

adaptés au calcul non linéaire, soit :

- a.- l'estimateur simplifié de ZIENKIEWICZ (8.3.2.2.)
- b.- l'estimateur basé sur les contraintes de YOKOHAMA (8.3.4)
- c.- l'estimateur basé sur les déformations de CHENG (8.3.5)
- d.- l'estimateur de LADEVEZE basé sur la loi constitutive et un champ de contraintes statiquement admissible (8.3.6),

certaines doivent être exclus. L'estimateur de YOKOHAMA (b) entraîne un nombre important d'analyses successives, ce qui ne peut être envisagé pour un calcul de formage vu les temps de calculs importants à mettre en oeuvre. L'estimateur de LADEVEZE (d) permet de déterminer le maillage optimum en une seule itération, mais il se base essentiellement sur la loi constitutive du matériau. Dans la mesure où cette loi est souvent mal connue des industriels, nous préférons exclure cet estimateur. L'estimateur de CHENG (c) entraîne le calcul des dérivées secondes des déplacements, son évaluation prendra donc un temps de calcul supérieur à celui nécessaire pour l'estimateur de ZIENKIEWICZ (a). Nous l'éliminerons donc également. La voie suggérée par CHENG n'est cependant pas oubliée dans notre travail. Nous proposons au paragraphe suivant (8.5) des mesures de la distorsion d'un élément qui constituent la base d'un critère de remaillage basé sur une déformation excessive.

Rappelons les formules de base de l'estimateur de ZIENKIEWICZ (voir (8.58) à (8.61) :

$$\eta = \frac{\|\underline{\epsilon}\|_E}{\sqrt{\|D\|^2 + \|\underline{\epsilon}\|_E^2}} \cdot 100 \quad (8.72.)$$

$$\text{avec } \|\underline{\epsilon}\|_E^2 \approx \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^* - \hat{\underline{\sigma}})^T (\dot{\underline{\epsilon}}^* - \hat{\underline{\epsilon}}) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\epsilon}_{\sigma}^T \underline{\epsilon}_{\epsilon} d\Omega \quad (8.73.)$$

$$\|D\|^2 \approx \int_{\Omega} \hat{\underline{\sigma}}^T \hat{\underline{\epsilon}} d\Omega \quad (8.74.)$$

Le cadre d'application de cette formule était une loi visqueuse plastique du type NORTON-HOFF (ER 16). Ceci permet d'affirmer que le produit  $\hat{\underline{\sigma}}^T \hat{\underline{\epsilon}}$  représente la dissipation plastique et constitue donc bien un nombre réel positif. Connaissant la relation :

$$\underline{\sigma} = A \dot{\underline{\epsilon}} \quad (8.75.)$$

l'équation (8.73.) peut être écrite comme une fonction d'une seule erreur  $\underline{\epsilon}_{\sigma}$  ou  $\underline{\epsilon}_{\epsilon}$ .

Dans le code LAGAMINE, nous utilisons le plus souvent une loi élastoviscoplastique (EF8, EF14) pour réaliser nos simulations de formage. Pour cette loi, il n'est pas possible

d'écrire une relation du type (8.75) ; par conséquent nous utilisons la formule (8.73) telle quelle avec un double calcul d'erreur, sur les contraintes et sur les déformations.

Dans la mesure où  $\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}$  constitue une vitesse de déformation totale comprenant les parties élastique et plastique, le produit  $\underline{\underline{\sigma}}^T \hat{\underline{\underline{\epsilon}}}$  n'est plus forcément positif et nous ajoutons donc une norme absolue au calcul de  $\|D\|^2$  (8.74.) :

$$\|D\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_{ei}} |\underline{\underline{\sigma}}^T \hat{\underline{\underline{\epsilon}}}| \, d\Omega$$

$m$  = nombre total d'élément  $\Omega_e$  recouvrant le domaine  $\Omega$ .

Cette norme est également présente dans le calcul du terme  $\|e\|^2$  (8.73). L'évaluation des champs de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  et de vitesse de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}^*$  plus précis que ceux fournis par la méthode des éléments finis  $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}$  et  $\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}$  est réalisée selon les indications de ZIENKIEWICZ, soit pour rappel

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{N}} \bar{\underline{\underline{\sigma}}}^* \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{N}}^T \hat{\underline{\underline{\sigma}}} \, d\Omega \quad (8.57. \text{ § } 8.3.2.1.)$$

$$\underline{\underline{M}} \bar{\underline{\underline{\sigma}}}^* \, d\Omega = \underline{\underline{B}}$$

où  $\bar{\underline{\underline{\sigma}}}^*$  représente les valeurs nodales de  $\underline{\underline{\sigma}}^*$ . Le même calcul est réalisé pour connaître  $\bar{\underline{\underline{\epsilon}}}^*$ .

Comme lui, nous diagonalisons la matrice  $\underline{\underline{M}}$ . Cette approche nous permet d'obtenir un premier estimateur global de l'erreur :

$$\eta_1 = \frac{\|e\|_E}{\sqrt{\|D\|^2 + \|e\|_E^2}} \cdot 100 \quad (8.76.)$$

Un indicateur local d'erreur relatif à un élément est disponible facilement :

$$(\xi_1)_{\Omega_e} = \frac{\|e\|_{E\Omega_e}}{\frac{\|e\|_E}{m}} \quad (8.77.)$$

$(\xi_1)_{\Omega_e} \leq 1$  l'erreur de l'élément considéré est inférieure ou égale à l'erreur moyenne.

$(\xi_1)_{\Omega_e} > 1$  l'erreur de l'élément considéré est supérieur à l'erreur moyenne.

Grâce à cet indicateur, il est aisé de repérer les zones du maillage où les erreurs sont localisées. Ceci constitue une indication précieuse pour la création du nouveau maillage.

Afin d'éviter la recherche des deux champs  $\hat{\underline{\epsilon}}^*$  et  $\hat{\underline{\sigma}}^*$ , nous avons décidé de tester les deux estimateurs suivants :

$$\bullet \quad \|\hat{\underline{\sigma}}\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} \hat{\underline{\sigma}}^T \hat{\underline{\sigma}} \, d\Omega \quad (8.78.a)$$

$$\|\underline{\epsilon}_{\sigma}\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} \underline{\epsilon}_{\sigma}^T \underline{\epsilon}_{\sigma} \, d\Omega \quad (8.78.b)$$

$$\eta_2 = \frac{\|\underline{\epsilon}_{\sigma}\|_{L_2}}{\sqrt{\|\underline{\epsilon}_{\sigma}\|_{L_2}^2 + \|\hat{\underline{\sigma}}\|_{L_2}^2}} \cdot 100 \quad (8.78.c) \quad \text{et} \quad (\xi_2)_{\Omega_e} = \frac{\|\underline{\epsilon}_{\sigma}\|_{L_2 \Omega_e}}{\frac{\|\underline{\epsilon}_{\sigma}\|_{L_2}}{m}} \quad (8.78.d)$$

$$\bullet \quad \|\hat{\underline{\epsilon}}\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} \hat{\underline{\epsilon}}^T \hat{\underline{\epsilon}} \, d\Omega \quad (8.79.a)$$

$$\|\underline{\epsilon}_{\epsilon}\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} \underline{\epsilon}_{\epsilon}^T \underline{\epsilon}_{\epsilon} \, d\Omega \quad (8.79.b)$$

$$\eta_3 = \frac{\|\underline{\epsilon}_{\epsilon}\|_{L_2}}{\sqrt{\|\underline{\epsilon}_{\epsilon}\|_{L_2}^2 + \|\hat{\underline{\epsilon}}\|_{L_2}^2}} \cdot 100 \quad (8.79.c) \quad \text{et} \quad (\xi_3)_{\Omega_e} = \frac{\|\underline{\epsilon}_{\epsilon}\|_{L_2 \Omega_e}}{\frac{\|\underline{\epsilon}_{\epsilon}\|_{L_2}}{m}} \quad (8.79.d)$$

Un quatrième estimateur nous a permis de tester les idées personnelles suivantes :

- pour les éléments isoparamétriques à 8 noeuds et 4 points d'interpolation utilisés dans nos simulations de formage, une méthode de calcul simple et rapide de  $\hat{\underline{\sigma}}^*$  est envisageable. Considérons le champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  défini séparément sur chaque élément  $\Omega_e$  et tel qu'il est confondu avec  $\hat{\underline{\sigma}}$  aux quatre points d'intégration. Par interpolation linéaire, l'expression de chacune de ses composantes a la forme suivante :

$$\sigma_i(\xi, \eta) = a_i \xi + b_i \eta + c_i \xi \eta + d_i \quad (8.80.)$$

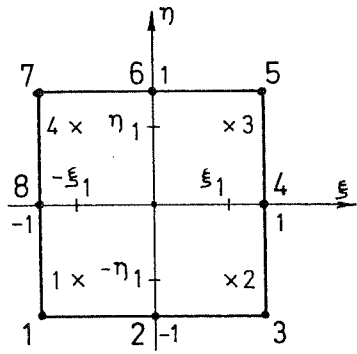


Figure 8.10.

Élément PL8LS utilisé dans les simulations de formage ; position des noeuds (•) et des points d'intégration (X) ;  $\eta_1 = \sqrt{3}/3$

Sachant que  $(\sigma_i^j)$  représente la valeur de  $\bar{\sigma}_i$  au point J, on obtient facilement les valeurs des constantes  $a_i, b_i, c_i, d_i$  du champ  $\sigma_i(\xi, \eta)$  :

$$\begin{aligned}
 a_i &= \frac{(\sigma_i^2)^2 + (\sigma_i^4)^4 - (\sigma_i^1)^1 - (\sigma_i^3)^3}{4 \xi_1} & b_i &= \frac{(\sigma_i^3)^3 + (\sigma_i^4)^4 - (\sigma_i^1)^1 - (\sigma_i^2)^2}{4 \xi_1} \\
 c_i &= \frac{(\sigma_i^1)^1 + (\sigma_i^4)^4 - (\sigma_i^2)^2 - (\sigma_i^3)^3}{4 \xi_1^2} & d_i &= \frac{(\sigma_i^1)^1 + (\sigma_i^2)^2 + (\sigma_i^3)^3 + (\sigma_i^4)^4}{4} \quad (8.81.)
 \end{aligned}$$

Les valeurs nodales  $\bar{\sigma}_i$  sont obtenues immédiatement par 8.80, 8.81 et le tableau suivant :

Noeuds	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de								
$\xi$	-1	0	1	1	1	0	-1	-1
$\eta$	-1	-1	-1	0	1	1	1	0
$\xi\eta$	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Tableau 8.1.

Avec cette méthode, lorsqu'un noeud K appartient à n éléments, on obtient n valeurs de  $(\bar{\sigma}_i)^K$ . La valeur finale  $(\bar{\sigma}_i^{*})^K$  retenue est calculée par moyenne arithmétique

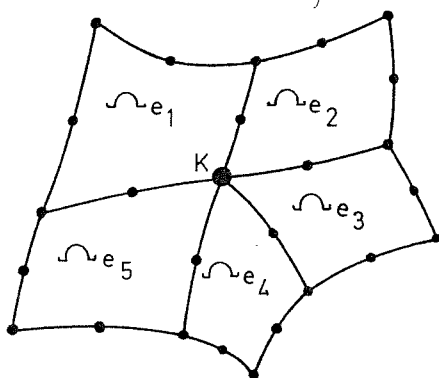


Figure 8.11- Cas d'un noeud K appartenant à 5 éléments.



$$(\bar{\sigma}_i^*)^K = \frac{1}{5} [(\bar{\sigma}_i^K)_{\Omega e1} + (\bar{\sigma}_i^K)_{\Omega e2} + (\bar{\sigma}_i^K)_{\Omega e3} + (\bar{\sigma}_i^K)_{\Omega e4} + (\bar{\sigma}_i^K)_{\Omega e5}] \quad (8.82.)$$

- une seconde variante par rapport à la méthode de ZIENKIEWICZ est l'erreur  $\underline{e}_\sigma^*$  retenue. Cette erreur n'est plus la différence entre  $\underline{\sigma}^*$  et  $\hat{\underline{\sigma}}$ . On détermine ses valeurs nodales  $\bar{\underline{e}}_\sigma^*$  comme étant l'écart type adapté aux petites séries des différentes valeurs de  $\bar{\underline{\sigma}}$  obtenues pour un même noeud K :

$$(\bar{e}_\sigma^*)_i^K = \frac{(\bar{\sigma}_i^K)_{\max} - (\bar{\sigma}_i^K)_{\min}}{d_n} \quad (8.83.)$$

avec  $(\bar{e}_\sigma^*)_i^K$  = composante i de  $\bar{e}_\sigma^*$  au noeud K.

$(\bar{\sigma}_i^K)_{\max(\min)}$  = valeur maximum (minimum) des différents  $(\bar{\sigma}_i^K)_{\Omega e_j}$  obtenus lors du calcul de  $(\bar{\sigma}_i^*)^K$ .

i = 1, n où n est le nombre d'éléments contenant le noeud K.

$d_n$  = valeur définie par le tableau 8.2. ci-dessous.

n	2	3	4	5	6	7
$d_n$	1,13	1,60	2,06	2,33	2,53	2,70

**Tableau 8.2.**

Cette définition de l'écart type adapté aux petites séries est tirée de EF29. Entre ses valeurs nodales  $\bar{\underline{e}}_\sigma^*$  l'erreur est interpolée avec les fonction habituelles.

En finale, nous proposons l'estimateur suivant :

$$\|\hat{\underline{\sigma}}\|_{L_2} = \int_{\Omega} \hat{\underline{\sigma}}^T \hat{\underline{\sigma}} d\Omega \quad (8.85.a)$$

$$\|\bar{\underline{e}}_\sigma^*\|_{L_2} = \int_{\Omega} \bar{\underline{e}}_\sigma^{*T} \bar{\underline{e}}_\sigma^* d\Omega \quad (8.85.b)$$

$$\eta_4 = \frac{\|\bar{\underline{e}}_\sigma^*\|_{L_2}}{\sqrt{\|\bar{\underline{e}}_\sigma^*\|_{L_2}^2 + \|\hat{\underline{\sigma}}\|_{L_2}^2}} \cdot 100 \quad (8.85.c) \quad \text{et} \quad (\xi_4)_{\Omega_e} = \frac{\|\bar{\underline{e}}_\sigma^*\|_{L_2 \Omega_e}}{\frac{\|\bar{\underline{e}}_\sigma^*\|_{L_2}}{m}} \quad (8.85.d)$$

Ces 4 estimateurs globaux et locaux ont été testés sur les 4 maillages utilisés

successivement lors de la simulation du formage du pignon de machine décrit au chapitre onze. Soit :

maillage 1  $t = 0$  jusqu'à  $t = 0,033$  sec.

maillage 2  $t = 0,033$  jusqu'à  $t = 0,050$  sec

maillage 3  $t = 0,050$  jusqu'à  $t = 0,070$  sec.

maillage 4  $t = 0,070$  jusqu'à  $t = 0,120$  sec.

Pour décrire le formage complet, trois remaillages ont donc été effectués. Seuls les critères globaux  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ , vont être analysés ici, les estimateurs locaux  $\xi$  seront traités au paragraphe 8.6.

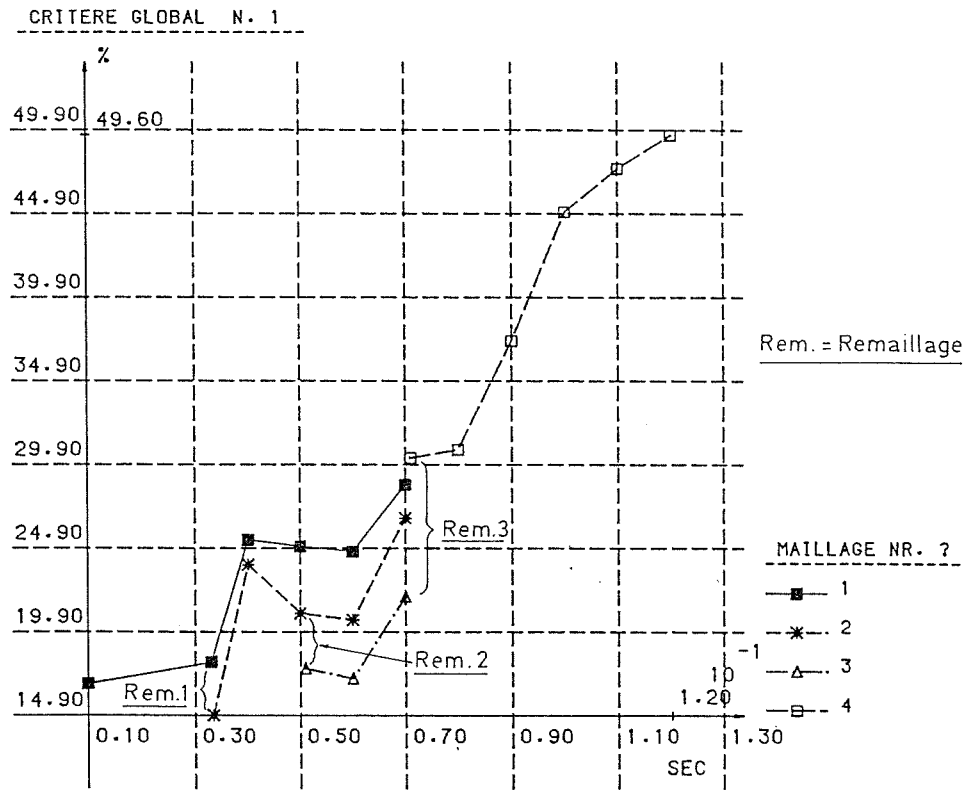
L'estimateur global d'erreur indique un pourcentage d'erreur relatif à la dissipation globale de l'énergie ( $\eta_1 : 8.76$ ), à une norme des contraintes ( $\eta_2 : 8.78, \eta_4 : 8.85$ ) et à une norme des vitesses de déformation ( $\eta_3 : 8.79$ ). A priori, on voudrait voir l'erreur globale respecter deux propriétés :

- l'erreur augmente avec le taux de déformation obtenu et donc lors d'une opération d'estampage au cours du temps ;
- en cas de remaillage, l'erreur relative au nouveau maillage est inférieure à celle relative à l'ancien.

Au vu des quatre figures 8.12, 8.13, 8.14, 8.15 illustrant l'évolution des estimateurs globaux, on peut vérifier que les estimateurs 1 et 3 ne respectent aucune de ses deux propriétés. Ils sont par conséquent éliminés. Les estimateurs 2 et 4 concernant les contraintes respectent la seconde condition, la première condition n'étant cependant pas vérifiée pour les deux premiers maillages.

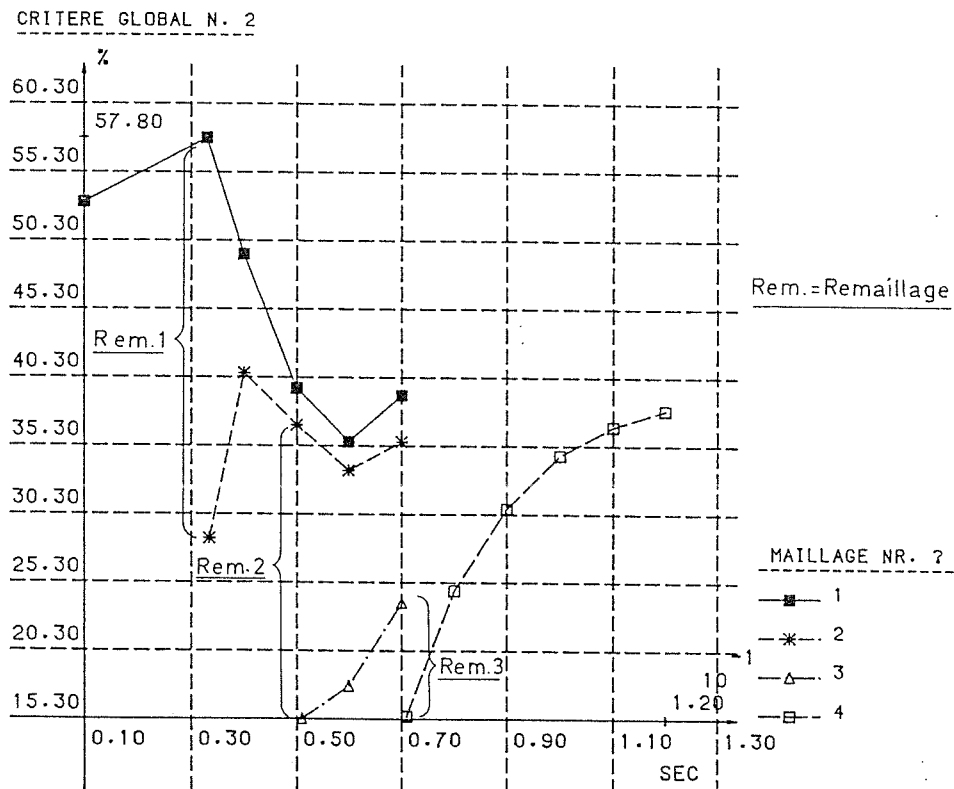
Il ne faut pas s'étonner de ce que les estimateurs de type "*estimateur simplifié de ZIENKIEWICZ*" ne respectent pas systématiquement la première condition. En effet, il n'y a pas de cumul des erreurs au cours de la simulation avec un maillage, mais bien un calcul indépendant de l'erreur en un instant donné. Cette erreur ne dépend pas seulement de l'état du maillage étudié, l'état de sollicitation (champ de contraintes élastiques ou non, relativement homogène ou non) intervient également.

Soulignons que les résultats obtenus par ZIENKIEWICZ avec l'estimateur (8.72) sont en accord avec les nôtres. Selon ER6, l'estimateur basé sur les contraintes ( $\underline{\epsilon}_\sigma$ ) est meilleur que celui basé sur les vitesses de déformation ( $\underline{\epsilon}_\dot{\epsilon}$ ). Pour un écrasement de cylindre, les estimateurs d'erreur calculés par ZIENKIEWICZ ne sont pas strictement croissants avec le taux de déformation, la propriété 1 n'est donc pas toujours respectée.



**Figure 8.12.**

*Estimateur global d'erreur n° 1 (formage d'un pignon de machine, voir chapitre onze)*



**Figure 8.13.**

*Estimateur global d'erreur n° 2 (formage d'un pignon de machine, voir chapitre onze)*

CRITERE GLOBAL NR. 3

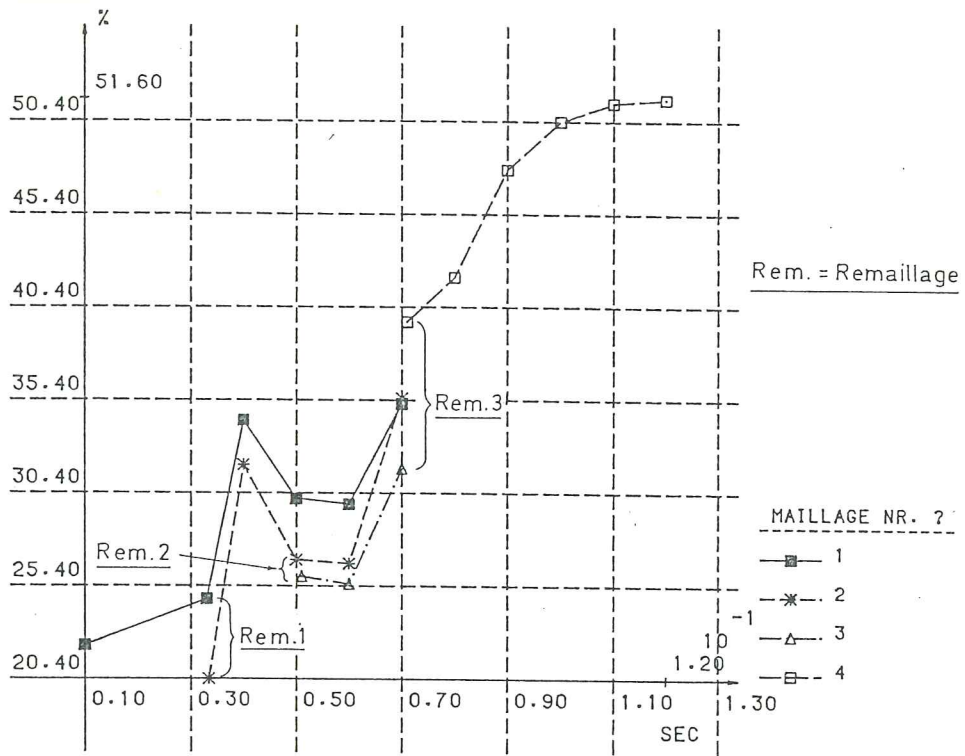


Figure 8.14.

Estimateur global d'erreur n°3 (formage d'un pignon de machine, voir chapitre onze)

CRITERE GLOBAL NR. 4

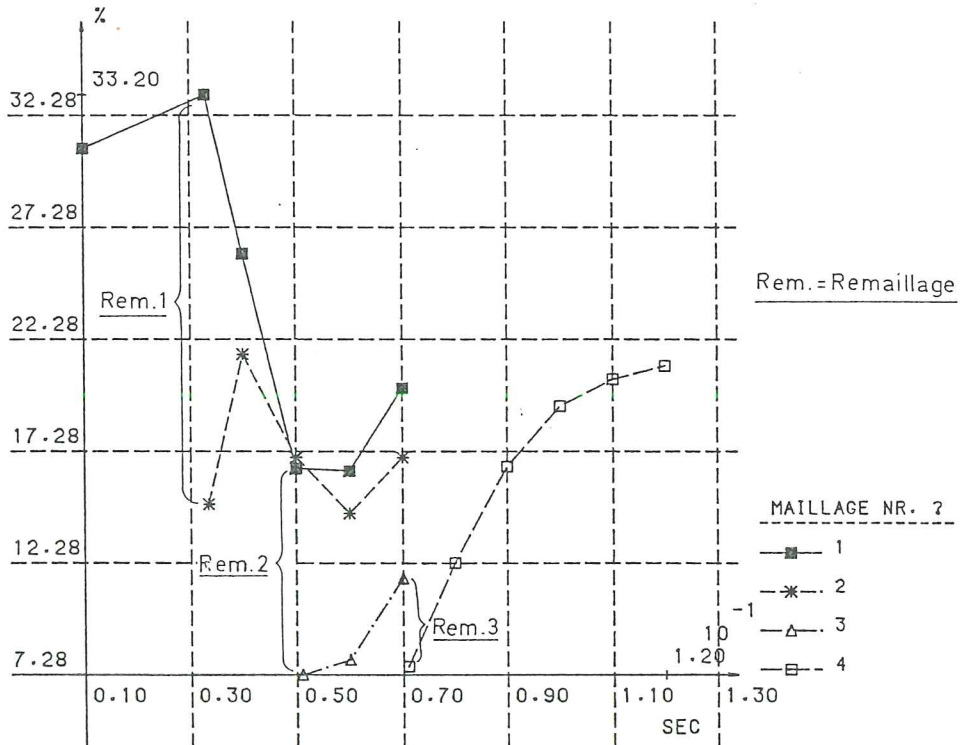


Figure 8.15.

Estimateur global d'erreur n°4 (formage d'un pignon de machine, voir chapitre onze)

Au vu des figures 8.13 et 8.15, il est difficile de choisir un des deux estimateurs proposés  $\eta_2$  ou  $\eta_4$ . En pratique, on conservera celui qui est calculé à partir des contraintes nodales  $\sigma^*$  (8.57 ou 8.82) disponibles dans le code de calcul. La précision des contraintes nodales  $\sigma^*$  a été analysée sur un exemple (voir § 10.13). Notre méthode de calcul de  $\sigma^*$  a donné les meilleurs résultats et, par conséquent, nous préconisons de conserver l'estimateur d'erreur  $\eta_4$ .

## 8.5. CRITERES DE REMAILLAGE SANS ESTIMATION DE L'ERREUR

### 8.5.1. Mesure de la distorsion des éléments.

#### 8.5.1.1. Introduction.

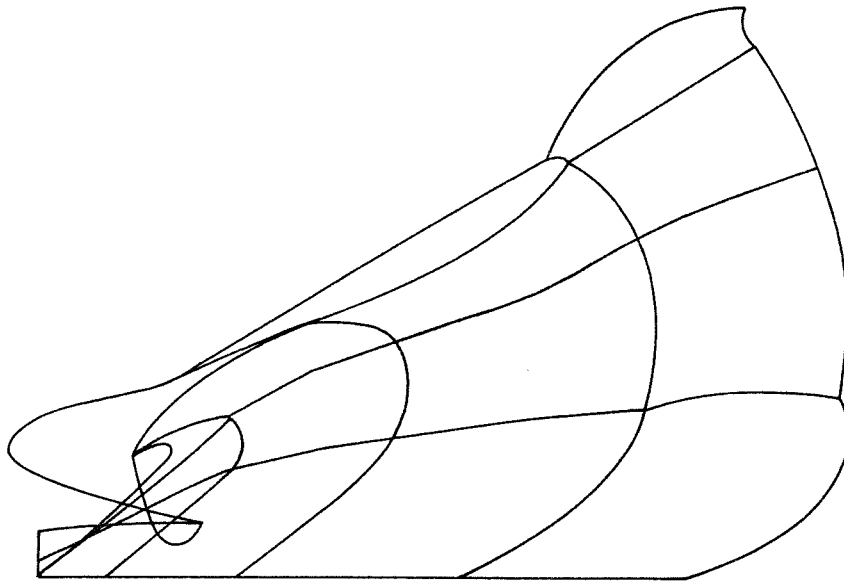
Au cours des déformations importantes subies pendant le formage, la qualité du maillage se détériore et entraîne finalement la nécessité d'un remaillage. Une approche intéressante des critères de remaillage, consiste donc à définir des paramètres traduisant la qualité d'un élément. Si ces paramètres dépassent une valeur seuil, ils indiquent que l'élément est source de problèmes, d'imprécisions ou même de l'arrêt des calculs en cas de jacobien négatif en un point d'interpolation.

Ces paramètres constituent donc des informations locales indiquant les zones où un raffinement du maillage est nécessaire. Le code ALPID (FOR12) les utilise également comme critère de remaillage : si un élément trop distordu est détecté, on opère un remaillage.

Les paramètres de distorsion sont généralement propres à chaque type d'éléments utilisés. HAGGENMACHER et ROBINSON présentent 5 paramètres adaptés à des éléments quadrilatères (REM1). Ce sont des paramètres globaux qui tiennent compte uniquement de l'état déformé de l'élément. AELAAI (REM2) les a adaptés à des éléments isoparamétriques à 8 noeuds. Il suggère dans certains cas l'utilisation de valeurs relatives traduisant l'évolution entre l'élément dans son état initial et son état courant de plus en plus déformé. Son étude reste cependant assez théorique, aucun exemple d'application n'est traité.

La recherche et l'étude numérique de critères de distorsion géométrique adaptés à un élément plan isoparamétrique à 8 noeuds (PL8LS) constitue une partie importante de notre travail. Les critères testés sont tirés de REM2 ou sont d'inspiration personnelle. Rappelons que trouver des paramètres qui quantifient la notion de distorsion de l'élément n'est pas

tout. Leur utilisation en tant que critère de remaillage suppose la définition de valeurs seuils. Dans ce domaine, aucune information n'est fournie par la littérature, les valeurs seuils suggérées sont le fruit d'un travail personnel. Une première estimation de ces valeurs repose sur l'expérience, sur l'appréciation de ce qu'est un élément trop déformé. Les tests effectués sur un seul ou plusieurs éléments ont d'ailleurs montré qu'il est inutile de chercher à fixer des limites en fonction de l'apparition de problèmes numériques. En effet, ceux-ci apparaissent bien après que les éléments finis soient devenus inacceptables. A titre d'exemple, la figure 8.16 montre un résultat obtenu sans aucun problème numérique.



*Figure 8.16.- Test pour lequel aucun problème numérique n'est apparu.*

Un autre moyen de fixer les valeurs seuils est de vérifier la concordance des zones à remailler obtenues par différentes méthodes :

- les critères de distorsion
- les indicateurs locaux issus de l'estimateur d'erreur de ZIENKIEWICZ ( $\xi_1$  : 8.77,  $\xi_2$  : 8.78.d,  $\xi_3$  : 8.79.d) ou de l'estimateur original développé au § 8.4 ( $\xi_4$  : 8.85.d).

Ces comparaisons seront effectuées au § 8.6.

Par ailleurs, le fait de disposer d'estimateurs d'erreur globaux permet d'évaluer la perte de précision au fur et à mesure de l'augmentation du nombre d'éléments qui violent les critères géométriques. Un remaillage même automatisé reste une opération délicate. La question se pose donc de savoir si un remaillage s'impose dès qu'un seul élément est trop distordu. Les cas concrets traités au § 8.6 nous aideront à prendre position sur ce point.

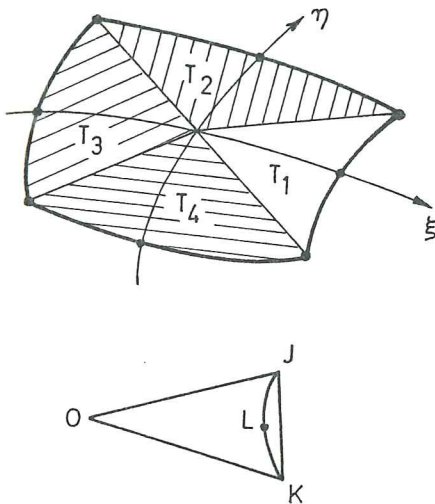


### 8.5.1.2. Critères de distorsions.

Une description succincte des critères géométriques testés par nos soins est présentée ci-après. Les détails des opérations nécessaires pour les évaluer sont disponibles en REM 4.

#### A. Critère des triangles.

Soient  $A_1, A_2, A_3, A_4$  les aires des 4 triangles  $T_1, T_2, T_3, T_4$  représentés figure 8.17.



**Figure 8.17.**

Définition de la division de l'élément PL8LS en 4 triangles.

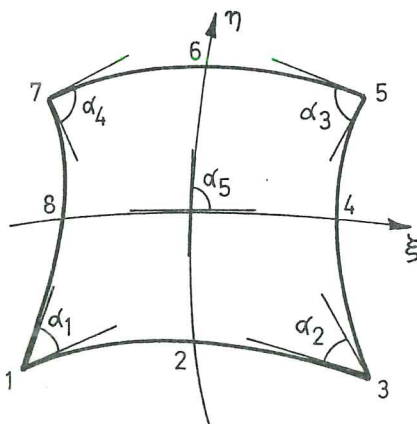
L'évolution de ces valeurs  $A_i$  constitue le paramètre de distorsion. Soit

$$\tau_i = \frac{|A_i^d - A_i^0|}{A_i^0} \cdot 100 \quad (8.86.)$$

où l'indice  $i$  détermine le triangle considéré et l'indice  $0$  affecte l'aire relative à l'élément initial non déformé et l'indice  $d$  l'aire relative à l'élément dans son état actualisé déformé.

Cette mesure de la distorsion est une idée originale.

#### B. Critère des angles.



**Figure 8.18.**

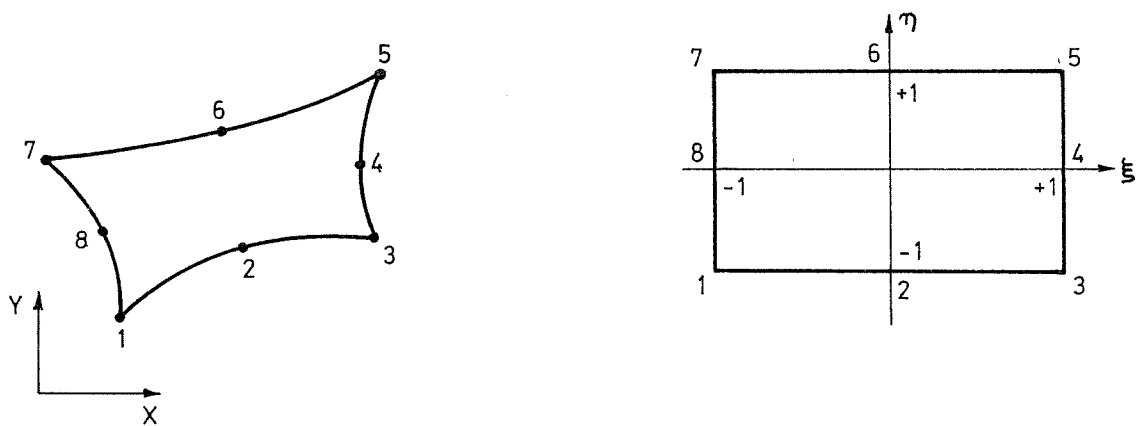
Angles caractéristiques de l'élément PL8LS.



Les valeurs absolues des angles au sommet  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , et de l'angle au centre  $\alpha_5$  ont été étudiées au cours de différents types de déformations. AELAAI (REM2) suggérait de prendre en considération les variations des angles au sommet au cours de la déformation. Cette idée est celle que nous retiendrons en définitive suite aux problèmes évoqués en 8.6.

**C. Déterminant du Jacobien aux points d'intégration.**

Le déterminant du Jacobien traduit le rapport de "volume" élémentaire qui existe entre l'élément de référence et l'élément réel :



**Figure 8.19.- Définition de l'élément réel et de son élément de référence.**

Par conséquent, c'est la différence relative entre les déterminants des Jacobiens de l'élément non déformé et l'élément déformé qui est importante. Cette valeur est calculée en chaque point d'intégration. Il s'agit d'une idée originale adaptée aux codes où la partie élastique de la déformation n'est pas négligée.

**D. Valeurs du tenseur métrique aux points d'intégration.**

Le déterminant du Jacobien fournit une seule valeur caractérisant la déformation globale. Le tenseur métrique permet d'évaluer la déformation selon chaque direction :

$$G = J J^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (8.88.)$$

$$\sqrt{G_{11}} = \text{norme du vecteur } \vec{g}_\xi$$

$$\sqrt{G_{22}} = \text{norme du vecteur } \vec{g}_\eta$$

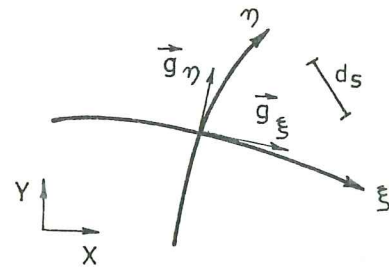


Figure 8.20.

$$ds^2 = dX dX + dY dY$$

$$= G_{11} d\xi d_\eta + G_{12} d\xi d_\eta + G_{21} d\xi d_\eta + G_{22} d\xi d_\eta \quad (8.89.a)$$

Le tenseur métrique permet donc de calculer la longueur d'un segment en coordonnées curvilignes. La variation relative de chacune de ses composantes et de son déterminant a été étudiée. Cet estimateur constitue une idée originale.

#### E. Critère du tiers central.

Il est connu qu'un élément isoparamétrique parabolique présente des zones où le déterminant du Jacobien est négatif lorsque les noeuds médians sont situés en dehors du tiers central de leurs côtés respectifs (fig. 8.21). De plus, un inconvénient très connu est le cas d'un segment extérieur à l'élément (fig. 8.22).

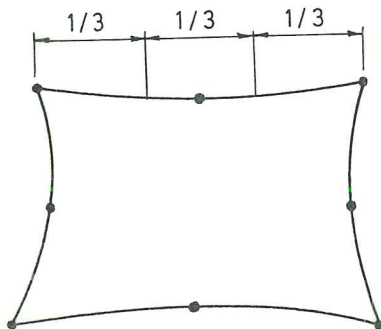


Figure 8.21.  
Définition du "tiers central"

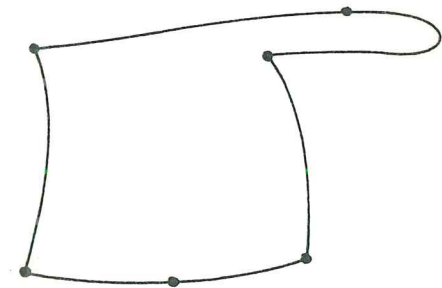


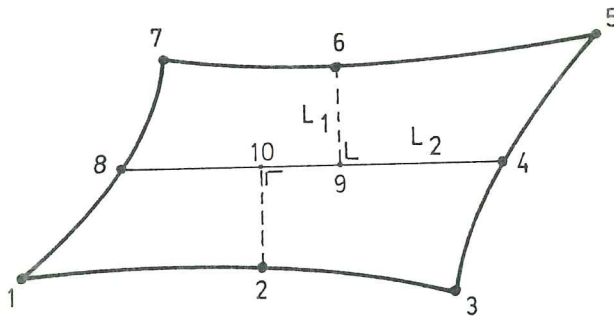
Figure 8.22  
Problème apparaissant lorsque le noeud médian est situé hors du tiers central.

Vérifier que le noeud milieu de chacun des côtés est situé dans le tiers central constitue un critère très simple, qui ne requiert la détermination d'aucune valeur seuil. Il est très efficace :

il est le premier à être violé dans un grand nombre de types de déformations. AELAAI (REM2) l'avait déjà suggéré dans son travail.

### F. Critère d'effilement.

La valeur absolue du critère d'effilement E ainsi que sa valeur relative évaluée entre l'état courant et l'état initial ont été analysés



$$E = \frac{L_1}{L_2} \quad (8.89.b)$$

$L_1$  = distance minimale entre la plus grande médiane et un point médian (69 ou 2 10)

$L_2$  = longueur de la plus grande médiane (62 ou 84).

C'est une manière de traduire l'effilement de l'élément.

**Figure 8.23.**

*Définition des distances utiles pour évaluer le critère d'effilement.*

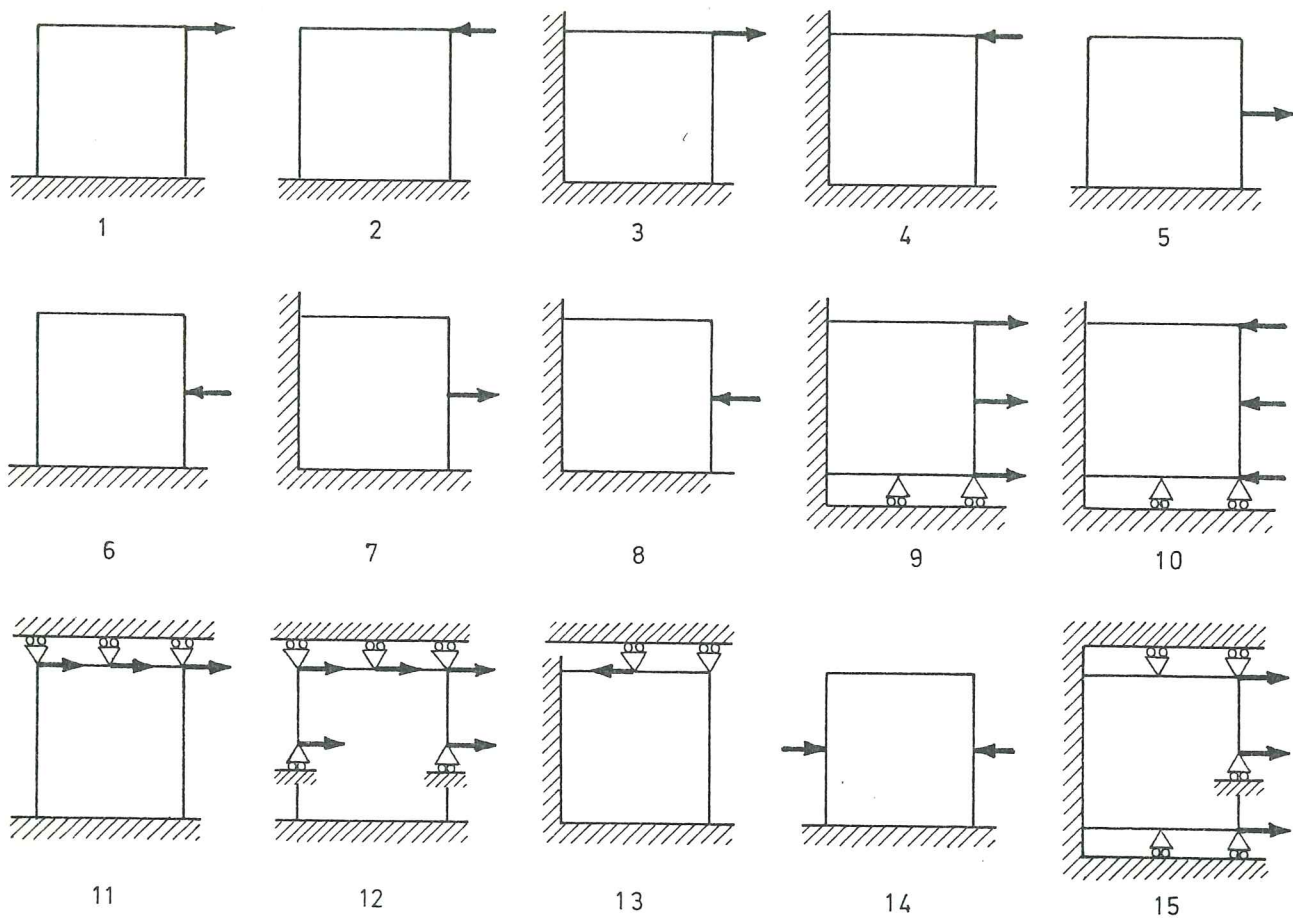
Ce critère est une version simplifiée de celui proposé par AELAAI (REM2). C'est en fait l'extension directe du critère suggéré en REM1 pour des éléments linéaires.

### Première détermination des valeurs seuils.

La figure 8.24 représente les tests réalisés sur un élément. Notre but est de simuler tous les types de déformation possibles et de fixer des valeurs seuils des critères afin qu'ils signalent l'apparition d'une déformation excessive.

Dans cette première approche, la définition des valeurs seuils est basée sur les dessins des éléments déformés et l'appréciation visuelle de ce qu'est un élément trop déformé.

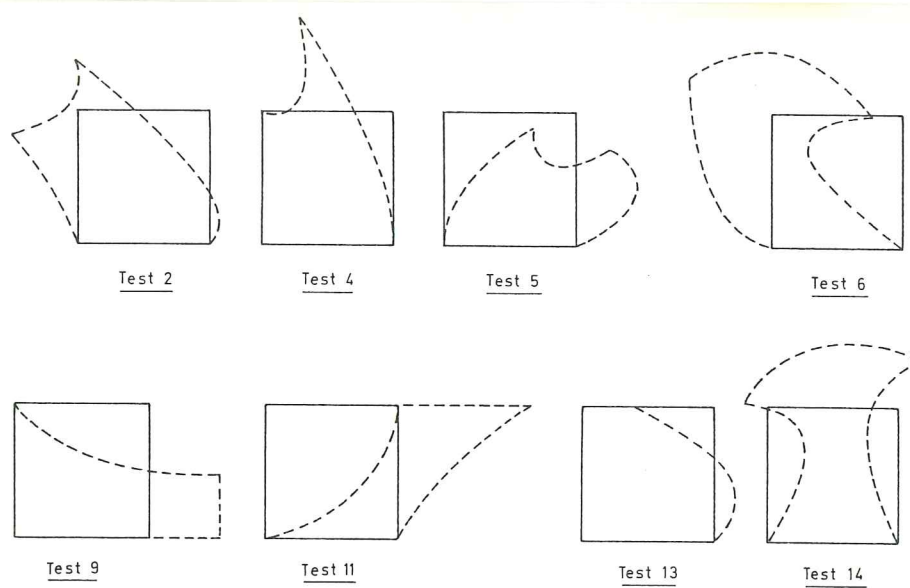
Au vu de ces tests, quatre critères ont été élevés au rang de critères principaux. Ils couvrent en effet tous les types de déformation testés et sont les premiers à signaler l'apparition d'une déformation excessive.



*Figure 8.24.- Dessin des 15 tests réalisés sur un seul élément.  
(Flèche = déplacement imposé).*

- *Le critère du tiers central.*

Très sensible, ce critère est le premier à être violé pour les déformations représentées figure 8.25. Les tests réalisés sur plusieurs éléments ainsi que les simulations de formage, réalisées jusqu'à présent, confirment son importance.

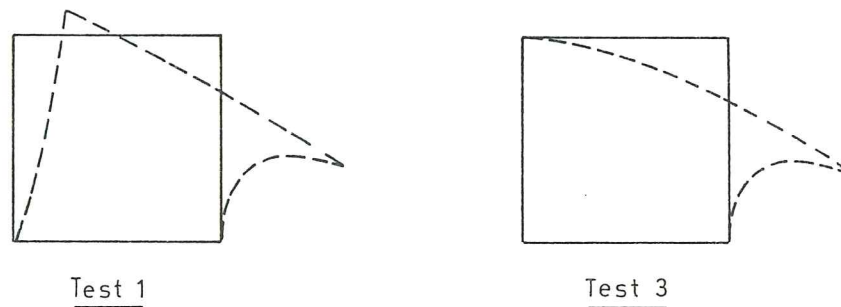


**Figure 8.25.**

*Déformations excessives signalées en premier par le critère du tiers central.*

- ***Le critère des angles au sommet.***

D'après les dessins des déformées, nous avons déterminé que seules les valeurs absolues entre  $30^\circ$  et  $150^\circ$  peuvent être admissibles. Ce critère traduit notamment l'étirement d'un élément par un de ses sommets, il est en effet atteint le premier pour les cas suivants :



**Figure 8.26.-** *Déformations excessives signalées en premier par le critère des angles*

Fréquemment atteint légèrement après le critère du tiers central (tests 4, 9, 11, 13 - figure 8.25), ce critère traduit toute déformation angulaire excessive.

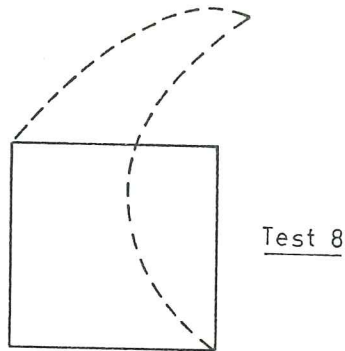
- ***Le critère des triangles.***

Nous considérons qu'une modification relative de la surface des triangles déformés et initiaux est admissible dans l'intervalle  $(- 50\%, + 100\%)$ .

Ce critère est souvent atteint légèrement après celui du critère du tiers central. Il caractérise des déformations telles que le gonflement, l'étranglement ou encore l'écrasement de l'élément (tests 2, 5, 6, 11, 14 - figure 8.25). Il a cependant été atteint en premier pour la



déformation suivante :



*Figure 8.27.- Déformation excessive signalée en premier par le critère des triangles.*

- ***Le critère d'effilement.***

Ce critère traduit une modification des proportions de l'élément (rapport de la demi-hauteur à la longueur maximum d'une médiane).

Des déformations telles que l'étirement, l'écrasement ou l'étranglement d'un élément (tests 8, 9, 1, 14), le cisaillement (tests 6 et 11) conduisent à des valeurs absolues très basses du critère : 0,009 et des différences entre situation initiale et déformée de plus de 90%.

Par contre, des déformations moins classiques telles que les tests 5 et 7 conduisent à des valeurs absolues de 0,1 et relative 70%.

La valeur seuil retenue est une variation de 70% de la valeur relative de ce critère. C'est principalement l'analyse des valeurs propres décrite au § suivant (8.5.2) qui a entraîné la classification de ce critère comme critère principal. Les simulations de formage (chapitre onze) ainsi que la comparaison entre critères géométriques et estimateurs locaux d'erreur (§ 8.6) ont confirmé l'importance de ce critère qui est parfois le premier indicateur d'un comportement inacceptable de l'élément.

- ***Les autres critères***

Les autres critères apparaissent toujours après qu'un ou plusieurs de ces 4 critères principaux soient violés. De plus leur valeur seuil est parfois difficile, voire impossible à déterminer.

## **Evolution de l'angle central (valeur en % entre l'angle déformé et l'angle initial).**

Ce critère traduit un changement de l'angle formé par les médianes. Il dépasse 50% pour les déformations des tests 8, 10, 11 en même temps ou peu après qu'un ou plusieurs des 4 critères principaux soient atteints. Au vu de ces éléments déformés, on peut conclure que ce critère traduit plus spécifiquement un cisaillement global.

### **Jacobien.**

Nous avons été assez étonnés de voir le peu de sensibilité du déterminant du jacobien. En effet, des déformations inadmissibles correspondaient fréquemment à de faibles diminutions ou augmentations du Jacobien (moins de 30%). Ce manque de sensibilité du Jacobien peut s'expliquer par le fait que c'est une mesure assez globale du changement de volume et non de la déformation.

### **Tenseur métrique.**

Contrairement au Jacobien, cette mesure favorise une direction particulière et on remarque des variations très fortes (supérieures à 200% et jusque 2.000%) même pour de faibles déformations. La majorité des types de déformation sont concernés, mais il est très difficile de définir un seuil du critère car selon la déformation, un état inacceptable sera traduit par une variation de 200 ou 1.000%.

### **8.5.2. Etude des valeurs propres.**

Les valeurs propres sont intéressantes pour deux raisons :

- un indicateur connu du bon conditionnement d'une matrice est le rapport entre la valeur propre maximum et la valeur propre minimum (EF1). On peut calculer ce coefficient pour la matrice tangente assemblée, mais la taille du système à traiter est alors importante et il n'est pas aisé de déterminer les éléments qui sont à l'origine du mauvais conditionnement. Dans la mesure où l'on élimine les modes rigides, on peut rechercher les valeurs propres de chaque élément et le théorème de FRIED-IRONS (EF2) nous assure que la plus petite (grande) valeur propre de tous les éléments est inférieure (supérieure) à la valeur propre minimale (maximale) du système assemblé. La taille du problème aux valeurs propres est ainsi réduite à la dimension de la matrice  $\underline{K}$  d'un



élément et, par ailleurs, il est très aisé de repérer les éléments qui causent le mauvais conditionnement ;

- les valeurs propres sont reliées à l'énergie.

Pour la légèreté de l'exposé, plaçons-nous dans le cas simple de l'analyse linéaire. Rappelons la valeur de l'énergie de déformation (voir 8.3.3) :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon} \, d\Omega \quad (8.62.)$$

Soit pour un élément :

$$U_{\Omega_e} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} (\underline{u}^N)^T \underline{S}^T \underline{D} \underline{S} \underline{u}^N \, d\Omega = \frac{1}{2} (\underline{u}^N)^T \underline{K} \underline{u}^N \quad (8.90.)$$

où  $\underline{u}^N$  = vecteur des déplacements nodaux.

$\underline{K}$  = matrice de rigidité de l'élément.

$\underline{S}$  = opérateur différentiel matriciel reliant les déformations aux déplacements nodaux.

$\underline{D}$  = matrice d'élasticité reliant les contraintes aux déformations

Si  $\underline{X}$  est la matrice des vecteurs propres orthogonaux et  $\underline{\Lambda}$  la matrice diagonale constituée par les valeurs propres de  $\underline{K}$  on peut écrire :

$$\begin{aligned} U_{\Omega_e} &= \frac{1}{2} \underline{u}^{NT} \underline{X}^T (\underline{X} \underline{K} \underline{X}^T) \underline{X} \underline{u}^N = \frac{1}{2} \underline{u}^{NT} \underline{X}^T \underline{\Lambda} \underline{X} \underline{u}^N \\ &= \frac{1}{2} \underline{u}^{*T} \underline{\Lambda} \underline{u}^* = \frac{1}{2} \lambda_i u_i^{*2} \end{aligned} \quad (8.91.)$$

grâce aux relations :

$$\underline{X}^T \underline{X} = \underline{I} \text{ (matrice unité)}$$

$$\underline{X} \underline{K} \underline{X} = \underline{\Lambda} \text{ (matrice diagonale des valeurs propres } \lambda_i)$$

$$\underline{X} \underline{u}^N = \underline{u}^* \text{ (vecteurs déplacements nodaux exprimés dans l'espace des vecteurs propres)}$$

L'énergie de déformation d'un élément est donc reliée à ses valeurs propres.

*Remarques.*

- Pour un élément axisymétrique, le seul mode rigide à bloquer est le déplacement parallèle à l'axe de symétrie. Malgré ce blocage, nous avons obtenu des valeurs propres nulles ou faiblement négatives. La sous-intégration de l'élément PL8LS (8 noeuds, 4 points d'intégration) justifie ce résultat.
- La matrice tangente de l'élément PL8LS est souvent non symétrique dans les simulations de formage (voir chapitre six), il en résulte des difficultés pour extraire les valeurs propres qui ne sont pas nécessairement réelles. Nous avons simplifié le problème en utilisant une matrice symétrisée  $\underline{K}^*$ . Cette approche peut d'ailleurs se justifier du point de vue de l'énergie :

$$\begin{aligned}
 U_{\Omega_e} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} (\underline{u}^N \underline{K} \underline{u}^N) + \frac{1}{2} (\underline{u}^N \underline{K} \underline{u}^N)^T \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \underline{u}^N \underline{K} + \underline{K}^T \underline{u}^N
 \end{aligned} \tag{8.92.}$$

Finalement, l'indicateur de conditionnement  $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$  ne peut être utilisé tel quel puisque les valeurs  $\lambda_{\min}$  ne sont pas correctement déterminées. Concernant l'énergie de déformation, ce sont ses variations qui déterminent les zones où un maillage raffiné est nécessaire (voir 8.3.3). Suite à ces informations, nous avons décidé d'analyser la variation de la valeur propre maximale d'un élément entre son état initial et son état déformé.

$$C = \frac{\lambda_{\max}^d - \lambda_{\max}^0}{\lambda_{\max}^0} \cdot 100 \tag{8.93.}$$

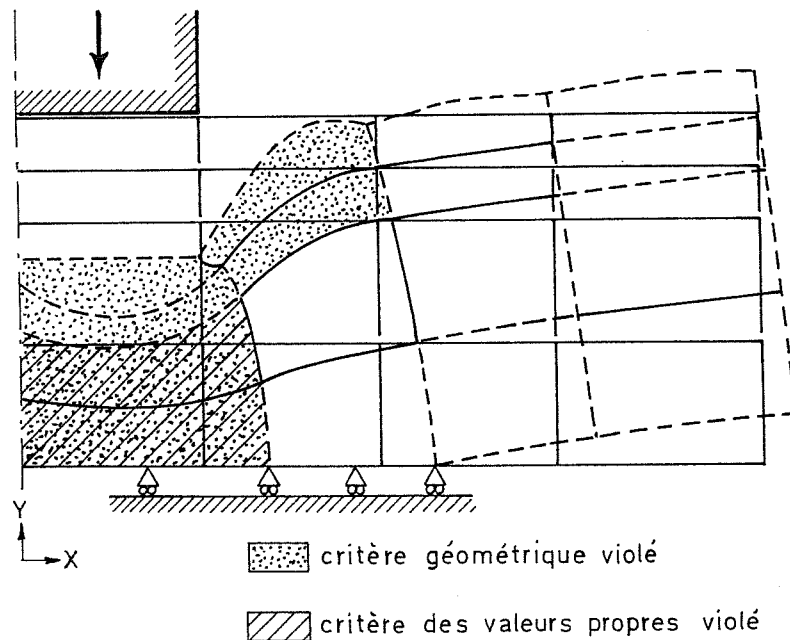
où  $d$  est relatif à l'élément déformé et  $0$  à l'élément initial.

Plusieurs tests tels que l'enfoncement d'un poinçon (fig. 8.28) et l'écrasement d'un cylindre nous ont permis d'analyser les variations des valeurs propres d'un élément de plus en plus déformé. Nous avons pu constater qu'une valeur de  $C$  supérieure à 70% correspondait généralement à un état de déformation limite admissible. Le critère des valeurs propres est par conséquent :  $C > 70\%$  (8.94.)

Un dépouillement des résultats des tests à montré qu'il existait 3 cas distincts pour les éléments qui violent un critère géométrique principal ou le critère des valeurs propres :

1. les critères géométriques du tiers central, des angles au sommet, des triangles sont atteints. Mais même après poursuite de la déformation, le critère aux valeurs propres

- n'apparaît pas. Il s'agit d'éléments déformés de manière non homogène pour lesquels les contraintes varient très fort d'un point d'interpolation à l'autre ;
2. les critères géométriques et les valeurs propres indiquent tous deux qu'un remaillage est nécessaire ;
  3. seuls les critères aux valeurs propres sont atteints, les 3 premiers critères géométriques principaux (tiers central, angle et triangle) ne détectent rien. Ce cas se présente pour des éléments dont l'état de contrainte est assez homogène. Ni les angles, ni la surface n'ont changé de manière excessive, mais les proportions de l'élément ont en général changé. C'est ainsi que si on tient compte du critère d'effilement, ces cas sont également repérés par un critère géométrique.



**Figure 8.28.**

*Résultats de l'analyse des critères pour la simulation de l'enfoncement d'un poinçon.*

L'attrait des valeurs propres réside notamment dans le fait qu'elles englobent à la fois les déformations et les contraintes. En effet, la matrice  $\underline{K}$  est modifiée par la valeur des contraintes, suite aux grandes déformations et à la loi élastoplastique utilisée. Par conséquent, elle tient un peu compte de l'histoire de l'élément. Nous avons réalisé un test où un déchargement apparaît. Les valeurs obtenues pour un état déformé lors de la mise en charge ou suite à un déchargement n'étaient pas significativement différentes. Les valeurs propres ne sont donc pas un critère meilleur que les critères géométriques en ce qui concerne l'histoire de la pièce analysée.

Outre qu'il est plus lent d'évaluer les valeurs propres qu'un critère géométrique, il est apparu que les valeurs propres de la matrice tangente étaient affectées par la taille du pas. En effet, on observe une progression continue des valeurs propres mais si le pas vient à être divisé par 100, les valeurs propres obtenues subissent des variations importantes. Ce phénomène n'est pas étonnant dans la mesure où la matrice tangente est obtenue en partie par perturbation (voir chapitre six). Si pour l'analyse élastoplastique ce procédé peut être évité, il n'en est pas toujours de même pour d'autres lois de comportement telles que les lois élastoviscoplastiques et l'utilisation courante des valeurs propres est donc déconseillée.

En conclusion, seuls les critères principaux géométriques ont été conservés pour nos simulations numériques de formage des métaux (chapitre onze).

### **8.5.3. Mesure des recouvrements ou des baillements entre la pièce et la matrice.**

Plusieurs programmes de simulation de formage tels que ALPID (FOR 9 à FOR 12), FORGE2 (FOR 17 à FOR 20) ou encore un code réalisé à Birmingham (FOR 14, FOR34) opèrent un remaillage si les surfaces de recouvrements ou de baillements entre la pièce forgée et la matrice dépassent un certain pourcentage de la surface de la pièce. Ce sont des approches intéressantes qui n'ont malheureusement pu être abordées dans le cadre de cette thèse. De tels critères peuvent en effet compléter les critères géométriques principaux établis au § 8.5.1.

## **8.6. COMPARAISON DES ZONES A REMAILLER DETECTEES PAR LES CRITERES GEOMETRIQUES ET LES ESTIMATEURS LOCAUX D'ERREUR**

Suite aux informations résumées dans les paragraphes précédents, nous avons retenu 9 possibilités de déterminer si un élément doit être remaillé ou non. Soit l'utilisation :

a. des critères géométriques principaux établis au § 8.5.1 ;

b. de l'indicateur local d'erreur  $(\xi_1)_{\Omega_e}$

$$(\xi_1)_{\Omega_e} = \frac{\|e\|_{E\Omega_e}}{\|e\|_{E_{\text{moyen}}}} \quad (8.95.)$$

Les estimateurs de type  $\xi$  représentent le quotient d'une norme de l'erreur relative à un élément par la norme moyenne de l'erreur sur tous les éléments ;

- c. de l'indicateur local d'erreur  $(\xi_2)_{\Omega_e}$  (8.78.d) basé sur  $\underline{e}_\sigma$  avec  $\sigma^*$  obtenu par la méthode de ZIENKIEWICZ (voir 6 8.3.2.1) ;
- d. de l'indicateur local d'erreur  $(\xi_3)_{\Omega_e}$  (8.79.d) basé sur  $\underline{e}_\varepsilon$
- e. de l'indicateur local d'erreur  $(\xi_4)_{\Omega_e}$  (8.85.d) basé sur  $\underline{e}_s$  avec  $s^*$  obtenu par extrapolation nodale suivie d'une moyenne non pondérée, soit la méthode que nous proposons au § 8.4 ;
- f. d'un indicateur d'inspiration personnelle qui est en fait l'application de la formule de l'estimateur global (8.46) de l'erreur à un élément soit :

$$(\eta_1)_{\Omega_e} = \frac{\| \underline{e} \|_{E\Omega_e}}{\sqrt{\| D \|_{\Omega_e}^2 + \| e \|_{E\Omega_e}^2}} \cdot 100 \quad (8.96.)$$

où la norme énergétique de l'erreur est obtenue à partir de  $\underline{e}_\sigma$  et  $\underline{e}_\varepsilon$  (8.73)

- g. de l'estimateur global (8.78.c) adapté à un élément  $(\eta_2)_{\Omega_e}$  basé sur  $\underline{e}_\sigma$  avec  $\sigma^*$  obtenu par la méthode de ZIENKIEWICZ ;
- h. de l'estimateur global (8.79.c) adapté à un élément  $(\eta_3)_{\Omega_e}$  basé sur  $\underline{e}_\varepsilon$  ;
- i. de l'estimateur global (8.85.c) adapté à un élément  $(\eta_4)_{\Omega_e}$  basé sur  $\underline{e}_\sigma$  avec  $\sigma^*$  obtenu selon la méthode que nous proposons au § 8.4.

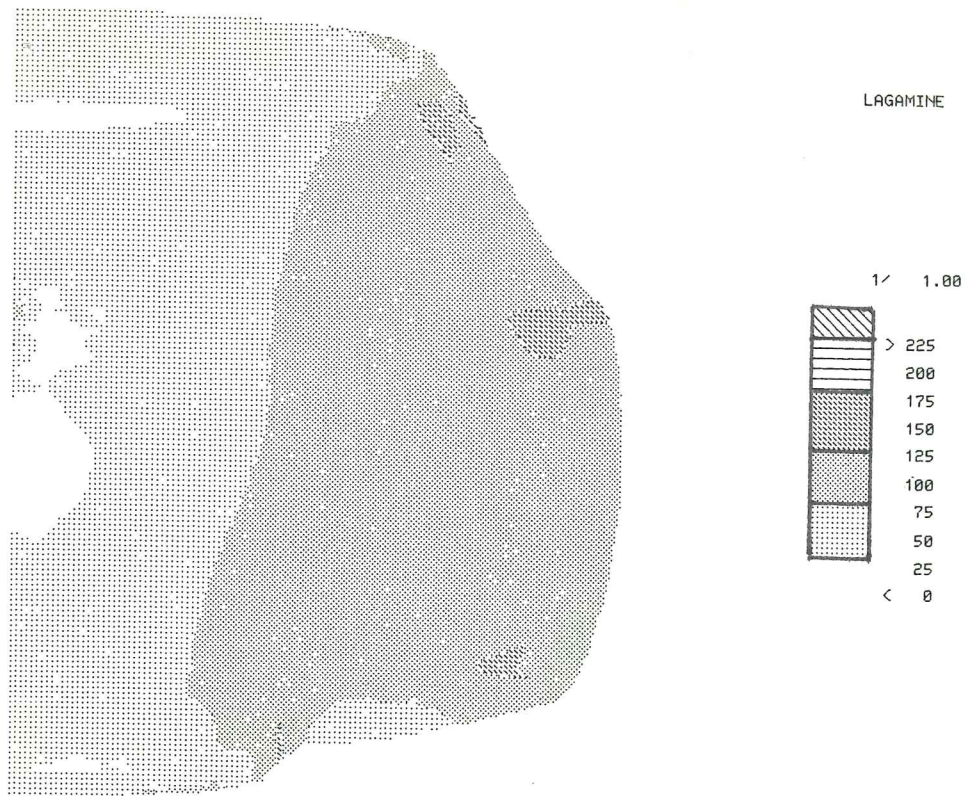
Ces différentes possibilités ont été testées sur la simulation du formage d'un pignon de machine décrite en détail au chapitre onze. Trois remaillages réalisés respectivement en 0,033 ; 0,05 et 0,07 secondes ont permis de simuler l'opération complète de formage. Le tableau suivant résume les différents tests :

Temps	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
0,033	T 1	S 2	–	–
0,04	S 3	S 4	–	–
0,05	S 5	T 6	S 7	–
0,06	S 8	S 9	S 10	–
0,07	S 11	S 12	T 13	S 14
0,08	–	–	–	S 15
0,09	–	–	–	S 16
0,010	–	–	–	T 17
0,11	–	–	–	S 18
0,12	–	–	–	S 19

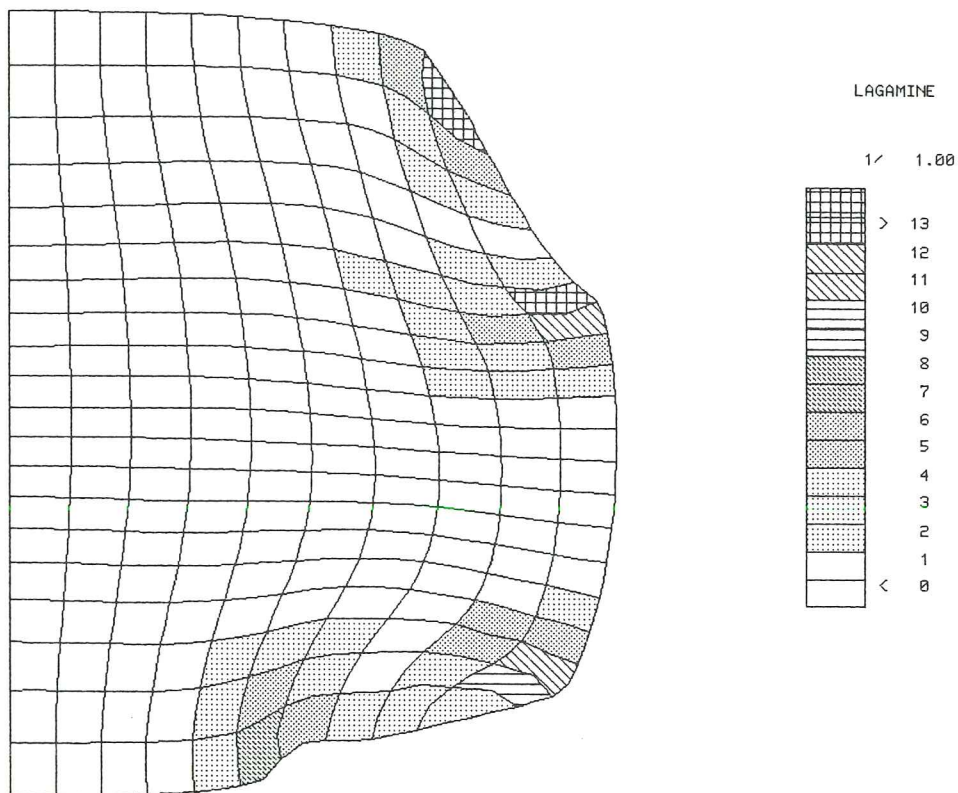
où – indique que le maillage n'existe pas à ce moment du formage  
T indique que les 9 approches a, b, c, ... i ont été réalisées  
S indique que seules les approches a, b, d ont été réalisées  
et les chiffres permettent de repérer facilement les différents tests dans la suite du texte.

Au vu des résultats des analyses complètes (tests 1, 6, 13, 17), seules les approches a, b, d ont été conservées. Ces 3 indicateurs identifient des zones à remailler quasi-identiques, qui correspondent effectivement aux zones où les plus grandes déformations et les plus fortes variations de contraintes apparaissent (figures 8.29, 8.30 et 8.31). Dans la mesure où, pour les 2 premiers maillages, les éléments initiaux sont de taille quasi égale, on peut affirmer que ces zones sont effectivement celles où l'erreur maximale est localisée. Pour les 2 derniers maillages, la taille des éléments varie selon leur position, on peut donc être moins catégorique sur la position effective des zones où l'erreur sera maximum. Cependant les zones à remailler isolées par les indicateurs a, b, d sont à nouveau les zones des plus grandes déformations et des plus fortes variations des contraintes, ce qui est très plausible. Le maillage 3 présente de très grands éléments dans une zone peu déformée et peu contrainte et certains de ses éléments constituent une zone à remailler selon les critères  $b(\xi_1)_{\Omega_e}$  et  $d(\xi_3)_{\Omega_e}$ . Ce résultat est également acceptable, la taille des éléments étant peut-être un peu excessive. La valeur du paramètre  $\xi$  en ces éléments est d'ailleurs nettement inférieure à celle des éléments fortement déformés (figure 8.32).



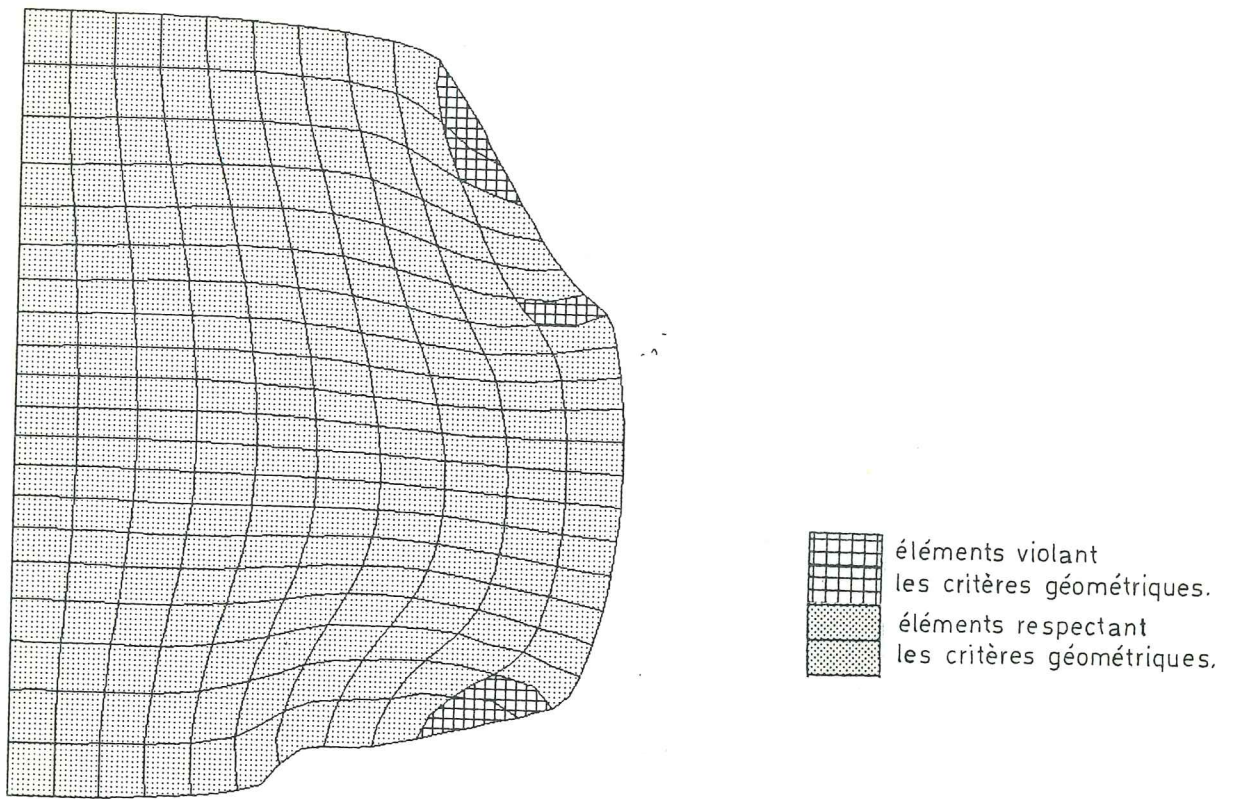


**Figure 8.29.** *Maillage 1 en  $t = 0,033$  sec, courbe de niveau des contraintes équivalentes de VON MISES.*

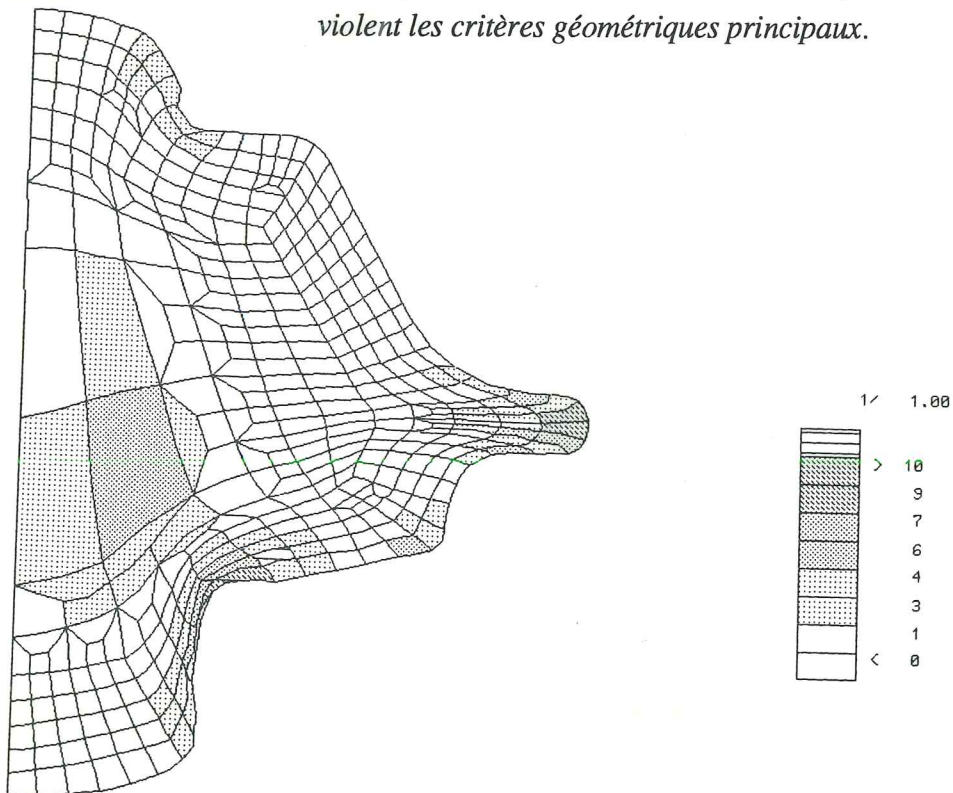


**Figure 8.30.** *Maillage 1 en  $t = 0,033$  sec (test 1) ; indicateur  $(\xi_3)_{\Omega_d}$  (approche d)*



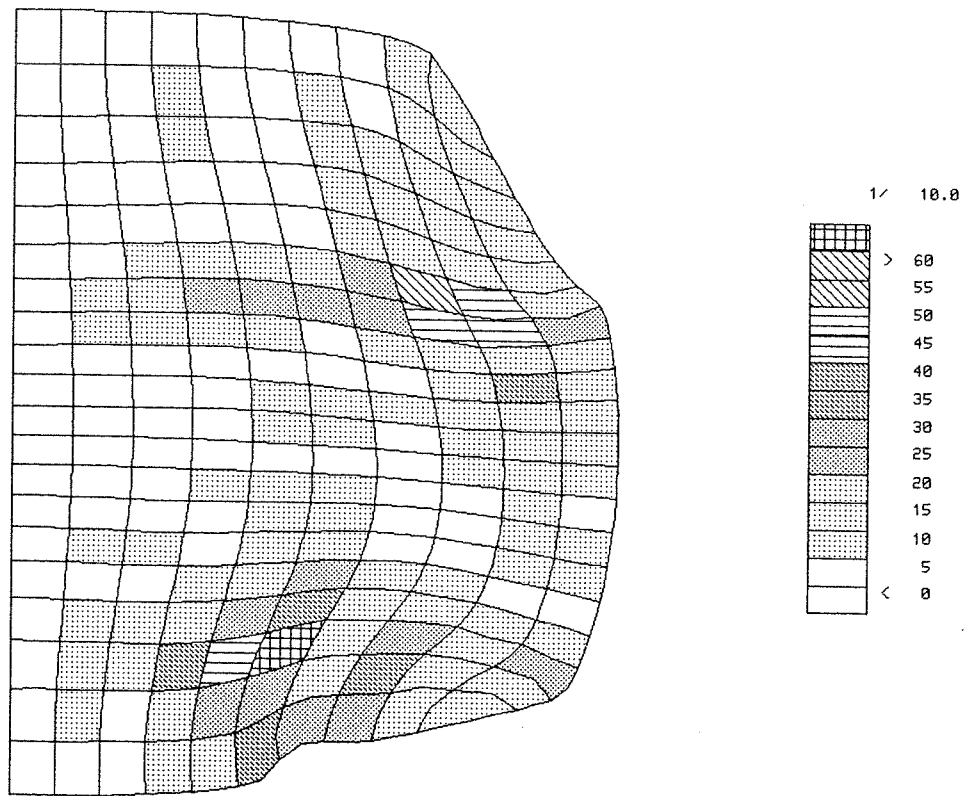


**Figure 8.31.** *Maillage 1 en  $t=0,033$  sec (test 1) ; identification des éléments qui violent les critères géométriques principaux.*



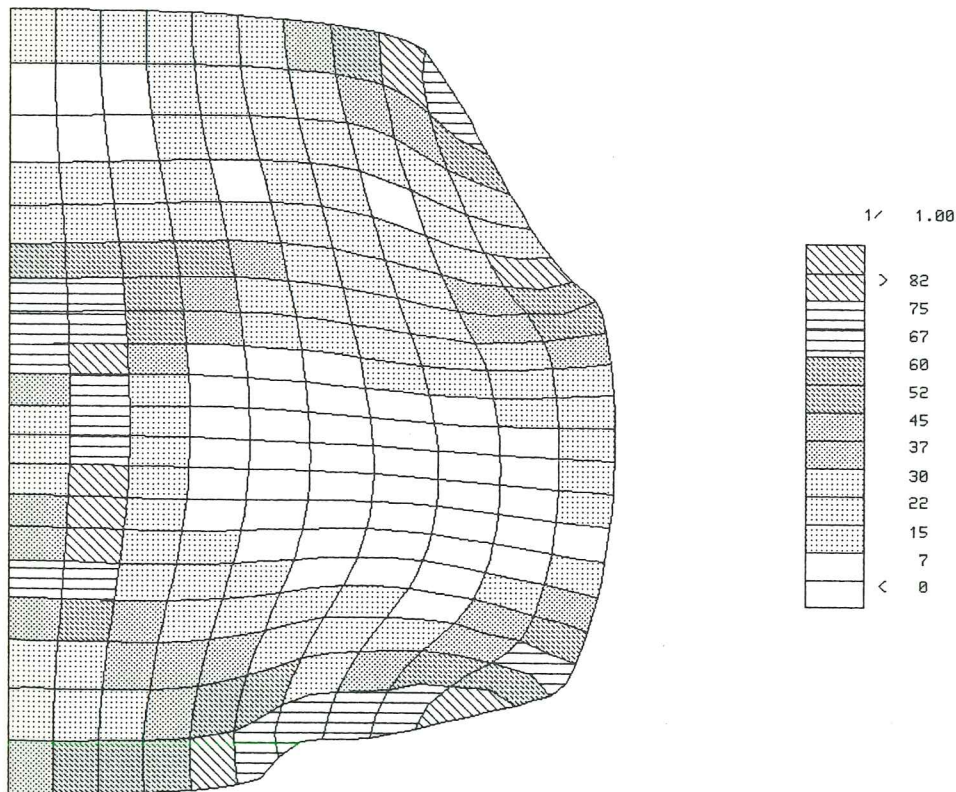
**Figure 8.32.** *Maillage 3 en  $t=0,070$  sec (test 13) ; indicateur  $(\xi_1)_{\Omega_e}$  (approche b)*

Les indicateurs de type  $\xi$  basés sur les contraintes (c et e) identifient également les zones détectées par les indicateurs a, b, d, cependant de façon moins précise. De plus, les zones identifiées sont plus diffuses, moins bien localisées (figure 8.33). Cette tendance est encore plus marquée pour les indicateurs de type  $\eta$  (g et i).



**Figure 8.33.** *Maillage 1 en  $t=0,033$  sec (test 1) indicateur  $(\xi_3)_{\Omega_e}$  (approche e)*

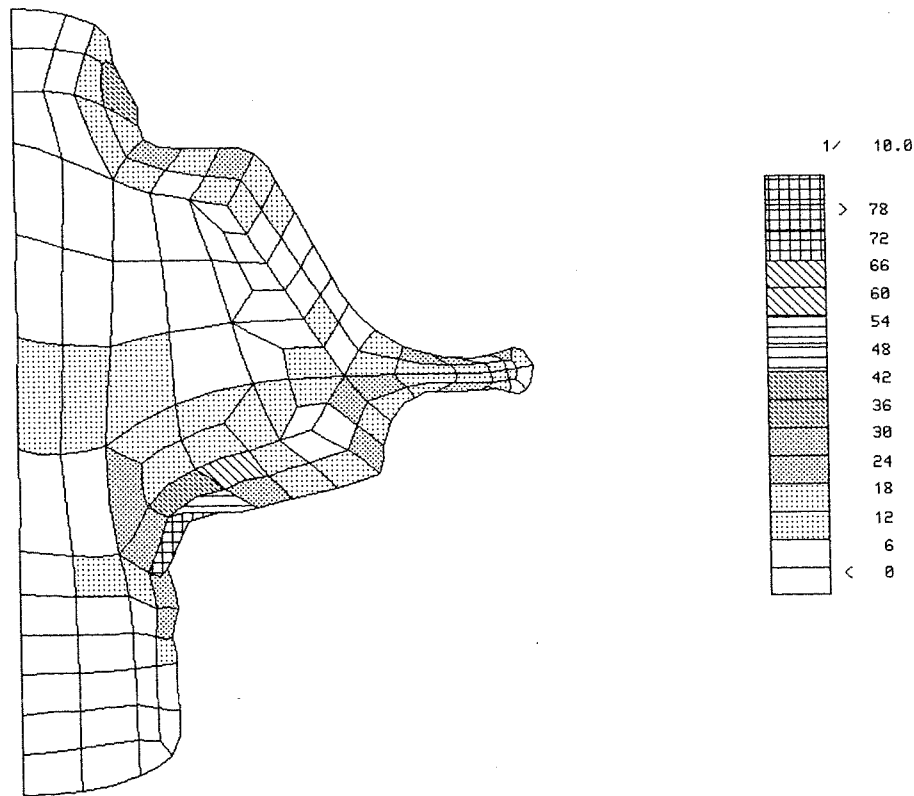
Les indicateurs  $\eta_1$  et  $\eta_3$  (approche f et h) sont exclus car ils détectent des éléments à remailler dans des zones de faibles déformations et de contraintes homogènes même pour les maillages 1 et 2 (figure 8.34). Ce mauvais résultat est probablement dû à l'importance du terme de la norme de l'erreur  $\|\underline{\epsilon}_e\|_{L_2\Omega_e}$  ou  $\|\underline{\epsilon}\|_{E\Omega_e}$  par rapport à la norme calculée  $\|\dot{\epsilon}\|_{L_2\Omega_e}$  ou  $\|D\|_{\Omega_e}$ . Ce phénomène est également présent quoique moins marqué pour les indicateurs  $\eta_2$  et  $\eta_4$ .



**Figure 8.34.** Maillage 1 en  $t = 0,033$  sec (test 1) indicateur  $(\eta_3)_{\Omega_e}$  (approche h)

Les nombreux tests réalisés sur les indicateurs a, b, d nous ont permis de tirer les conclusions générales suivantes :

- les zones à remailler identifiées par les indicateurs b ( $\xi_1$ ) et d ( $\xi_3$ ) sont semblables (fig. 8.35 et 8.36). L'intervalle de variation  $[0, \xi_{\max}]$  de l'indicateur  $\xi_3$  est généralement supérieur de 30 à 50% à celui de  $\xi_1$ . Dans la mesure où la densité du nouveau maillage serait reliée à la valeur de  $\xi$ , on obtiendrait de plus fortes variations de la densité du maillage avec l'indicateur  $\xi_3$ . Il s'agit cependant uniquement d'une question d'échelle et on ne peut se baser sur ce point pour préférer un indicateur à l'autre.



**Figure 8.35.** *Maillage 4 en  $t=0,12$  sec (test 19) indicateur  $(\xi_1)_{\Omega_e}$  (approche b)*



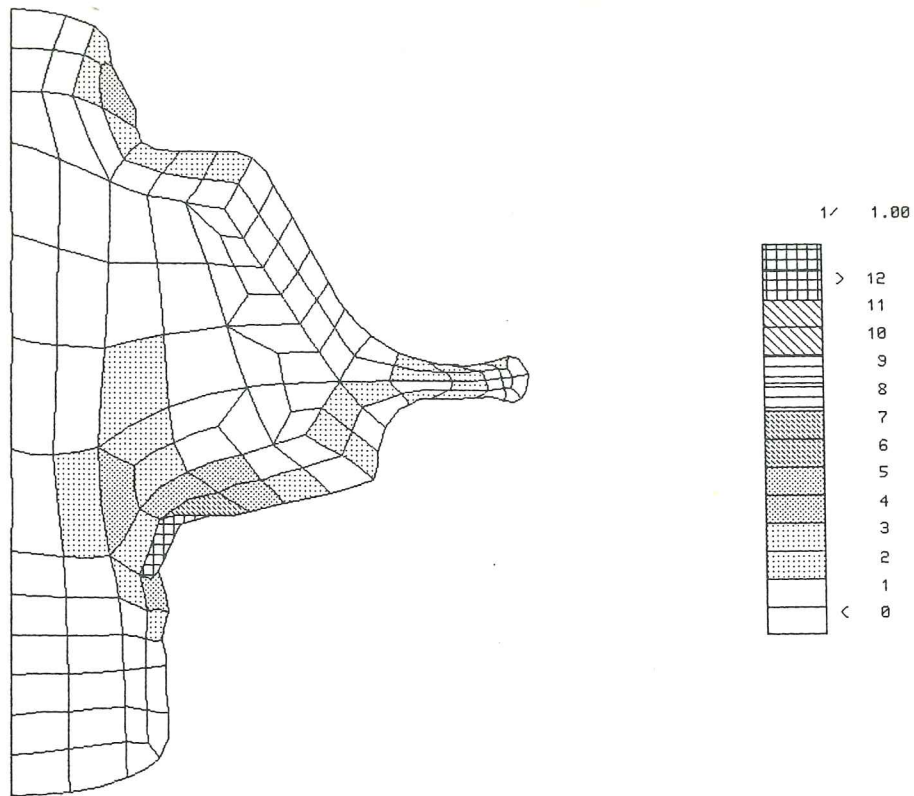


Figure 8.36. Maillage 4 en  $t = 0,12$  sec (test 19) indicateur  $(\xi_3)_{\Omega_e}$  (approche d)

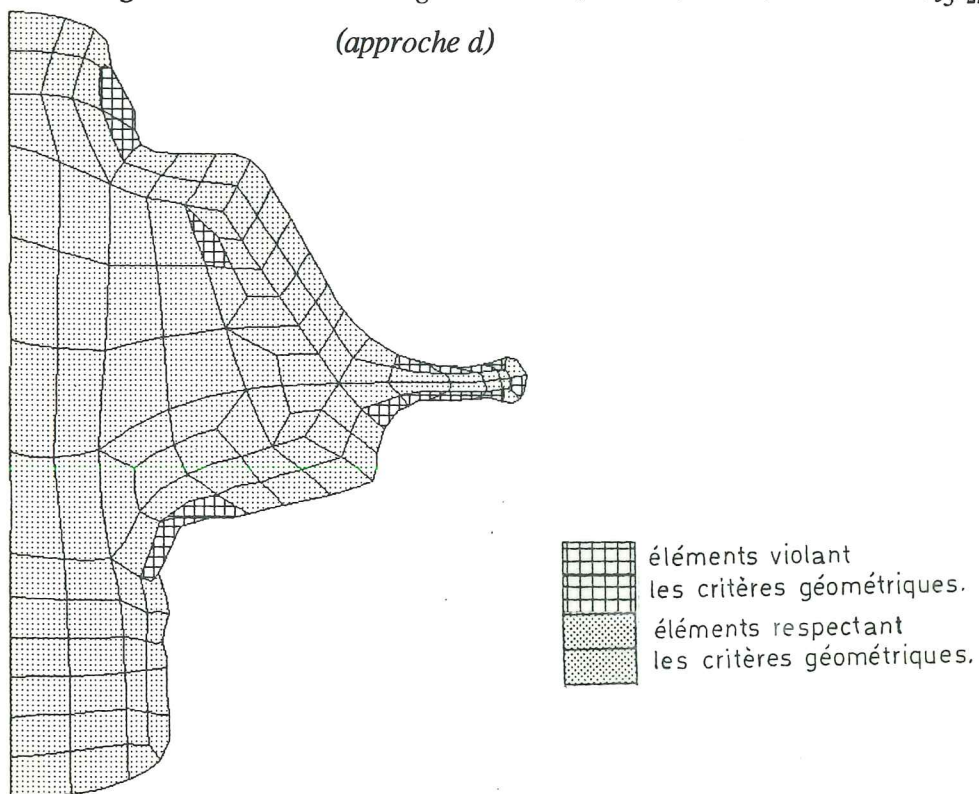


Figure 8.37. Maillage 4 en  $t = 0,12$  sec (test 19) ; identification des éléments qui violent les critères géométriques principaux.

- les critères géométriques (fig. 8.37) identifient toujours les éléments pour lesquels les valeurs de l'indicateur d'erreur  $\xi$  sont maximales. Pour les valeurs plus faibles de  $\xi$ , le résultat dépend du type de déformation observée. La position des zones à remailler est presque toujours correctement déterminée, seule la taille de la zone envisagée est généralement plus faible que celle détectée par les identificateurs  $\xi_1$  et  $\xi_3$ . Dans la mesure où on ne passe de toute façon pas instantanément d'une densité faible à une densité forte de maillage, ce point n'est pas gênant. Les valeurs seuils des critères géométriques déterminées en 8.5.1. ont été conservées vu le bon accord entre les critères a, b, d. Seul le critère des angles devra être modifié. En effet, pour passer d'une zone de forte densité à une zone de faible densité de maillage, on est souvent obligé d'admettre des éléments initiaux qui présentent des angles relativement faibles (entre  $20^\circ$  et  $45^\circ$ ). Ces éléments violent par conséquent immédiatement la valeur de l'angle minimum admis sans pour autant constituer une source d'erreur puisque les indicateurs b et d ne les identifient pas comme zone à remailler (fig. 8.37.). Nous modifions ce critère de manière à étudier la variation entre l'angle de l'élément déformé et de l'élément initial. Soit :

$$\tau_i = \frac{|a_i^d - a_i^o|}{a_i^o} \cdot 100 < 66 \quad i = 1, 4 \quad (8.97.)$$

où  $a_i^d$  = angle au sommet i de l'élément déformé.

$a_i^o$  = angle au sommet i de l'élément initial.

Pour un angle de  $90^\circ$  dans l'élément initial, on retrouve ainsi les limites de  $30^\circ$  et  $150^\circ$ .

Les critères géométriques peuvent constituer un estimateur global d'erreur. Nous avons envisagé deux possibilités :

$$\eta_5 = \frac{\text{aire des éléments violant les critères géométriques}}{\text{aire totale}} \quad (8.98.)$$

$$\eta_6 = \frac{\text{nombre d'éléments violant les critères géométriques}}{\text{nombre total d'éléments de solide}} \quad (8.99.)$$

Les figures 8.38 et 8.39 illustrent l'évolution de ces estimateurs globaux pour la simulation du formage du pignon de machine. Les deux propriétés désirées pour un estimateur global sont remplies :

- l'estimateur croît avec la déformation
- à chaque remaillage, l'estimateur diminue.

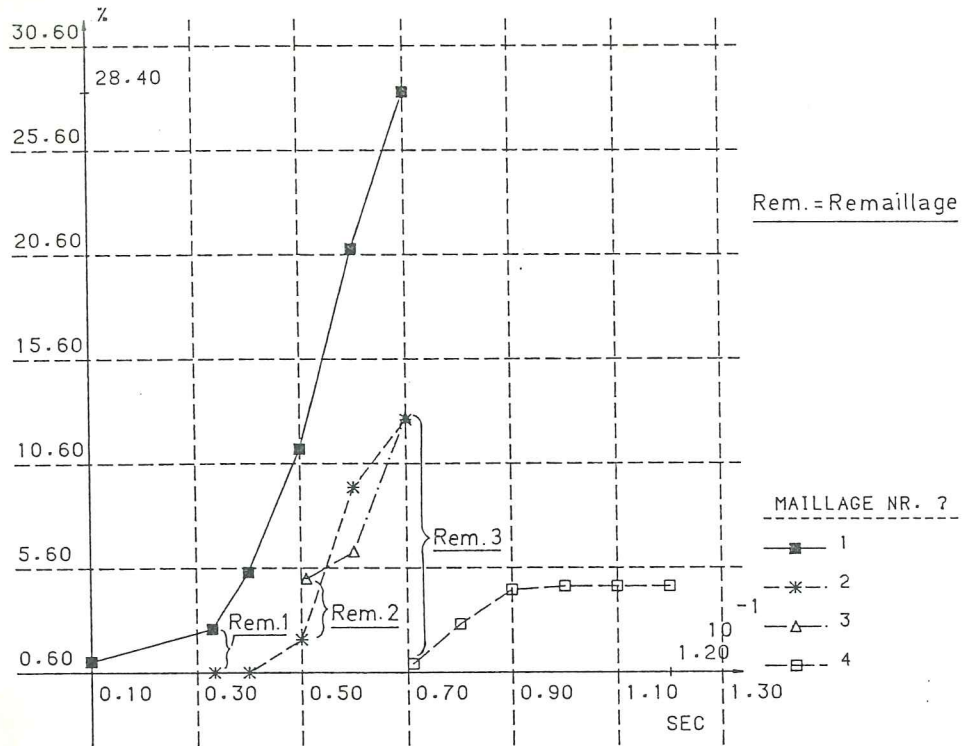


Figure 8.38. Critère global de remaillage basé sur le rapport de l'aire des éléments trop distordus à l'aire totale (8.99.)

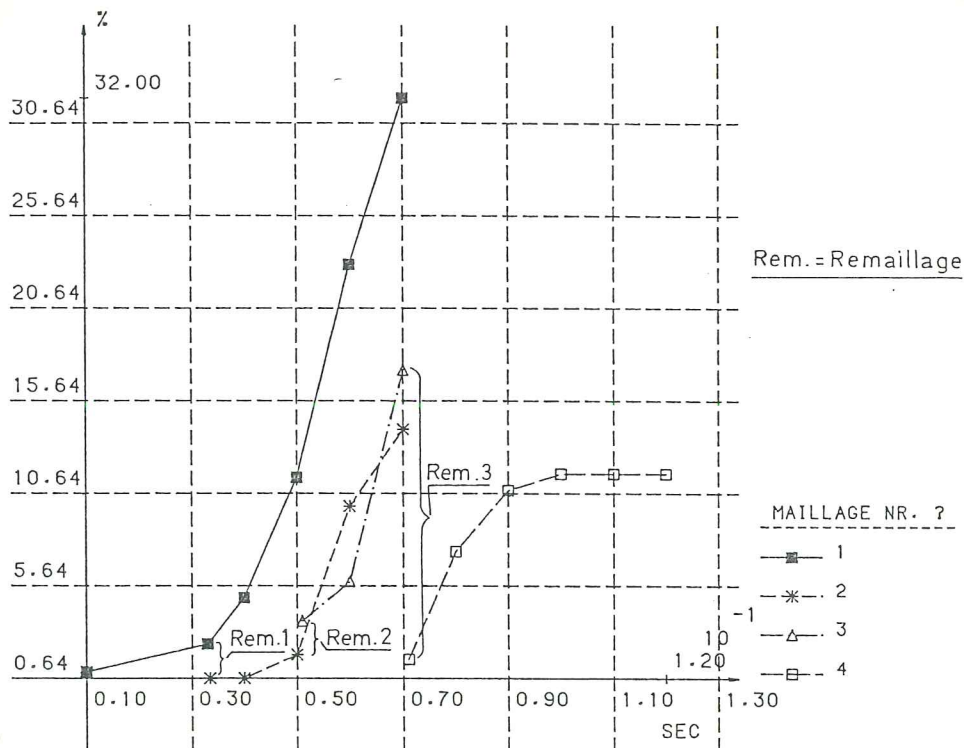


Figure 8.39. Critère global de remaillage basé sur la division du nombre d'éléments trop distordus par le nombre total d'éléments (8.99.).



La seconde propriété n'est pas vérifiée pour le second remaillage (passage du maillage 2 au maillage 3). C'est une conséquence de l'utilisation du critère des angles en valeur absolue. La modification suggérée ci-dessus (8.97) entraînera une forte diminution des critères  $\eta_5$  et  $\eta_6$  et la seconde propriété sera remplie. Le nouveau maillage dans son état initial correspondra à des  $\eta_5$ ,  $\eta_6$  nuls et non plus faibles.

## 8.7. CONCLUSION

Suite aux recherches que nous avons réalisées, nous avons déterminé 4 critères globaux permettant de prendre la décision de l'instant opportun de remaillage et 3 critères locaux utiles pour créer un nouveau maillage optimum.

### Critères globaux retenus.

- a. critère  $\eta_2$  (8.78.c)      estimateurs d'erreur globaux basés sur l'erreur
- b. critère  $\eta_4$  (8.85.c)      des contraintes
- c. critère  $\eta_5$  (8.98)      critères globaux basés sur les critères géométriques
- d. critère  $\eta_6$  (8.99)      principaux.

En pratique, selon le champ de contraintes plus précis calculé un seul des deux estimateurs  $\eta_2$  et  $\eta_4$  sera présent dans le code. Une valeur de l'erreur admise peut être fixée par l'utilisateur afin de déterminer l'instant opportun pour effectuer un remaillage.

Les critères  $\eta_5$  et  $\eta_6$  sont également redondants, le choix d'un des deux et d'une valeur seuil doit être réalisé. Nous optons pour le critère  $\eta_6$  qui nous semble plus sécuritaire. En effet, dans les zones fortement déformées, la densité du maillage est souvent importante et même si l'aire relative de cette zone reste faible, si une proportion "*importante*" des éléments est distordue, l'erreur correspondante sera élevée.

Pour le code LAGAMINE, nous comptons conserver les deux critères globaux  $\eta_4$  et  $\eta_6$ . Lorsque la première valeur seuil imposée par l'utilisateur sera atteinte, on opérera un remaillage.

### Critères locaux retenus.

- a. critère local  $\xi_1$  (8.77) basé sur  $e_\sigma$  et  $e_\xi$
- b. critère local  $\xi_3$  (8.79.d) basé sur  $e_\xi^*$
- c. critères géométriques principaux.

Le critère  $\xi_1$  peut être éliminé puisque son calcul entraîne un nombre d'opérations plus important que le critère  $\xi_3$  qui donne des résultats semblables. Le choix entre le critère  $\xi_3$  et les critères géométriques reste posé. D'une part, l'information fournie par  $\xi_3$  est plus nuancée que celle fournie par les critères globaux, d'autre part les possibilités d'un mailleur automatique même à densité variable sont limitées. Il n'est pas sûr que le maillage obtenu en se basant sur les informations de  $\xi_3$  sera meilleur que celui obtenu à partir des critères géométriques. Seule l'expérimentation numérique réalisée avec le mailleur automatique disponible dans notre équipe de recherche donnera la réponse.

Finalement, quelle voie suggérer pour les codes ne comportant encore aucun développement relatif aux critères de remaillage : les estimateurs globaux et locaux d'erreur ( $\eta_2$ ,  $\eta_4$  et  $\xi_3$ ) ou les critères géométriques et l'estimateur global qui en dérive ( $\eta_6$ ) ? Le tableau suivant résume les avantages (+) et inconvénients (-) de chacune des deux approches.

	Estimateur d'erreur	Critères géométriques
• l'estimateur global croît avec la déformation ?	non -	oui +
• développements et campagne de tests importante nécessaire pour chaque élément de la librairie ?	non +	oui --
• information nuancée pour les zones à remaillée ?	oui +	non -
• estimation de l'erreur globale ?	oui +	non -
• vérification du maillage initial non déformé ?	non -	oui +

La balance penche donc en faveur des estimateurs globaux et locaux d'erreur qui engendrent un travail de développement moins important pour un résultat identique si pas plus précis. Les critères géométriques conservent cependant l'avantage de procurer un critère global toujours croissant, et de vérifier la position des noeuds milieu des côtés pour les éléments isoparamétriques à 8 noeuds.