conséquences fondamentales, qui en découle est la localisabilité des particules : à des énergies suffisamment grandes, la position d'une particule peut être mesurée avec une incertitude arbitrairement petite. Ceci est traduit par la relation d'incertitude de Heisenberg habituelle [1]. En fait, cette description est idéaliste ; une relation d'incertitude généralisée, menant à une incertitude minimale non nulle, serait plus proche de la réalité physique. C'est ce dernier point qui a poussé les physiciens ces dernières années à s'intéresser à cette

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée 7

notion de longueur élémentaire en essayant de l'introduire dans le traitement des problèmes physiques, en mécanique quantique, via des corrections aux relations de commutation canoniques. Le formalisme général de cette nouvelle algèbre de Heisenberg modifiée a été étudié par Kempf et ses collaborateurs [1, 2, 16].

Dans la section qui suit, nous allons présenter une approche [29] qui généralise le principe d'incertitude de Heisenberg en tenant compte de cette notion de longueur élémentaire.

2.2 Principe d'incertitude généralisé (GUP)

Dans la littérature, il existe plusieurs théories introduisant le concept de longueur minimale, notamment les théories avec un principe d'incertitude généralisé (GUP), avec une relativité restreinte déformée [en anglais, deformed (doubly) special relativity] ou avec des relations de dispersion modifiées [11]¹.

Pour montrer comment incorporer la notion de la longueur élémentaire (minimale) ℓ_m en mécanique quantique, nous allons suivre l'approche de GUP [29, 11]. Dans ce contexte, on postule que lorsque l'on augmente arbitrairement l'impulsion p de la particule, le vecteur d'onde k ne doit pas dépasser une certaine valeur maximale de l'ordre de $1/\ell_m$ [29]. En conséquence, on aura des déviations par rapport à la dépendance linéaire, ($\vec{p} = \hbar\vec{k}$) lorsque p approche l'échelle (\hbar/ℓ_m). Ceci s'interprète physiquement par le fait que les particules ne peuvent pas posséder des longueurs d'onde ($2\pi/k$) arbitrairement petites, et que des échelles de distances arbitrairement petites ne peuvent plus être explorées [44].

Dans un but de simplicité, raisonnons à une seule dimension. Pour tenir compte de ce postulat, on suppose une relation $p = f(k)$ entre k et p . Cette fonction doit être impaire, du fait de la parité, et la fonction inverse doit approcher asymptotiquement une valeur de l'ordre ($1/\ell_m$) lorsque p tend vers l'infini. On suppose aussi que $f(k)$ est bien définie, lisse et différentiable [29, 11, 45, 4].

Plusieurs formes de la fonction f peuvent être trouvées : par exemple dans les références [29, 11, 45, 4], Hossenfelder a fait le choix :

$$p = \frac{\hbar}{\ell_m} \tanh^{-1}(\ell_m k).$$

¹Dans [11], on trouve une discussion sur la relation entre les différentes approches de ces théories et aussi les références concernant ce sujet.

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée 8

Nous avons préféré un autre choix, à savoir :

$$p = \frac{\hbar}{l_m} \tan(l_m k). \quad (2.1)$$

En utilisant le développement :

$$\tan y = y + \frac{y^3}{3} + \dots,$$

au deuxième ordre en l_m , p s'écrit :

$$p = \hbar \left(k + \frac{l_m^2}{3} k^3 + \dots \right). \quad (2.2)$$

Supposant que le commutateur entre \hat{X} et \hat{k} garde la forme standard, c'est-à-dire $[\hat{X}, \hat{k}] = i\delta_{ij}$, et utilisant la relation générale :

$$[\hat{X}, A(\hat{k})] = i \frac{\partial A}{\partial k},$$

on obtient la relation de commutation définissant l'algèbre de Heisenberg modifiée :

$$[\hat{X}, \hat{P}(k)] = i \frac{\partial \hat{P}}{\partial k}. \quad (2.3)$$

La relation (2.2) donne :

$$i \frac{\partial \hat{P}}{\partial k} = i \hbar (1 + l_m^2 \hat{k}^2 + \dots).$$

Or, on a :

$$l_m^2 \hat{k}^2 \simeq \frac{l_m^2 \hat{P}^2}{\hbar^2} + O(l_m^4).$$

Alors on trouve :

$$[\hat{X}, \hat{P}(k)] = i \hbar \left(1 + \left(\frac{l_m}{\hbar} \right)^2 \hat{P}^2 + \dots \right).$$

En introduisant un paramètre β , relié à la longueur minimale par :

$$\beta = \left(\frac{l_m}{\hbar} \right)^2, \text{ soit } l_m = \hbar \sqrt{\beta},$$

on aboutit à la relation de commutation suivante :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i \hbar \left(1 + \beta \hat{P}^2 + \dots \right). \quad (2.4)$$

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée 9

En mécanique quantique, la relation de commutation est reliée directement à la relation d'incertitude à travers la formule [93] :

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|.$$

Ce qui donne :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \frac{\partial \hat{P}}{\partial k} \right\rangle \right|. \quad (2.5)$$

Au premier ordre du paramètre β , la relation d'incertitude modifiée aura la forme suivante :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 + \beta \langle \hat{P}^2 \rangle \right).$$

En utilisant la définition de l'écart quadratique moyen : $(\Delta P)^2 = \langle \hat{P}^2 \rangle - \langle \hat{P} \rangle^2$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (\Delta X)(\Delta P) &\geq \frac{\hbar}{2} \{ 1 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma \}, \\ \gamma &= \beta \langle \hat{P} \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

La relation d'incertitude (2.6) implique une incertitude minimale non nulle sur la position ; elle a été étudiée rigoureusement par Kempf et ses collaborateurs [1, 2, 42]. Dans la section qui suit, nous allons nous baser essentiellement sur la référence [1], pour présenter le formalisme de la mécanique quantique découlant de cette algèbre modifiée.

2.3 Représentation théorique et conséquences de la relation d'incertitude généralisée

Considérons la relation d'incertitude modifiée (2.6) :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta P)^2 + \gamma), \quad (2.7)$$

où β et γ sont des paramètres positifs. Le paramètre β est relié à la longueur élémentaire à travers la relation $l_m = \hbar\sqrt{\beta}$; γ dépend de la valeur moyenne de l'impulsion par la formule $\gamma = \beta \langle P \rangle^2$.

En mécanique quantique ordinaire ($\beta = \gamma = 0$), ΔX peut être arbitrairement petit si ΔP est suffisamment grand, ce qui veut dire que l'on peut résoudre des

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée¹⁰

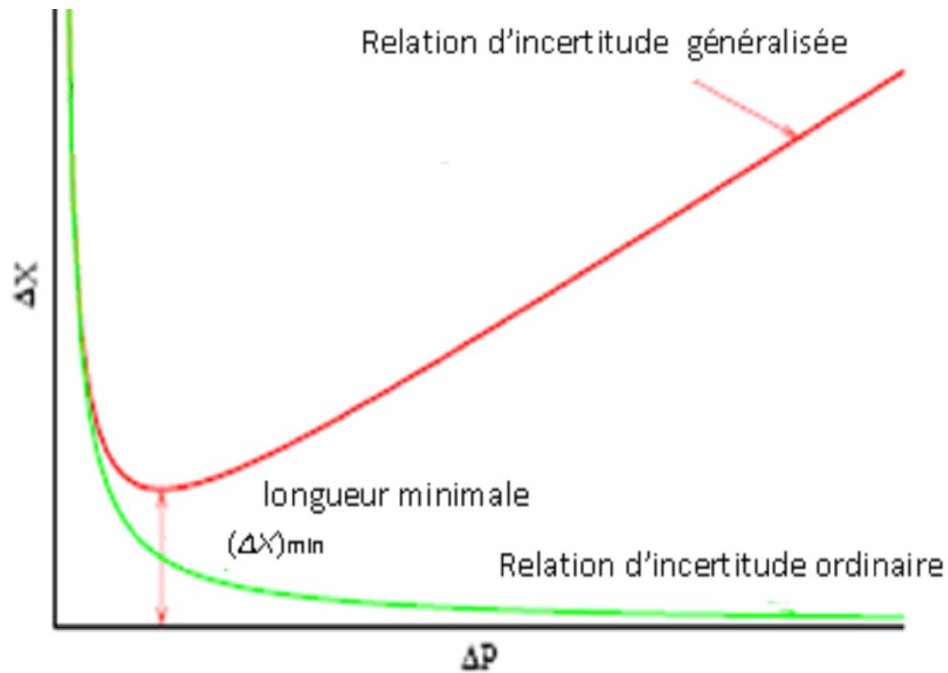


FIG. 2.1 – La relation d'incertitude généralisée, impliquant une 'longueur minimale' $(\Delta X)_{\min} > 0$

échelles de distances arbitrairement petites en utilisant des particules test suffisamment énergétiques. Ceci n'est pas le cas dans la relation (2.7) du fait de la présence du terme $\beta(\Delta P)^2$ dans le membre droit de l'inégalité ; même pour de grandes valeurs de ΔP , ΔX est toujours supérieur à une valeur minimale $(\Delta X)_{\min}$ non nulle, que nous allons définir par la suite. La courbe représentant cette relation d'incertitude est illustrée sur la figure (2.1). On observe que pour les petites valeurs de ΔP , la relation d'incertitude généralisée et la relation d'incertitude ordinaire sont presque identiques ; elles deviennent remarquablement différentes dans la région de grand ΔP .

Le postulat de l'introduction d'une incertitude minimale non nulle se justifie par le fait qu'une longueur élémentaire (dimension de la particule, longueur de Planck, longueur de Compton) peut être représentée par une incertitude supplémentaire qui s'ajoute à l'incertitude sur la mesure de la position.

Il est à noter que l'on peut avoir une relation d'incertitude avec des incertitudes minimales non nulles sur la position et sur l'impulsion ($(\Delta X)_{\min} \neq 0$ et

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée¹¹

$(\Delta P)_{\min} \neq 0$). Cette relation a la forme [1, 39, 41, 28] :

$$\begin{aligned}(\Delta X)(\Delta P) &\geq \frac{\hbar}{2}(1 + \alpha(\Delta X)^2 + \beta(\Delta P)^2 + \gamma), \\ \gamma &= \alpha \langle \hat{X} \rangle^2 + \beta \langle \hat{P} \rangle^2.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Par la suite nous allons nous limiter seulement au cas $\alpha = 0$, c'est-à-dire une incertitude minimale non nulle sur la position seulement. Ce cas représente un intérêt particulier en mécanique quantique car cette longueur élémentaire, introduite naturellement dans les équations, représente une réalité physique telle que la nature non ponctuelle des particules [1]. Alors une théorie qui découle de ce principe pourrait donner une meilleure description des particules composites telles que les nucléons dans les potentiels nucléaires ou les noyaux dans les potentiels moléculaires [16].

2.3.1 Hermiticité et états propres de l'opérateur de position

En mécanique quantique ordinaire les opérateurs² \hat{x} et \hat{p} sont représentés par des opérateurs de multiplication ou de dérivation agissant sur des fonctions d'onde dans l'espace des coordonnées ou des impulsions ($\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ ou $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle$); $|x\rangle$ et $|p\rangle$ sont des états propres de \hat{x} et \hat{p} respectivement. Strictement parlant, $|x\rangle$ et $|p\rangle$ ne sont pas des états physiques, car ils ne sont pas normalisables et donc n'appartiennent pas à l'espace de Hilbert. Cependant, les opérateurs \hat{x} et \hat{p} sont auto-adjoints et leurs états propres peuvent être approchés, avec une précision arbitrairement grande, par une séquence d'états physiques $|\psi_n\rangle$, ayant une localisation croissante dans l'espace des coordonnées ou des impulsions [1], c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x)_{|\psi_n\rangle} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta p)_{|\psi_n\rangle} &= 0.\end{aligned}$$

² dans toute la thèse, \hat{x} et \hat{p} représentent les opérateurs de position et d'impulsion satisfaisant à la relation de commutation canonique : $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Les opérateurs satisfaisant à la relation de commutation déformée (2.4) sont notés par \hat{X} et \hat{P} .

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée¹²

Cette situation change si on introduit une incertitude minimale non nulle sur la position ($(\Delta X)_{\min} > 0$), car on a alors :

$$(\Delta X)_{|\psi\rangle} = \left\langle \psi \left| \left(\hat{X} - \langle \psi | \hat{X} | \psi \rangle \right)^2 \right| \psi \right\rangle \geq (\Delta X)_{\min}, \forall |\psi\rangle. \quad (2.9)$$

Ceci, implique l'inexistence d'états propres, physiques, de l'opérateur \hat{X} puisqu'un état propre de \hat{X} devrait avoir une incertitude nulle sur la position [1, 42].

Bien évidemment, ceci n'exclut pas l'existence d'états non physiques "vecteurs propres formels" de \hat{X} appartenant au domaine de \hat{X} seul. Comme nous allons le voir, de tels états existent, et la valeur moyenne de l'énergie dans ces vecteurs propres est infinie. Le point le plus important à mentionner, c'est qu'à la différence de la mécanique quantique habituelle, il n'est pas possible d'approcher ces vecteurs formels par une séquence d'états physiques où les incertitudes, sur la position, dans ces états tendent vers zéro. Ceci parce que, maintenant, tous les états physiques ont au moins une incertitude égale à l'incertitude minimale $(\Delta X)_{\min}$.

Techniquement, comme nous allons le voir, l'incertitude minimale sur la position se traduit par le fait que l'opérateur de position n'est plus essentiellement auto-adjoint ; il est seulement symétrique assurant que ses valeurs propres sont réelles [1].

Du moment qu'il n'y a plus d'états propres $|x\rangle$ dans la représentation de l'algèbre de Heisenberg, alors il n'est pas possible de trouver une représentation de l'espace de Hilbert par les fonctions d'onde $\langle x | \psi \rangle$. Toutefois, nous le verrons dans le paragraphe (2.3.3), les états à localisation maximale ($(\Delta X)_{\min}$) seront considérés comme des états physiques appropriés ; ils pourront alors être utilisés pour définir une "quasi-représentation des positions". Cependant, il est plus simple de travailler dans l'espace des impulsions, en choisissant une représentation adéquate satisfaisant à la relation de commutation déformée (2.4).

2.3.2 Représentation dans l'espace des impulsions

Considérons l'algèbre de Heisenberg associative générée par les opérateurs \hat{X} et \hat{P} , satisfaisant à la relation de commutation :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar (1 + \beta \hat{P}^2), \quad \beta > 0. \quad (2.10)$$

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée 13

La relation d'incertitude correspondante est :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta(\Delta P)^2 + \gamma), \quad (2.11)$$

$$\gamma = \beta \langle \hat{P} \rangle^2. \quad (2.12)$$

Pour un (ΔX) fixe, l'inégalité (2.11) est satisfaite dans l'intervalle : $[\Delta P_-, \Delta P_+]$, tel que :

$$\Delta P_{\pm} = \frac{\Delta X}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\gamma + 1}{\beta}} \quad (2.13)$$

La plus petite valeur de ΔX est celle qui correspond à une racine double, c.-à-d., $\Delta P_- = \Delta P_+$, soit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{(\Delta X)_0}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{\gamma + 1}{\beta} &= 0, \\ (\Delta X)_0 &= \hbar\sqrt{\beta}(\gamma + 1)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

La valeur minimale $(\Delta X)_{\min}$, correspond à $\gamma = 0$ ($\langle \hat{P} \rangle = 0$).

$$(\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}. \quad (2.15)$$

Dans l'espace des impulsions, où \hat{X} et \hat{P} agissent sur les fonctions $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle$, ces opérateurs peuvent être considérés comme des fonctions des anciens opérateurs \hat{x} et \hat{p} , satisfaisant la relation de commutation canonique : $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Alors on peut trouver une représentation de \hat{X} et \hat{P} qui vérifie la relation de commutation modifiée (2.10). La réalisation la plus simple s'écrit [1] :

$$\hat{X} = (1 + \beta\hat{p}^2)\hat{x}, \quad \hat{P} = \hat{p}, \quad (2.16)$$

où l'on a :

$$\begin{aligned} \hat{p}\psi(p) &= p\psi(p), \\ \hat{x}\psi(p) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\psi(p). \end{aligned}$$

Alors, \hat{X} et \hat{P} s'écrivent explicitement :

$$\hat{X} = i\hbar(1 + \beta p^2)\frac{\partial}{\partial p}, \quad \hat{P} = p. \quad (2.17)$$

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée¹⁴

Il est facile de s'assurer que cette réalisation vérifie bien la relation de commutation (2.10).

Il est important de souligner qu'il est possible de trouver une représentation plus générale en ajoutant un terme $\tilde{\gamma}f(p)$ à l'opérateur \hat{X} , $\tilde{\gamma}$ étant une constante et $f(p)$ est une fonction arbitraire de p . L'importance de cette représentation réside dans le fait que la valeur de $\tilde{\gamma}$ peut être choisie de façon à rendre \hat{X} auto-adjoint sans altérer les valeurs propres des observables physiques [23, 27].

Produit scalaire et relation de fermeture

La condition la plus importante que doit satisfaire la représentation (2.17), est la préservation de la symétrie des opérateurs \hat{X} et \hat{P} , pour que leurs valeurs propres soient réelles. Du moment que \hat{P} n'est pas modifié, alors sa symétrie est évidente; il n'en est pas le cas pour l'opérateur \hat{X} . En effet, la condition de symétrie s'écrit [1] :

$$(\langle \psi | \hat{X} | \varphi \rangle) = \langle \psi | (\hat{X} | \varphi \rangle). \quad (2.18)$$

Il est facile de voir que cette condition n'est pas satisfaite par rapport au produit scalaire ordinaire :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^*(p) \varphi(p).$$

Pour que l'opérateur \hat{X} soit symétrique, il faut modifier le produit scalaire de la façon suivante :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \varphi(p). \quad (2.19)$$

Le facteur $(1 + \beta p^2)^{-1}$ est nécessaire pour éliminer le facteur correspondant de l'opérateur \hat{X} . En effet :

$$\begin{aligned} \langle \psi | (\hat{X} | \varphi \rangle) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \left[i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p) \right] \\ &= i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \psi^*(p) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p). \end{aligned}$$

En intégrant par parties et en tenant compte que $\psi(p)$ et $\varphi(p)$ sont nulles à l'infini, on obtient :

$$\langle \psi | (\hat{X} | \varphi \rangle) = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \psi^*(p) \right) \varphi(p).$$

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée 15

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} (\langle \psi | \hat{X} | \varphi \rangle) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \left[i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \psi(p) \right]^* \varphi(p) \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{\partial}{\partial p} \psi^*(p) \right) \varphi(p). \end{aligned}$$

Ceci montre bien que \hat{X} est symétrique par rapport au produit scalaire (2.19).

La modification du produit scalaire implique une nouvelle relation de fermeture; celle-ci devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle \langle p| = 1. \quad (2.20)$$

En insérant cette dernière relation dans le produit scalaire de deux vecteurs propres de l'opérateur impulsion, on obtient :

$$\langle p'' | p' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \langle p'' | p \rangle \langle p | p' \rangle.$$

On en déduit, immédiatement, la nouvelle relation d'orthonormalisation :

$$\langle p | p' \rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - p'). \quad (2.21)$$

Fonctions propres de l'opérateur de position

Dans l'espace des impulsions, le problème des valeurs propres de l'opérateur \hat{X} s'écrit :

$$i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \psi_x(p) = x \psi_x(p), \quad (2.22)$$

où $\psi_x(p) = \langle p | x \rangle$, $|x\rangle$ étant un vecteur propre de \hat{X} ayant une localisation infinie ($(\Delta \hat{X})_{|x\rangle} = 0$), donc il ne représente pas un état physique car la relation d'incertitude généralisée ne permet pas l'existence de tel état. Les fonctions $\psi_x(p)$ seront considérées alors comme des "fonctions propres formelles" de l'opérateur de position.

La solution de l'équation (2.22) est donnée par la formule suivante :

$$\psi_x(p) = c \exp \left(-i \frac{x}{\hbar \sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta} p \right),$$

c est une constante de normalisation, elle se calcule en utilisant la relation (2.19); on obtient :

$$\begin{aligned} 1 &= cc^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} = \frac{cc^* \pi}{\sqrt{\beta}}, \\ c &= \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}}. \end{aligned}$$

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée 16

Alors, les fonctions propres normalisées de l'opérateur de position ont la forme :

$$\psi_x(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \exp\left(-i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta}p\right). \quad (2.23)$$

En utilisant les relations (2.21) et (2.23), on peut montrer que la nouvelle relation de fermeture satisfaite par les vecteurs formels $|x\rangle$ a la forme suivante :

$$\frac{1}{2\hbar\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle \langle x| = 1. \quad (2.24)$$

Calculons maintenant le produit scalaire entre deux états formels $|x\rangle$ et $|x'\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle x'|x\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi_{x'}^*(p) \psi_x(p) \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \exp\left[-i \frac{(x - x')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta}p\right] \\ &= \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(x - x')} \sin\left(\frac{x - x'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi\right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

La courbe représentant cette relation est donnée par la figure (2.2).

La relation (2.25) montre clairement que les états formels de l'opérateur de position ne sont pas, en général, orthogonaux. Ceci est dû au fait que \hat{X} n'est pas essentiellement auto-adjoint. Cependant, si :

$$\begin{aligned} \frac{x - x'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi &= n\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \\ \text{ou} \quad x - x' &= 2n\hbar\sqrt{\beta}. \end{aligned}$$

Dans ce cas on a :

$$\langle (x + 2n)\hbar\sqrt{\beta} | (x + 2n')\hbar\sqrt{\beta} \rangle = \delta_{n,n'}. \quad (2.26)$$

Les vecteurs propres $\{|(x + 2n)\hbar\sqrt{\beta}\rangle_{n=\pm 1, \pm 2, \dots}\}$, constituent, alors, un ensemble complet et orthogonal; et l'opérateur \hat{X} peut être diagonalisé dans cette base. Ce résultat pourrait être interprété par le fait qu'on a affaire à une physique sur réseaux dans l'espace des coordonnées [1]. Cependant, ceci n'est pas le cas car, comme il a été déjà souligné, les kets : $|(x + 2n)\hbar\sqrt{\beta}\rangle$ ne sont pas physiques.

Il est important de mentionner que tout comme en mécanique quantique ordinaire, la valeur moyenne de l'énergie dans les états formels $|x\rangle$ est infinie.

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée 17

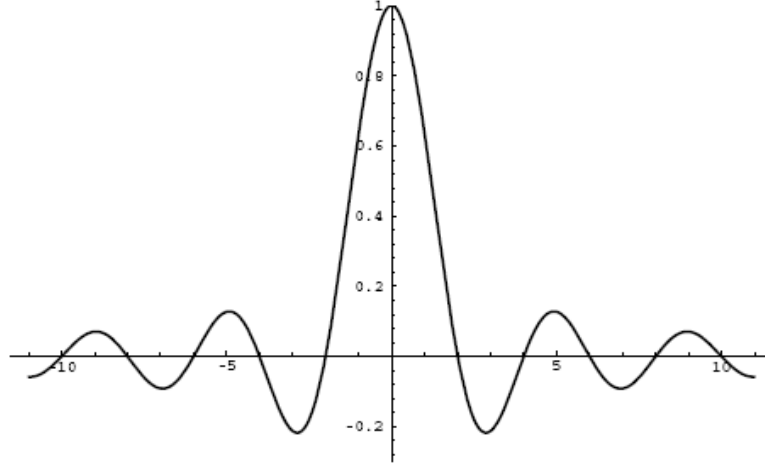


FIG. 2.2 – Le produit scalaire des états formels $\langle x | x' \rangle$ en fonction de $x - x'$ en unité de $(\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \langle x | \frac{p^2}{2m} | x \rangle &= \frac{\sqrt{\beta}}{2\pi m} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p^2}{1 + \beta p^2} \\ &= \frac{1}{2\pi m} \left[\frac{p}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\beta} \arctan(\sqrt{\beta}p) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \infty \end{aligned}$$

Ce résultat a une conséquence très importante, à savoir : tout état $|\psi\rangle$ pour lequel l'incertitude sur la position $(\Delta X)_{|x\rangle}$ se trouve à l'intérieur de l'intervalle interdit $0 \leq (\Delta X)_{|x\rangle} \leq (\Delta X)_{\min}$ ne peut pas avoir une énergie finie [1].

Ainsi, contrairement à la mécanique quantique ordinaire, les états formels $|x\rangle$, ayant une incertitude nulle sur la position, ne peuvent plus maintenant être approchés par une série d'états physiques où l'incertitude décroît vers zéro, car il y a maintenant une limite à la localisabilité.

Pour ceci, il est plus utile d'introduire ce que l'on appelle "les états à localisation maximale" et définir une "quasi-représentation de configuration".

2.3.3 Quasi-représentation de configuration : États à localisation maximale

États à localisation maximale

Les états à localisation maximale autour de la position x sont, par définition, des états $|\psi_x^{lm}\rangle$ satisfaisant les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \psi_x^{lm} | \hat{X} | \psi_x^{lm} \rangle &= x, \\ (\Delta X)_{|\psi_x^{lm}\rangle} &= (\Delta X)_{\min}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Rappelons que $(\Delta X)_{\min}$ représente la plus petite valeur de l'incertitude minimale $(\Delta X)_0$; cette valeur correspond³ à $\langle \hat{P} \rangle = 0$.

On sait, en mécanique quantique, que la relation d'incertitude peut être établie en exprimant que la norme d'un vecteur d'état est positive. En effet, à partir de la condition :

$$\left\| \left(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta P)^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right) | \psi \right\| \geq 0, \quad (2.28)$$

$\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle$ étant imaginaire, on obtient [93] :

$$\left\langle \psi \left| \left(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle \right)^2 - \left(\frac{|\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle|}{2(\Delta P)^2} \right)^2 (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle)^2 \right| \psi \right\rangle \geq 0,$$

qui implique immédiatement la relation d'incertitude :

$$\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle|. \quad (2.29)$$

Il est clair que pour qu'un état $|\psi\rangle$ obéisse à l'équation $\Delta X \cdot \Delta P = \frac{1}{2} |\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle|$, il faut qu'il satisfasse à la condition :

$$\left(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle + \frac{\langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle}{2(\Delta P)^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right) | \psi \rangle = 0. \quad (2.30)$$

³Voir l'équation (2.15)

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée¹⁹

L'état $|\psi\rangle$ se trouve dans la limite de la région des états permis (Fig. (1.2)). Dans l'espace des impulsions, cette dernière équation prend la forme suivante :

$$\left(i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} - \langle \hat{X} \rangle + i\hbar \frac{1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta \langle \hat{P} \rangle^2}{2(\Delta P)^2} (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle) \right) \psi(p) = 0.$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$\psi(p) = N \frac{\exp \left[\left(\frac{\langle \hat{X} \rangle}{i\hbar\sqrt{\beta}} - \frac{(1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta \langle \hat{P} \rangle^2) \langle \hat{P} \rangle}{2(\Delta P)^2 \sqrt{\beta}} \right) \arctan \sqrt{\beta} p \right]}{(1 + \beta p^2)^{\frac{1 + \beta(\Delta P)^2 + \beta \langle \hat{P} \rangle^2}{4\beta(\Delta P)^2}}}. \quad (2.31)$$

Les états à localisation maximale correspondent au cas $\langle \hat{P} \rangle = 0$ ou $\Delta X = (\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$. Ce qui implique⁴ $\Delta P = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$. Alors, en remplaçant dans l'équation (2.31), on obtient l'expression des états à localisation maximale :

$$\psi_x^{lm}(p) = N(1 + \beta p^2)^{-1/2} \exp \left(-i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \left(\sqrt{\beta} p \right) \right). \quad (2.32)$$

La constante de normalisation N se calcule en utilisant la formule (2.19) :

$$N = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}. \quad (2.33)$$

Les états (2.32) généralisent les ondes planes (les fonctions δ), dans l'espace des impulsions (des coordonnées), qui représentent des états à localisation maximale en mécanique quantique ordinaire.

Contrairement aux ondes planes, maintenant, les états $|\psi_x^{lm}\rangle$ sont des états physiques ; la valeur moyenne de l'énergie n'est plus infinie. En effet :

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_x^{lm} \left| \frac{\hat{P}^2}{2m} \right| \psi_x^{lm} \right\rangle &= \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2} \frac{p^2}{2m} \\ &= \frac{1}{2m\beta}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Du fait du caractère "flou" (fuzzy) de l'espace, les états à localisation maximale ne sont pas en général orthogonaux. Ainsi, en utilisant la définition du produit scalaire modifié (2.19) et la relation (2.32), on a :

⁴Cette valeur se déduit en utilisant l'équation (2.13).

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée²⁰

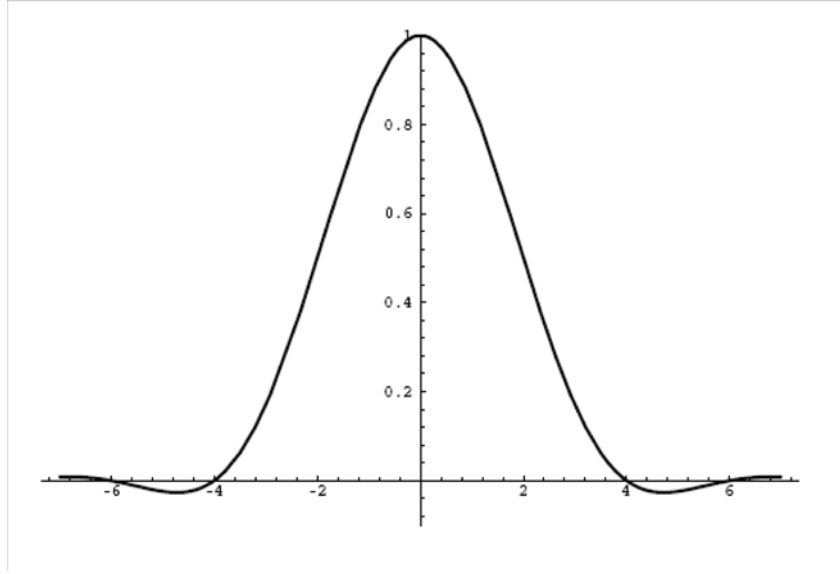


FIG. 2.3 – Le produit scalaire des états à localisation maximale $\langle \Psi_{x'}^{lm} | \Psi_x^{lm} \rangle$ en fonction de $x - x'$ en unité de $(\Delta X)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$.

$$\begin{aligned} \langle \psi_{x'}^{lm} | \psi_x^{lm} \rangle &= \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2} \exp \left[-i \frac{(x - x') \arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar\sqrt{\beta}} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x - x'}{2\hbar\sqrt{\beta}} - \left(\frac{x - x'}{2\hbar\sqrt{\beta}} \right)^3 \right]^{-1} \sin \left(\frac{x - x'}{2\hbar\sqrt{\beta}} \pi \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

La courbe représentant ce produit scalaire est donnée par la figure (2.3).

Quasi-représentation de configuration

Comme il a été déjà mentionné, l'introduction d'une incertitude minimale finie sur la position avait comme conséquence l'inexistence d'une base complète $\{|x\rangle\}$, états propres de l'opérateur de position \hat{X} . Néanmoins, on peut utiliser les états à localisation maximale $|\psi_x^{lm}\rangle$, pour projeter des états arbitraires $|\varphi\rangle$. Les projections : $\varphi(x) = \langle \psi_x^{lm} | \varphi \rangle$ seront considérées comme des fonctions d'onde dans une représentation que l'on appelle "quasi représentation de configuration". $|\varphi(x)|^2$ sera interprété comme étant l'amplitude de probabilité pour que la particule soit localisée avec une incertitude $(\Delta X)_{\min}$ autour du point x .

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée 21

Alors en utilisant les relations (2.20) et (2.32), on peut écrire :

$$\varphi(x) = \langle \psi_x^{lm} | \varphi \rangle = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\varphi(p)}{(1 + \beta p^2)^{3/2}} \exp \left[i \frac{x \arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar\sqrt{\beta}} \right]. \quad (2.36)$$

Cette relation représente la transformée de Fourier généralisée, permettant le passage de la représentation des impulsions à la quasi-représentation de configuration.

Les fonction d'onde $\varphi_{p_0}(x)$ ($\delta(p - p_0)$ dans l'espace des impulsions), états propres de l'opérateur \hat{P} , peuvent se calculer aisément à partir de la dernière relation :

$$\varphi_{p_0}(x) = \frac{\sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}}{(1 + \beta p_0^2)^{3/2}} \exp \left[i \frac{x \arctan(\sqrt{\beta}p_0)}{\hbar\sqrt{\beta}} \right], \quad (2.37)$$

où : $p_0 = \sqrt{2mE}$. La relation de dispersion modifiée qui correspond à cette "onde plane généralisée" est :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\arctan(\sqrt{\beta}p_0)}{\hbar\sqrt{\beta}}, \quad (2.38)$$

$$\lambda(E) = \frac{2\pi\hbar\sqrt{\beta}}{\arctan(\sqrt{2m\beta E})}. \quad (2.39)$$

La relation (2.38) coïncide exactement avec la relation (2.1), qui a été postulée pour introduire la longueur élémentaire.

La transformée de Fourier inverse peut être déduite comme suit : en multipliant les deux membres de (2.36) par :

$$\exp \left[-i \frac{x \arctan(\sqrt{\beta}p')}{\hbar\sqrt{\beta}} \right],$$

et en intégrant par rapport à la variable x , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) \exp \left[-i \frac{x \arctan(\sqrt{\beta}p')}{\hbar\sqrt{\beta}} \right] \\ = & \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\varphi(p)}{(1 + \beta p^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left[i x \frac{\arctan(\sqrt{\beta}p) - \arctan(\sqrt{\beta}p')}{\hbar\sqrt{\beta}} \right] \\ = & \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp\varphi(p)}{(1 + \beta p^2)^{3/2}} 2\pi \delta \left[\frac{\arctan(\sqrt{\beta}p) - \arctan(\sqrt{\beta}p')}{\hbar\sqrt{\beta}} \right]. \end{aligned}$$

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée 22

En utilisant la relation :

$$\delta [f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{f'(x_i)},$$

x_i étant une racine de $f(x)$, on obtient ainsi le résultat suivant :

$$\varphi(p) = \frac{1}{\hbar\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx (1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} \varphi(x) \exp \left[-i \frac{x \arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar\sqrt{\beta}} \right]. \quad (2.40)$$

Il est à noter que les états à localisation maximale, ne satisfont plus à une relation de fermeture comme celle des états $|x\rangle$ en mécanique quantique ordinaire. En effet, en utilisant les relations (2.32) et (2.40), on trouve la relation modifiée suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi_x^{lm}\rangle \langle \psi_x^{lm}| = 4\hbar\sqrt{\beta} (1 + \beta p^2)^{-1}. \quad (2.41)$$

À partir de (2.40), on déduit immédiatement la représentation de l'opérateur impulsion dans cet espace de configuration :

$$\hat{P}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan \left(-i\hbar\sqrt{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x). \quad (2.42)$$

Quant à l'action de l'opérateur position sur les fonctions $\psi(x)$, elle peut être déduite en utilisant les équations (2.17) et (2.40) :

$$\hat{X}\psi(x) = \left[x + \hbar\sqrt{\beta} \tan \left(-i\hbar\sqrt{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \psi(x). \quad (2.43)$$

2.4 Généralisation à plusieurs dimensions

Dans cette section nous allons étendre le formalisme étudié au cas à plusieurs dimensions ; le principe étant le même que dans le cas à une dimension, nous allons présenter les outils nécessaires sans démonstration.

2.4.1 Relation d'incertitude généralisée à N dimensions

Une généralisation naturelle de la relation de commutation (2.10), préservant la symétrie rotationnelle, s'écrit [1] :

$$\begin{aligned} [\hat{X}_i, \hat{P}_j] &= i\hbar\delta_{ij} (1 + \beta\hat{P}^2), \\ \hat{P}^2 &= \sum_{i=1}^N \hat{P}_i^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée23

Si on impose :

$$\left[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j \right] = 0, \quad (2.45)$$

l'identité de Jacobi donne :

$$\left[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j \right] = \frac{2\beta i\hbar}{1 + \beta \widehat{P}^2} \left(\widehat{P}_i \widehat{X}_j - \widehat{P}_j \widehat{X}_i \right), \quad (2.46)$$

ce qui mène naturellement à une algèbre de Heisenberg non commutative.

La relation d'incertitude impliquée par (2.44) s'écrit :

$$(\Delta X_i)(\Delta P_j) \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \left(1 + \beta \sum_{k=1}^N [(\Delta P_k)^2 + \langle p_k \rangle^2] \right), \quad (2.47)$$

N étant la dimension de l'espace. Cette relation d'incertitude implique des incertitudes minimales non nulles sur toutes les composantes du vecteur position. On peut déduire facilement, comme dans le cas à une dimension :

$$(\Delta X_i)_{\min} = \hbar \sqrt{N\beta}, \quad \forall i. \quad (2.48)$$

Dans l'espace des impulsions, la représentation la plus simple, satisfaisant à la relation (2.44) a la forme [1] :

$$\widehat{X}_i = i\hbar (1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad \widehat{P}_i = p_i. \quad (2.49)$$

Les opérateurs \widehat{X}_i et \widehat{P}_j sont symétriques par rapport au produit scalaire :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N p}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \varphi(p). \quad (2.50)$$

Comme dans le cas à une dimension, contrairement aux opérateurs d'impulsion qui sont toujours essentiellement auto-adjoints, les opérateurs de position sont simplement symétriques, et ne possèdent pas d'états propres physiques. Quoique les états à localisation maximale puissent toujours être utilisés pour définir une "quasi-représentation de configuration", l'analyse de celle-ci est compliquée [1] et n'a pas été étudiée dans la littérature.

Il est important de noter, que la relation de commutation (2.44) a été généralisée pour avoir non seulement une incertitude minimale non nulle sur la position, mais aussi, pour assurer que les opérateurs \widehat{X}_i et \widehat{P}_i soient auto-adjoints [22]. La relation de commutation la plus générale s'écrit [22, 23, 17, 21] :

$$\left[\widehat{X}_i, \widehat{P}_j \right] = i\hbar \left[\delta_{ij} \left(1 + \beta \widehat{P}^2 \right) + \beta' \widehat{P}_i \widehat{P}_j \right], \quad (\beta, \beta') > 0. \quad (2.51)$$

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée24

En supposant :

$$\left[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j \right] = 0, \quad (2.52)$$

alors, l'identité de Jacobi implique l'algèbre "non commutative" suivante :

$$\left[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j \right] = i\hbar \frac{(2\beta - \beta') + \beta(2\beta + \beta')\widehat{P}^2}{1 + \beta\widehat{P}^2} \left(\widehat{P}_i \widehat{X}_j - \widehat{P}_j \widehat{X}_i \right). \quad (2.53)$$

En supposant que ΔP_j ne dépend pas de j , on peut déduire facilement la relation d'incertitude correspondant à la relation de commutation (2.51) :

$$\begin{aligned} (\Delta X_i) (\Delta P_j) &\geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij} \left[1 + (N\beta + \beta') (\Delta P_j)^2 + \gamma \right], \\ \gamma &= \beta \sum_{k=1}^N \langle P_k \rangle^2 + \beta' \langle P_i \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.54)$$

La minimisation de cette dernière relation par rapport à ΔP_j donne :

$$(\Delta X_i)_{\min} = \hbar \sqrt{(N\beta + \beta')}, \quad \forall i \quad (2.55)$$

Dans la littérature, plusieurs représentations des opérateurs \widehat{X}_i et \widehat{P}_j ont été utilisées. Le choix de la représentation se fait toujours en supposant que \widehat{X}_i et \widehat{P}_j comme des fonctions des opérateurs \widehat{x}_i et \widehat{p}_j satisfaisant les relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire.

La première représentation qui a été utilisée est celle de la référence [22], à savoir :

$$\widehat{X}_i = \widehat{x}_i + \beta \frac{\widehat{p}^2 \widehat{x}_i + \widehat{x}_i \widehat{p}^2}{2} + \beta' \frac{\widehat{p}_i \widehat{p}_j \widehat{x}_j + \widehat{x}_j \widehat{p}_i \widehat{p}_j}{2}, \quad \widehat{P}_i = p_i, \quad (2.56)$$

où dans l'espace des impulsions :

$$\widehat{x}_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad \widehat{p}_i = p_i.$$

La forme explicite de (2.56), utilisée pour la première fois dans la référence [22], s'écrit :

$$\widehat{X}_i = i\hbar \left[(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \left(\beta + \frac{N+1}{2} \beta' \right) p_i \right], \quad \widehat{P}_i = p_i, \quad (2.57)$$

Une autre forme similaire à (2.57) a été donnée dans les références [23, 38], en introduisant un paramètre arbitraire $\widetilde{\gamma}$:

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée 25

$$\widehat{X}_i = i\hbar \left[(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \widetilde{\gamma} p_i \right], \quad \widehat{P}_i = p_i, \quad (2.58)$$

soit :

$$\widehat{X}_i = (1 + \beta \widehat{p}^2) \widehat{x}_i + \beta' \widehat{p}_i \widehat{p}_j \widehat{x}_j + \widetilde{\gamma} \widehat{p}_i, \quad \widehat{P}_i = \widehat{p}_i. \quad (2.59)$$

Le paramètre positif $\widetilde{\gamma}$ n'affecte ni les relations de commutation ni les observables physiques ; son choix assure l'hermiticité de l'opérateur de position par rapport au produit scalaire modifié suivant [23, 21] :

$$\begin{aligned} \langle \psi | \varphi \rangle &= \int \frac{d^N p}{[1 + (\beta + \beta') p^2]^{1-\alpha}} \psi^*(p) \varphi(p), \\ \alpha &= \frac{\widetilde{\gamma} - \beta' \left(\frac{N-1}{2} \right)}{\beta + \beta'}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Il est à noter que la représentation (2.57) correspond à $\alpha = 1$. Il a été montré [46] que l'introduction du paramètre $\widetilde{\gamma}$ dans le traitement des problèmes de la mécanique quantique est une généralité "apparente", car on peut toujours trouver une transformation sur la fonction d'onde pour éliminer ce paramètre⁵. Par exemple, la représentation (2.58) avec un $\widetilde{\gamma}$ arbitraire est équivalente à la représentation (2.57) en effectuant le changement de fonction :

$$\psi(p) = \left[1 + (\beta + \beta') p^2 \right]^{\frac{1-\alpha}{2}} \widetilde{\psi}(p).$$

Étant donné l'équivalence de la famille des représentations (2.58), la valeur $\widetilde{\gamma} = 0$ serait le choix le plus approprié pour simplifier les calculs.

2.4.2 Quasi-représentation de position

La résolution de l'équation de Schrödinger en utilisant la présentation (2.58), est rarement simple, en particulier lorsque le potentiel dépend des opérateurs de position d'une manière non triviale comme dans le potentiel de Coulomb, proportionnel à l'inverse de la racine carrée de l'opérateur $\widehat{X}_1^2 + \widehat{X}_2^2 + \widehat{X}_3^2$. Pour cette raison, plusieurs auteurs ont recouru à la quasi-représentation de position, où plusieurs expressions des opérateurs \widehat{X}_i et \widehat{P}_j satisfaisant à la relation de commutation déformée (2.51) ont été trouvées.

⁵Voir par exemple, le traitement de l'oscillateur harmonique [23].

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée 26

Dans la référence [17], l'auteur considère le cas $\beta' = 2\beta$ dans lequel les commutateurs entre les opérateurs de position (2.53) s'annulent au premier ordre de β . Ce cas présente un intérêt particulier puisque, en plus de l'invariance rotationnelle, le formalisme devient invariant par rapport aux translations : $X_i \rightarrow X_i + \alpha_i$ [22]. Pour ce cas particulier, les opérateurs \hat{X}_i et \hat{P}_i satisfaisant au premier ordre en β à l'algèbre de Heisenberg déformée (2.51) sont représentés par :

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i, \quad \hat{P}_i = \hat{p}_i(1 + \beta\hat{p}^2), \quad (2.61)$$

avec :

$$\hat{x}_i = x_i, \quad \hat{p}_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Cette représentation est très simple, et convient surtout lors de l'utilisation de la théorie des perturbations.

Dans la référence [19], une représentation généralisant (2.61) au cas $\beta' \neq 2\beta$ a été donnée, elle a la forme suivante :

$$\hat{X}_i = \hat{x}_i + \frac{2\beta - \beta'}{4} (\hat{p}^2 \hat{x}_i + \hat{x}_i \hat{p}^2), \quad \hat{P}_i = \hat{p}_i \left(1 + \frac{\beta'}{2} \hat{p}^2\right). \quad (2.62)$$

Cette représentation est valable seulement au premier ordre de β et β' . Elle se réduit dans le cas $\beta' = 2\beta$ à la représentation (2.61).

Plus généralement, on peut introduire un paramètre δ et considérer la représentation suivante :

$$\begin{aligned} \hat{X}_i &= \hat{x}_i + (\beta - \delta) \frac{\hat{p}^2 \hat{x}_i + \hat{x}_i \hat{p}^2}{2} + (\beta' - 2\delta) \frac{\hat{p}_i \hat{p}_j \hat{x}_j + \hat{x}_j \hat{p}_i \hat{p}_j}{2}, \\ \hat{P}_i &= \hat{p}_i (1 + \delta \hat{p}^2). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Cette famille de représentations, valables au premier ordre de β et β' , englobe toutes les représentations présentées plus-haut. En effet, elle se réduit à :

- la représentation (2.56) pour, $\delta = 0$;
- la représentation (2.62) pour, $\delta = \beta'/2$; et
- la représentation (2.61), pour $\delta = \beta = \beta'/2$.

Un examen de ces représentations montre que le problème des valeurs propres ne dépend pas du choix du paramètre δ [46].

2.4.3 Représentation du groupe de rotation

Les relations de commutation (2.51), (2.52) et (2.53) ne brisent pas la symétrie par rapport aux rotations. En effet, les générateurs de rotations peuvent encore s'exprimer en fonction des opérateurs de position et d'impulsion comme :

2. Mécanique quantique avec une relation d'incertitude généralisée 27

$$\widehat{L}_{ij} = \frac{\widehat{X}_i \widehat{P}_j - \widehat{X}_j \widehat{P}_i}{1 + \beta \widehat{P}^2}. \quad (2.64)$$

Ainsi, ils satisfont les relations de commutation :

$$\begin{aligned} [\widehat{X}_i, \widehat{L}_{jk}] &= i\hbar (\delta_{ik} \widehat{X}_j - \delta_{ij} \widehat{X}_k), \\ [\widehat{P}_i, \widehat{L}_{jk}] &= i\hbar (\delta_{ik} \widehat{P}_j - \delta_{ij} \widehat{P}_k), \\ [\widehat{L}_{ij}, \widehat{L}_{kl}] &= i\hbar (\delta_{ik} \widehat{L}_{jl} + \delta_{jl} \widehat{L}_{ik} - \delta_{il} \widehat{L}_{jk} - \delta_{jk} \widehat{L}_{il}). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Dans le cas particulier à trois dimensions, l'opérateur de moment angulaire modifié s'écrit :

$$\widehat{L}_i = \frac{1}{1 + \beta \widehat{P}^2} \varepsilon_{ijk} \widehat{X}_j \widehat{P}_k. \quad (2.66)$$

Les relations de commutation habituelles entre les opérateurs de position, d'impulsion et de moment angulaire restent valables :

$$\begin{aligned} [\widehat{X}_i, \widehat{L}_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} \widehat{X}_k, \\ [\widehat{P}_i, \widehat{L}_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} \widehat{P}_k, \\ [\widehat{L}_i, \widehat{L}_j] &= i\hbar \varepsilon_{ijk} \widehat{L}_k. \end{aligned} \quad (2.67)$$

La relation de commutation (2.53) peut s'écrire comme :

$$[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j] = -i\hbar (2\beta - \beta' + \beta(2\beta + \beta') \widehat{P}^2) \varepsilon_{ijk} \widehat{L}_k.$$

Chapitre 3

Systemes simples avec une longueur élémentaire

Comme il a été mentionné dans l'introduction générale, plusieurs problèmes physiques ont été abordés dans le formalisme de cette mécanique quantique avec une longueur élémentaire. Le premier système simple qui a été considéré est l'oscillateur harmonique. Les corrections au premier ordre du spectre d'énergie ont été obtenues par Kempf dans l'espace des impulsions [1, 22], et par Brau [17] dans sa propre quasi-représentation de configuration. Plus tard, Chang et ses collaborateurs [23] ont résolu analytiquement l'équation de Schrödinger déformée en considérant une dimension arbitraire dans l'espace des impulsions. Ils ont obtenu ainsi le spectre d'énergie exact et les fonctions propres correspondantes en fonction des Polynômes de Jacobi. L'autre problème fondamental traité dans ce formalisme est le potentiel de Coulomb, qui a constitué le sujet de plusieurs études [17, 18, 19, 20, 21]¹. C'est ce problème qui va être présenté dans ce chapitre; mais avant cela, nous allons commencer par un potentiel simple à une dimension.

3.1 Potentiel delta de Dirac à une dimension

Pour voir comment on peut incorporer une longueur élémentaire dans le traitement des problèmes physiques, il est intéressant d'étudier un potentiel simple à une dimension et d'illustrer comment l'équation de Schrödinger peut être écrite

¹Concernant les autres problèmes traités dans ce formalisme, voir le premier chapitre.

et résolue.

Considérons le potentiel delta de Dirac :

$$V(x) = -\kappa\delta(x). \quad (3.1)$$

L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\left(\frac{\widehat{P}^2}{2m} + V(\widehat{X}) \right) |\psi\rangle = E |\psi\rangle. \quad (3.2)$$

Dans l'espace des impulsions, l'équation (3.2) prend la forme :

$$\left\langle p \left| \frac{\widehat{P}^2}{2m} \right| \psi \right\rangle + \left\langle p \left| V(\widehat{X}) \right| \psi \right\rangle = E \langle p | \psi \rangle.$$

L'action de \widehat{X} et \widehat{P} est définie par les relations (2.17). En introduisant la relation de fermeture (2.20), on obtient l'équation suivante :

$$\left(\frac{p^2}{2m} - E \right) \psi(p) + \int_{-\infty}^{+\infty} dp' \widetilde{V}(p, p') \frac{\psi(p')}{(1 + \beta p'^2)} = 0, \quad (3.3)$$

$\widetilde{V}(p, p')$ est la transformée de Fourier généralisée, elle s'exprime en utilisant les relations (2.23) et (2.24) comme :

$$\widetilde{V}(p, p') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dx V(x) \exp \left(-i \frac{x}{\hbar\sqrt{\beta}} \left[\arctan \sqrt{\beta}p - \arctan \sqrt{\beta}p' \right] \right). \quad (3.4)$$

La transformée de Fourier du potentiel (3.1), est alors :

$$\widetilde{V}(p, p') = -\frac{\kappa}{2\pi\hbar}, \quad (3.5)$$

et l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\left(\frac{p^2}{2m} - E \right) \psi(p) - \frac{\kappa}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp' \frac{\psi(p')}{(1 + \beta p'^2)} = 0.$$

Elle peut être écrite dans la forme intégrale suivante :

$$\psi(p) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dp' K(p, p') \psi(p'), \quad (3.6)$$

avec $\lambda = 1$ et le noyau :

$$K(p, p') = \frac{\frac{\kappa}{2\pi\hbar}}{\left(\frac{p^2}{2m} - E\right)} \frac{1}{(1 + \beta p'^2)}.$$

Dans ce cas, le noyau $K(p, p')$ est séparable. Posant :

$$K(p, p') = f(p)g(p'),$$

où :

$$f(p) = \frac{\frac{\kappa}{2\pi\hbar}}{\left(\frac{p^2}{2m} - E\right)} \quad \text{et} \quad g(p') = \frac{1}{(1 + \beta p'^2)},$$

la fonction d'onde est donnée par :

$$\psi(p) = cf(p) \quad \text{où} \quad c = \int_{-\infty}^{+\infty} dp' g(p') \psi(p'). \quad (3.7)$$

En utilisant cette dernière expression et l'équation (3.6), on obtient :

$$\psi(p) \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} dp' f(p')g(p')\right) = 0.$$

La solution de cette équation est évidente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp' f(p')g(p') = 1. \quad (3.8)$$

Cette équation représente la condition spectrale qui va nous servir pour extraire les niveaux d'énergie possibles. Quant à la fonction d'onde, elle se calcule à partir de l'équation (3.7) avec la condition de normalisation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} |\psi(p)|^2 = 1,$$

qui donne la valeur de la constante c :

$$c^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} f(p)^2 \right)^{-1}.$$

En utilisant les expressions des fonctions $f(p)$ et $g(p)$, les niveaux d'énergie seront calculés à partir de la condition suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{\left(p^2 + \frac{1}{\beta}\right) (p^2 + p_0^2)} = \frac{\beta\pi\hbar}{m\kappa}, \quad p_0^2 = -2mE.$$

Cette intégrale peut se calculer en utilisant le résultat suivant [52] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + b^2)(p^2 + p_0^2)} = \frac{\pi}{b^2 p_0 + b p_0^2},$$

si $\operatorname{Re}[b] > 0, \operatorname{Re}[p_0] > 0.$

On trouve ainsi l'équation :

$$\sqrt{\beta} p_0^2 + p_0 - \frac{m\kappa}{\hbar} = 0.$$

En utilisant la solution $p_0 > 0$, on aboutit à l'expression suivante de l'énergie :

$$E = -\frac{1}{8m\beta} \left(-1 + \left[1 + \frac{4m\kappa}{\hbar} \sqrt{\beta} \right]^{\frac{1}{2}} \right)^2.$$

On peut développer $(1 + \frac{4m\kappa\sqrt{\beta}}{\hbar})^{\frac{1}{2}}$ en série de β . Ainsi, on trouve à l'ordre 1 :

$$E = -\frac{m\kappa^2}{2\hbar^2} \left(1 - 2\frac{m\kappa}{\hbar} \sqrt{\beta} + 5\frac{m^2\kappa^2}{\hbar^2} \beta \right). \quad (3.9)$$

À la limite $\beta = 0$, on trouve le résultat fini de la mécanique quantique ordinaire :

$$E = -\frac{m\kappa^2}{2\hbar^2}. \quad (3.10)$$

Le deuxième et le troisième terme dans l'équation (3.9) sont des corrections apportées par l'existence d'une longueur élémentaire ou une incertitude minimale non nulle sur la position.

Donc l'étude du potentiel de Dirac à une dimension, avec une incertitude minimale non nulle sur la position, montre qu'on a un seul niveau d'énergie qui tend à la limite $\beta \rightarrow 0$ vers le niveau de la mécanique quantique habituelle. L'effet de la longueur élémentaire $\hbar\sqrt{\beta}$ se limite à une correction qui dépend, au premier et au deuxième ordre, de $\sqrt{\beta}$ et de β , respectivement. Ces corrections sont similaires à celles du potentiel de Coulomb à une dimension ($1/x$), traité dans le même formalisme [30, 48].

3.2 Atome d'hydrogène : traitement perturbatif

Le traitement du potentiel de Coulomb à trois dimensions, ou atome d'hydrogène, par le formalisme développé dans le deuxième chapitre, présente un intérêt

particulier. En effet, cette longueur élémentaire pourrait être considérée comme étant associée à la dimension de l'électron ; par conséquent cette application servirait à comparer l'échelle de la dimension de l'électron et l'échelle des effets se manifestant sur le spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène [17]. Ainsi, la haute précision des données expérimentales de la transition $1S - 2S$, par exemple, peut être exploitée pour estimer une limite supérieure de la dimension finie de l'électron.

L'atome d'hydrogène a été étudié par Brau [17] dans la quasi-représentation de configuration en se servant de la technique des perturbations ; comme représentation des opérateurs de position et d'impulsion satisfaisant les relations de commutation déformées, l'auteur fait un choix simple [Eq. (2.61)] valable au premier ordre en β , pour $\beta' = 2\beta$, et calcule les corrections du spectre d'énergie au premier ordre en β . Par la suite, Akhoury [21] a considéré le même problème dans l'espace des impulsions en utilisant la représentation (2.58) pour les opérateurs de position et d'impulsion. L'auteur effectue des transformations sur la fonction d'onde et obtient une solution à l'équation de Schrödinger déformée ; en imposant la condition d'uniformité sur cette solution, il aboutit à un spectre d'énergie complètement différent de celui obtenu par Brau. Le problème de l'atome d'hydrogène a été également étudié par Benczik et ses collaborateurs [18] selon deux approches : numérique, dans l'espace des impulsions, et perturbative dans une quasi-représentation de configuration, où les opérateurs de position et d'impulsion ont été représentés par (2.59)². Les résultats qu'ils obtiennent ne diffèrent de ceux de Brau que pour $l = 0$: dans le cas $l = 0$, les résultats sont inconsistants. Stetsko et Tkachuk [19, 20] ont utilisé la représentation (2.62) et proposé une autre méthode perturbative plus adaptée à ce problème. Ils réussissent, sans rencontrer aucune divergence, à calculer les corrections du spectre d'énergie au premier ordre des paramètres de déformation β et β' . Leurs résultats reproduisent ceux de Brau dans le cas $\beta' = 2\beta$, même dans le cas $l = 0$.

Nous allons illustrer comment on peut traiter perturbativement le problème de l'atome d'hydrogène dans le formalisme de la mécanique quantique avec un principe d'incertitude généralisé, et montrer comment calculer les corrections au premier ordre du spectre d'énergie dues à l'introduction d'une longueur élémentaire. Nous allons suivre l'approche de la référence [17].

²Cette représentation, valable normalement dans l'espace des impulsions, est utilisée avec : $\hat{x}_i = x_i$ et $\hat{p}_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$; alors, les opérateurs \hat{X}_i et \hat{P}_i ne sont pas forcément symétriques.

Considérons les relations de commutation (2.51), (2.52) et (2.53) dans le cas : $\beta' = 2\beta$, qui laisse les relations de commutation entre les \widehat{X}_i , inchangées. Les relations de commutation s'écrivent dans ce cas :

$$[\widehat{X}_i, \widehat{P}_j] = i\hbar [\delta_{ij} (1 + \beta\widehat{P}^2) + 2\beta\widehat{P}_i\widehat{P}_j], \beta > 0 \quad (3.11)$$

$$[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j] = [\widehat{P}_i, \widehat{P}_j] = 0 \quad (3.12)$$

En travaillant dans la quasi-représentation de configuration, avec la représentation (2.61), à savoir :

$$\begin{aligned} \widehat{X}_i\psi(\vec{r}) &= \widehat{x}_i\psi(\vec{r}) \\ \widehat{P}_i\psi(\vec{r}) &= \widehat{p}_i(1 + \beta\widehat{p}^2)\psi(\vec{r}), \end{aligned} \quad (3.13)$$

avec :

$$\widehat{x}_i = x_i, \quad \widehat{p}_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

La représentation (3.13) satisfait, au premier ordre en β , aux relations de commutation (3.11) et (3.12).

Utilisons cette représentation dans l'équation de Schrödinger :

$$\left(\frac{\widehat{P}^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}).$$

En négligeant les termes à l'ordre β^2 , on obtient :

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{\beta}{m} \vec{p}^4 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (3.14)$$

Cette équation représente l'équation de Schrödinger ordinaire avec un terme additionnel proportionnel à \vec{p}^4 . On peut considérer ce terme supplémentaire comme une perturbation et estimer son effet sur le spectre d'énergie au premier ordre de la théorie des perturbations. En effet, le spectre d'énergie peut s'écrire comme :

$$E_k = E_k^0 + \Delta E_k, \quad (3.15)$$

où k dénote l'ensemble des nombres quantiques définissant un niveau d'énergie, et ΔE_k est la correction due à l'introduction de la longueur élémentaire.

La théorie des perturbations donne :

$$\Delta E_k = \frac{\beta}{m} \left\langle \psi_k^0(\vec{r}) \left| \vec{p}^4 \right| \psi_k^0(\vec{r}) \right\rangle \equiv \frac{\beta}{m} \left\langle k \left| \vec{p}^4 \right| k \right\rangle. \quad (3.16)$$

Les fonctions $\{\psi_k^0\}$ sont les solutions de l'équation de Schrödinger ordinaire, c'est-à-dire l'équation (3.14) avec $\beta = 0$.

L'équation (3.14) permet d'écrire dans le cas $\beta = 0$:

$$\vec{p}^2 |nlm\rangle = 2m [E_{n,l}^0 - V(r)] |nlm\rangle .$$

Alors on a :

$$\langle nlm | \vec{p}^4 | n'l'm'\rangle = 4m^2 \langle nlm | [E_{n,l}^0 - V(r)] [E_{n',l'}^0 - V(r)] | n'l'm'\rangle .$$

Ce qui permet de déduire immédiatement l'expression de ΔE_k :

$$\Delta E_{n,l} = 4\beta m \left[(E_{n,l}^0)^2 \delta_{n,n'} - (E_{n,l}^0 + E_{n',l'}^0) \langle nlm | V(r) | n'l'm'\rangle + \langle nlm | V^2(r) | n'l'm'\rangle \right] \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} . \quad (3.17)$$

Dans le cas étudié ici, la matrice (3.17) est diagonale et la correction des niveaux d'énergie s'écrit :

$$\Delta E_{n,l} = 4\beta m \left[(E_{n,l}^0)^2 - 2E_{n,l}^0 \langle nlm | V(r) | nlm\rangle + \langle nlm | V^2(r) | nlm\rangle \right] . \quad (3.18)$$

Cette dernière relation peut être, encore, simplifiée en utilisant le théorème du viriel pour des potentiels centraux, $V(r) \sim r^p$. Ainsi on a :

$$\langle nlm | V(r) | nlm\rangle = \frac{2}{p+2} E_{n,l}^0 .$$

La relation (3.18) s'écrit alors :

$$\Delta E_{n,l} = 4\beta m \left[(E_{n,l}^0)^2 \left(\frac{p-2}{p+2} \right) + \langle nlm | V^2(r) | nlm\rangle \right] . \quad (3.19)$$

Cette formule va nous servir à trouver la correction au spectre d'énergie due à la longueur élémentaire, introduite comme une incertitude supplémentaire sur la position. Il est important de mentionner que la relation (3.19) est générale ; elle peut être utilisée pour le traitement de n'importe quel potentiel central tel que l'oscillateur harmonique $V(r) \sim r^2$, qui a été considéré dans [17] pour valider cette méthode, en comparant les résultats trouvés avec ceux qui existaient déjà dans la littérature.

Pour l'atome d'hydrogène, les fonctions non perturbées sont données par [66] :

$$\psi_{n,l,m}^0(\vec{r}) = (2\gamma_n)^{3/2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}} (2\gamma_n r)^l \exp(-\gamma_n r) L_{n-l-1}^{2l+1}(2\gamma_n r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

où $\gamma_n = m\alpha/n$, α étant la constante de structure fine, n est le nombre quantique principal ($n \geq 1$), l varie entre 0 et $n-1$ et $-l \leq m \leq l$. Les fonctions $L_n^\alpha(x)$ sont les polynômes de Laguerre.

En faisant le changement de variable $x = 2\gamma_n r$, la correction $\Delta E_{n,l}$, donnée par la relation (3.19), s'écrit sous la forme suivante :

$$\Delta E_{n,l} = -12\beta m (E_{n,l}^0)^2 + 8\beta m \gamma_n^2 \alpha^2 \frac{(n-l-1)!}{n(n+l)!} \int_0^\infty x^{2l} \exp(-x) [L_{n-l-1}^{2l+1}(x)]^2 dx. \quad (3.21)$$

L'évaluation de cette intégrale est simple en utilisant les propriétés des polynômes de Laguerre suivantes [52] :

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp(-x) L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \delta_{n,m},$$

$$\sum_{m=0}^n L_m^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x),$$

et la formule de sommation :

$$\sum_{p=0}^b \frac{(p+a)!}{p!} = \frac{(a+b+1)!}{(1+a)b!}.$$

On trouve alors le résultat suivant :

$$\Delta E_{n,l} = \beta m^3 \alpha^4 \left[\frac{4n - 3(l+1/2)}{n^4(l+1/2)} \right].$$

En utilisant la relation (2.55), définissant la longueur élémentaire, $N = 3$ et

$\beta' = 2\beta$, on a :

$$(\Delta r)_{\min} = \sqrt{5\beta}.$$

Le spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène, au premier ordre du paramètre de déformation β , s'écrit :

$$E_{n,l} = -\frac{m\alpha^2}{2n^2} + (\Delta r)_{\min}^2 \frac{m^3 \alpha^4}{5} \left[\frac{4n - 3(l+1/2)}{n^4(l+1/2)} \right]. \quad (3.22)$$

Cette correction est toujours positive; sa valeur est maximale dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène ($n = 1$) et pour chaque n , la contribution maximale est obtenue pour $l = 0$.

L'effet remarquable de l'introduction de la "dimension" de l'électron associée à $(\Delta r)_{\min}$ est la disparition de la dégénérescence accidentelle, présente dans le cas non déformé. Cette dégénérescence est due au fait que, pour une valeur donnée de n , on a le même niveau d'énergie pour toutes les $(n - 1)$ valeurs de l , correspondant à des fonctions d'onde différentes [53]. Puisque le terme supplémentaire de l'énergie dans la relation (3.22) dépend maintenant de l , alors cette dégénérescence est automatiquement levée. Cependant, la correction ne dépend pas du nombre quantique m , donc la dégénérescence essentielle est toujours présente : à chaque niveau d'énergie, il y a $(2l + 1)$ [nombre de valeurs de m] fonctions d'onde qui lui correspondent. Il est important de souligner que cet effet est observé, aussi, dans le cas de l'oscillateur harmonique [17, 23] et même dans le problème relativiste appelé oscillateur de Dirac [28].

Comme il a été déjà mentionné, la formule (3.22) peut être utilisée pour estimer la dimension de l'électron en supposant que la correction due à cette déformation représentant la nature non ponctuelle de l'électron n'est pas, encore, détectée dans les expériences actuelles. En effet, la précision de mesure de la fréquence de radiation émise lors de la transition 1S–2S est de l'ordre de 1 kHz [54]. Ainsi, la différence entre ces deux niveaux d'énergie est déterminée avec une précision de l'ordre de 10^{-12} eV. En se servant alors du résultat obtenu relation (3.22) et en écrivant :

$$\frac{E_{2S} - E_{1S}}{E_{1S}} \leq 10^{-12},$$

on trouve $(\Delta r)_{\min} \leq 0.01$ fm, ce qui veut dire que la dimension de l'électron doit être inférieure à cette valeur.

Il a été souligné dans [18], qu'une meilleure estimation de la longueur élémentaire pourrait être obtenue en incluant la correction due à la longueur minimale dans le déplacement de Lamb (Lamb shift). Pour rappel, par convention, les niveaux d'énergie sont composés de deux parties. La contribution principale est donnée par la solution de l'équation de Dirac avec en même temps la correction au premier ordre du recul de noyau. Toutes les autres corrections, dues à QED, rayon de charge de proton,...constituent le déplacement de Lamb correspondant à ce niveau.

Aujourd'hui, la valeur expérimentale du déplacement de Lamb pour l'état 1S, $L_{1s}^{\text{exp}} = 8172.83(22)$ MHz [55], est plus grande que la valeur prédite théoriquement, à savoir [56] : $L_{1s}^{\text{th}} = 8172.731(40)$ MHz. Si on attribue entièrement cette différence ($L_{1s}^{\text{exp}} - L_{1s}^{\text{th}}$) à la correction de l'état 1S due à la longueur élé-

mentaire, ceci impose la limite supérieure suivante sur la longueur minimale : $(\Delta r)_{\min} \leq 0.164$ fm. Un examen de l'ordre de grandeur de la longueur élémentaire pour des valeurs arbitraires des paramètres de déformation montre qu'elle est de l'ordre de $0.01 - 0.1$ fm [17, 18, 19, 20].

En conclusion, l'effet calculé ici pourrait déjà jouer un rôle dans la description théorique de l'atome d'hydrogène car les calculs théoriques sont moins performants que la précision expérimentale. L'erreur théorique principale est dans la détermination du rayon de charge du proton. Actuellement, une confrontation entre les données expérimentales et les calculs théoriques standards ne peuvent pas exclure l'effet de la dimension finie de l'électron.

Chapitre 4

Le potentiel singulier $-\alpha/r^2$ à 3 dimensions spatiales en mécanique quantique ordinaire

4.1 Équation de Schrödinger dans l'espace des coordonnées

4.1.1 Fonctions propres et valeurs propres

Considérons l'équation radiale de Schrödinger pour la fonction réduite, $u(r) = r\psi(r)$, décrivant une particule de masse μ dans un champ extérieur attractif de la forme : $V(r) = -\alpha/r^2$, où α est un paramètre positif,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r^2} \right) u(r) = Eu(r). \quad (4.1)$$

Puisque la valeur du nombre quantique orbital l importe peu dans notre étude, nous allons nous intéresser à l'onde s ($l = 0$). Il est utile d'introduire une échelle arbitraire r_0 et de considérer, au lieu de r , une variable sans dimension $x = r/r_0$. L'équation (4.1) s'écrit alors :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{\kappa}{x^2} - \eta^2 \right) u = 0, \quad (4.2)$$

où l'on a :

$$\kappa = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2} \quad \text{et} \quad \eta^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2} r_0^2. \quad (4.3)$$

Introduisons la transformation :

$$u(x) = x^{1/2}v(x), \quad (4.4)$$

la nouvelle fonction $v(x)$ satisfait à l'équation suivante :

$$x^2 \frac{d^2v(x)}{dx^2} + x \frac{dv(x)}{dx} - (\eta^2 x^2 - \nu^2)v = 0, \quad (4.5)$$

où

$$\nu = \sqrt{\kappa - 1/4}. \quad (4.6)$$

L'équation (4.5) peut être mise sous la forme :

$$(\eta x)^2 \frac{d^2v}{d(\eta x)^2} + (\eta x) \frac{dv}{d(\eta x)} - [(\eta x)^2 + (i\nu)^2] v = 0.$$

Cette équation n'est autre que l'équation différentielle de Bessel [51, 57]. Elle admet deux solutions linéairement indépendantes, $K_{i\nu}(\eta x)$ et $I_{i\nu}(\eta x)$, appelées fonctions de Bessel modifiées. La fonction $I_{i\nu}(\eta x)$ se comporte aux grandes valeurs de x comme [57] :

$$I_{i\nu}(\eta x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\exp(\eta x)}{(2\pi\eta x)^{1/2}},$$

et ne peut donc décrire un état lié. C'est l'autre solution qui est la solution à carré intégrable de l'équation de Schrödinger du potentiel singulier $-\alpha/r^2$:

$$u(x) = Nx^{1/2}K_{i\nu}(\eta x), \quad (4.7)$$

où N est une constante de normalisation.

La fonction d'onde $\psi(x) = \frac{u(x)}{x}$ se comporte asymptotiquement comme suit [51, 57] :

$$\begin{cases} \psi(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x^{-1} \exp(-\eta x), \\ \psi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{-1/2} \sin\left(\nu \ln\left(\frac{\eta x}{2}\right) - \arg \Gamma(1 + i\nu)\right). \end{cases} \quad (4.8)$$

La fonction d'onde est régulière (à carré intégrable) dans les deux régions asymptotiques (très grandes et très petites valeurs de x) et ne conduit pas à un spectre discret de valeurs propres, contrairement aux potentiels non singuliers habituels. Ce comportement est typique des potentiels singuliers : dans le traitement des potentiels non singuliers, la fonction d'onde n'est pas régulière dans l'une des régions asymptotiques. Alors, en imposant une contrainte pour qu'elle soit régulière, on obtient la condition spectrale qui donne le spectre d'énergie.

Dans le cas du potentiel $-\alpha/r^2$, la situation est donc totalement différente ; la question qui se pose est : comment extraire le spectre d'énergie ? Comme on l'a annoncé plus haut, c'est la condition d'orthogonalité qui joue le rôle d'une condition spectrale.

Avant de calculer le spectre d'énergie, il sera utile de calculer l'écart quadratique moyen (Δr) de l'opérateur \hat{r} et d'écrire l'équation de Schrödinger du potentiel $-\alpha/r^2$ dans l'espace des impulsions car nous en aurons besoin ultérieurement.

4.1.2 Ecart quadratique moyen

Dans le prochain chapitre, nous introduirons dans le traitement du potentiel $-\alpha/r^2$ une longueur élémentaire sous forme d'une incertitude sur la mesure de la position \vec{r} ; pour ceci il est intéressant de calculer l'écart quadratique moyen (Δr) que nous utiliserons au chapitre 5 dans la discussion des résultats obtenus.

Utilisons la forme (4.7) : la fonction d'onde $\psi(r)$ s'écrit en fonction de l'ancienne variable r :

$$\psi(r) = \frac{u(r)}{r} = Nr^{-1/2}K_{i\nu}(\chi r), \quad (4.9)$$

avec $\chi^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}$.

L'écart quadratique moyen s'écrit :

$$(\Delta r)_\psi^2 = \langle r^2 \rangle_\psi - \langle r \rangle_\psi^2. \quad (4.10)$$

En se servant de l'équation (4.9) et de la définition :

$$\langle A \rangle_\psi = \int d^3r (\psi^* A \psi),$$

on peut écrire :

$$\langle r \rangle_\psi = N^2 \int_0^\infty r^2 [K_{i\nu}(\chi r)]^2 dr,$$

$$\langle r^2 \rangle_\psi = N^2 \int_0^\infty r^3 [K_{i\nu}(\chi r)]^2 dr.$$

La constante de normalisation est donnée par :

$$N = \left(\int_0^\infty r [K_{i\nu}(\chi r)]^2 dr \right)^{-1/2}.$$

Les valeurs moyennes et la constante de normalisation N se calculent en utilisant la relation [52] :

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} [K_\mu(ax)]^2 dx = \frac{2^{-2-\lambda} a^{\lambda-1}}{\Gamma(1-\lambda)} \Gamma\left(\frac{1+2\mu-\lambda}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\right]^2 \Gamma\left(\frac{1-2\mu-\lambda}{2}\right).$$

Les résultats sont :

$$\begin{aligned} N &= \chi \sqrt{\frac{2 \sinh(\pi\nu)}{\pi\nu}}, \\ \langle r \rangle_\psi &= \frac{\pi^2}{4\chi} \left(\frac{1}{4} + \nu^2\right) \frac{\tanh(\pi\nu)}{\pi\nu}, \\ \langle r^2 \rangle_\psi &= \frac{2}{3\chi^2} (1 + \nu^2). \end{aligned}$$

La valeur de $(\Delta r)_\psi$ se déduit facilement en remplaçant dans l'équation (4.10) :

$$(\Delta r)_\psi = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu|E|}} \sqrt{\frac{2}{3} (1 + \nu^2) - \left[\frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{4} + \nu^2\right) \frac{\tanh(\pi\nu)}{(\pi\nu)}\right]^2}, \quad (4.11)$$

soit :

$$\sqrt{|E|} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu} (\Delta r)_\psi} \sqrt{\frac{2}{3} (1 + \nu^2) - \left[\frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{4} + \nu^2\right) \frac{\tanh(\pi\nu)}{(\pi\nu)}\right]^2}. \quad (4.12)$$

On voit que l'incertitude $(\Delta r)_\psi$ est inversement proportionnelle à $|E|$. Donc, si $(\Delta r)_\psi$ est arbitrairement petit, l'énergie $|E|$ doit être arbitrairement grande, ce qui peut être associé à l'absence d'un état fondamental à énergie finie du potentiel. En revanche, si l'écart quadratique moyen a une valeur minimale non nulle ($(\Delta r)_\psi \geq (\Delta r)_{\min} \neq 0$) l'énergie reste finie. On s'attend donc à ce que l'introduction d'une longueur élémentaire modifiant les relations d'incertitude de Heisenberg¹ régulariserait le potentiel $-\alpha/r^2$. Ce point va constituer l'objectif principal du prochain chapitre.

4.2 Solution dans l'espace des impulsions

Dans le prochain chapitre, nous étudierons le potentiel $-\alpha/r^2$ dans l'espace des impulsions en utilisant le formalisme de la mécanique quantique déformée, développé au deuxième chapitre. Pour ceci, nous aurons besoin de connaître la forme de l'équation de Schrödinger ordinaire ainsi que sa solution dans l'espace des impulsions pour ce potentiel.

¹Voir le chapitre 2

4.2.1 Équation de Schrödinger

Écrivons l'équation de Schrödinger sous la forme :

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{2\mu} - \frac{\alpha}{r} \right) |\psi\rangle = E |\psi\rangle.$$

Nous procédons comme on le fait pour l'atome d'hydrogène [21, 49], en multipliant les deux membres de cette équation par $2\mu\vec{r}^2$, on obtient :

$$\left(\frac{\vec{r}^2 \vec{p}^2}{r} - 2\mu\alpha \right) |\psi\rangle = 2\mu E \vec{r}^2 |\psi\rangle. \quad (4.13)$$

Dans l'espace des impulsions, la fonction d'onde s'écrit [23] :

$$\psi(\vec{p}) = Y_{lm}(\theta, \varphi) \psi(p).$$

Les opérateurs \vec{r}^2 et \vec{p}^2 agissent sur les fonctions d'onde $\psi(p)$ comme :

$$\begin{aligned} \vec{r}^2 \psi(p) &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{2}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{l(l+1)}{p^2} \right) \psi(p), \\ \vec{p}^2 \psi(p) &= p^2 \psi(p). \end{aligned}$$

Alors, en remplaçant dans (4.13), l'équation de Schrödinger prend, dans l'espace des impulsions, la forme suivante :

$$\frac{d^2\psi}{dp^2} + \frac{2}{p} \left(\frac{3p^2 + k^2}{p^2 + k^2} \right) \frac{d\psi}{dp} + \left(\frac{6 + \kappa - l(l+1)(1 + k^2/p^2)}{p^2 + k^2} \right) \psi = 0, \quad (4.14)$$

où

$$k^2 = -2\mu E, \quad \kappa = 2\mu\alpha/\hbar^2.$$

4.2.2 Fonction d'onde

Effectuant la transformation :

$$\psi(p) = p^l \varphi(p),$$

la nouvelle fonction satisfait à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{p} \left(\frac{(l+3)p^2 + (l+1)k^2}{p^2 + k^2} \right) \frac{d\varphi}{dp} + \left(\frac{4l + 6 + \kappa}{p^2 + k^2} \right) \varphi = 0. \quad (4.15)$$

Posons :

$$y = -\frac{p^2}{k^2}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} &= \frac{-2p}{k^2} \frac{d}{dy}, \\ \frac{d^2}{dp^2} &= \frac{4p^2}{k^4} \frac{d^2}{dy^2} - \frac{2}{k^2} \frac{d}{dy}, \end{aligned}$$

et l'équation (4.15) prend la forme suivante :

$$y(1-y) \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \left[\frac{3}{2} + l - \left(\frac{7}{2} + l \right) y \right] \frac{d\varphi}{dy} - \left(l + \frac{3}{2} + \frac{\kappa}{4} \right) \varphi = 0. \quad (4.16)$$

Cette équation a bien la forme de l'équation hypergéométrique [57] :

$$y(1-y) \frac{d^2\varphi}{dy^2} + [c - (a+b+1)y] \frac{d\varphi}{dy} - ab\varphi = 0,$$

avec les paramètres :

$$\begin{aligned} a &= \frac{5}{4} + \frac{l}{2} + \frac{i}{2}\nu, \\ b &= \frac{5}{4} + \frac{l}{2} - \frac{i}{2}\nu, \\ c &= \frac{3}{2} + l, \quad \text{où } \nu = \sqrt{\kappa - 1/4} \quad \text{avec } \kappa = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

La solution de l'équation de Schrödinger, dans l'espace des impulsions, pour le potentiel $-\alpha/r^2$, finie au voisinage de $p = 0$, s'écrit [57] :

$$\psi(p) = Ap^l F(a, b, c; -\frac{p^2}{k^2}). \quad (4.18)$$

On peut déduire directement cette fonction d'onde en effectuant la transformée de Fourier de (4.9). Ceci revient à calculer l'intégrale [36] :

$$\psi(p) = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^{-l} \int_0^\infty r^{3/2} j_l(pr) K_{i\nu}(kr) dr, \quad (4.19)$$

où $j_l(pr)$ est la fonction de Bessel sphérique d'ordre l . L'intégrale (4.19) est la fonction hypergéométrique (4.18) [50].

Comportement de la fonction d'onde à la limite $p \rightarrow \infty$

Le comportement de la fonction d'onde à l'infini, dans l'espace des impulsions, est équivalent au comportement de celle-ci aux petites distances dans l'espace de configuration.

Limitons-nous à l'onde s ($l = 0$), et utilisons la transformation [57] :

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F\left(a, 1-c+a, 1+a-b; \frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}F\left(b, 1-c+b, 1-a+b; \frac{1}{z}\right). \quad (4.20)$$

La fonction d'onde (4.18) s'écrit :

$$\begin{aligned} \psi(p) \approx & \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(-i\nu)}{\Gamma(\frac{5}{4} - \frac{i\nu}{2})\Gamma(\frac{1}{4} - \frac{i\nu}{2})} \left(\frac{p}{k}\right)^{-\frac{5}{2}-i\nu} F\left(a, 1-c+a, 1+a-b; -\left(\frac{k}{p}\right)^2\right) \\ & + \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(i\nu)}{\Gamma(\frac{5}{4} + \frac{i\nu}{2})\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{i\nu}{2})} \left(\frac{p}{k}\right)^{-\frac{5}{2}+i\nu} F\left(b, 1-c+b, 1-a+b; -\left(\frac{k}{p}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Etant donné que l'on a, $F(a, b, c, x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, alors à la limite $p \rightarrow \infty$, $\psi(p)$ se comporte comme :

$$\psi(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} p^{-5/2} (Ap^{-i\nu} + Bp^{+i\nu}). \quad (4.22)$$

La fonction d'onde $\psi(p)$ est une combinaison linéaire de deux solutions qui ont le même comportement à l'infini et, toutes deux, sont à carré intégrables. On peut voir aussi d'après (4.22) qu'une fonction d'onde réelle $\psi(p)$ dépend d'une phase arbitraire ϕ comme : $\psi(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} p^{-\frac{5}{2}} \cos(\nu \ln p + \phi)$, ainsi elle a un nombre infini d'oscillations en $p \rightarrow \infty$. Le comportement oscillatoire de $\psi(p)$ à l'infini est analogue au comportement oscillatoire de la fonction $\psi(x)$ en $x = 0$ (Eq. (4.8)).

4.2.3 Spectre d'énergie

Orthogonalité des fonctions d'onde

Nous allons maintenant montrer que dans l'espace des impulsions les fonctions propres du hamiltonien du potentiel singulier $-\alpha/r^2$ ne sont pas orthogonales, tout comme dans l'espace de configuration [35]. Nous allons suivre le raisonnement de la référence [59], et montrer que le spectre d'énergie peut être obtenu en exigeant que les fonctions d'onde $\psi(p)$ soient mutuellement orthogonales.

4. Le potentiel singulier $-\alpha/r^2$ à 3 dimensions spatiales en mécanique quantique ordinaire 45

Considérons deux fonctions d'onde $\psi_1(p)$ et $\psi_2(p)$, correspondant à deux valeurs différentes d'énergie E_1 et E_2 :

$$\begin{aligned}\psi_1(p) &= A_1 F(a, b, c; -\frac{p^2}{k_1^2}), \\ \psi_2(p) &= A_2 F(a, b, c; -\frac{p^2}{k_2^2}).\end{aligned}$$

Le produit scalaire de $\psi_1(p)$ et $\psi_2(p)$ s'écrit :

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = A_1 A_2^* \int_0^\infty p^2 dp F(a, b, c; -\frac{p^2}{k_1^2}) F(a, b, c; -\frac{p^2}{k_2^2}).$$

En effectuant le changement de variable : $x = p^2$, on obtient :

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \frac{1}{2} A_1 A_2^* \int_0^\infty x^{1/2} dx F(a, b, c; -\frac{x}{k_1^2}) F(a, b, c; -\frac{x}{k_2^2}).$$

Cette intégrale peut être évaluée en se servant du résultat [60] :

$$\begin{aligned}& \int_0^\infty x^{c-1} dx F(a, b, c; -\sigma x) F(a', b', c; -\omega x) \\ &= \sigma^{-a} \omega^{a-c} \frac{\Gamma^2(c) \Gamma(a+a'-c) \Gamma(a+b'-c) \Gamma(a'+b-c) \Gamma(b+b'-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(a') \Gamma(b') (\Gamma(a+a'+b+b'-2c))} \\ & \quad \times F(a+a'-c, a+b-c, a+a'+b+b'-2c; 1 - \frac{\omega}{\sigma}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} c, \operatorname{Re}(a+a'-c), \operatorname{Re}(a'+b-c) &> 0, \\ \operatorname{Re}(a+b'-c), \operatorname{Re}(b+b'-c) &> 0, \quad |\arg \sigma|, |\arg \omega| < \pi.\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \Omega \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^{i\nu} F\left(1 + i\nu, 1, 2; 1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right),$$

où :

$$\Omega = \frac{1}{2} A_1 A_2^* k_1^{5/2} k_2^{1/2} \frac{\Gamma^2(3/2) \Gamma^2(1) \Gamma(1 + i\nu) \Gamma(1 - i\nu)}{\Gamma(2) \Gamma^2(\frac{5}{4} + i\frac{\nu}{2}) \Gamma^2(\frac{5}{4} - i\frac{\nu}{2})}.$$

En utilisant encore une fois les identités [57] :

$$\begin{aligned}F(a, b, c; z) &= \frac{1}{b-1-(c-a-1)z} [(b-c)F(a, b-1, c; z) + \\ & \quad +(c-1)(1-z)F(a, b, c-1; z)],\end{aligned}$$

$$F(a, b, b; z) = (1 - z)^{-a}, \quad F(0, b, c, z) = F(a, 0, c; z) = 1,$$

on obtient finalement l'expression suivante pour le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle &= \frac{\Omega}{i\nu(\frac{k_1^2}{k_2^2} - 1)} \left[\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{+i\nu} - \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{-i\nu} \right] \\ &= \frac{2\Omega}{\nu(\frac{k_1^2}{k_2^2} - 1)} \sin \left[\nu \ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Les deux solutions ψ_1 et ψ_2 sont orthogonales si la condition suivante est satisfaite :

$$\nu \ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right) = n\pi, \quad \text{où } n = 0, \pm 1, \dots$$

Cette relation définit ainsi le spectre discret du potentiel singulier $-\alpha/r^2$, qui s'écrit :

$$E_n = E_0 \exp\left[-\frac{2n\pi}{\nu}\right], \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (4.24)$$

On obtient le même résultat en imposant l'orthogonalité des fonctions d'onde (fonctions de Bessel) dans l'espace de configuration [59]. Ainsi, en exigeant que les fonctions d'onde des états liés, pour $\kappa = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2} > 1/4$, soient mutuellement orthogonales impose la quantification de l'énergie. Ceci ne fixe pas chacun des niveaux d'énergie, mais fixe seulement les niveaux relatifs entre eux. Si on fixe E_0 , alors les niveaux d'énergie s'accroissent en $E = 0$ et l'état fondamental a une énergie infinie.

La formule (4.24) montre que le spectre d'énergie du potentiel singulier $-\alpha/r^2$ contient une constante arbitraire et qu'il n'y a pas d'état fondamental à énergie finie. Ces problèmes peuvent être attribués au fait que la singularité du potentiel à l'origine est une idéalisation non physique de l'interaction. Bien entendu, cette idéalisation est utilisée également dans le cas de l'interaction coulombienne. Le point important est que dans ce cas, les fonctions propres ainsi que les valeurs propres du hamiltonien sont essentiellement indépendantes de la forme de l'interaction exacte aux petites distances. Ceci n'est plus le cas pour les potentiels singuliers tels que $-\alpha/r^2$. Dans ce cas les fonctions et valeurs propres dépendent fortement du comportement de l'interaction aux petites distances. Ceci se manifeste par l'existence d'une phase arbitraire dans la fonction d'onde et par une valeur infinie de l'énergie de l'état fondamental, signe de l'existence d'une limite de validité de l'interaction en question en deçà d'une certaine distance $r = R$.

Pour toutes ces raisons, il est naturel d'effectuer une régularisation de ce potentiel, autrement dit, d'introduire une coupure à une certaine distance R représentant l'échelle où le potentiel cesse d'être valable, et de considérer dans la région $r < R$ une modification de l'interaction [69, 70]. Les auteurs des références [71] et [72] ont simulé le potentiel aux petites distances par un puits carré sphérique ; en revanche les auteurs de la référence [73] ont utilisé un potentiel delta. Dans la suite, nous allons montrer comment le potentiel singulier $-\alpha/r^2$ peut être régularisé dans l'espace des impulsions.

4.3 Régularisation du potentiel $-\alpha/r^2$ en mécanique quantique

Le hamiltonien des potentiels singuliers n'est pas borné inférieurement [35], et ne peut pas décrire la physique aux petites distances. Différentes méthodes peuvent être suivies pour régulariser le potentiel singulier $-\alpha/r^2$: une de ces méthodes (introduction d'un "cœur dur") consiste à effectuer une coupure, à une certaine distance $r = R$ et d'imposer que la fonction d'onde dans l'espace de configuration soit nulle au point de coupure : $\psi(r = R) = 0$ [69]. Une autre façon de régulariser est d'introduire également une coupure aux petites distances et de supposer une autre interaction dans la région ($r < R$), tel qu'un puits carré sphérique par exemple [71, 72], et d'imposer les conditions de raccordement usuelles, à savoir la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée au point de coupure. Nous allons montrer qu'une régularisation dans l'espace des impulsions est possible en introduisant une coupure ultraviolette [31].

Régularisation du potentiel $-\alpha/r^2$ par une coupure ultraviolette

Reprenons la fonction d'onde dans l'espace des impulsions au voisinage de $p \rightarrow \infty$, donnée par la relation (4.21). Introduisons une coupure (Λ) dans la région de grandes impulsions ; en demandant que : $\psi(\Lambda) \underset{\Lambda/k \gg 1}{=} 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(-i\nu)}{\Gamma(5/4 - \frac{i\nu}{2})\Gamma(1/4 - \frac{i\nu}{2})} \left(\frac{\Lambda}{k}\right)^{-\frac{5}{2}-i\nu} F\left(a, 1-c+a, 1+a-b, -\left(\frac{k}{\Lambda}\right)^2\right) \\ & + \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(i\nu)}{\Gamma(5/4 + \frac{i\nu}{2})\Gamma(1/4 + \frac{i\nu}{2})} \left(\frac{\Lambda}{k}\right)^{-\frac{5}{2}+i\nu} F\left(b, 1-c+b, 1-a+b, -\left(\frac{k}{\Lambda}\right)^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Puisque $k/\Lambda \ll 1$, donc [57] :

$$F\left(a, 1-c+a, 1+a-b, -\left(\frac{k}{\Lambda}\right)^2\right) = F\left(b, 1-c+b, 1-a+b, -\left(\frac{k}{\Lambda}\right)^2\right) \approx 1,$$

la dernière condition s'écrit :

$$\frac{(-i\nu)}{\Gamma(5/4 - \frac{i\nu}{2})\Gamma(1/4 - \frac{i\nu}{2})} \left(\frac{\Lambda}{k}\right)^{-\frac{5}{2}-i\nu} + \frac{\Gamma(i\nu)}{\Gamma(5/4 + \frac{i\nu}{2})\Gamma(1/4 + \frac{i\nu}{2})} \left(\frac{\Lambda}{k}\right)^{-\frac{5}{2}+i\nu} = 0.$$

En posant :

$$A = \frac{\Gamma(i\nu)}{\Gamma(5/4 + \frac{i\nu}{2})\Gamma(1/4 + \frac{i\nu}{2})} = |A| \exp[i \arg(A)],$$

on obtient :

$$\cos[\arg(A) + \nu \ln(\frac{\Lambda}{k})] = 0, \quad (4.25)$$

ce qui donne le spectre d'énergie suivant :

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{k^2}{2\mu} = -\frac{\Lambda^2}{2\mu} \exp \frac{2}{\nu} \left[\arg(A) - (n + \frac{1}{2})\pi \right] \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.26)$$

Cette régularisation reproduit exactement l'expression du spectre d'énergie que l'on trouve par la condition d'orthogonalité (Eq. (4.24)). Le spectre possède maintenant un état fondamental à énergie finie, si Λ est fini.

Chapitre 5

Le potentiel $-\alpha/r^2$ avec une longueur élémentaire

Dans ce chapitre, nous allons développer l'article [31], et étudier en détail le potentiel singulier $-\alpha/r^2$ à trois dimensions dans le formalisme de la mécanique quantique avec un principe d'incertitude généralisé, qui a été développé au deuxième chapitre. Nous allons montrer que la longueur élémentaire, qui est une conséquence de la nouvelle version de la relation d'incertitude de Heisenberg, joue le rôle d'une coupure aux petites distances régularisant ainsi le potentiel tout naturellement.

5.1 Équation de Schrödinger

Considérons le potentiel singulier attractif $V(r) = -\alpha/r^2$, $\alpha > 0$, dans la mécanique quantique déformée étudiée au chapitre 2. Dans cette algèbre de Heisenberg les opérateurs de position \hat{X}_i et d'impulsion \hat{P}_j satisfont aux relations de commutation (2.51), (2.52) et (2.53) à savoir :

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar[(1 + \beta\hat{P}^2)\delta_{ij} + \beta'\hat{P}_i\hat{P}_j], \quad (\beta, \beta') > 0, \quad (5.1)$$

$$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0, \quad (5.2)$$

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = i\hbar\frac{2\beta - \beta' + \beta(2\beta + \beta')\hat{P}^2}{1 + \beta\hat{P}^2} (\hat{P}_i\hat{X}_j - \hat{P}_j\hat{X}_i). \quad (5.3)$$

Nous avons vu que dans l'espace des impulsions la réalisation suivante des opérateurs¹ \widehat{X}_i et \widehat{P}_i satisfait à ces relations de commutation :

$$\widehat{X}_i = i\hbar \left((1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta' p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \gamma p_i \right), \quad \widehat{P}_i = p_i. \quad (5.4)$$

Dans cette algèbre déformée, l'équation de Schrödinger dans l'espace des impulsions s'écrit :

$$\left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{\alpha}{R^2} \right) \psi(p) = E\psi(p). \quad (5.5)$$

Multipliant les deux membres de cette équation par l'opérateur R^2 , on obtient :

$$\left(R^2 \frac{p^2}{2\mu} - \alpha \right) \psi(p) = ER^2\psi(p). \quad (5.6)$$

L'opérateur carré de la distance radiale $R^2 = \sum_{i=1}^3 \widehat{X}_i \widehat{X}_i$ peut être exprimé explicitement en utilisant la relation (5.4). En effet, en se limitant à l'onde s ($l = 0$) et en omettant le paramètre γ qui n'a aucun effet sur les observables physiques [21, 23], on trouve le résultat suivant [31] :

$$R^2 = (i\hbar)^2 \left\{ \left[1 + (\beta + \beta') p^2 \right]^2 \frac{d^2}{dp^2} + \left[1 + (\beta + \beta') p^2 \right] \left(2(2\beta + \beta') p + \frac{2}{p} \right) \frac{d}{dp} \right\}. \quad (5.7)$$

En se servant de cette formule, l'équation (5.6) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\psi(p)}{dp^2} + \frac{2}{p} \left\{ 4 \left[\frac{p^2 - \mu E}{p^2 - 2\mu E} \right] - \frac{1 + \beta' p^2}{1 + (\beta + \beta') p^2} \right\} \frac{d\psi(p)}{dp} + \\ & + \left\{ \frac{6 + (10\beta + 6\beta') p^2}{[1 + (\beta + \beta') p^2]} + \frac{2\mu\alpha/\hbar^2}{[1 + (\beta + \beta') p^2]^2} \right\} \frac{\psi(p)}{(p^2 - 2\mu E)} = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Cette dernière équation représente l'équation de Schrödinger pour une particule de masse μ dans le potentiel singulier $V(r) = -\alpha/r^2$ en présence d'une longueur élémentaire, introduite comme une incertitude minimale non nulle, $(\Delta r)_{\min} = \hbar\sqrt{3\beta + \beta'}$, sur la position de la particule.

Dans le cas particulier $\beta = \beta' = 0$ l'équation (5.8) devient :

$$\frac{d^2\psi(p)}{dp^2} + \frac{2}{p} \left(\frac{3p^2 - 2\mu E}{p^2 - 2\mu E} \right) \frac{d\psi(p)}{dp} + \left(\frac{6 + 2\mu\alpha/\hbar^2}{p^2 - 2\mu E} \right) \psi(p) = 0,$$

¹Rappelons que les opérateurs sont notés par des lettres majuscules dans la mécanique quantique avec une longueur élémentaire.

qui n'est autre que l'équation (4.14) de la mécanique quantique ordinaire avec $l = 0$.

Avant d'étudier l'équation (5.8) et de chercher ses solutions, nous allons écrire l'équation intégrale qui lui correspond afin d'établir les conditions aux limites que doit satisfaire la solution $\psi(p)$.

5.1.1 Équation intégrale

Écrivons l'équation (5.6) sous la forme :

$$R^2\varphi(p) = 2\mu\alpha\psi(p), \quad (5.9)$$

où :

$$\varphi(p) = (p^2 - 2\mu E)\psi(p).$$

L'opérateur R^2 peut être exprimé comme :

$$R^2 = -\hbar^2 p^{-2} \left[1 + (\beta + \beta')p^2 \right]^{2 - \frac{\beta}{\beta + \beta'}} L,$$

où L est l'opérateur auto-adjoint suivant :

$$L = \frac{d}{dp} \left(K(p) \frac{d}{dp} \right), \quad (5.10)$$

avec :

$$K(p) = p^2 \left[1 + (\beta + \beta')p^2 \right]^{\frac{\beta}{\beta + \beta'}}.$$

L'équation (5.9) est ainsi transformée en l'équation non homogène de Sturm-Liouville suivante [58] :

$$[L + g(p)]\varphi(p) = 0, \quad (5.11)$$

où :

$$g(p) = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2} \frac{p^2}{p^2 - 2\mu E} \left[1 + (\beta + \beta')p^2 \right]^{\frac{\beta}{\beta + \beta'} - 2}. \quad (5.12)$$

Enfin, $\varphi(p)$ est donnée par l'équation intégrale suivante [58] :

$$\begin{aligned} \varphi(p) = & \int_0^\infty G(p, p') g(p') \varphi(p') dp' + \left[\varphi(0) K(0) \frac{dG(p, p')}{dp'} \right]_{p'=0} \\ & - \left[\varphi(\infty) K(\infty) \frac{dG(p, p')}{dp'} \right]_{p'=\infty}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

$G(p, p')$ est la fonction de Green correspondante.

Pour que nous ayons une équation intégrale homogène de la forme d'un problème aux valeurs propres :

$$\varphi(p) = \int_0^\infty G(p, p') g(p') \varphi(p') dp', \quad (5.14)$$

$\varphi(p)$ doit s'annuler à l'infini. La fonction d'onde $\psi(p)$ doit ainsi satisfaire la condition :

$$p^2 \psi(p) \underset{p \rightarrow \infty}{=} 0. \quad (5.15)$$

Cette condition est très importante dans l'étude du potentiel $-\alpha/r^2$ en présence d'une longueur minimale. Elle définit le comportement physique des fonctions propres du hamiltonien dans la région ($p \rightarrow \infty$), et va être exploitée pour extraire le spectre d'énergie du potentiel.

La forme explicite de la fonction $G(p, p')$ peut être obtenue en utilisant les conditions aux limites (5.15), et la condition :

$$\psi(0) = \text{constante}. \quad (5.16)$$

On trouve le résultat :

$$G(p, p') = \begin{cases} \frac{1}{p} F(-\frac{1}{2}, \frac{\beta}{\beta+\beta'}, \frac{1}{2}; -[\beta + \beta'] p^2) - C, & p > p', \\ \frac{1}{p'} F(-\frac{1}{2}, \frac{\beta}{\beta+\beta'}, \frac{1}{2}; -[\beta + \beta'] p'^2) - C, & p < p', \end{cases} \quad (5.17)$$

où C est la constante :

$$C = \frac{(\beta + \beta')^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{\beta+\beta'})}{\Gamma(1) \Gamma(\frac{\beta}{\beta+\beta'})}. \quad (5.18)$$

Finalement, l'équation intégrale satisfaite par la fonction d'onde $\psi(p)$ est :

$$(p^2 - 2\mu E)\psi(p) = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2} \int_0^\infty p'^2 \left[1 + (\beta + \beta') p'^2 \right]^{\frac{\beta}{\beta+\beta'} - 2} G(p, p') \psi(p') dp'. \quad (5.19)$$

Dans la limite $\beta = \beta' = 0$, l'équation (5.19) se réduit à l'équation intégrale de la mécanique quantique ordinaire [31], à savoir :

$$(p^2 - 2\mu E)\psi(p) = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2} \int_0^\infty p'^2 \psi(p') G(p, p') dp',$$

où :

$$G(p, p') = \frac{\theta(p - p')}{p} + \frac{\theta(p' - p)}{p'}.$$

5.1.2 Transformations et changement de variable

Retournons maintenant à l'équation de Schrödinger (5.8), et effectuons le changement de variable suivant :

$$z = \frac{(\beta + \beta')p^2 - 1}{(\beta + \beta')p^2 + 1}. \quad (5.20)$$

La nouvelle variable est sans dimensions et varie de -1 à $+1$. On peut aisément exprimer les relations de différentiation par rapport à la variable p en fonction de celles relatives à la variable z . Les relations qui vont être nécessaires sont :

$$p = \frac{1}{\sqrt{\beta + \beta'}} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, \quad (5.21)$$

$$\frac{d}{dp} = \sqrt{\beta + \beta'} (1-z)^{\frac{3}{2}} (1+z)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dz}, \quad (5.22)$$

$$\frac{d^2}{dp^2} = -(\beta + \beta')(1-z)^2(1+2z) \frac{d}{dz} + (\beta + \beta')(1-z)^3(1+z) \frac{d^2}{dz^2}. \quad (5.23)$$

L'équation de Schrödinger (5.8) s'écrit alors :

$$(1-z)^2(1+z) \frac{d^2\psi}{dz^2} + (1-z) \left\{ 8 \frac{(1+z) - \mu E(\beta + \beta')(1-z)}{(1+z) - 2\mu E(\beta + \beta')(1-z)} - \frac{(\beta + 2\beta')z + 2\beta + 3\beta'}{\beta + \beta'} \right\} \frac{d\psi}{dz} + \left\{ \frac{6 + \frac{2\beta}{\beta + \beta'}(1+z) + \frac{\mu\alpha}{2\hbar^2}(1-z)^2}{(1+z) - 2\mu E(\beta + \beta')(1-z)} \right\} \psi = 0. \quad (5.24)$$

En introduisant les notations :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \beta + \beta', & \omega_2 &= \beta + 2\beta', & \omega_3 &= 2\beta + 3\beta', \\ \omega_4 &= \frac{\beta}{\beta + \beta'}, & \omega &= -\mu(\beta + \beta')E, & \kappa &= \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2} = 4\kappa_0, \end{aligned} \quad (5.25)$$

l'équation (5.24), se réécrit comme suit :

$$(1-z^2) \frac{d^2\psi}{dz^2} + \left\{ 8 \frac{(1+\omega) + (1-\omega)z}{(1+2\omega) + (1-2\omega)z} - \frac{1}{\omega_1}(\omega_2 z + \omega_3) \right\} \frac{d\psi}{dz} + \left\{ \frac{\kappa_0 z^2 + 2(\omega_4 - \kappa_0)z + (6 + 2\omega_4 + \kappa_0)}{(-1 + 2\omega)z^2 - 4\omega z + (1 + 2\omega)} \right\} \psi = 0. \quad (5.26)$$

Pour résoudre cette équation, nous cherchons une solution sous la forme suivante :

$$\psi(z) = (1-z)^\lambda (1+z)^{\lambda'} f(z), \quad (5.27)$$

où λ et λ' sont deux paramètres arbitraires qui seront choisis de façon à mettre l'équation (5.26) sous une forme permettant sa résolution analytique.

On a successivement :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dz} &= (1-z)^\lambda(1+z)^{\lambda'} \left\{ \frac{df}{dz} + [-\lambda(1-z)^{-1} + \lambda'(1+z)^{-1}] f(z) \right\} \\ \frac{d^2\psi}{dz^2} &= (1-z)^\lambda(1+z)^{\lambda'} \left\{ \frac{d^2f}{dz^2} + [-2\lambda(1-z)^{-1} + 2\lambda'(1+z)^{-1}] \frac{df}{dz} \right. \\ &\quad \left. + [\lambda(\lambda-1)(1-z)^{-2} - 2\lambda\lambda'(1-z)^{-1}(1+z)^{-1} + \lambda'(\lambda'-1)(1+z)^{-2}] f(z) \right\} \end{aligned}$$

En remplaçant ces relations dans l'équation (5.26), on obtient finalement l'équation différentielle satisfaite par la nouvelle fonction $f(z)$. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{dz^2} + \left\{ \frac{-2\lambda}{(1-z)} + \frac{2\lambda'}{(1+z)} + \frac{8[(1-\omega) + (1+\omega)z]}{(1-z^2)[(1-2\omega) + (1+2\omega)z]} - \frac{(\omega_2z + \omega_3)}{\omega_1(1-z^2)} \right\} \frac{df}{dz} + \\ \left\{ \frac{\lambda(\lambda-1)}{(1-z)^2} + \frac{\lambda'(\lambda'-1)}{(1+z)^2} - \frac{8\lambda[(1-\omega) + (1+\omega)z]}{(1-z^2)(1-z)[(1-2\omega) + (1+2\omega)z]} + \right. \\ \left. \frac{8\lambda'[(1-\omega) + (1+\omega)z]}{(1-z^2)(1+z)[(1-2\omega) + (1+2\omega)z]} + \lambda \frac{(\omega_2z + \omega_3)}{\omega_1(1-z)^2(1+z)} - \lambda' \frac{(\omega_2z + \omega_3)}{\omega_1(1-z)(1+z)^2} \right. \\ \left. + \frac{\kappa_0z^2 + 2(\omega_4 - \kappa_0)z + (6 + 2\omega_4 + \kappa_0)}{(1-z^2)[-(1+2\omega)z^2 + 4\omega z + (1-2\omega)]} - \frac{2\lambda\lambda'}{(1-z^2)} \right\} f = 0 \quad (5.28) \end{aligned}$$

Cette équation va constituer notre point de départ pour étudier le potentiel singulier $-\alpha/r^2$ dans cette mécanique quantique avec une longueur élémentaire ; nous allons nous intéresser plus particulièrement à la singularité de ce potentiel et à l'effet de cette longueur élémentaire. Pour ceci, nous allons commencer par le cas à énergie nulle.

5.2 Solution à énergie nulle

Pour examiner l'effet de la longueur élémentaire, introduite via les paramètres de déformation β et β' dans l'équation de Schrödinger sur la singularité du potentiel $-\alpha/r^2$, il sera intéressant de résoudre l'équation (5.28) dans le cas $E = 0$, et de voir si on parviendra à rendre la solution unique, autrement dit, se débarrasser de la phase arbitraire qui caractérise les potentiels singuliers, comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Notons également que la fonction d'onde

à énergie nulle en espace de configuration permet de calculer le nombre d'états liés du système en mécanique quantique ordinaire [77, 95].

L'équation (5.28) dans le cas $E = 0$ ($\omega = 0$) peut être écrite sous la forme :

$$(1 - z^2) \frac{d^2 f}{dz^2} + \{(-2\lambda + 2\lambda' + 5 + \omega_4) - (2\lambda + 2\lambda' + 2 - \omega_4)z\} \frac{df}{dz} + \frac{1}{(1 - z^2)} \left\{ (1 + z) \left[\lambda(\lambda - 1)(1 + z) - 2\lambda\lambda'(1 - z) - \lambda(5 + \omega_4) + \lambda(2 - \omega_4)z + 2\omega_4 \right] + (1 - z) \left[\lambda'(\lambda' - 1)(1 - z) + \lambda'(5 + \omega_4) - \lambda'(2 - \omega_4)z + \kappa_0(1 - z) \right] + 6 \right\} f = 0. \quad (5.29)$$

Rappelons que les paramètres λ et λ' sont arbitraires : ils vont être choisis de façon à donner une forme plus simple (et soluble) à cette dernière équation. En effet, demandons que le coefficient de $f(z)$ dans l'équation différentielle (5.29) soit nul pour $z = \pm 1$. Ceci donne les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \left(\frac{5}{2} + \omega_4\right)\lambda + \frac{3}{2} + \omega_4 &= 0, \\ \lambda'^2 + \frac{5}{2}\lambda' + \frac{\kappa}{4} + \frac{3}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Les valeurs de λ et λ' satisfaisant ces dernières équations sont :

$$\begin{aligned} \lambda &= 1, \left(\frac{3}{2} + \omega_4\right), \\ \lambda' &= \left(-\frac{5}{4} - i\frac{\nu}{2}\right), \left(-\frac{5}{4} + i\frac{\nu}{2}\right), \end{aligned}$$

avec : $\nu = \sqrt{\kappa - 1/4}$. Nous supposons que le potentiel est suffisamment attractif : ($\kappa = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2} > 1/4$). Notons que nous avons quatre choix possibles concernant (λ, λ') menant à la même solution de l'équation de Schrödinger. Sélectionnons l'ensemble $(1, -\frac{5}{4} - i\frac{\nu}{2})$; ainsi la transformation que nous avons faite sur la fonction d'onde (5.27) est :

$$\psi(z) = (1 - z)(1 + z)^{\left(-\frac{5}{4} - i\frac{\nu}{2}\right)} f(z). \quad (5.31)$$

En remplaçant λ et λ' par leur valeurs, l'équation (5.29) s'écrit :

$$(1 - z^2) \frac{d^2 f}{dz^2} + \left\{ \left(\frac{1}{2} + \omega_4 - i\nu\right) - \left(\frac{3}{2} - \omega_4 - i\nu\right)z \right\} \frac{df}{dz} + \left\{ \left(\frac{1}{8} - \frac{\omega_4}{4}\right) + i\nu\left(\frac{1}{4} - \frac{\omega_4}{2}\right) \right\} f = 0. \quad (5.32)$$

Cette équation est une équation différentielle du second ordre avec trois points singuliers (réguliers) : $z = 1, -1$ et ∞ . Par conséquent, elle peut être écrite sous la forme canonique d'une équation hypergéométrique par le simple changement de variable :

$$\xi = \frac{z+1}{2}. \quad (5.33)$$

En effet, l'équation (5.32) prend la forme suivante :

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2f}{d\xi^2} + \left\{ (1-i\nu) - \left(\frac{3}{2} - \omega_4 - i\nu\right)\xi \right\} \frac{df}{d\xi} - \left(\frac{1}{8} + \frac{\omega_4}{4}\right)(1+2i\nu)f = 0. \quad (5.34)$$

Cette équation est bien une équation hypergéométrique [57] :

$$\xi(1-\xi)f''(\xi) + [c - (a+b+1)\xi]f'(\xi) - abf(\xi) = 0, \quad (5.35)$$

avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4} - \frac{\omega_4}{2} - \frac{\vartheta}{2} - i\frac{\nu}{2}, \\ b &= \frac{1}{4} - \frac{\omega_4}{2} + \frac{\vartheta}{2} - i\frac{\nu}{2}, \\ c &= 1 - i\nu, \quad \nu = \sqrt{\kappa - 1/4}, \\ \vartheta &= \sqrt{(\omega_4 - 1)^2 - \kappa}, \quad \kappa = 2\mu\alpha/\hbar^2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Au voisinage du point singulier ($\xi = 0$) les deux solutions, linéairement indépendantes, de l'équation (5.34) sont [57] :

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= F(a, b, c; \xi), \\ f_2(\xi) &= \xi^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; \xi), \end{aligned} \quad (5.37)$$

où $F(a, b, c; \xi) \equiv {}_2F_1(a, b, c; \xi)$ est la fonction hypergéométrique définie par la série de Gauss :

$$F(a, b, c; \xi) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{\xi^n}{n!}$$

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour écrire les fonctions propres du hamiltonien du potentiel $-\alpha/r^2$, solutions à énergie nulle de l'équation de Schrödinger déformée. En effet, en utilisant les relations (5.31), (5.36) et (5.37), les deux solutions s'écrivent :

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi) &= (1-\xi)\xi^{-\frac{5}{4}-i\frac{\nu}{2}} F(a, b, c; \xi), \\ \psi_2(\xi) &= (1-\xi)\xi^{-\frac{5}{4}+i\frac{\nu}{2}} F(a^*, b^*, c^*; \xi), \end{aligned} \quad (5.38)$$

où a^*, b^* et c^* sont les complexes conjugués de a, b et c , respectivement. La solution générale est une combinaison linéaire des deux solutions (5.38) :

$$\psi(z) = (1 - \xi)\xi^{-\frac{5}{4}} \left[A\xi^{-i\frac{\nu}{2}} F(a, b, c; \xi) + B\xi^{+i\frac{\nu}{2}} F(a^*, b^*, c^*; \xi) \right]. \quad (5.39)$$

Dans le cas particulier $\omega_4 = 1/2$ ($\beta = \beta'$), on a $\mu = i\nu$ et donc $b = 0$. Comme $F(a, 0, c; \xi) = 1$, la fonction d'onde se réduit alors à l'expression suivante :

$$\psi(z) \underset{\beta=\beta'}{=} (1 - \xi) \left(A\xi^{-\frac{5}{4}-i\frac{\nu}{2}} + B\xi^{-\frac{5}{4}+i\frac{\nu}{2}} \right). \quad (5.40)$$

La solution générale (5.39) contient deux solutions $\psi_1(p)$ et $\psi_2(p)$; chaque solution est complexe conjuguée de l'autre ($\psi_2(\xi) = \psi_1^*(\xi)$), ce qui permet de choisir une solution générale réelle avec un choix convenable des constantes A et B ($A = B^*$). Jusqu'ici, en raisonnant comme dans le cas de la mécanique quantique habituelle, il semblerait que le problème du potentiel singulier persiste même en présence de cette longueur élémentaire. En fait, nous verrons au paragraphe suivant qu'il n'en est rien car la limite $p \rightarrow \infty$ de la solution (5.39) de l'équation de Schrödinger déformée est différente de la limite correspondante en mécanique quantique ordinaire. Notons que dans la limite $\beta, \beta' \ll 1$, on a $\xi \sim \omega_1 p^2 \ll 1$, et donc $1 - \xi \sim 1$ et $F(a, b, c; \xi) \sim 1$. Par conséquent, la solution (5.39) devient :

$$\psi(p) \underset{\omega_1 \ll 1}{\sim} p^{-5/2} (Ap^{-i\nu} + Bp^{+i\nu}). \quad (5.41)$$

On retrouve bien la solution (4.22) de l'équation de Schrödinger ordinaire dans la limite $p \rightarrow \infty$, qui a la même forme que la solution à énergie nulle dans le cas non déformé.

5.2.1 Limite $p \rightarrow \infty$

Les deux solutions (5.38) ont le même comportement au voisinage de $\xi = 0$ ($p = 0$). Cependant, dans la région $p \rightarrow \infty$ ($\xi \rightarrow 1$), les solutions se comportent différemment. En effet, au lieu des solutions (5.37) utilisons [57] :

$$f_1(\xi) = F(a, b, a + b + 1 - c; 1 - \xi), \quad (5.42)$$

$$f_2(\xi) = (1 - \xi)^{c-a-b} F(c - b, c - a, c - a - b + 1; 1 - \xi), \quad (5.43)$$

dans la limite $\xi \rightarrow 1$, on a $f_1(\xi) \sim 1$ et $f_2(\xi) \sim (1 - \xi)^{c-a-b}$. D'autre part, $(1 - \xi) \sim p^{-2}$, donc en remplaçant $f_1(\xi)$ et $f_2(\xi)$ dans l'équation (5.31), nous obtenons le comportement suivant des deux solutions :

$$\psi_1(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} p^{-2}, \quad (5.44)$$

$$\psi_2(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} p^{-3-2\omega_4}. \quad (5.45)$$

Ces deux solutions peuvent être obtenues directement à partir de l'équation de Schrödinger (5.8) dans la limite $p \rightarrow \infty$ en cherchant une solution sous la forme d'une puissance p^s . Bien entendu, l'équation (5.8) est indépendante de l'énergie dans cette limite.

Ce comportement est complètement différent de celui de la mécanique quantique habituelle : les deux solutions ne dépendent pas de la constante de couplage ; de plus la solution avec le comportement à l'infini (5.44) ne dépend pas des paramètres de déformation et décroît plus lentement que l'autre. Ceci implique que ψ_1 ne satisfait pas à la condition aux limites (5.15), imposée par l'équation intégrale, et donc elle doit être rejetée. Ainsi, la fonction d'onde physique est bien ψ_2 avec un comportement à l'infini donné par :

$$p^2\psi(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} p^{-1-2\omega_4}. \quad (5.46)$$

La conclusion principale que nous en tirons est que le potentiel est régularisé par cette longueur élémentaire introduite comme une incertitude supplémentaire sur la position. En conséquence, la condition (5.46) suffira, comme nous allons le voir, pour extraire le spectre d'énergie en examinant le comportement asymptotique de la solution à énergie non nulle sans faire appel à la condition d'orthogonalité. Le fait d'avoir un critère pour sélectionner l'une des solutions et rejeter l'autre implique donc que dans cette version déformée de la mécanique quantique il n'y aura pas une phase arbitraire dans l'expression du spectre d'énergie.

5.3 Solution à énergie non nulle

Pour confirmer nos conclusions tirées plus haut, nous allons étendre l'étude au cas général ($E \neq 0$). En particulier, nous allons montrer que l'extraction du spectre d'énergie se fait comme dans le cas des potentiels réguliers, et que l'énergie de l'état fondamental est finie.

Pour commencer notre étude, reprenons l'équation (5.28) en l'écrivant sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + P(\lambda, \lambda', z) \frac{df(z)}{dz} + Q(\lambda, \lambda', z) f(z) = 0, \quad (5.47)$$

où les coefficients $P(\lambda, \lambda', z)$ et $Q(\lambda, \lambda', z)$ sont données par :

$$P(\lambda, \lambda', z) = \frac{-2\lambda}{(1-z)} + \frac{2\lambda'}{(1+z)} + \frac{8[(1-\omega) + (1+\omega)z]}{(1+2\omega)(1-z^2)(z-z_0)} - \frac{(\omega_2 z + \omega_3)}{\omega_1(1-z^2)}, \quad (5.48)$$

$$Q(\lambda, \lambda', z) = \frac{\Sigma(\lambda, \lambda', z)}{(1-z)^2(1+z)^2(z-z_0)}, \quad (5.49)$$

où :

$$\begin{aligned} \Sigma(\lambda, \lambda', z) = & (z-z_0) \left[\lambda(\lambda-1)(1+z)^2 + \lambda'(\lambda'-1)(1-z)^2 \right] + \frac{1+\omega}{1+2\omega} \left(z + \frac{1-\omega}{1+\omega} \right) \\ & \times [-8\lambda(1+z) + 8\lambda'(1-z)] + \frac{1}{\omega_1} (z-z_0)(\omega_2 z + \omega_3) [\lambda(1+z) - \lambda'(1-z)] \\ & + \frac{1+z}{1+2\omega} [\kappa_0 z^2 + 2(\omega_4 - \kappa_0)z + 2\omega_4 + \kappa_0 + 6] - 2\lambda\lambda'(1-z)(1+z)(z-z_0), \end{aligned}$$

avec $\omega = -\mu \omega_1 E$ et les mêmes notations qu'avant :

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{2\omega - 1}{2\omega + 1}, & \omega_1 &= \beta + \beta', & \omega_2 &= \beta + 2\beta' \\ \omega_3 &= 2\beta + 3\beta', & \omega_4 &= \frac{\beta}{\beta + \beta'}, & \kappa &= 4\kappa_0 = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2} \end{aligned}$$

Il est à rappeler que λ et λ' sont des paramètres libres de la transformation (5.27) faite sur la fonction d'onde, à savoir : $\psi(z) = (1-z)^\lambda(1+z)^{\lambda'} f(z)$.

Pour fixer ces deux paramètres, nous allons procéder comme dans le cas à énergie nulle : Nous demandons que $\Sigma(\lambda, \lambda', z)$ soit nulle pour les valeurs ± 1 de la variable z . Ceci donne les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \left(\frac{5}{2} + \omega_4 \right) \lambda + \left(\frac{3}{2} + \omega_4 \right) &= 0, \\ \lambda' \left(\lambda' + \frac{1}{2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Les valeurs de λ et λ' satisfaisant ce système sont :

$$\begin{aligned}\lambda &= 1, & \left(\frac{3}{2} + \omega_4\right), \\ \lambda' &= 0, & -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Nous faisons le choix $(\lambda, \lambda') = (1, 0)$ qui donne une forme plus simple de la transformation (5.27) ; elle devient :

$$\psi(z) = (1 - z)f(z). \quad (5.50)$$

Les autres choix, correspondant aux autres transformations possibles, mènent à des équations différentes de la fonction $f(z)$, mais donnent la même solution $\psi(z)$ de l'équation de Schrödinger déformée.

En remplaçant λ et λ' par leur valeurs dans l'équation (5.47), on obtient après un calcul un peu long l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \left\{ \frac{2}{(z-1)} + \frac{8[(1+\omega) + (1-\omega)z]}{(2\omega-1)(z^2-1)(z-z_0)} + \frac{(\omega_2 z + \omega_3)}{\omega_1(z^2-1)} \right\} \frac{df(z)}{dz} \\ + \left\{ \frac{(2-\omega_4 + \frac{\kappa_0}{1-2\omega})z - (1 + \omega_4 + \frac{\kappa_0}{1-2\omega})}{(z+1)(z-1)(z-z_0)} \right\} f(z) = 0.\end{aligned} \quad (5.51)$$

Cette dernière est une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients polynômiaux, avec quatre points singuliers réguliers : $-1, 1, z_0$ et ∞ . L'équation est donc du type de Fuchs [96, 97] et peut être réduite à la forme canonique de l'équation différentielle de Heun en transformant les singularités aux points : $0, 1, \xi_0$ et ∞ . Ceci se fait simplement en introduisant le changement de variable :

$$\xi = \frac{z+1}{2}. \quad (5.52)$$

On obtient ainsi l'équation différentielle canonique de Heun [97, 96] :

$$\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} + \left(\frac{c}{\xi} + \frac{e}{\xi-1} + \frac{d}{\xi-\xi_0} \right) \frac{df(\xi)}{d\xi} + \left(\frac{ab\xi + q}{\xi(\xi-1)(\xi-\xi_0)} \right) f(\xi) = 0, \quad (5.53)$$

avec les paramètres :

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}(3 - \omega_4 - \tilde{\nu}), & \tilde{\nu} &= \left[(\omega_4 - 1)^2 - \frac{4\kappa_0}{1-2\omega} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ b &= \frac{1}{2}(3 - \omega_4 + \tilde{\nu}), & \xi_0 &= \frac{2\omega}{2\omega-1}, \\ c &= \frac{3}{2}, & d &= 2, & e &= \frac{1}{2} - \omega_4, \\ q &= - \left(\frac{3}{2} + \frac{\kappa_0}{1-2\omega} \right),\end{aligned} \quad (5.54)$$

qui sont reliés par la condition de Fuchs :

$$a + b + 1 = c + d + e. \quad (5.55)$$

Au voisinage de $\xi = 0$, les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation de Heun sont données par [97] :

$$f_1(\xi) = H(\xi_0, q, a, b, c, d; \xi), \quad (5.56)$$

$$f_2(\xi) = \xi^{1-c} H(\xi_0, q', 1 + a - c, 1 + b - c, 2 - c, d; \xi), \quad (5.57)$$

où

$$q' = q - (1 - c) [d + \xi_0(1 + a + b - c - d)].$$

$H(\xi_0, q, a, b, c, d; \xi)$ est la fonction de Heun définies par la série :

$$H(\xi_0, q, a, b, c, d; \xi) = 1 - \frac{q}{c\xi_0}\xi + \sum_{n=2}^{\infty} C_n \xi^n, \quad (5.58)$$

les coefficients C_n sont déterminés par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1+c)\xi_0 C_{n+2} = \{ & (n+1)^2(\xi_0+1) + (n+1)[c+d-1 \\ & + (a+b-d)\xi_0] - q \} C_{n+1} - (n+a)(n+b)C_n, \end{aligned} \quad (5.59)$$

avec les conditions initiales :

$$C_0 = 1, \quad C_1 = \frac{-q}{c\xi_0}, \quad \text{et} \quad C_n = 0, \quad \text{si } n < 0.$$

Maintenant, nous pouvons écrire la solution générale de l'équation de Schrödinger en présence d'une longueur élémentaire introduite comme une incertitude supplémentaire sur la position. En effet, en utilisant les relations (5.50), (5.52) et (5.56), la fonction d'onde régulière au voisinage de $\xi = 0$, s'écrit :

$$\psi(\xi) = A(1 - \xi)H(\xi_0, q, a, b, c, d; \xi), \quad (5.60)$$

où A est une constante de normalisation.

Nous montrons en annexe que dans la limite $\beta, \beta' \ll 1$, nous retrouvons le résultat de la mécanique quantique ordinaire donné par (4.18); dans la limite $E \rightarrow 0$, la solution à énergie nulle (5.39) est obtenue, et finalement, comme il était attendu, la solution (5.60) a le même comportement asymptotique que la solution (5.39) dans la limite $p \rightarrow \infty$.

5.4 Problème des valeurs propres

Nous allons maintenant étudier avec plus de détail la solution (5.60) pour montrer que l'introduction d'une longueur élémentaire régularise le potentiel et que le spectre d'énergie s'obtient d'une manière tout a fait naturelle sans recourir à la condition d'orthogonalité. Pour ceci, nous allons considérer tout d'abord le cas particulier $\beta = \beta'$.

5.4.1 Cas particulier $\beta = \beta'$

Dans ce cas l'équation de Heun (5.53) se réduit à une équation hypergéométrique. En effet, lorsque $\beta = \beta'$ on a : $\omega_4 = \frac{\beta}{\beta+\beta'} = \frac{1}{2}$, et donc les paramètres de la fonction de Heun, donnés par (5.54), auront les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} ab = -q &= \frac{3}{2} + \frac{\kappa_0}{1 - 2\omega}, \\ e = 0, \quad c &= \frac{3}{2}, \quad d = 2, \end{aligned}$$

et la condition de Fuchs (5.55) devient :

$$a + b + 1 = c + d.$$

Donc, l'équation (5.53) se simplifie sous la forme :

$$\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} + \left(\frac{c}{\xi} + \frac{d}{\xi - \xi_0} \right) \frac{df(\xi)}{d\xi} + \left(\frac{ab}{\xi(\xi - \xi_0)} \right) f(\xi) = 0.$$

Cette dernière peut être facilement réécrite sous la forme canonique d'une équation hypergéométrique par le changement de variable :

$$x = \frac{\xi}{\xi_0}.$$

On obtient :

$$x(1-x)f''(x) + [c - (a+b+1)x]f'(x) - abf(x) = 0, \quad (5.61)$$

avec les paramètres :

$$\begin{aligned} a &= \frac{5}{4} - \frac{\tilde{\nu}}{2}, \\ b &= \frac{5}{4} + \frac{\tilde{\nu}}{2}, \\ c &= \frac{3}{2}, \quad \tilde{\nu} = \left(\frac{1}{4} - \frac{\kappa}{1 - 2\omega} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

La solution de l'équation de Schrödinger déformée, finie au voisinage de $\xi = 0$, s'écrit [57] :

$$\psi_{\beta=\beta'}(\xi) = A(1 - \xi)F(a, b, c; \xi/\xi_0), \quad (5.63)$$

où :

$$\xi = \frac{\omega_1 p^2}{1 + \omega_1 p^2}, \quad \xi_0 = \frac{2\omega}{2\omega - 1}, \quad \omega_1 = 2\beta, \quad \omega = -\mu\omega_1 E \quad (5.64)$$

Il est important de mentionner que dans la limite $\beta \rightarrow 0$, les paramètres (5.62) s'identifient avec les paramètres (4.17), $\xi/\xi_0 \rightarrow p^2/2\mu E$ et on obtient alors la solution de la mécanique quantique ordinaire (4.18).

5.4.2 Calcul du spectre d'énergie

Pour extraire le spectre d'énergie, il suffit simplement d'imposer la condition (5.15) sur la solution (5.63) à la limite $p \rightarrow \infty$.

En effet, puisque :

$$1 - \xi = \frac{1}{1 + 2\beta p^2} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} p^{-2},$$

$$\frac{\xi}{\xi_0} = \frac{2\omega - 1}{2\omega} \frac{\omega_1 p^2}{1 + \omega_1 p^2} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2\omega - 1}{2\omega},$$

donc la fonction d'onde (5.63) se comporte comme :

$$\psi_{\beta=\beta'} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} p^{-2} F(a, b, c; \frac{2\omega - 1}{2\omega}). \quad (5.65)$$

Utilisons la condition (5.15), à savoir :

$$p^2 \psi \underset{p \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0,$$

nous obtenons ainsi l'équation suivante :

$$F(a, b, c; \frac{2\omega - 1}{2\omega}) = 0. \quad (5.66)$$

Cette équation représente la condition spectrale; les valeurs propres ω sont les zéros de la fonction hypergéométrique.

Considérons maintenant la limite $\omega \equiv -2\mu\beta E \ll 1$, c.-à-d. :

$$\left| \frac{2\omega - 1}{2\omega} \right| \sim \frac{1}{2\omega} \gg 1.$$

Dans ce cas la condition (5.66) s'écrit :

$$F(a, b, c; \frac{1}{\omega}) \underset{\omega \ll 1}{=} 0.$$

En utilisant la transformation (4.20), et la formule $F(a, b, c; -2\omega) \underset{\omega \ll 1}{\approx} 1$, cette dernière équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\omega^{5/4} \left\{ \exp \left[i \left(\arg[A] - \frac{\nu}{2} \ln[2\omega] \right) \right] + \exp \left[-i \left(\arg[A] - \frac{\nu}{2} \ln[2\omega] \right) \right] \right\} = 0, \quad (5.67)$$

où nous avons utilisé la notation suivante :

$$A = \frac{\Gamma(i\nu)}{\Gamma(\frac{5}{4} + i\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{1}{4} + i\frac{\nu}{2})} = |A| \exp[i \arg(A)],$$

$$\nu = \sqrt{\kappa - 1/4}.$$

De l'équation (5.67), on trouve :

$$\cos \left[\arg(A) - \frac{\nu}{2} \ln(2\omega) \right] = 0, \quad (5.68)$$

qui a comme solution :

$$\arg(A) - \frac{\nu}{2} \ln(\omega) = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Nous aboutissons finalement au spectre d'énergie du potentiel singulier $-\alpha/r^2$ en présence d'une longueur élémentaire, $(\Delta r)_{\min} = 2\hbar\sqrt{\beta}$, il a l'expression suivante :

$$E_n = \frac{-1}{4\mu\beta} \exp \left\{ \frac{2}{\nu} \left[\arg(A) - (n + \frac{1}{2})\pi \right] \right\}, \quad (5.69)$$

avec :

$$|E_n| \ll \frac{1}{4\mu\beta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.70)$$

Le spectre d'énergie (5.69) est identique à celui que nous avons obtenu en mécanique quantique ordinaire en introduisant une coupure ultraviolette (Λ) dans l'espace des impulsions [voir Eq. (4.26)]. Le paramètre $\beta + \beta' = 2\beta$ est simplement l'inverse du carré de Λ .

L'équation (5.69) est accompagnée par la condition (5.70), qui exclut les valeurs négatives de n . Le potentiel possède donc maintenant un état fondamental avec une énergie finie. Ce résultat peut être interprété en retournant à l'expression de l'écart quadratique moyen (Δr) , donné par l'équation (4.11). Puisque la longueur élémentaire représente une incertitude minimale non nulle sur la

position, elle impose une limite inférieure sur Δr , qui ne peut pas être arbitrairement petit. De façon équivalente, d'après (4.12), l'énergie ne peut pas être arbitrairement grande.

Il est important de remarquer que la valeur de l'énergie (5.69) est inversement proportionnelle au paramètre de déformation β ; donc si β est très petit, l'énergie de l'état fondamental est très grande. Par conséquent, dans le cas du potentiel $-\alpha/r^2$, la longueur minimale devrait être vue comme étant une dimension intrinsèque caractérisant le système étudié [22]. Cependant, si cette longueur élémentaire est obtenue à partir des estimations qui ont été faites dans l'étude de l'oscillateur harmonique et de l'atome d'hydrogène, comme dans les références [17, 23], à savoir, ~ 0.1 fm, l'énergie de l'état fondamental serait trop grande que pour justifier un traitement non relativiste.

Dans le cas d'un potentiel faiblement attractif ($\kappa = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2} \leq \frac{1}{4}$), (ν imaginaire), il semblerait que l'équation (5.67) admette une solution de la forme :

$$\begin{aligned} \omega &= \left(-\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\frac{5}{4}-\frac{\lambda}{2})\Gamma(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{5}{4}+\frac{\lambda}{2})\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{2})\Gamma(-\lambda)} \right)^{1/\lambda}, \\ \lambda &= \sqrt{1/4 - \kappa}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Cependant cette solution est incompatible avec la condition $|\omega| \ll 1$ qui accompagne l'équation (5.67) quel que soit λ , bien entendu, $0 \leq \lambda \leq 1/2$; par exemple, pour $\lambda = 1/4$, on a $\omega = 31.79$. On en conclut qu'il n'y a pas un état lié dans le cas d'un potentiel faiblement attractif.

Un examen numérique de l'équation exacte des valeurs propres (5.66) a confirmé tous ces résultats.

Résolution graphique de l'équation spectrale

La solution analytique de l'équation (5.66) étant inconnue, nous avons utilisé Mathematica pour tracer les courbes de la fonction hypergéométrique en fonction de $\omega = -2\mu\beta E$ pour des valeurs fixées de la constante de couplage $\kappa = 2\mu\alpha/\hbar^2$. Les énergies propres sont les zéros de cette fonction.

Les figures (5. 1) et (5. 2) montrent que l'énergie de l'état fondamental est finie; avec $\kappa = 3$, $\omega_0 \approx 0.07$ et avec $\kappa = 8$, $\omega_0 \approx 0.37$. Comme dans le cas de la mécanique quantique ordinaire lorsque le potentiel est régularisé aux petites distances, il y a un nombre infini d'états excités avec des énergies $\omega \simeq 0$ (point d'accumulation). Les niveaux d'énergie augmentent avec la croissance de

la constante de couplage. Dans la figure (5. 2), on peut voir l'énergie du premier état excité, $\omega_1 \approx 0.025$. Les figures (5. 3) et (5. 4) montrent qu'il n'y a pas d'état lié pour, respectivement, $\kappa = 1/5$ et $\kappa = 1/4$; nous obtenons que la valeur critique de la constante de couplage (κ^*) au-dessous de laquelle les états liés disparaissent a la même valeur que dans le cas de la mécanique quantique habituelle, $\kappa^* = 1/4$, si le potentiel est régularisé aux petites distances.

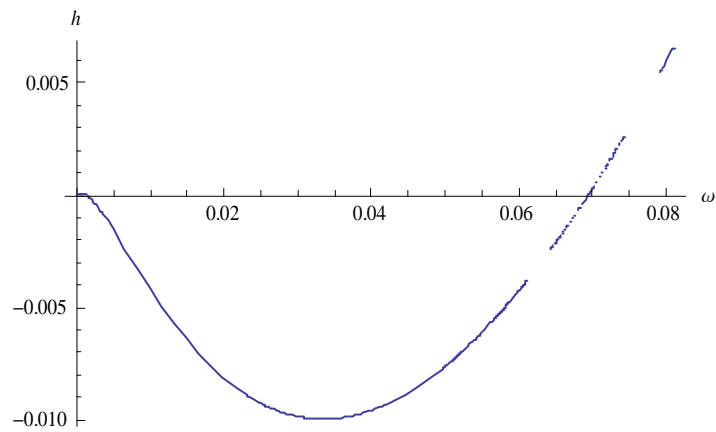


FIG. 5.1 – $h \equiv F(a, b, c; \frac{2\omega-1}{2\omega})$ en fonction de ω , avec la valeur $\kappa = 3$ de la constante de couplage.

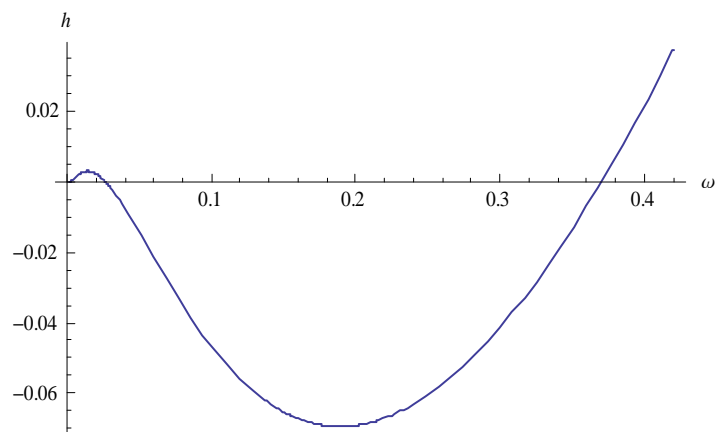


FIG. 5.2 – $h \equiv F(a, b, c; \frac{2\omega-1}{2\omega})$ en fonction de ω , avec la valeur $\kappa = 8$ de la constante de couplage.

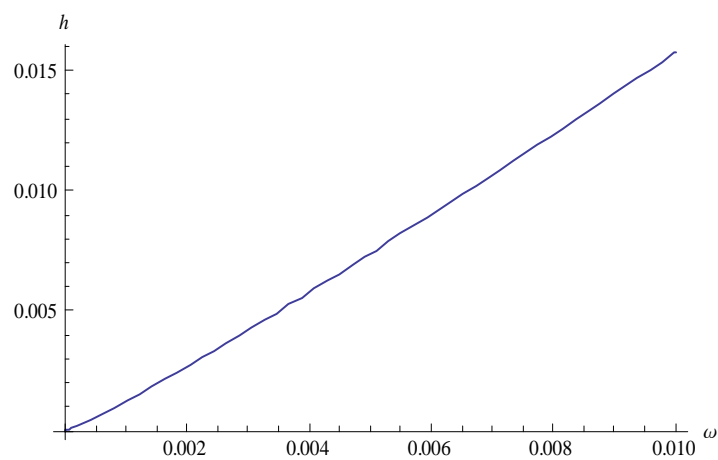


FIG. 5.3 – $h \equiv F(a, b, c; \frac{2\omega-1}{2\omega})$ en fonction de ω , avec la valeur $\kappa = 1/5$ de la constante de couplage.

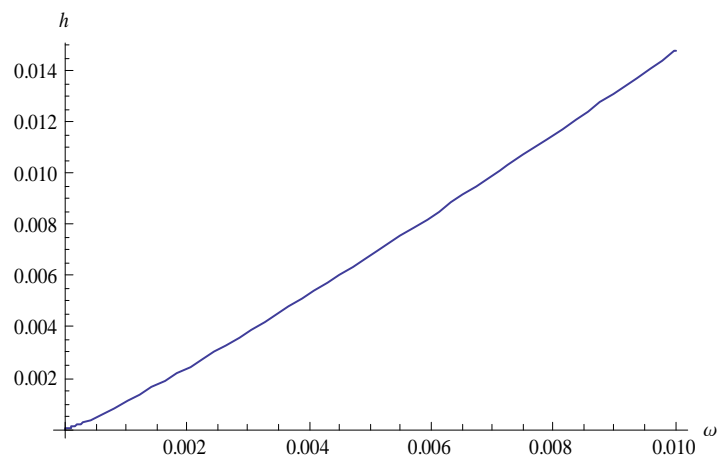


FIG. 5.4 – $h \equiv F(a, b, c; \frac{2\omega-1}{2\omega})$ en fonction de ω , avec la valeur $\kappa = 1/4$ de la constante de couplage.

5.4.3 Généralisation au cas $\beta \neq \beta'$

Reprenons la solution (5.60) :

$$\psi(\xi) = A(1 - \xi)H(\xi_0, q, a, b, c, d; \xi)$$

Cette dernière peut être réécrite sous la forme [97] :

$$\psi(\xi) = A(1 - \xi)H\left(\frac{1}{\xi_0}, \frac{q}{\xi_0}, a, b, c, e; \frac{\xi}{\xi_0}\right). \quad (5.72)$$

Le spectre d'énergie s'obtient comme dans le cas $\beta = \beta'$ en imposant la condition (5.15) à la limite $p \rightarrow \infty$. Ainsi, nous avons l'équation spectrale suivante :

$$H\left(\frac{2\omega - 1}{2\omega}, \frac{2\omega - 1}{2\omega}q, a, b, c, e; \frac{2\omega - 1}{2\omega}\right) = 0. \quad (5.73)$$

Dans le cas $\omega \ll 1$, nous utilisons la notation :

$$\sigma = \frac{2\omega - 1}{2\omega} \approx \frac{-1}{2\omega} \rightarrow \infty,$$

et la formule [97] :

$$H(\sigma, \sigma q, a, b, c, e; \xi) \underset{\sigma \rightarrow \infty}{=} F(\delta + \sqrt{\delta^2 + q}, \delta - \sqrt{\delta^2 + q}, c; \xi), \quad c \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (5.74)$$

où

$$\delta = \frac{a + b - e}{2}.$$

l'équation (5.73) s'écrit :

$$F\left(\frac{5}{4} - i\frac{\nu}{2}, \frac{5}{4} + i\frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{-1}{2\omega}\right) \underset{\omega = -(\beta + \beta')\mu E \ll 1}{=} 0. \quad (5.75)$$

où

$$\nu = \sqrt{\kappa - 1/4}$$

Nous obtenons une expression du spectre d'énergie similaire à celle du cas $\beta = \beta'$.

Il suffit de remplacer dans l'équation (5.69) 2β par $\beta + \beta'$, soit :

$$E_n = \frac{-1}{2\mu(\beta + \beta')} \exp\left\{\frac{2}{\nu} \left[\arg(A) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]\right\}, \quad (5.76)$$

$$|E_n| \ll \frac{1}{2\mu(\beta + \beta')}, \quad n = 0, 1, \dots. \quad (5.77)$$

5.5 Conclusions

Le problème du potentiel singulier $-\alpha/r^2$ à 3 dimensions spatiales a été résolu exactement dans le formalisme de la mécanique quantique avec une longueur minimale. La solution de l'équation de Schrödinger dans l'espace des impulsions est une fonction de Heun, qui se réduit à une fonction hypergéométrique dans le cas $E = 0$ et dans le cas $\beta = \beta'$. La présence de cette longueur élémentaire dans le formalisme a régularisé le potentiel naturellement. Ainsi, l'extraction du spectre d'énergie a été faite comme dans le cas des potentiels réguliers en examinant seulement le comportement asymptotique de la fonction d'onde, sans introduction de paramètre arbitraire, β et β' étant des paramètres physiques du formalisme qui décrivent le comportement de l'interaction aux petites distances. Les états liés existent seulement si le potentiel est fortement attractif, $\kappa > 1/4$. Le spectre d'énergie obtenu, possède un nombre infini d'états liés, et un état fondamental avec une énergie finie. Enfin, l'autre résultat important de ce chapitre est la limite $\beta, \beta' \ll 1$, où les résultats de la mécanique quantique habituelle régularisés avec une coupure ultraviolette Λ ont été obtenus ; le paramètre $\beta + \beta'$ joue le rôle de Λ^{-2} .

En conclusion, cette étude montre que l'idée d'introduire une longueur minimale, qui a été originalement proposée en physique des hautes énergies, pourrait s'appliquer également en mécanique quantique non relativiste ; la longueur minimale devrait être vue alors comme une dimension intrinsèque du système, du moins dans le problème du potentiel $-\alpha/r^2$.

Chapitre 6

Le potentiel $\frac{-\alpha}{r^2}$ à N dimensions avec une longueur élémentaire

Puisque l'équation de Schrödinger pour le potentiel singulier $-\alpha/r^2$ dépend de la dimension spatiale, il en est de même pour les fonctions propres et valeurs propres du hamiltonien. En particulier, la dimension spatiale influe fortement sur la valeur critique α^* de la constante de couplage du potentiel attractif au dessous de laquelle les états liés du système disparaissent. Dans ce chapitre, en suivant la référence [32], nous allons étendre les calculs du chapitre précédent et résoudre l'équation de Schrödinger pour le potentiel $-\alpha/r^2$ en utilisant le formalisme de la mécanique quantique avec une longueur élémentaire dans un espace à N dimensions.

6.1 Équation de Schrödinger

Dans le chapitre précédent l'équation de Schrödinger pour une particule de masse μ et moment orbital, $l = 0$, interagissant avec le potentiel $V(r) = -\alpha/r^2$ a été résolue à 3 dimensions dans la version modifiée de la mécanique quantique impliquant l'existence d'une longueur minimale. Nous allons maintenant considérer le cas général ($l \neq 0$) à N dimensions.

Procédons comme dans le cas à 3 dimensions par écrire l'équation de Schrödinger dans l'espace des impulsions sous la forme :

$$(R^2 P^2 - 2\mu\alpha) |\psi\rangle = 2\mu ER^2 |\psi\rangle. \quad (6.1)$$

6. Le potentiel $\frac{-\alpha}{r^2}$ à N dimensions avec une longueur élémentaire 71

L'opérateur carré de la distance radiale R^2 est défini par $R^2 = \sum_{i=1}^N \widehat{X}_i \widehat{X}_i$, où l'action des opérateurs de position \widehat{X}_i dans l'algèbre de Heisenberg modifiée est donnée par l'équation (2.58).

À cause de la symétrie rotationnelle de l'hamiltonien, ses fonctions propres dans l'espace des impulsions peuvent être factorisées comme suit [23] :

$$\psi_N(\vec{p}) = Y_{l_{(N-1)\dots l_2 l_1}}(\Omega) \psi_N(p), \quad (6.2)$$

où $Y_{l_{(N-1)\dots l_2 l_1}}$ sont les harmoniques sphériques et $\psi_N(p)$ est une fonction radiale de p . À 2 dimensions et à 3 dimensions, on a :

$$\begin{aligned} \psi_2(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-im\varphi} \psi_2(p), \\ \psi_3(\vec{p}) &= Y_{lm}(\theta, \varphi) \psi_3(p). \end{aligned} \quad (6.3)$$

L'équation (6.2) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial p_i^2} &= \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{N-1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{p^2}, \\ \sum_{i=1}^N p_i \frac{\partial}{\partial p_i} &= p \frac{\partial}{\partial p}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

où :

$$\begin{aligned} L^2 &= l(l+N-2), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \\ (l &= |m| \text{ pour } N = 2). \end{aligned}$$

En utilisant la relation (2.58) avec $\tilde{\gamma} = 0$, et en se servant des équations (6.4) on trouve l'expression suivante de l'opérateur R^2 :

$$\begin{aligned} R^2 &= (i\hbar)^2 \left\{ [1 + \omega_1 p^2]^2 \frac{d^2}{dp^2} + [1 + \omega_1 p^2] \left[(N_+ \beta + 2\beta') p + \frac{N_-}{p} \right] \frac{d}{dp} \right. \\ &\quad \left. - \frac{L^2}{p^2} - 2\beta L^2 - \beta^2 L^2 p^2 \right\}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

avec les notations :

$$\omega_1 = \beta + \beta', \quad N_{\pm} = N \pm 1.$$

Finalement, à partir des équations (6.1), (6.2) et (6.5), l'équation de Schrödinger pour le potentiel $V(r) = -\alpha/r^2$ à N dimensions en présence d'une longueur minimale s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2\psi_N(p)}{dp^2} + \left\{ \frac{4p}{p^2 - 2\mu E} + \frac{(N_+\beta + 2\beta')p + \frac{N_-}{p}}{1 + \omega_1 p^2} \right\} \frac{d\psi_N(p)}{dp} + \\
 & + \left\{ 2p \left[\left((N + 2)\beta + 3\beta' \right) p + \frac{N}{p} \right] + \frac{1}{1 + \omega_1 p^2} [-\beta^2 L^2 p^4 + 2\beta L^2 (\mu\beta E - 1)p^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + (4\mu\beta E - 1)L^2 + \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2} + \frac{2\mu EL^2}{p^2} \right] \right\} \frac{\psi_N(p)}{(1 + \omega_1 p^2)(p^2 - 2\mu E)} \\
 & = 0.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Dans le cas $N = 3$ et $l = 0$, l'équation (6.6) se réduit à l'équation (5.8) que nous avons établie au chapitre précédent.

6.2 Fonctions propres

Les solutions de l'équation (6.6) s'expriment par des fonctions de Heun tout comme dans le cas à 3 dimensions avec $l = 0$. Pour ceci nous allons montrer que l'équation (6.6) peut être réduite à la forme canonique de l'équation différentielle de Heun [96, 97].

En effet, introduisons la variable sans dimensions :

$$z = \frac{\omega_1 p^2 - 1}{\omega_1 p^2 + 1},$$

l'équation (6.6) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & (1 - z^2) \frac{d^2\psi_N}{dz^2} + \left\{ \left(\frac{N_+\beta + 2\beta'}{2\omega_1} - \frac{3}{2} \right) (1 + z) + \frac{N}{2}(1 - z) + \frac{4(1 + z)}{(1 + 2\omega) + (1 - 2\omega)z} \right\} \frac{d\psi_N}{dz} \\
 & + \left\{ \frac{1}{1 - z} \left[\left(\kappa_0 - (\omega_4\omega + \frac{1}{4})L^2 \right) (1 - z)^2 - \frac{\omega_4^2 L^2}{4} (1 + z)^2 + N_-(1 - z) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{N_+\beta + 2\beta'}{\omega_1} (1 + z) + 2 \right] - \frac{\omega L^2 (1 - z)^2}{1 + z} - \frac{\omega_4 L^2 (\omega_4\omega + 1)(1 + z)}{2} \right\} \\
 & \frac{\psi_N}{(1 + 2\omega) + (1 - 2\omega)z} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

où :

$$\omega_4 = \frac{\beta}{\beta + \beta'}, \quad \omega = -\mu\omega_1 E, \quad \kappa = 4 \kappa_0 = \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2}.$$

6. Le potentiel $\frac{-\alpha}{r^2}$ à N dimensions avec une longueur élémentaire 73

Effectuons maintenant la transformation :

$$\psi_N(z) = (1-z)^\lambda(1+z)^{\lambda'} f(z), \quad (6.8)$$

où λ et λ' sont des constantes arbitraires. Ainsi, l'équation de $f(z)$ est :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f}{dz^2} + \left\{ \frac{\frac{N_+\beta+2\beta'}{2\omega_1} - \frac{3}{2} - 2\lambda}{(1-z)} + \frac{2\lambda' + \frac{N}{2}}{(1+z)} + \frac{4}{(1-z)[(1+2\omega) + (1-2\omega)z]} \right\} \frac{df}{dz} \\ & + \frac{1}{(1-z^2)^2 [(1+2\omega) + (1-2\omega)z]} \left\{ [(1+2\omega) + (1-2\omega)z] [\lambda(\lambda-1)(1+z)^2 \right. \\ & - 2\lambda\lambda'(1-z^2) + \lambda'(\lambda'-1)(1-z)^2 - \lambda(\frac{N_+\beta+2\beta'}{2\omega_1} - \frac{3}{2})(1+z)^2 - \frac{N}{2}\lambda(1-z^2) \\ & \left. + \lambda'(\frac{N_+\beta+2\beta'}{2\omega_1} - \frac{3}{2})(1-z^2) + \frac{N}{2}\lambda'(1-z)^2] + (\frac{N_+\beta+2\beta'}{\omega_1} - 4\lambda)(1+z)^2 \right. \\ & \left. + (N_- + 4\lambda')(1-z^2) + (\kappa_0 - (\omega_4\omega + \frac{1}{4})L^2)(1+z)(1-z)^2 \right. \\ & \left. - \frac{\omega_4 L^2}{2}(\omega_4\omega + 1)(1+z)^2(1-z) - \frac{\omega_4^2 L^2}{4}(1+z)^3 - \frac{\omega L^2}{2}(1-z)^3 + 2(1+z) \right\} f \\ & = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Nous choisissons λ et λ' en imposant que le coefficient de $f(z)$ dans l'équation différentielle (6.9) soit nul pour $z = \pm 1$; ceci donne les deux équations suivantes pour λ et λ' :

$$\lambda^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{N_+\beta+2\beta'}{2\omega_1}\right)\lambda + \frac{1}{2} + \frac{N_+\beta+2\beta'}{2\omega_1} - \frac{\omega_4^2 L^2}{4} = 0, \quad (6.10)$$

$$\lambda'^2 + \left(\frac{N}{2} - 1\right)\lambda' - \frac{L^2}{4} = 0. \quad (6.11)$$

Les valeurs de λ et λ' satisfaisant ce système sont :

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{4}\left(3 + \frac{N_+\beta+2\beta'}{\omega_1} \pm \Delta_1\right), \quad (6.12)$$

$$\lambda'_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{N}{2} \pm \Delta_2\right), \quad (6.13)$$

où :

$$\Delta_1 = \sqrt{\left(\frac{N\beta + \beta'}{\omega_1}\right)^2 + 4\omega_4^2 L^2}, \quad \Delta_2 = \sqrt{\left(\frac{N}{2} - 1\right)^2 + L^2}. \quad (6.14)$$

6. Le potentiel $\frac{-\alpha}{r^2}$ à N dimensions avec une longueur élémentaire 74

Nous sélectionnons $(\lambda, \lambda') = (\lambda_-, \lambda'_+)$; ainsi la transformation (6.8) s'écrit :

$$\psi_N(z) = (1-z)^{\frac{1}{4}(3+\frac{N+\beta+2\beta'}{\omega_1}-\Delta_1)}(1+z)^{\frac{1}{2}(1-\frac{N}{2}+\Delta_2)}f(z). \quad (6.15)$$

En remplaçant λ et λ' par leur valeurs dans l'équation (6.9), on obtient après un calcul un peu long l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left\{ \frac{1-\frac{\Delta_1}{2}}{z-1} + \frac{1+\Delta_2}{z+1} + \frac{2}{z-z_0} \right\} \frac{df}{dz} + \left\{ \frac{\rho z + \sigma}{(z-1)(z+1)(z-z_0)} \right\} f = 0, \quad (6.16)$$

où :

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{2\omega + 1}{2\omega - 1}, \\ \rho &= \frac{10 - N}{4} + \frac{N(N\beta + \beta')}{8\omega_1} - \frac{3\Delta_1}{4} + \frac{3\Delta_2}{2} - \frac{\Delta_1\Delta_2}{4} \\ &\quad + \frac{1}{1-2\omega} \left\{ \left[\frac{\omega_4^2}{2} - \omega_4\omega + \frac{\omega_4}{2}(\omega_4\omega + 1) \right] L^2 + \kappa_0 \right\}, \\ \sigma &= \frac{1}{1-2\omega} \left\{ \frac{1}{4}(1+2\omega) \left(\frac{N(N\beta + \beta')}{2\omega_1} + 2 - N \right) + \frac{1}{4}(2\omega - 3)\Delta_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(6\omega - 1)\Delta_2 - \frac{1}{4}(1+2\omega)\Delta_1\Delta_2 + \left[\frac{\omega_4^2}{2} + \omega_4\omega + \frac{\omega_4}{2}(\omega_4\omega + 1) \right] L^2 - \kappa_0 \right\}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

L'équation différentielle (6.16) possède quatre points singuliers réguliers en $z = -1, 1, z_0, \infty$. Cette équation du type de Fuchs, peut être ainsi transformée en forme canonique de Heun. En effet, le simple changement de variable,

$$\xi = \frac{z+1}{2}, \quad (6.18)$$

mène à la forme canonique suivante de l'équation de Heun :

$$\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} + \left(\frac{c}{\xi} + \frac{e}{\xi-1} + \frac{d}{\xi-\xi_0} \right) \frac{df(\xi)}{d\xi} + \left(\frac{ab\xi + q}{\xi(\xi-1)(\xi-\xi_0)} \right) f(\xi) = 0, \quad (6.19)$$

avec les paramètres :

6. Le potentiel $\frac{-\alpha}{r^2}$ à N dimensions avec une longueur élémentaire 75

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{3}{2} - \frac{\Delta_1}{4} + \frac{\Delta_2}{2} - \frac{\tilde{\nu}}{2}, \\
 b &= \frac{3}{2} - \frac{\Delta_1}{4} + \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\tilde{\nu}}{2}, \quad c = 1 + \Delta_2, \quad d = 2, \quad e = 1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \xi_0 = \frac{2\omega}{2\omega - 1}, \\
 q &= -\frac{1}{1 - 2\omega} \left\{ 1 + \left(\frac{N}{4} - 3\right)\omega - \frac{N(N-1)}{4}\omega_4\omega + \frac{\omega\Delta_1}{2} + (1 - 3\omega)\Delta_2 + \frac{\omega\Delta_1\Delta_2}{2} - \omega_4\omega L^2 + \kappa_0 \right\}, \\
 \tilde{\nu} &= \left(\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 (\omega_4 - 1)^2 + \frac{1}{1 - 2\omega} \left\{ [(1 - 2\omega)(1 - 2\omega_4) - \omega_4^2(4\omega + 1)] L^2 - 4\kappa_0 \right\} \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Au voisinage de $\xi = 0$, les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (6.19) sont [97] :

$$f_1(\xi) = H(\xi_0, q, a, b, c, d; \xi), \tag{6.21}$$

$$f_2(\xi) = \xi^{1-c} H(\xi_0, q', a', b', c', d; \xi), \tag{6.22}$$

où :

$$\begin{aligned}
 q' &= q - (1 - c) [d + \xi_0(1 + a + b - c - d)], \\
 a' &= 1 + a - c, \quad b' = 1 + b - c, \quad c' = 2 - c.
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

$H(\xi_0, q, a, b, c, d; \xi)$ est la fonction de Heun définie au chapitre précédent. Il est à noter que dans le cas $c = 1$, les solutions $f_1(\xi)$ et $f_2(\xi)$ deviennent identiques. Il existe alors une autre solution dépendant de $\ln \xi$.

Maintenant, nous pouvons écrire les deux solutions de l'équation de Schrödinger déformée (6.6) pour le potentiel $-\alpha/r^2$ à N dimensions. Ainsi, en utilisant les relations (6.15), (6.18), (6.21) et (6.22), nous obtenons :

$$\psi_{N,1}(\xi) = A_N \xi^{\frac{1}{2}(1 - \frac{N}{2} + \Delta_2)} (1 - \xi)^{\frac{1}{4}[5 + (N-1)\omega_4 - \Delta_1]} H(\xi_0, q, a, b, c, d; \xi), \tag{6.24}$$

$$\psi_{N,2}(\xi) = B_N \xi^{\frac{1}{2}(1 - \frac{N}{2} - \Delta_2)} (1 - \xi)^{\frac{1}{4}[5 + (N-1)\omega_4 - \Delta_1]} H(\xi_0, q', a', b', c', d; \xi), \tag{6.25}$$

A_N et B_N sont des constantes de normalisation.

Cas à 3 dimensions

Dans ce cas spécial, un calcul direct donne $\Delta_2 = \frac{1}{2}(l + \frac{1}{2})$. Par conséquent $\psi_{3,2}(\xi)$ diverge pour $\xi = 0$ ($p = 0$), ainsi c'est $\psi_{3,1}(\xi) \equiv \psi_3(\xi)$ qui représente la fonction d'onde des états liés. Explicitement, elle s'écrit :

$$\psi_3(\xi) = A \xi^{\frac{l}{2}} (1 - \xi)^{\frac{1}{4}(5 + 2\omega_4 - \sqrt{(1 + 2\omega_4)^2 + 4\omega_4^2 L^2})} H(\xi_0, q_3, a_3, b_3, c_3, d; \xi), \tag{6.26}$$

6. Le potentiel $\frac{-\alpha}{r^2}$ à N dimensions avec une longueur élémentaire 76

avec les paramètres :

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{1}{4} \left(7 + 2l - \sqrt{(1 + 2\omega_4)^2 + 4\omega_4^2 L^2} \right) - \frac{1}{2} \tilde{\nu}_3, \\
 b_3 &= \frac{1}{4} \left(7 + 2l - \sqrt{(1 + 2\omega_4)^2 + 4\omega_4^2 L^2} \right) + \frac{1}{2} \tilde{\nu}_3, \\
 c_3 &= \frac{3}{2} + l, \quad d = 2, \quad e_3 = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{(1 + 2\omega_4)^2 + 4\omega_4^2 L^2}, \quad \xi_0 = \frac{2\omega}{2\omega - 1}, \\
 q_3 &= \frac{-1}{1 - 2\omega} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{15}{4} \omega + \omega_4 \omega \left(\frac{3}{2} + L^2 \right) + (1 - 3\omega)l + \frac{\omega}{2} \left(l + \frac{3}{2} \right) \sqrt{(1 + 2\omega_4)^2 + 4\omega_4^2 L^2 + \kappa_0} \right\}, \\
 \tilde{\nu}_3 &= \sqrt{(\omega_4 - 1)^2 + \frac{1}{1 - 2\omega} \{ [(1 - 2\omega)(1 - 2\omega_4) - \omega_4^2(4\omega + 1)] L^2 - 4\kappa_0 \}}.
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

La solution (6.26) généralise le résultat obtenu au chapitre précédent. Ainsi, en posant $l = 0$ dans les équations (6.26) et (6.27) on obtient la solution (5.60).

Le spectre d'énergie dépendant du moment orbital l s'obtient exactement comme dans le cas $l = 0$ en imposant la condition (5.15) : $p^2 \psi \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$. Nous obtenons ainsi la condition spectrale :

$$H\left(\frac{2\omega - 1}{2\omega}, \frac{2\omega - 1}{2\omega} q_3, a_3, b_3, c_3, e_3; \frac{2\omega - 1}{2\omega}\right) = 0. \tag{6.28}$$

Les niveaux d'énergie $\omega_{n,l} = -\mu(\beta + \beta') E_{n,l}$ sont les zéros de la fonction de Heun. Dans la limite $\omega \ll 1$, la fonction de Heun peut être transformée à une fonction hypergénométrique par la relation (5.74), et l'équation (6.28) devient :

$$F(\tilde{a}_3, \tilde{b}_3, c_3; \frac{-1}{2\omega}) = 0, \tag{6.29}$$

où

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_3 &= \frac{5}{4} + \frac{l}{2} + \frac{i\nu_3}{2}, \\
 \tilde{b}_3 &= \frac{5}{4} + \frac{l}{2} - \frac{i\nu_3}{2}, \\
 c_3 &= \frac{3}{2} + l, \text{ avec } \nu_3 = \sqrt{\kappa - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

En suivant la même procédure que dans le chapitre précédent, on obtient le spectre suivant :

$$E_{n,l} = \frac{-1}{2\mu(\beta + \beta')} \exp \left\{ \frac{2}{\nu_3} \left[\arg(A_3) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \right] \right\}, \tag{6.30}$$

$$|E_n| \ll \frac{1}{4\mu(\beta + \beta')} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{6.31}$$

où :

$$A_3 = \frac{\Gamma(i\nu_3)}{\Gamma(\frac{5}{4} + \frac{l}{2} + i\frac{\nu_3}{2})\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{l}{2} + i\frac{\nu_3}{2})}.$$

Comme en mécanique quantique habituelle, la seule différence entre l'expression (6.30) et celle du cas $l = 0$ (Eq. (5.76)) est le changement de la valeur critique κ^* de la constante de couplage qui sépare les deux intervalles dans lesquels il existe ou il n'existe pas d'état lié.

6.3 Conclusions

Dans ce chapitre, l'équation de Schrödinger pour le potentiel $-\alpha/r^2$ à N dimensions en présence d'une longueur élémentaire a été résolue analytiquement pour toutes les valeurs du nombre quantique du moment orbital l et des paramètres de déformation β et β' . Dans la représentation des impulsions, la fonction d'onde est une fonction de Heun quelle que soit la dimension N , et elle se réduit à une fonction hypergéométrique dans certains cas particuliers. Dans le cas à 3 dimensions, la fonction d'onde et le spectre d'énergie ont été donnés explicitement, en généralisant ainsi les résultats du chapitre précédent au cas $l \neq 0$.

Dans les chapitres qui suivent, nous allons étudier en détail le problème à 2 dimensions, en considérant le problème d'un dipôle en présence d'une corde cosmique, et le potentiel $-\alpha/x^2$ à 1 dimension.

Chapitre 7

Dipôle dans le champ d'une corde cosmique avec une longueur élémentaire

Le but de ce chapitre est de considérer une application physique à 2 dimensions spatiales du potentiel α/r^2 en présence d'une longueur élémentaire. Nous avons choisi le problème d'un dipôle interagissant avec le champ d'une corde cosmique, où l'interaction est décrite par un potentiel α/r^2 à 2 dimensions [88, 89, 90].

7.1 Défauts topologiques de l'univers et cordes cosmiques

Dans le cadre des théories de Grande Unification (GUT), Kibble [82] a prédit à la fin des années 1970 que lors d'une phase de refroidissement de l'univers primordial, après le "Big Bang", celui-ci aurait connu une série de brisures spontanées de symétries. Ces brisures de symétries sont accompagnées de transitions de phase. D'après le mécanisme de Kibble, des défauts topologiques se forment génériquement lors de ces transitions. Ces défauts sont des régions de l'espace dans lesquelles est concentrée une très grande densité de l'énergie. Leurs natures sont déterminées par leurs dimensions spatiales. Celles-ci dépendent de la topologie de l'ensemble des vides accessible aux champs de Higgs, présents dans la théorie (GUT). Plusieurs types de défauts sont possibles :

défauts ponctuels, appelés monopôles, défauts linéaires (cordes cosmiques), défauts surfaciques (murs de domaine, en anglais "domain walls") et aussi des combinaisons entre ces défauts [84, 83, 85]. Ces défauts sont souvent stables ; il est donc probable que quelques uns d'eux auraient survécu, peut être, jusqu'à nos jours [84]. Ces défauts sont observables en cosmologie. Les monopôles et les murs de domaine sont tellement massifs qu'ils en viendraient à dominer rapidement la dynamique de l'univers, ce qui est en désaccord avec les observations [86]. Cependant, les cordes cosmiques sont compatibles avec les observations actuelles et leurs effets cosmologiques pourraient être confirmés dans le futur. Les cordes cosmiques sont donc censées être les défauts cosmologiques les plus importants [84], et ont constitué le sujet de nombreux livres et articles¹. Comme conséquences importantes de l'existence probable des cordes cosmiques, on peut citer par exemple le dédoublement des images des quasars derrière une corde, les fluctuations de température dans le fond diffus cosmologique (cosmic microwave background, CMB) et la compression de la matière lors du passage d'une corde en mouvement [87].

Dans la suite nous allons nous intéresser aux cordes cosmiques, en considérant un dipôle interagissant avec le champ généré par de tels défauts.

7.2 Interaction entre un dipôle et une corde cosmique

Considérons une particule de masse μ et moment dipolaire D se mouvant dans le champ d'une corde cosmique. Dans la théorie quantique non relativiste, l'interaction entre le dipôle et la corde cosmique est décrite par le potentiel [88, 89, 90, 92] :

$$V(r) = \frac{(1 - \delta^2)D^2}{48\pi\delta^2 r^2} \cos 2\theta, \quad (7.1)$$

où θ représente l'angle entre la corde cosmique et le moment dipolaire. Le paramètre δ caractérisant la corde cosmique est donné par :

$$\delta = 1 - 4G\mu_0 < 1,$$

où μ_0 est la densité linéaire de masse de la corde cosmique, et G est la constante gravitationnelle.

¹Voir par exemple la référence [85].

Il est important de noter que le potentiel (7.1) a été calculé en considérant l'énergie propre électromagnétique du dipôle due à la géométrie non plane au voisinage de la corde cosmique. En effet, la métrique de l'espace-temps du champ de la corde en coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) a l'expression suivante [88, 89, 90, 92] :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - \delta^2 r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (7.2)$$

Cette métrique est déduite par la résolution de l'équation d'Einstein pour une corde cosmique infinie le long de la direction z , avec le tenseur énergie-impulsion :

$$T^{\mu\nu} = \mu\delta(x)\delta(y) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le changement de variable $\phi \rightarrow \delta\phi = (1 - 4G\mu_0)\phi$, l'équation (7.2) devient une métrique de Minkowski, mais avec un angle qui varie de 0 à $2(1 - 4G\mu_0)\pi$. Ceci est appelé un espace conique.

Puisque l'espace a une symétrie cylindrique, la particule se meut le long de z comme si elle était libre. En supposant que la longueur de la corde cosmique le long de la direction z est infinie, alors on n'aura qu'à discuter le mouvement de la particule sur un plan perpendiculaire à la direction z .

7.2.1 Fonction d'onde

La fonction d'onde du dipôle s'écrit, selon (6.3) :

$$\psi_2(\vec{p}) = e^{-im\varphi}\psi_2(p), \quad (7.3)$$

où m est le nombre quantique magnétique.

En mécanique quantique en présence d'une longueur élémentaire, la partie radiale $\psi_2(p)$ de la fonction d'onde (7.3) peut être calculée directement à partir des deux solutions du cas à N dimensions (Eqs. (6.24), (6.25)) en posant $N = 2$, et $\kappa = -\frac{M(1-\delta^2)D^2}{24\pi\delta^2\hbar^2} \cos 2\theta$. Un calcul direct donne $\Delta_2 = m/2$, donc la solution (6.25) est divergente au voisinage de $\xi = 0$ lorsque $m > 0$. Par conséquent c'est l'équation (6.24) qui donne la fonction d'onde physique du dipôle dans le champ de la corde cosmique ; elle a l'expression suivante :

$$\psi_2(\xi) \equiv \psi_{21}(\xi) = A\xi^{\frac{m}{2}}(1-\xi)^{\frac{1}{4}} \left[5 + \omega_4 - \sqrt{(1+\omega_4)^2 + 4\omega_4^2 m^2} \right] H(\xi_0, q_2, a_2, b_2, c_2, d; \xi), \quad (7.4)$$

avec les paramètres :

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{4} \left(6 + 2m - \sqrt{(1+\omega_4)^2 + 4\omega_4^2 m^2} \right) - \frac{1}{2} \tilde{\nu}_2, \\ b_2 &= \frac{1}{4} \left(6 + 2m + \sqrt{(1+\omega_4)^2 + 4\omega_4^2 m^2} \right) + \frac{1}{2} \tilde{\nu}_2, \\ c_2 &= 1 + m, \quad d = 2, \quad e_2 = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{(1+\omega_4)^2 + 4\omega_4^2 m^2}, \quad \xi_0 = \frac{2\omega}{2\omega - 1}, \\ q_2 &= \frac{-1}{1-2\omega} \left\{ 1 - \frac{\omega}{2}(5 + \omega_4) + m(1 - 3\omega) - \omega\omega_4 m^2 + \frac{\omega}{2}(m+1) \sqrt{(1+\omega_4)^2 + 4\omega_4^2 m^2} + \frac{\kappa}{4} \right\}, \\ \tilde{\nu}_2 &= \sqrt{\frac{1}{4}(\omega_4 - 1)^2 + \frac{1}{1-2\omega} \left\{ [(1-2\omega)(1-2\omega_4) - \omega_4^2(4\omega+1)] m^2 - \kappa \right\}}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Il convient de noter que dans le cas $m = 0$, la solution (6.25) s'identifie avec la solution (6.24) ; une deuxième solution est donné par [97] :

$$\psi_{2,2}(\xi) = A(1-\xi) \left(H(\xi_0, q_2, a_2, b_2, c_2, d; \xi) \ln \xi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi^n \right).$$

Cette solution diverge aussi au voisinage de $\xi = 0$ à cause du logarithme. On en conclut que quel que soit $m \geq 0$, la solution physique est bien $\psi_2(\xi)$ donnée par (7.4).

7.2.2 Énergies propres

Maintenant, nous allons examiner les états liés du dipôle dans le champ d'une corde cosmique. À cet effet, nous considérons le cas spécial $m = 0$ (état fondamental), et nous considérons le cas $\beta' = 0$ pour simplifier les équations. Dans ce cas, on a $e_2 = 0$ et $q_2 = -a_2 b_2$, donc l'équation de Heun (6.19) se réduit à une équation hypergéométrique, et la fonction d'onde (7.4) devient :

$$\psi_2(\xi) = A(1-\xi) F(a_2^*, b_2^*, c_2^*; \xi/\xi_0), \quad (7.6)$$

où les paramètres de la fonction hypergéométrique sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 a_2^* &= 1 - \frac{\tilde{\nu}_2^*}{2}, & b_2^* &= 1 + \frac{\tilde{\nu}_2^*}{2}, & c_2^* &= 1, \\
 \tilde{\nu}_2^* &= \sqrt{\frac{-\kappa}{(1-2\omega)}}, & \kappa &= -\frac{\mu(1-\delta^2)D^2}{24\pi\delta^2\hbar^2} \cos 2\theta, \\
 \xi &= \frac{\beta p^2}{\beta p^2 + 1}, & \xi_0 &= \frac{2\omega}{2\omega - 1}, & \omega &= -\mu\beta E.
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Nous pouvons maintenant étudier l'existence des états liés du problème. Observons tout d'abord que le paramètre κ peut prendre des valeurs positives ou négatives car $-1 \leq \cos 2\theta \leq +1$. Il est important de mentionner qu'en mécanique quantique ordinaire, en utilisant la méthode des extensions self-adjointes, un état lié pourrait exister même si $\kappa \leq 0$ [37]. Ce cas a été considéré dans la référence [92]. Il a été montré en particulier que la corde cosmique pourrait lier le dipôle si $\theta \leq \frac{\pi}{4}$ lorsque le potentiel est faiblement répulsif ($-1 \leq \kappa \leq 0$); cet état lié serait une conséquence d'une "anomalie quantique" [92]. Étant donné que ce résultat va à l'encontre de l'intuition (il implique l'existence d'un état lié dans le cas d'un potentiel répulsif), il est intéressant d'étudier les états liés de ce système en présence d'une longueur minimale et de voir si le dipôle reste lié à la corde cosmique même si $\theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Commençons par rappeler que les fonctions propres du hamiltonien doivent se comporter dans la région de grandes impulsions comme :

$$p^2\psi_2(p) \underset{p \rightarrow \infty}{=} 0. \tag{7.8}$$

Cette condition peut être établie comme dans le cas à 3 dimensions en examinant l'équation intégrale équivalente à l'équation différentielle du problème².

À partir des équations (7.6) et (7.8) nous obtenons la condition de quantification suivante :

$$F(a_2^*, b_2^*, c_2^*; \frac{2\omega - 1}{2\omega}) = 0 \tag{7.9}$$

Pour examiner l'existence des états liés du dipôle dans le champ de la corde cosmique, nous avons tracé la fonction hypergéométrique de l'équation (7.9) en fonction de $\omega = -\mu\beta E$ pour des valeurs différentes de $\kappa = -\frac{\mu(1-\delta^2)D^2}{24\pi\delta^2\hbar^2} \cos 2\theta$. Les énergies propres ω_n sont déterminées par les zéros de la fonction $F(a_2^*, b_2^*, c_2^*; \frac{2\omega-1}{2\omega})$

²voir la section "Equation intégrale" du chapitre 5.

de l'équation (7.9). La figure (7.1) montre l'inexistence d'états liés si le potentiel est répulsif. Les paramètres sont identiques à ceux utilisés dans la référence [92], à savoir $\theta = \pi/12$, $D = 1$, $\delta = 0.2$ pour la courbe en tirets, et $\theta = \pi/8$, $D = 1.6$, $\delta = 0.2$ pour la courbe pleine. Dans la référence [92] on prédit un état lié dépendant de la valeur du paramètre des extensions self-adjointes (Σ); cet état lié peut être toujours supprimé par un choix convenable de Σ . Cependant, en mécanique quantique avec une longueur élémentaire, il n'y a aucun état lié quelles que soient les valeurs des paramètres de déformation β et β' . La figure (7.2) montre que dans le cas $\theta = \pi/4$ (absence d'interaction, c.-à-d., $\kappa = 0$) la corde cosmique ne peut pas lier le dipôle. D'autre part dans la référence [92], un état lié existe même si la constante de couplage est nulle.

Les figures (7.3) et (7.4) montrent l'apparition d'états liés pour $\theta > \pi/4$ (potentiel attractif). L'énergie de l'état fondamental (ω_0) est finie; pour $\kappa = 1/5$, $\omega_0 = 5.10^{-4}$ et pour $\kappa = 6$, $\omega_0 = 0.52$. Comme en mécanique quantique habituelle si le potentiel est régularisé aux petites distances [90], il existe un nombre infini d'états excités presque identiques avec $\omega \simeq 0$ (point d'accumulation). Dans la figure (7.4), l'énergie du premier état excité est visible.

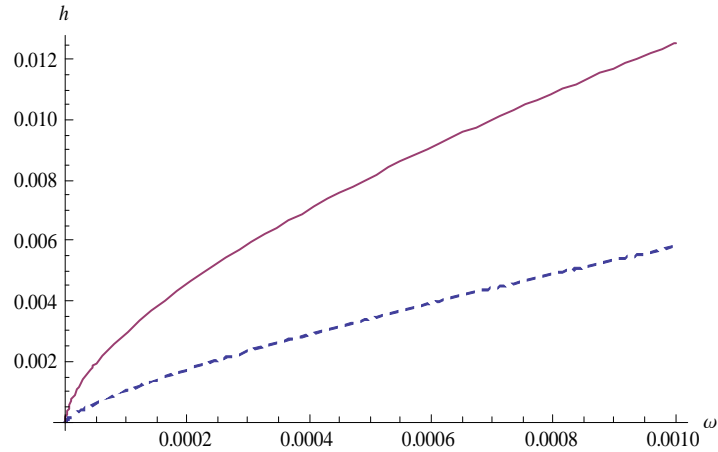


FIG. 7.1 – $h \equiv F(a_2^*, b_2^*, c_2^*; \frac{2\omega-1}{2\omega})$ en fonction de ω , la courbe en tirets correspond à $\kappa = -0.2758$, et la courbe pleine correspond à $\kappa = -0.5767$.

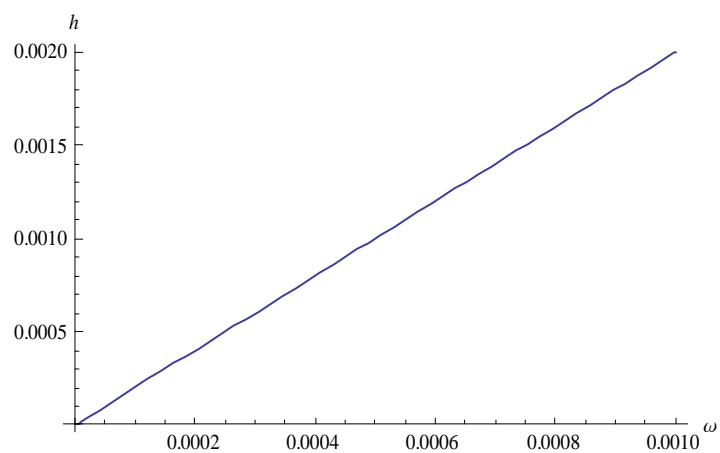


FIG. 7.2 – $h \equiv F(a_2^*, b_2^*, c_2^*, \frac{2\omega-1}{2\omega})$ en fonction de ω , pour $\kappa = 0$.

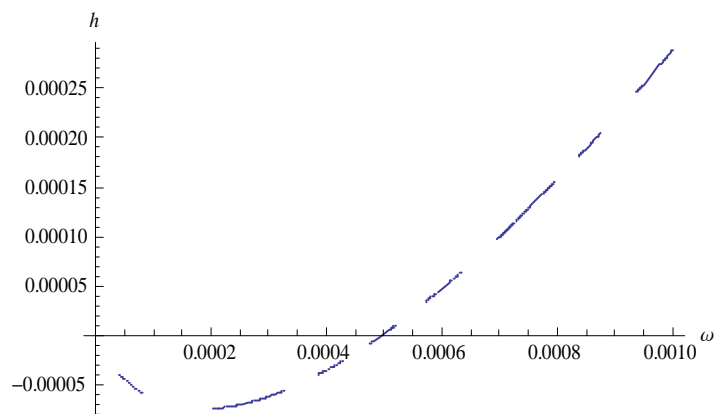


FIG. 7.3 – $h \equiv F(a_2^*, b_2^*, c_2^*, \frac{2\omega-1}{2\omega})$ en fonction de ω , pour $\kappa = 1/5$.

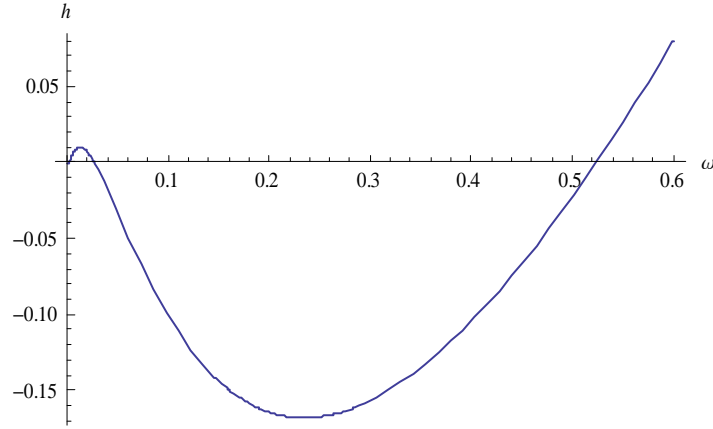


FIG. 7.4 – $h \equiv F(a_2^*, b_2^*, c_2^*; \frac{2\omega-1}{2\omega})$ en fonction de ω , pour $\kappa = 6$.

En conclusion, la condition d'existence d'états liés dans ce problème est : $\kappa > \kappa_2^* = 0$. Il convient de mentionner ici que la valeur critique de la constante de couplage κ_2^* est différente de celle du cas à $3D$, où $\kappa_3^* = 1/4$. En effet, la valeur de κ dans la figure (7.3) est la même que dans la figure (5.3) du chapitre 5, où il n'y a pas d'états liés.

Pour compléter cette section, considérons maintenant le cas $\theta > \frac{\pi}{4}$ ($\nu_2 = \sqrt{\kappa}$ est réel) et le paramètre de déformation β tel que $\omega = -\beta\mu E \ll 1$. Par la même méthode que celle utilisée au chapitre 5, la condition de quantification (7.9) donne l'expression suivante du spectre d'énergie [32] :

$$E_n = \frac{-\hbar^2}{\mu(\hbar\sqrt{2\beta})^2} \exp \left\{ \frac{2}{\nu_2} \left[\arg(A) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \right] \right\},$$

$$\nu_2 = \sqrt{\kappa}, \quad A = \frac{\Gamma(i\nu_2)}{\Gamma(1 + \frac{i\nu_2}{2})\Gamma(\frac{i\nu_2}{2})},$$

avec :

$$|E_n| \ll \frac{1}{\mu\beta} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.10)$$

Cette expression est similaire à celle obtenue dans la référence [90], où on a introduit, à la main, une coupure (a) pour régulariser l'interaction aux petites distances ; celle-ci a été interprétée comme caractérisant le rayon fini de la corde cosmique. Dans la relation (7.10), la longueur minimale, $(\Delta r)_{\min} = \hbar\sqrt{2\beta}$, joue le même rôle que a . Nous concluons que cette longueur élémentaire peut être associée à la dimension finie de la corde cosmique.

7.3 Conclusions

Comme application du chapitre précédent, le problème d'un dipôle dans le champ d'une corde cosmique a été considéré. Ce système est décrit en théorie quantique non relativiste par un potentiel $-\alpha/r^2$ à 2 dimensions, où la constante de couplage dépend de l'angle entre la corde cosmique et le dipôle (θ). Les fonctions propres du hamiltonien en présence d'une longueur minimale ont été données, et l'équation des états liés correspondants a été établie. Dans ce formalisme, la corde cosmique ne peut pas lier le dipôle si $\theta \leq \pi/4$, quelle que soient les valeurs de β et β' , ce résultat est différent de celui de la référence [92], où la méthode des extensions self-adjointes [37] est utilisée. Dans le cas où $\theta > \pi/4$, il existe un nombre infini d'états liés et l'énergie est bornée inférieurement. Une expression du spectre d'énergie a été donnée dans la limite $\beta, \beta' \ll 1$. Le résultat est similaire à celui de la référence [90], où le même problème est résolu avec la technique standard de régularisation par une coupure (a) aux petites distances. La longueur élémentaire joue le rôle d'une coupure naturelle comme a , et peut être associée au rayon fini de la corde cosmique.

Chapitre 8

Le potentiel $-\alpha/x^2$ en mécanique quantique avec une longueur élémentaire

Nous abordons maintenant l'étude du cas à une dimension, à savoir le potentiel $-\alpha/x^2$. Rappelons que ce potentiel joue un rôle fondamental dans l'étude du phénomène de mouillage (wetting) entre deux surfaces [81]. Nous allons nous intéresser plus particulièrement à l'effet de la longueur élémentaire sur le nombre des états liés de ce potentiel. Avant cela, nous allons présenter très brièvement les principaux résultats en mécanique quantique habituelle concernant ce problème.

8.1 Le potentiel $-\alpha/x^2$ en mécanique quantique ordinaire

L'équation de Schrödinger pour le potentiel $V(x) = -\alpha/x^2$ est similaire à celle du potentiel $V(r) = -\alpha/r^2$ à 3 dimensions (3D), avec $l = 0$. Cependant, le nombre des états liés pour des petites valeurs de α telles que $2\mu\alpha/\hbar^2 \leq 1/4$ est différent. À 3D, le potentiel ne peut pas lier la particule, en revanche à 1D, un seul état lié existe [98, 99]. Cette différence est due au fait que nous devons considérer des fonctions propres paires et impaires dans le problème unidimensionnel. Pour des valeurs grandes de la constante de couplage ($2\mu\alpha/\hbar^2 > 1/4$), il y a un nombre infini d'états liés à 1D comme à 3D.

Dans la référence [98], les auteurs ont considéré le potentiel symétrique :

$$\lambda V(x) = -\frac{1}{4}\lambda(|x| + d)^{-2}, \quad (8.1)$$

où d est une constante positive. Pour $0 < \lambda < 1$, les auteurs ont montré que l'énergie du seul état lié qui existe peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sqrt{-E(\lambda)} = -\frac{1}{2}(\lambda + 2a\lambda^2 \ln \lambda) \int dx V(x) + o(\lambda^2). \quad (8.2)$$

Ce résultat a été confirmé dans la référence [99] en montrant sa validité en particulier pour la valeur critique $\lambda = 1$. Il a été montré également que cet état lié qui n'existe pas au cas à 3D provient des fonctions d'onde paires qui satisfont à la condition : $\psi'_+(0) = 0$. Les solutions impaires satisfaisant la même condition aux limites que les fonctions radiales $u_{l=0}(r)$ à 3D, à savoir $\psi_-(0) = 0$, ne possèdent pas d'états liés pour $0 < \lambda < 1$. Dans le cas $\lambda > 1$, les deux conditions imposées sur les solutions paires et impaires admettent un nombre infini d'états liés. Dans le cas où $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda - 1} \ll 1$, les énergies propres correspondant aux fonctions propres paires et impaires ont été données approximativement par les expressions suivantes :

$$\sqrt{-E^+} \simeq \frac{2}{d} \exp\left(\frac{-\pi n}{\nu} - C - 2\right), \quad \nu \ll 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.3)$$

$$\sqrt{-E^-} \simeq \frac{2}{d} \exp\left(\frac{-\pi n}{\nu} - C\right), \quad \nu \ll 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.4)$$

où E^+ et E^- correspondent, respectivement, aux solutions paires et impaires et $C = 0.5772\dots$ est la constante d'Euler. Lorsque $n/\nu \gg 1$, le spectre d'énergie s'écrit :

$$\sqrt{-E^+} \simeq \frac{2}{d} \exp\left(\frac{-\pi m + \arg[\Gamma(1 + i\nu)] - \arctan(2\nu)}{\nu}\right), \quad \frac{n}{\nu} \gg 1, \quad (8.5)$$

$$\sqrt{-E^-} \simeq \frac{2}{d} \exp\left(\frac{-\pi m + \arg[\Gamma(1 + i\nu)]}{\nu}\right), \quad \frac{n}{\nu} \gg 1. \quad (8.6)$$

8.2 Le potentiel $-\alpha/x^2$ en présence d'une longueur élémentaire

8.2.1 Équation de Schrödinger

Soit une particule de masse μ se mouvant à une dimension dans le champ du potentiel $V(x) = -\alpha/x^2$, $\alpha > 0$.

Dans le formalisme de la mécanique quantique avec une longueur minimale $(\Delta x)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$, l'équation de Schrödinger peut être déduite directement à partir de l'équation de Schrödinger (6.6) du potentiel $-\alpha/r^2$ à ND en posant $N = 1$, $\beta' = 0$ et $l = 0$. Nous avons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi(p)}{dp^2} + \left(\frac{6\beta p^3 + 4(1 - \mu\beta E)p}{(p^2 - 2\mu E)(1 + \beta p^2)} \right) \frac{d\psi(p)}{dp} \\ + \left(\frac{2(1 + 3\beta p^2)(1 + \beta p^2) + 2\mu\alpha/\hbar^2}{(p^2 - 2\mu E)(1 + \beta p^2)^2} \right) \psi(p) = 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Les deux solutions de cette équation se déduisent également en posant $N = 1$, $\beta' = 0$ et $l = 0$ dans les équations (6.24) et (6.25), solutions du potentiel $-\alpha/r^2$ à ND. Nous trouvons après un calcul direct :

$$\psi_1(\xi) = A_1(1 - \xi)\xi^{1/2}H(\xi_0, q, a, b, c, d; \xi), \quad (8.8)$$

$$\psi_2(\xi) = A_2(1 - \xi)H(\xi_0, q', a', b', c', d; \xi), \quad (8.9)$$

avec les paramètres suivants des fonctions de Heun :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(3 + i\tilde{\nu}_1), & \tilde{\nu}_1 &= \left(\frac{\kappa}{1 - 2\omega} \right)^{\frac{1}{2}}, & \kappa &= 2\mu\alpha/\hbar^2 \\ b &= \frac{1}{2}(3 - i\tilde{\nu}_1), & \xi_0 &= \frac{2\omega}{2\omega - 1}, & \omega &= -\mu\beta E \\ c &= \frac{3}{2}, & d &= 2, & e &= \frac{1}{2} \\ q &= -\frac{1}{1 - 2\omega} \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\omega + \frac{\kappa}{4} \right), & \xi &= \frac{\beta p^2}{1 + \beta p^2}, \end{aligned} \quad (8.10)$$

et :

$$\begin{aligned} a' &= 1 + a - c, & b' &= 1 + b - c, & c' &= 2 - c \\ q' &= q - (1 - c)[d + \xi_0(1 + a + b - c - d)] \end{aligned} \quad (8.11)$$

À la différence des cas à 2D et à 3D, où l'une des solutions est irrégulière au voisinage de $\xi = 0$ ($p = 0$), les deux fonctions d'onde (8.8) et (8.9) sont finies dans cette région. De plus, ψ_1 et ψ_2 se comportent de la même manière au voisinage de $\xi = 1$ ($p \rightarrow \infty$) comme :

$$\psi_{1,2} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} c_1 p^{-2} + c_2 p^{-3}. \quad (8.12)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes.

Nous concluons que ψ_1 et ψ_2 sont à carrés intégrables, et elles sont toutes deux nécessaires pour décrire le potentiel $-\alpha/x^2$ dans l'espace des impulsions dans cette version déformée de la mécanique quantique.

Il est important de noter que dans la limite $\beta \ll 1$, la fonction $\psi_1(\xi)$ et la solution (5.60) du cas déformé à 3D deviennent identiques à la fonction d'onde de la mécanique quantique ordinaire (4.18) dans le cas ($l = 0$). Ceci nous amène à associer la solution $\psi_1(\xi)$ aux fonctions impaires décrivant le potentiel $-\alpha/x^2$ dans l'espace des coordonnées. L'autre solution, $\psi_2(\xi)$, correspondrait ainsi aux fonctions paires. Ce résultat sera confirmé dans le paragraphe qui suit.

8.2.2 Problème des états liés

Nous allons examiner maintenant l'existence des états liés du potentiel $-\alpha/x^2$ en présence d'une longueur élémentaire ; nous allons obtenir le spectre d'énergie sans avoir besoin d'introduire une coupure comme en mécanique quantique ordinaire [98, 99].

Comme il a été discuté en détail dans le cas à 3D, le comportement physique des fonctions propres du hamiltonien dans la région de grandes impulsions est donné par la condition :

$$p^2 \psi(p) \underset{p \rightarrow \infty}{=} 0.$$

Ainsi, les deux solutions $\psi_{1,2}(\xi)$ doivent satisfaire :

$$p^2 \psi_1(p) \underset{p \rightarrow \infty}{=} 0, \quad (8.13)$$

$$p^2 \psi_2(p) \underset{p \rightarrow \infty}{=} 0. \quad (8.14)$$

Commençons par $\psi_1(\xi)$ en l'écrivant sous la forme [97] :

$$\psi_1(\xi) = A_1 \xi^{1/2} (1 - \xi) H\left(\frac{1}{\xi_0}, \frac{q}{\xi_0}, a, b, c, e; \frac{\xi}{\xi_0}\right), \quad (8.15)$$

on aboutit ainsi à la condition :

$$H\left(\frac{2\omega-1}{2\omega}, \frac{2\omega-1}{2\omega}q, a, b, c, e; \frac{2\omega-1}{2\omega}\right) = 0. \quad (8.16)$$

Dans le cas $\omega \ll 1$, la fonction de Heun se réduit à une fonction hypergéométrique¹ et la condition (8.16) devient :

$$F\left(\frac{5}{4} + i\frac{\nu}{2}, \frac{5}{4} - i\frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{-1}{2\omega}\right)_{\omega=-\beta\mu E \ll 1} = 0, \quad (8.17)$$

où :

$$\nu = \sqrt{\kappa - 1/4}, \quad \kappa = 2\mu\alpha/\hbar^2$$

Comme prévu, l'équation (8.17) n'est autre que la condition spectrale du cas à trois dimensions pour l'onde s , donnée par la relation (5.75). L'existence des états liés a été étudiée en détail dans le chapitre 5 ; il a été montré que la situation en présence d'une longueur minimale est similaire à celle qu'en mécanique quantique ordinaire si le potentiel est régularisé aux petites distances : Il y a un nombre infini d'états liés lorsque ν est réel ($\kappa > 1/4$), et il n'y a aucun état lié quand le potentiel est faiblement attractif ($\kappa \leq 1/4$) ; la longueur élémentaire joue simplement le rôle d'une coupure naturelle qui régularise le potentiel aux petites distances. Les énergies des états liés dans ce cas sont notées par E_n^- ; elles sont données par l'équation (5.76) avec $\beta' = 0$.

Retournons maintenant à la fonction d'onde $\psi_2(\xi)$, correspondant aux solutions paires. La condition (8.14) donne l'équation spectrale suivante :

$$H\left(\frac{2\omega-1}{2\omega}, \frac{2\omega-1}{2\omega}q', a', b', c', e; \frac{2\omega-1}{2\omega}\right) = 0. \quad (8.18)$$

Pour examiner le nombre des états liés, nous procédons comme pour ψ_1 en transformant la fonction de Heun à une fonction hypergéométrique dans le cas $\omega \ll 1$. Ainsi, l'équation (8.18) devient :

$$F\left(\frac{3}{4} + i\frac{\nu}{2}, \frac{3}{4} - i\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{-1}{2\omega}\right)_{\omega=-\beta\mu E \ll 1} = 0. \quad (8.19)$$

Cette équation possède des solutions pour ν réel ou imaginaire. Lorsque ν est réel, le spectre d'énergie impliqué par cette condition est le suivant :

$$E_n^+ = \frac{-1}{2\mu\beta} \exp\left\{\frac{2}{\nu} \left[\arg(A^+) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]\right\}, \quad (8.20)$$

avec $|E_n| \ll \frac{1}{4\mu\beta} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$

¹Voir l'équation (5.74).

et

$$A^+ \equiv \frac{\Gamma(i\nu)}{\Gamma(3/4 + i\nu/2)\Gamma(-1/4 + i\nu/2)} = |A^+| \exp[i \arg(A^+)].$$

Dans le cas où ν est imaginaire ($\nu = i\lambda$; λ est réel), l'équation (8.19) admet uniquement une seule solution de la forme :

$$2\omega = \left(-\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(3/4 - \lambda/2)\Gamma(-1/4 - \lambda/2)}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(3/4 + \lambda/2)\Gamma(-1/4 + \lambda/2)} \right)^{1/\lambda}. \quad (8.21)$$

Ces résultats sont confirmés par l'étude graphique de la condition spectrale (8.19). En effet, nous avons tracé la fonction hypergéométrique de l'équation (8.19) en fonction de $\omega = -\beta\mu E \ll 1$ pour différentes valeurs de la constante de couplage κ . Bien entendu, les zéros de cette fonction sont les états liés du problème. Les Figures (8.5) et (8.6) montrent qu'il existe un seul état lié si $\kappa \leq 1/4$; l'énergie de cet état lié est $\omega \approx 0.018$ pour $\kappa = 1/5$ et $\omega \approx 0.026$ pour $\kappa = \kappa^* = 1/4$. Dans les figures (8.7) et (8.8) avec $\kappa = 3$ et $\kappa = 8$, on peut voir plusieurs états excités avec des énergies $\omega \simeq 0$.

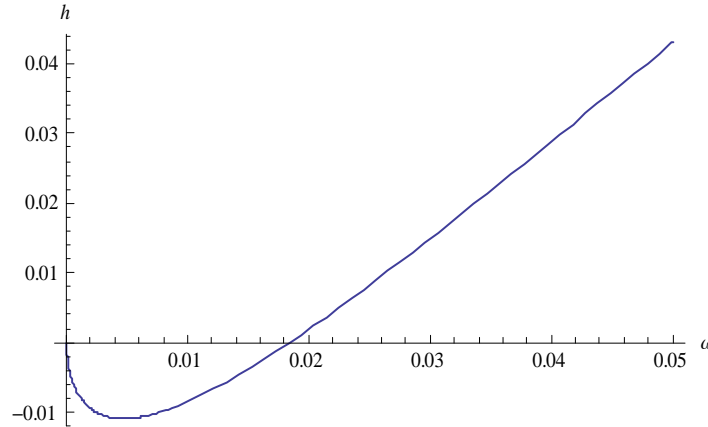


FIG. 8. 1 - $h \equiv F(\frac{3}{4} + i\frac{\nu}{2}, \frac{3}{4} - i\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{-1}{2\omega})$ en fonction de ω , pour $\kappa = 1/5$.

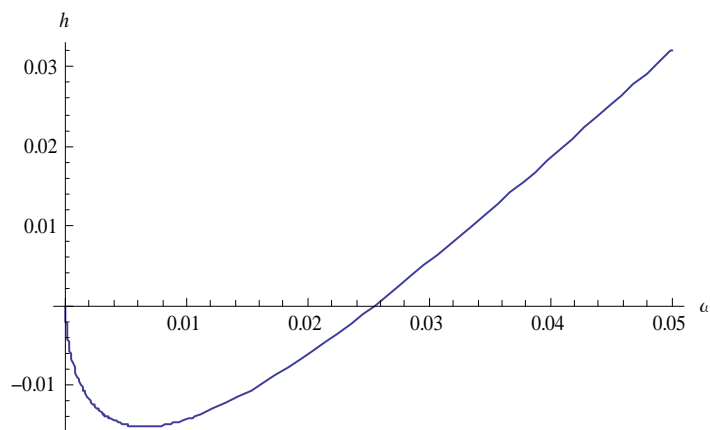


FIG. 8. 2 - $h \equiv F(\frac{3}{4} + i\frac{\nu}{2}, \frac{3}{4} - i\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{-1}{2\omega})$ en fonction de ω , pour $\kappa = 1/4$.

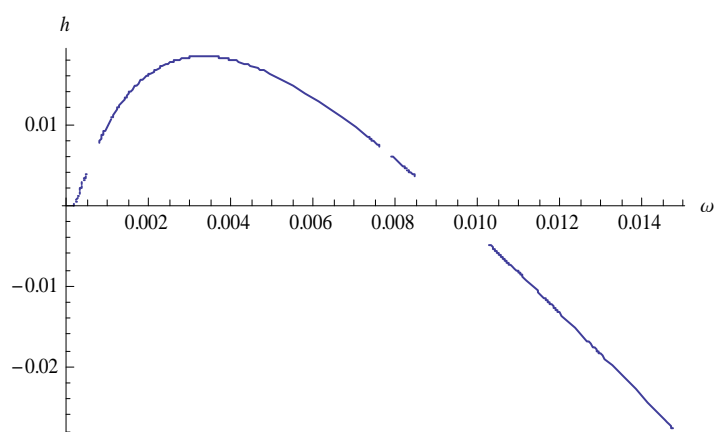


FIG. 8. 3 - $h \equiv F(\frac{3}{4} + i\frac{\nu}{2}, \frac{3}{4} - i\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{-1}{2\omega})$ en fonction de ω , pour $\kappa = 3$.

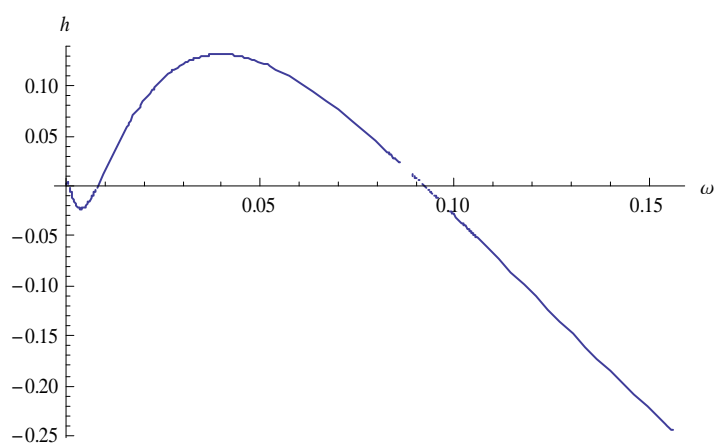


FIG. 8. 4 - $h \equiv F(\frac{3}{4} + i\frac{\nu}{2}, \frac{3}{4} - i\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{-1}{2\omega})$ en fonction de ω , pour $\kappa = 8$.

8.3 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié le potentiel $-\alpha/x^2$ dans le formalisme de la mécanique quantique en présence d'une longueur élémentaire. Deux solutions de l'équation de Schrödinger ont été données dans l'espace des impulsions. L'une des solutions correspond aux fonctions d'onde impaires de l'espace de configuration, et l'autre aux fonctions paires. Pour la solution "impaire", la condition spectrale est identique à celle du potentiel $-\alpha/r^2$ à 3 dimensions, avec $l = 0$. Pour celui-ci, il n'y a pas d'états liés si le potentiel est faiblement attractif ($2\mu\alpha/\hbar^2 \leq 1/4$) et il y a un nombre infini d'états liés si le potentiel est fortement attractif ($2\mu\alpha/\hbar^2 > 1/4$). L'équation des états liés pour la solution "paire" a été également établie; le nombre des états liés est infini pour un potentiel fortement attractif, et il existe un seul état lié si le potentiel est faiblement attractif. Ces résultats sont en accord qualitatif avec ceux de la mécanique quantique ordinaire pour un potentiel $-\alpha/x^2$ régularisé aux petites distances [98, 99].

Chapitre 9

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons présenté les outils fondamentaux du formalisme de la mécanique quantique non relativiste en présence d'une longueur élémentaire, introduite comme une incertitude supplémentaire sur la position, en modifiant la relation d'incertitude de Heisenberg. Ceci équivaut à modifier les relations de commutation entre les opérateurs de position et d'impulsion sous la forme $[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}\{(1 + \beta\hat{P}^2) + \beta'\hat{P}_i\hat{P}_j\}$, ce qui conduit à une algèbre non commutative des opérateurs de position ($[\hat{X}_i, \hat{X}_j] \neq 0$). Les nouveaux opérateurs de position et d'impulsion sont en général considérés comme des fonctions des anciens opérateurs \hat{x}_i et \hat{p}_j satisfaisant aux relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire. Les représentations les plus utilisées dans la littérature de \hat{X}_i et \hat{P}_j ont été présentées explicitement au deuxième chapitre ; il a été mentionné que le choix d'une représentation n'a pas d'effet sur les observables physiques, quoique l'espace des impulsions soit le plus approprié pour résoudre n'importe quel problème aux valeurs propres. Pour montrer comment incorporer la longueur minimale dans l'équation de Schrödinger et extraire le spectre d'énergie, deux exemples simples ont été donnés, à savoir le potentiel delta de Dirac à une dimension, qui a été traité exactement dans l'espace des impulsions, et le potentiel de Coulomb à trois dimensions, qui a été traité dans l'espace des coordonnées en utilisant la technique des perturbations.

La partie principale de cette thèse est l'application du formalisme de cette version déformée de la mécanique quantique au potentiel singulier $-\alpha/r^2$. En mécanique quantique habituelle, le potentiel $-\alpha/r^2$ doit être régularisé aux petites distances si l'on veut éviter certaines conséquences pathologiques (non physiques) d'un traitement purement mathématique de l'équation de Schrödinger. En effet,

la méthode mathématique rigoureuse des extensions self-adjointes conduit à une valeur infinie de l'énergie de l'état fondamental du système et à une phase arbitraire de la fonction d'onde. Il était donc intéressant d'étudier dans quelle mesure un formalisme incluant le concept de longueur élémentaire modifie ces pathologies du potentiel singulier $-\alpha/r^2$.

Dans le quatrième chapitre le problème du potentiel singulier $-\alpha/r^2$ à 3 dimensions a été résolu exactement dans ce nouveau formalisme de la mécanique quantique. La solution de l'équation de Schrödinger dans l'espace des impulsions est une fonction de Heun, qui se réduit à une fonction hypergéométrique dans certains cas particuliers. La présence de cette longueur élémentaire dans le formalisme a régularisé le potentiel naturellement. Ainsi, l'extraction du spectre d'énergie a été faite comme dans le cas des potentiels réguliers en examinant seulement le comportement asymptotique de la fonction d'onde, sans avoir besoin d'introduire un paramètre arbitraire, β et β' étant des paramètres physiques du formalisme qui décrivent le comportement de l'interaction aux petites distances. Comme en mécanique quantique ordinaire avec un potentiel régularisé aux petites distances, les états liés existent seulement si le potentiel est fortement attractif ($2\mu\alpha/\hbar^2 > 1/4$, μ étant la masse de la particule). Le spectre d'énergie obtenu, possède un nombre infini d'états liés, et un état fondamental avec une énergie finie. Enfin, l'autre résultat important est la limite $\beta, \beta' \ll 1$, où les résultats de la mécanique quantique habituelle régularisés avec une coupure ultraviolette Λ ont été obtenus; le paramètre $\beta + \beta'$ joue le rôle de Λ^{-2} . On peut conclure que l'idée d'introduire une longueur minimale, qui a été originellement proposée en physique des hautes énergies, pourrait s'appliquer également en mécanique quantique non relativiste, à condition que cette longueur minimale soit une dimension intrinsèque du système étudié, au moins dans le problème du potentiel $-\alpha/r^2$. En effet, l'énergie du système est alors inversement proportionnelle à cette longueur élémentaire, et si celle-ci est de l'ordre de la longueur de Planck, ou de l'ordre de ~ 0.1 fm, comme il a été calculé dans le problème de l'oscillateur harmonique et de l'atome d'hydrogène, l'énergie de l'état fondamental serait telle que la mécanique quantique non relativiste ne serait pas applicable.

Dans le cinquième chapitre, nous avons généralisé notre étude au cas à N dimensions, et pour toutes les valeurs du nombre quantique orbital l . Dans la représentation des impulsions, la fonction d'onde est une fonction de Heun quelle que soit la dimension N ; elle se réduit à une fonction hypergéométrique dans

certains cas particuliers.

Dans le chapitre 6, nous avons choisi le problème d'un dipôle dans le champ d'une corde cosmique comme application physique. Ce système est décrit par un potentiel $-\alpha/r^2$ à 2 dimensions, où la constante de couplage dépend de l'angle entre la corde cosmique et le dipôle (θ). Les fonctions propres du hamiltonien en présence d'une longueur minimale ont été données en termes des fonctions de Heun, et l'équation des états liés correspondants a été établie. L'examen de la condition spectrale montre que la corde cosmique ne peut pas lier le dipôle si $\theta \leq \pi/4$, quelle que soient les valeurs de β et β' . Ce résultat n'est pas en accord avec ce que l'on trouve, en utilisant la méthode des extensions self-adjointes [37, 92]. Dans le cas $\theta > \pi/4$, un nombre infini d'états liés apparaissent, et l'énergie est bornée inférieurement. dans la limite $\beta, \beta' \ll 1$, l'expression du spectre d'énergie est similaire à celle de la référence [90], où le même problème est résolu en régularisant l'interaction par une coupure aux petites distances. La longueur élémentaire apparaît comme une coupure naturelle, et peut ainsi être associée au rayon fini de la corde cosmique.

Dans le chapitre 7, les solutions de l'équation de Schrödinger du potentiel $-\alpha/x^2$ à 1 dimension et le problème des états liés ont été aussi examinés dans ce formalisme de la mécanique quantique en présence d'une longueur élémentaire. Dans l'espace des impulsions, deux solutions de l'équation de Schrödinger ont été données. L'une correspond aux fonctions d'onde impaires de l'espace de configuration, et l'autre aux fonctions paires. L'examen de la condition spectrale montre un accord qualitatif avec les résultats de la mécanique quantique ordinaire : il existe un seul état lié si le potentiel est faiblement attractif ($2\mu\alpha/\hbar^2 \leq 1/4$) et il y a un nombre infini d'états liés si le potentiel est fortement attractif ($2m\alpha/\hbar^2 > 1/4$).

Enfin, la conclusion qui semble la plus importante sur laquelle nous insistons est le fait que, dans une théorie quantique non relativiste découlant du principe d'incertitude généralisé, proposé initialement en théories de la gravitation quantique, la longueur élémentaire n'est pas nécessairement la longueur de Planck, mais elle représenterait une dimension intrinsèque du système étudié. Ceci nous amène à rejoindre la conclusion de Kempf [1, 22] qu'une mécanique quantique avec des incertitudes minimales finies sur la position, pourrait constituer une théorie effective à basse énergie des particules non ponctuelles telles que : les quasi-particules et différentes excitations collectives dans les solides et les ha-

drons tels que les nucléons et les mésons. De plus, contrairement aux problèmes déjà étudiés, tels que l'atome d'hydrogène et l'oscillateur harmonique où la longueur élémentaire n'avait pas un effet remarquable puisque ces problèmes sont réguliers, l'étude du potentiel $-\alpha/r^2$ montre bien que le formalisme de cette nouvelle version de la mécanique quantique serait utile pour résoudre des problèmes caractérisés par des anomalies dues à des singularités aux petites distances.

Annexe A

Limites de la solution (5.60)

A.1 Limite $\beta, \beta' \ll 1$

Écrivons la fonction d'onde du potentiel $-\alpha/r^2$ à 3D en présence d'une longueur élémentaire sous la forme donnée par l'équation (5.72) :

$$\psi(\xi) = A(1 - \xi)H\left(\frac{1}{\xi_0}, \frac{q}{\xi_0}, a, b, c, e; \frac{\xi}{\xi_0}\right), \quad (\text{A.1})$$

Dans la limite $\beta, \beta' \ll 1$, on a :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\omega_1 p^2}{1 + \omega_1 p^2} \approx \omega_1 p^2, \quad \text{où : } \omega_1 = (\beta + \beta'), \\ \xi_0 &= \frac{2\omega}{2\omega - 1} \approx -2\omega, \quad \text{où : } \omega = -\mu\omega_1 E, \\ \frac{\xi}{\xi_0} &\approx \frac{p^2}{2\mu E} \quad \text{et} \quad 1 - \xi \approx 1, \end{aligned}$$

d'où :

$$\psi(y) \underset{\beta, \beta' \ll 1}{\approx} H(\sigma, \sigma\tilde{q}, \tilde{a}, \tilde{b}, c, e; y), \quad (\text{A.2})$$

où nous avons utilisé les notations : $\sigma = \frac{1}{2\mu\omega_1 E}$, $y = \frac{p^2}{2\mu E}$, et \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{q} sont les limites des paramètres a , b , q lorsque $\beta, \beta' \ll 1$.

En se servant de l'équation (5.74), la fonction de Heun est transformée à une fonction hypergéométrique, donnée par :

$$H(\sigma, \sigma\tilde{q}, \tilde{a}, \tilde{b}, c, e; y) \underset{\sigma \rightarrow \infty}{=} F(\delta + \sqrt{\delta^2 + \tilde{q}}, \delta - \sqrt{\delta^2 + \tilde{q}}, c; y), \quad c \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (\text{A.3})$$

où :

$$\delta = \frac{\tilde{a} + \tilde{b} - e}{2}.$$

Après un calcul direct, on obtient :

$$\psi(p) \underset{\beta, \beta' \ll 1}{\approx} F\left(\frac{5}{4} + i\frac{\nu}{2}, \frac{5}{4} - i\frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{p^2}{2\mu E}\right).$$

C'est exactement la fonction d'onde dans l'espace des impulsions du potentiel $-\alpha/r^2$ en mécanique quantique ordinaire [voir Eq. (4.18) avec $l = 0$].

A.2 Limite $p \rightarrow \infty$

Pour examiner le comportement de $\psi(\xi)$, lorsque $p \rightarrow \infty$ ($\xi \rightarrow 1$), nous utilisons la relation : [97, 100]

$$\begin{aligned} H(\xi_0, q, a, b, c, d; \xi) &= C_1 H(1 - \xi_0, -q - ab, a, b, e, d; 1 - \xi) \\ &+ C_2 (1 - \xi)^{1-e} H(1 - \xi_0, q_2, c + d - a, c + d - b, 2 - e, d; 1 - \xi), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où :

$$\begin{aligned} C_1 &= H(\xi_0, q, a, b, c, d; 1), \\ C_2 &= H(\xi_0, q - \xi_0 c[1 - e], c + d - a, c + d - b, c, d; 1), \\ q_2 &= -q - ab - (1 - e)[d + c(1 - \xi_0)]. \end{aligned}$$

En adoptant la normalisation de Heun $H(\xi_0, q, a, b, c, d; 0) = 1$, la fonction d'onde (5.60), dans la limite $p \rightarrow \infty$, se comporte comme suit :

$$\psi(\xi) \underset{\xi \rightarrow 1}{\approx} C_1(1 - \xi) + C_2(1 - \xi)^{2-e},$$

et comme

$$1 - \xi \underset{p \rightarrow \infty}{\approx} p^{-2}, \quad 2 - e = \frac{3}{2} + \omega_4,$$

donc, le comportement asymptotique de $\psi(p)$ dans cette région est :

$$\psi(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\approx} C_1 p^{-2} + C_2 p^{-(3+2\omega_4)}. \quad (\text{A.5})$$

Ce comportement est identique à celui de la solution à énergie nulle [voir Eqs (5.44) et (5.45)] car l'équation de Schrödinger ne dépend pas de l'énergie dans la limite $p \rightarrow \infty$.

A.3 Limite $E \rightarrow 0$

Nous allons montrer, ici, que la solution à énergie nulle (5.39) peut être obtenue à partir de la solution à énergie non nulle (5.60) dans la limite $E \rightarrow 0$. Pour ceci, reprenons la transformation (A.4). En tenant compte que $\xi_0 \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow 0$ lorsque $E \rightarrow 0$, la fonction (5.60) peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \psi(\xi) \underset{E \rightarrow 0}{=} & A(1 - \xi) \left[C_1 H(1, q_1, a_1, b_1, c_1, d_1; 1 - \xi) \right. \\ & \left. + C_2 (1 - \xi)^{\frac{1}{2} + \omega_4} H(1, q_2, a_2, b_2, c_2, d_2; 1 - \xi) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

avec les paramètres :

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{1}{2} + \omega_4, & q_2 &= -\frac{9}{4} + \frac{5\omega_4}{2}, \\ a_1 &= \frac{1}{2}(3 - \omega_4 - \tilde{\nu}_0), & a_2 &= 2 + \frac{\omega_4}{2} + \frac{\tilde{\nu}_0}{2}, \\ b_1 &= \frac{1}{2}(3 - \omega_4 + \tilde{\nu}_0), & b_2 &= 2 + \frac{\omega_4}{2} - \frac{\tilde{\nu}_0}{2}, \\ c_1 &= \frac{1}{2} - \omega_4, & c_2 &= \frac{3}{2} + \omega_4, \\ d_1 &= 2, & d_2 &= 2, \end{aligned}$$

où :

$$\tilde{\nu}_0 \equiv \tilde{\nu}(\omega = 0) = \sqrt{(\omega_4 - 1)^2 - \kappa}.$$

Nous utilisons encore une autre transformation des fonctions de Heun [97] :

$$\begin{aligned} H(1, q, a, b, c, d; \xi) &= (1 - \xi)^{\frac{c-a-b}{2} + \tau} F\left(\frac{c+a-b}{2} + \tau, \frac{c-a+b}{2} + \tau, c; \xi\right), \\ \text{où : } \tau &= \pm \sqrt{\left(\frac{c-a-b}{2}\right)^2 - ab - q}, \quad \text{si } c \neq 0, -1, -2, \dots \end{aligned}$$

Pour les deux fonctions de Heun de l'équation (A.6), un calcul direct donne le résultat suivant :

$$\tau_1 = \tau_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{\kappa}{4}} = \pm i \frac{\nu}{2}$$

En choisissant, par convenance, le signe $(-)$, la fonction (A.6) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \psi(\xi) \underset{E \rightarrow 0}{=} & A(1 - \xi) \xi^{-\frac{5}{4} - i\frac{\nu}{2}} \left[C_1 F(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \tilde{c}_1; 1 - \xi) \right. \\ & \left. + C_2 (1 - \xi)^{\frac{1}{2} + \omega_4} F(\tilde{a}_2, \tilde{b}_2, \tilde{c}_2; 1 - \xi) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1 &= \frac{1}{4} - \frac{\omega_4}{2} - \frac{\vartheta}{2} - i\frac{\nu}{2}, & \tilde{a}_2 &= \frac{3}{4} + \frac{\omega_4}{2} + \frac{\vartheta}{2} - i\frac{\nu}{2}, \\ \tilde{b}_1 &= \frac{1}{4} - \frac{\omega_4}{2} + \frac{\vartheta}{2} - i\frac{\nu}{2}, & \tilde{b}_2 &= \frac{3}{4} + \frac{\omega_4}{2} - \frac{\vartheta}{2} - i\frac{\nu}{2}, \\ \tilde{c}_1 &= \frac{1}{2} - \omega_4, & \tilde{c}_2 &= \frac{3}{2} + \omega_4,\end{aligned}$$

où :

$$\vartheta = \sqrt{(\omega_4 - 1)^2 - \kappa}, \quad \kappa = 2\mu\alpha/\hbar^2.$$

Il est facile de voir que l'expression entre crochets dans l'équation (A.7) est exactement une combinaison linéaire des deux solutions (5.42), au voisinage de $\xi = 1$, de l'équation hypergéométrique (5.35), avec les paramètres a, b, c , donnés par [57] :

$$\begin{aligned}a &= \tilde{a}_1, \\ b &= \tilde{b}_1, \\ c &= 1 - i\nu.\end{aligned}$$

Évidemment, au voisinage de $\xi = 0$, on a la solution (5.39).

Bibliographie

- [1] Achim Kempf, Gianpiero Mangano, and Robert B. Mann, Phys. Rev. D **52**, 1108 (1995).
- [2] H. Hinrichsen and A. Kempf, J. Math. Phys. **37** (1996) 2121-2137.
- [3] Sabine. Hossenfelder, Phys. Rev. D **65**, 125028 (2002).
- [4] S. Hossenfelder, Mod. Phys. Lett. **A 37**, 379-383 (2004).
- [5] M. Fontanini, E. Spallucci, and T. Padmanabhan, Phys. Lett. B **633**, 627 (2006).
- [6] L. J. Garay, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 145 (1995).
- [7] M. T. Jaekel and S. Reynaud, Phys. Lett. A **185**, 143 (1994).
- [8] C. A. Mead, Phys. Rev. **135**, 849 (1964).
- [9] D. Amati, M. Ciafaloni, and G. Veneziano, Phys. Lett. B **216**, 41 (1989).
- [10] K. Konishi, G. Paffuti, and P. Provero, Phys. Lett. B **234**, 276 (1990).
- [11] Sabine. Hossenfelder, Class. Quantum Grav. **23**, 1815 (2006).
- [12] Ramchandar R Sastry, J. Phys. A : Math. Gen. **33**, 8305-8318 (2000).
- [13] D. J. Gross and P. F. Mende, Nucl. Phys. **B 303**, 407 (1988).
- [14] Sabine. Hossenfelder, Phys. Rev. D **70**, 105003 (2004).
- [15] M. Maggiore, Phys. Lett. B **319**, 83 (1993).
- [16] Achim. Kempf , Phys. Rev. D **55**, 7909 (1997).
- [17] F. Brau, J. Phys. A : Math. Gen. **32**, 7691 (1999).
- [18] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, and T. Takeuchi, Phys. Rev. A **72**, 012104 (2005).
- [19] M. M. Stetsko and V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A **74**, 012101 (2006).
- [20] M. M. Stetsko, Phys. Rev. A **74**, 062105 (2006).

-
- [21] R. Akhoury and Y.-P.Yao, Phys. Lett. B **572**, 37-42 (2003).
- [22] Achim. Kempf, J. Phys. A : Math. Gen. **30**, 2093 (1997).
- [23] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, Phys. Rev. D **65**, 125027 (2002).
- [24] U. Harbach and S. Hossenfelder, Phys. Lett. B **632**, 379 (2006).
- [25] Kh. Nouicer, J. Phys. A : Math. Gen. **38**, 10027 (2005).
- [26] Kh. Nouicer, J. Math. Phys. **47**, 122102 (2006).
- [27] Kh. Nouicer, J. Phys. A : Math. Gen. **39**, 5125 (2006).
- [28] C. Quesne et al, J. Phys. A : Math. Gen. **38**, 1747-1765 (2005).
- [29] U. Harbach, S. Hossenfelder, M. Bleicher and H. Stoecker, Proceedings of the Nuclear Physics, Winter Meeting 2004, Bormio, Italy; e-print arXiv :hep-ph/0404205.
- [30] Kh. Nouicer and D. Bouaziz, Acte des Journées Scientifiques Algéro-Françaises en Physique Théorique et Mathématique, Publication de l'Université de Haute Alsace, p 28 (2006).
- [31] D. Bouaziz and M. Bawin, Phys. Rev. A **76**, 032112 (2007).
- [32] D. Bouaziz and M. Bawin, Phys. Rev. A **78**, 032110 (2008).
- [33] F. Brau, and F. Buisseret, Phys. Rev. D **74**, 036002 (2006).
- [34] K. Nouicer, Phys. Lett. B **646**, 63 (2007); Y-W. Kim and Y-J Park, Phys. Lett. B **655**, 172 (2007); K. Nouicer, Class. Quantum. Grav.**25**, 075010 (2008); Y-W. Kim and Y-J Park, Phys. Rev. D **77**, 067501 (2008).
- [35] K. M. Case, Phys. Rev. **80**, 797 (1950).
- [36] A. M. Perelemov and V. S. Popov, Teor. Mat. Fiz. **4**, 48 (1970) [Theor. Math. Phys. **4**, 664 (1970)].
- [37] K. Meetz, Nuovo Cimento **34**, 690 (1964).
- [38] L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, Phys. Rev. D **65**, 125027 (2002)
- [39] Achim. Kempf, J. Math. Phys. **38**, 1344 (1997).
- [40] Achim. Kempf , Phys. Rev. D **63**, 083514 (2001).
- [41] Achim. Kempf , Phys. Rev. D **54**, 5174 (1996).
- [42] Achim. Kempf, J. Math. Phys. **35**, 4483 (1994).

- [43] S. Hossenfelder, Phys. Lett. B **632**, 2727 (2006).
- [44] U. Harbach and S. Hossenfelder, M. Bleicher, and H. Stöcker, Phys. Lett. B **584**, 109 (2004).
- [45] S. Hossenfelder, Phys. Lett. B **598**, 92 (2004).
- [46] S. Z. Benczik, *Investigations on the minimal-length uncertainty relation*, PhD Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University (2007).
- [47] Sándor Benczik et al, Phys. Rev. A **72**, 012104 (2005).
- [48] T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk, and V. M. Tkachuk, J. Phys. A : Math. Gen. **39**, 2143 (2006).
- [49] E. V. Ivash, AJP, V. 40, 1095 (1972).
- [50] S. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions, V. 2* (Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill Book Company, Inc.,1953)
- [51] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms, Vol. 1* (Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1954).
- [52] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, Corrected and Enlarged Edition (Academic Press, Inc, New York, 1980), p. 844, p. 1038.
- [53] C. C. Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, *Mécanique quantique I*, (Hermann, Paris, 1973) p. 809.
- [54] T. Udem , A. Huber, B. Gross, J. Reichert, M. Prevedelli, M. Weitz, and T. W. Hänsch, Phys. Rev. Lett **79**, 2646 (1997).
- [55] C. Schwob et al., Phys. Rev. Lett **82**, 4960 (1999).
- [56] S. Mallampalli and J. Sapirstein, Phys. Rev. Lett. **80**, 5297 (1998).
- [57] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 5th Printing (U. S. Government Printing Office, Washington D. C., 1966).
- [58] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, Part I* (McGraw-Hill, New York, 1953), pp. 902- 903.
- [59] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, Part II* (McGraw-Hill, New York, 1953) pp. 1665-1667.

- [60] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O.I. Marichev, *Integrals and Series* (Translated from the Russian by G. G. Gould), (Gordon and Breach science publishers, New York, 1998), Vol. 3, p. 330.
- [61] J. Denschlag, G. Umshaus and J. Schmiedmayer, *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 737 (1998).
- [62] M. Bawin and S. Coon, *Phys. Rev. A* **63**, 034701 (2001).
- [63] M. Bawin, *Phys. Rev. A* **70**, 022505 (2004).
- [64] M. Bawin, S. A. Coon and B. R. Holstein, *Int. Jour. Mod. Phys A*, Vol. **22**, N. 27, 4901 (2007).
- [65] A. D. Alhaidari, *J. Phys. A : Math. Theo.* **40**, 14843 (2007).
- [66] L. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Vol. 3* (Pergamon Press, London, 1958) p. 118, et p. 856.
- [67] W. M. Frank, D. J. Land and R. M. Spector, *Rev. Mod. Phys.* **43**, 36 (1971).
- [68] S. Gopalakrishnan, Thesis derived By W. Loinaz, Amherst College, 2006 <http://www.amherst.edu/~physics/resources/theses/gopalakrishnan06.pdf> (unpublished).
- [69] K. S. Gupta and S. G. Rajeev, *Phys. Rev. D* **48**, 5940 (1993); H. E. Camblong, L. N. Epele, H. Fanchiotti, and C. A. G. Canal, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1590 (2000); S. A. Coon and B. R. Holstein, *Am. J. Phys.* **70**, 513 (2002).
- [70] H.-W. Hammer and B. G. Swingle, *Anal. Phys.* **321**, 306 (2006).
- [71] S. R. Beane et al, *Phys. Rev. A* **64**, 042103 (2001).
- [72] M. Bawin and S. Coon, *Phys. Rev. A* **67**, 042712 (2003).
- [73] E. Braaten and D. Phillips, *Phys. Rev. A* **70**, 052111 (2004).
- [74] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen 1*, Leipzig (1967).
- [75] C. V. Sukumar, *J. Phys. A : Math. Gen.* **12**, 1715-1730 (1979).
- [76] V. Efimov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **12**, 589 (1971).
- [77] M. Alberg, M. Bawin and F. Brau, *Phys. Rev. A* **71**, 022108 (2005).
- [78] H. E. Camblong and C. R. Ordóñez, *Phys. Rev. D* **68**, 125013 (2003).

- [79] S. A. Coon, B. R. Holstein, *Am. J. Phys.* **70**, 513-519 (2002).
- [80] T. R. Govindarajan, V. Suneeta and S. Vaidya, *Nucl. Phys. B* **583**, 291 (2000); D. Birmingham, K. S. Gupta and S. Sen, *Phys. Lett. B.* **505**, 191 (2001); K. S. Gupta and S. Sen, *Phys. Lett. B.* **526**, 121 (2002); K. S. Gupta and S. Sen, *Phys. Lett. B.* **574**, 93 (2003); K. S. Gupta, *Int. Jour. Mod. Phys A*, Vol. **20**, N. 11, 2485 (2005).
- [81] R. Lipowsky and T. M. Nieuwenhuizen, *J. Phys. A : Math. Gen.* **21**, L89 (1998).
- [82] T. W. B. Kibble, *J. Phys. A : Math. Gen.* Vol. **9**, N. 8, 1387 (1976).
- [83] T. W. B. Kibble, *Phys. Rev. D*, **26**, N. 2, 435 (1982).
- [84] A.-C. Davis and T. W. B. Kibble, *Contemp. Phys.* **46**, 313 (2005).
- [85] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, (Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1994).
- [86] J. Rocher, thèse de Doctorat, *Contraintes cosmologiques sur la physique de l'univers primordial*, Université de Paris XI-Orsay, Septembre 2005.
- [87] L. Bergström and A. Goobar, *Cosmology and particle astrophysics*.
- [88] Y. Grats and A. García, *Class. Quantum. Grav.* **13**, 189 (1996).
- [89] C. A. de Lima Ribeiro, C. Furtado, V. B. Bezera and F. Moraes *J. Phys. A : Math. Gen.* **34**, 6119 (2001).
- [90] C. A. de Lima Ribeiro, C. Furtado, and F. Moraes, *Mod. Phys. Lett. A* **20**, 1991 (2005).
- [91] Y. Cui, P. Martin, D. E. Morrissey and J. D. Wells, *Phys. Rev. D* **77**, 043528 (2008).
- [92] P. R. Giri, *Phys. Rev. A* **76**, 012114 (2007).
- [93] K. Gottfried, *Quantum Mechanics*, Vol. 1 : *Fundamentals*, (Academic Press Inc, New York, 1966), p. 213.
- [94] T. Udem et al, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2646-2649 (1997).
- [95] F. Calogero, *Variable Phase Approach to Potential Scattering* (Academic Press, New York, 1967).
- [96] A. Ronveaux, *Heun's Differential Equations*. (Oxford University Press, Oxford, England, 1995).

-
- [97] C. Snow, *Hypergeometric and Legendre Functions With Applications to Integral Equations of Potential Theory*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series (U. S. Government Printing Office, Washington D. C., 1952), Vol. 19, pp. 87-10.
- [98] R. Blankenbeker, M. L. Goldberger and B. Simon, *Ann. Phys.* **108**, 69-78 (1977).
- [99] H. Van Haeringen, *J. Math. Phys.* **19**, 2171 (1978).
- [100] L. Dekar, L. Chetouani and T. F. Hammann, *J. Math. Phys.* **V. 39**, 5, 2551 (1998).