

# CHAPITRE 5

## Modèle couplé d'analyse mécanique thermique métallurgique

### 5.1. Introduction

### 5.2. Extension de l'équation d'équilibre thermique au cas des grandes déformations

### 5.3. Modifications de la modélisation des cinétiques de transformations suite au couplage mécanique

#### 5.3.1. Les transformations par diffusion (ferrite, cémentite, perlite, bainite)

##### 5.3.1.1. Phénomènes observés

##### 5.3.1.2. Modélisation

#### 5.3.2. La transformation martensitique

##### 5.3.2.1. Phénomènes observés et modèles proposés

##### 5.3.2.2. Modèle adopté dans nos simulations

### 5.4. Loi constitutive mécanique

#### 5.4.1. Introduction

#### 5.4.2. Loi élastique couplée à l'analyse thermique

#### 5.4.3. Loi élastoplastique couplée à l'analyse thermique

#### 5.4.4. Loi constitutive utilisée pour l'analyse mécanique couplée à l'analyse thermique et métallurgique

##### 5.4.4.1. Introduction

##### 5.4.4.2. La plasticité de transformation

##### 5.4.4.3. Le chargement de volume dû aux transformations de phases $D_{ij}^{tr}$ et à la dilatation thermique $D_{ij}^{th}$

##### 5.4.4.4. La plasticité classique dans un matériau multiphasique

##### 5.4.4.5. Formule finale de la loi mécanique thermique métallurgique couplée



## 5.1. INTRODUCTION

Dans l'optique de simuler les processus complets de forgeage et d'estampage, on peut distinguer deux étapes :

- étape 1 :

le processus de formage qui peut être non isotherme et implique alors l'utilisation d'un code thermomécanique couplé avec grandes déformations et grands déplacements. Les températures des pièces restent supérieures à celles des transformations de phase et l'aspect métallurgique peut être oublié ;

- étape 2 :

le traitement thermique qui ramène la pièce de la température de formage à la température ambiante ou qui constitue une étape supplémentaire du processus de fabrication (revenu ...). La simulation de cette étape implique un code thermique métallurgique mécanique couplé.

Concernant l'étape 1, nous présentons dans ce chapitre le développement du couplage thermo-mécanique en grandes déformations. Il est bien clair qu'au cours de l'opération de formage, l'influence des vitesses de déformation n'est pas négligeable. L'emploi d'une loi élasto-visco-plastique est donc recommandable dans ce cas.

Toutefois, par souci d'homogénéité, l'exposé se fera dans le cas d'une loi élastoplastique, comme pour le couplage thermique métallurgique mécanique. Mais l'extension au cas élastoviscoplastique est simple et a été également implantée dans LAGAMINE.

Concernant l'étape 2, le modèle thermique métallurgique présenté au chapitre 3 est insuffisant pour deux raisons :

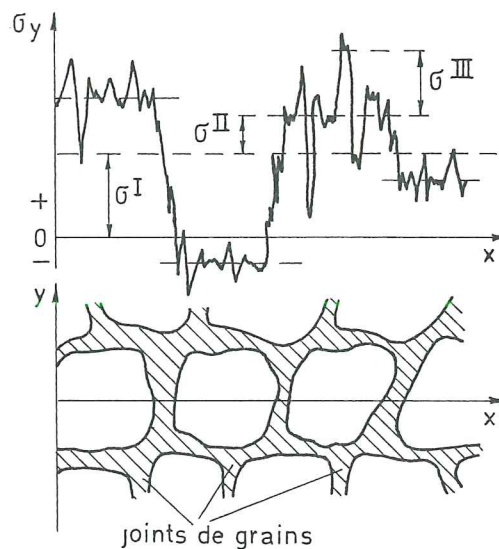
- aucune information relative à l'état de contraintes et aux propriétés mécaniques finales n'est fournie ;
- dans le cas de pièces massives, les résultats concernant la microstructure sont en désaccord avec les résultats expérimentaux. Ce fait prouve l'importance des interactions entre les cinétiques de transformations et la mécanique.

Dans ce chapitre, les modifications du modèle thermique métallurgique occasionnées par le couplage mécanique sont détaillées. Les termes supplémentaires de l'équation élastoplastique introduits par les transformations de phase sont présentés. Si une formulation en grandes déformations, grands déplacements est obligatoire pour le formage (étape 1), elle n'est cependant plus nécessaire pour la simulation des traitements thermiques (étape 2). Elle sera cependant conservée pour permettre une comparaison aisée des

formulations avec ou sans prise en compte de la métallurgie.

Avant d'aborder la suite de ce chapitre, il nous semble nécessaire de bien préciser la notion de "contrainte". En effet, à cause du caractère polycristallin et hétérogène des matériaux métalliques, les sources de contraintes peuvent provenir de déformations aux échelles macro-, micro- ou submicroscopiques. Une classification des contraintes selon trois ordres liés à l'échelle à laquelle on considère le matériau, est couramment utilisée (CP38, CP40) :

- les contraintes du 1er ordre (contraintes macroscopiques) sont homogènes sur un "très grand domaine" du matériau (plusieurs grains : donc échelle de quelques  $10^{-4}$  m). Les forces internes liées à ces contraintes doivent être en équilibre avec les forces extérieures appliquées ;
- les contraintes du 2ème ordre sont homogènes sur de petits domaines du matériau (un grain : donc échelle de quelques  $10^{-5}$  m). Les forces internes et les moments liés à ces contraintes sont en équilibre dans un assez grand nombre de grains ;
- les contraintes du 3ème ordre sont non homogènes sur les plus petits domaines du matériau (quelques distances interatomiques : donc échelle de quelques  $10^{-8}$  m). Les forces internes et les moments liés à ces contraintes sont en équilibre dans de très petits domaines.



**Figure 5.1.**

*Définition schématique des différents ordres de contraintes pour un matériau monphasé*

Pour expliquer le comportement macroscopique d'une pièce, les contraintes macroscopiques suffisent généralement. Ce seront les seules évaluées dans notre modèle et dès à présent, le terme contrainte signifie contrainte macroscopique. Dans le cas des transformations de phase cependant, la présence des contraintes microscopiques entraîne la présence du phénomène de "*plasticité de transformation*". Des modèles phénoménologiques permettent de traduire ce comportement sans connaître les contraintes microscopiques. La plasticité de transformation et sa modélisation constitueront le paragraphe 5.4.4.2.

L'intégration du modèle complet thermique, métallurgique, mécanique dans le code LAGAMINE sera traitée au chapitre 6.

## 5.2. EXTENSION DE L'EQUATION D'EQUILIBRE THERMIQUE AU CAS DES GRANDES DEFORMATIONS

Sous l'hypothèse de petites déformations mécaniques, l'équation complète de la chaleur s'écrit (EF18bis) :

$$\text{div} (k \text{ grad } T) = \rho c \dot{T} - \underline{\sigma} : \dot{\underline{\epsilon}}^p + \underline{A} \cdot \dot{\underline{V}} - r - T \left( \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial T} : \dot{\underline{\epsilon}}^e + \frac{\partial \underline{A}}{\partial T} \cdot \dot{\underline{V}} \right) \quad (5.1.)$$

où  $T$  : température

$k$  : conductivité

$\rho$  : masse volumique

$c$  : chaleur spécifique

$\underline{\sigma}$  : tenseur contrainte de CAUCHY

$\underline{\epsilon}^e$  : partie élastique du tenseur de déformation de CAUCHY

$\underline{\epsilon}^p$  : partie non élastique du tenseur de déformation de CAUCHY

$\underline{V}$  : vecteur contenant les variables représentant l'état interne de la matière

$\underline{A}$  : vecteur contenant les forces thermodynamiques associées aux composantes de  $\underline{V}$  par l'intermédiaire de l'énergie libre  $\psi$  :

$$A_k = \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \quad (5.2.)$$

$r$  : taux de chaleur interne volumique, exprimé par (3.20.) en cas de transformation de phase.

Dans cette équation d'équilibre thermique, le tenseur de déformation de CAUCHY est séparé en deux parties : élastique et inélastique.

L'équation (5.1.) s'étend facilement au cas des grandes déformations mécaniques. Il suffit d'y introduire la vitesse de déformation appropriée :

$$\underline{D} = \frac{1}{2} (\text{grad } \underline{v} + (\text{grad } \underline{v})^T) \quad (5.3.)$$

où  $\underline{v}$  est la vitesse d'une particule matérielle en cours de déformation. En admettant que les déformations élastiques restent petites, on montre facilement (EF19, EF20) que  $\underline{D}$  se décompose additivement en une vitesse de déformation élastique et une vitesse de déformation inélastique :

$$\underline{D} = \underline{D}^e + \underline{D}^p \quad (5.4.)$$

La forme finale de l'équation complète de la chaleur en présence de grandes déformations mécaniques peut alors s'écrire :

$$\text{div} (k \text{ grad } T) = \rho c T - \underline{\sigma} : \underline{D}^p + \underline{A} \cdot \underline{\dot{V}} - r - T \left( \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial T} : \underline{D}^e + \frac{\partial \underline{A}}{\partial T} \cdot \underline{\dot{V}} \right) \quad (5.5.)$$

Dans cette équation, le terme dû à la déformation élastique  $T \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial T} : \underline{D}^e$  est négligeable face au terme représentant la dissipation plastique (CP2). Dans la simulation d'une trempe, ce dernier terme  $\underline{\sigma} : \underline{D}^p$  représente généralement moins d'un pourcent des termes de génération et de transfert de chaleur (CP11), il sera systématiquement négligé dans notre approche. Par contre, pour les simulations de forgeage et d'estampage, il sera conservé car il est la seule source interne de chaleur, en l'absence de changement de phase.

Le terme  $\underline{A} \cdot \underline{\dot{V}}$  représente l'énergie non récupérable stockée dans le matériau. Pour les matériaux métalliques, cette énergie est celle des champs de microcontraintes résiduelles accompagnant l'augmentation de la densité des dislocations. Elle ne représente que 5 à 10% du terme  $\underline{\sigma} : \underline{D}^p$  (EF18bis) et elle sera systématiquement négligée.

On obtient finalement l'équation simplifiée de la chaleur :

$$\text{div} (k \text{ grad } T) = \rho c T - \underline{\sigma} : \underline{D}^p - r \quad (5.6.)$$

avec  $\underline{\sigma} : \underline{D}^p \neq 0$  ;  $r = 0$  pour les simulations de forgeage et d'estampage

$\underline{\sigma} : \underline{D}^p = 0$  ;  $r \neq 0$  (3.20.) pour l'étude du refroidissement des pièces métalliques.

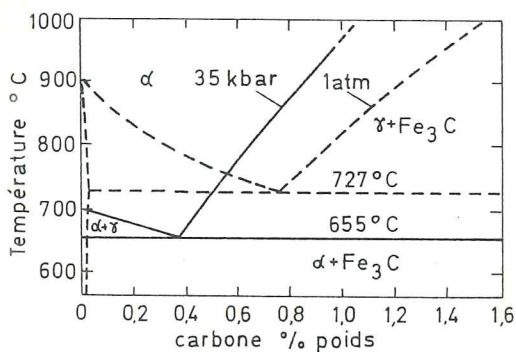
### 5.3. MODIFICATIONS DE LA MODELISATION DES CINETIQUES DE TRANSFORMATIONS SUITE AU COUPLAGE MECANIQUE

#### 5.3.1. Les transformations par diffusion (ferrite, cémentite, perlite, bainite).

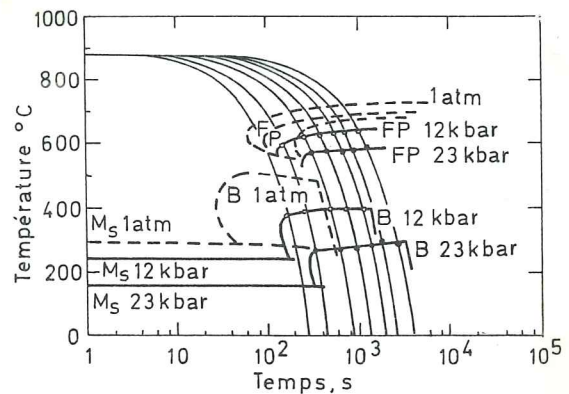
##### 5.3.1.1. Phénomènes observés.

De nombreuses expériences de laboratoire ont montré l'effet inhibiteur de la pression hydrostatique sur les transformations par diffusion. Pour une **pression hydrostatique** croissante, on observe :

- une diminution des températures A3 et A1 du diagramme d'équilibre (fig. 5.2),
- un décalage des courbes TTT et CCT vers des températures plus basses et des temps de transformation plus longs (fig. 5.3.),
- une réduction du taux de germination  $\dot{N}$  dans des proportions nettement supérieures à celles de la vitesse de croissance  $G$ .



**Figure 5.2.-** Effet de la pression sur le diagramme d'équilibre Fe-C (d'après CP9)

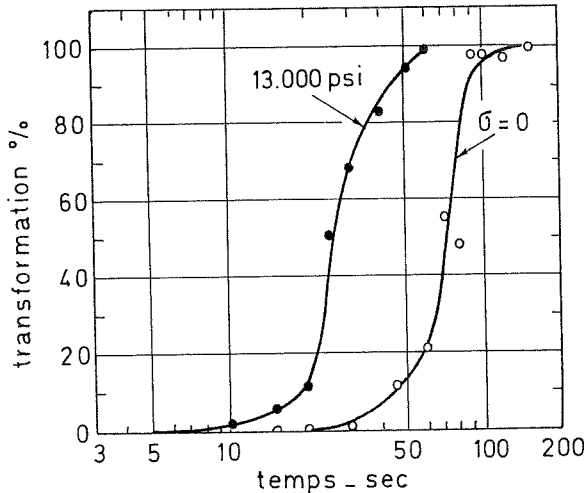


**Figure 5.3.-** Influence de la pression sur le diagramme CCT, alliage 50CrV4 austénisé 5 min. à 880°C (d'après CP9).

Pour les *transformations ferritique et perlitique*, l'influence d'une **déformation de l'austénite avant transformation**, l'influence d'une **déformation** dans un matériau en cours de transformation ou encore l'influence de l'**application d'une contrainte monoaxiale en cours de transformation** ont fait l'objet d'une série d'expériences. Pour ces trois types de sollicitations, on a observé un effet identique, opposé à celui d'une pression hydrostatique croissante :

- décalage des courbes TTT et CCT vers les temps plus courts ;

- accélération de la cinétique de transformation essentiellement due à une augmentation du taux de germination.



**Figure 5.4.-** Accélération de la cinétique de transformation suite à l'application d'une contrainte monoaxiale perlitique (CP 20)

On note pour certains matériaux la définition d'un seuil de contrainte sous lequel aucun effet sur la cinétique n'est observé.

L'accroissement du taux de germination ( $\dot{N}$ ) explique l'observation de structures ferrito-perlitiques ou perlitiques plus fines que pour des transformations sans interaction mécanique.

Des observations microstructurales ont confirmé la création de défauts résultant d'une déformation préalable de l'austénite et provoquant une augmentation du taux de germination ( $\dot{N}$ ). Pour les transformations sous contraintes constantes, de telles études microstructurales n'ont pas été réalisées et plusieurs hypothèses se côtoient, elles sont présentées en CP32.

En résumé, selon PORTER (CP\*18), cette augmentation de germination est due à un empilement de dislocations sur les joints de grains. Cet empilement et son champ de contraintes associées favorisent la germination.

Cette schématisation est applicable pour les contraintes de traction et de compression car ce sont essentiellement des contraintes de cisaillement qui vont agir sur les sources de dislocation.

NOCKE (CP\*19) poursuit cette idée : l'augmentation de la germination se fait par l'intermédiaire d'un réseau de dislocations créant des sous-joints où l'énergie nécessaire pour la formation d'un germe serait plus faible. De plus, concernant la croissance, cet auteur fait part d'une intervention d'une variation de l'énergie d'activation pour la transformation perlitique aux plus basses températures. Cette variation serait liée à une augmentation de la diffusion du carbone qui entraînerait une augmentation de la vitesse de



croissance, donc une diminution des espaces interlamellaires.

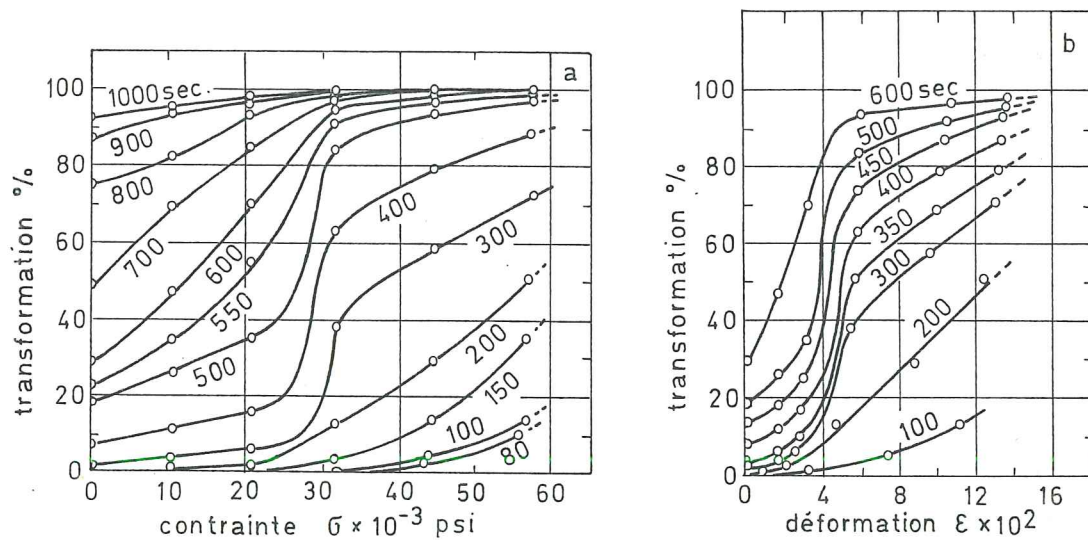
Pour la *transformation bainitique* : l'**application d'une contrainte** monoaxiale en cours de transformation entraîne comme ci-dessus un décalage des courbes TTT et CCT vers les temps plus courts et une augmentation de la vitesse de transformation. L'existence d'une contrainte seuil souvent proche de la limite élastique est mentionnée par de nombreux auteurs (CP32).

Les mécanismes microstructuraux expliquant ces phénomènes sont identiques à ceux développés pour les transformations ferrito-perlitiques.

L'effet d'une **déformation préalable de l'austénite** est fonction de la température :

- accélération de la transformation pour une déformation à température proche de la température de transformation,
- ralentissement de la transformation pour une déformation à température élevée face à la température de transformation.

L'existence d'une recristallisation ou restauration qui aura pour effet de réduire ou éliminer l'influence des défauts explique l'influence des déformations à température élevée.



**Figure 5.5.** - Accélération de la cinétique de la transformation bainitique (AISI 1085) - **a.** taux de phase formée en fonction de la contrainte. **b.** taux de phase formée en fonction de la déformation. Transformation à 535°F (d'après CP\*21).

### 5.3.1.2. Modélisation.

La littérature présente un nombre réduit de modèles. NILAN propose un modèle théorique (CP\*22, CP31) qui fait intervenir des grandeurs difficilement accessibles et dont l'utilisation pratique est par conséquent limitée. INOUE (CP2, CP3, CP4) et DENIS (CP7, CP9) présentent chacun un modèle phénoménologique.

Leurs approches traduisent une accélération de la transformation induite par les contraintes. Si elles sont en accord avec les phénomènes observés en présence de contraintes ou déformations monoaxiales, elles paraissent contredire les faits observés suite à l'application d'une pression hydrostatique (retard et ralentissement de la transformation).

En réalité, seules les hautes pressions ( $\sigma_m > 2500$  MPa) ont un effet sur les transformations par diffusion et pour les pressions rencontrées habituellement dans les processus de trempe, il n'y a pas lieu de s'occuper de cette interaction.

Présentons brièvement le modèle d'INOUE. La modélisation d'une transformation par diffusion sans contraintes est basée sur l'équation de JOHNSON-MEHL :

$$y = 1 - \exp(-Ve) \quad \text{avec} \quad Ve = \int_0^t f(T) (t - \tau)^3 d\tau$$

où  $f(T)$  est déterminée à partir des transformations isothermes expérimentales (courbes TTT).

Pour tenir compte <sup>du retard ou</sup> de l'accélération de la transformation sous contrainte, il modifie cette équation de la façon suivante :

$$y = 1 - \exp(-Ve) \quad \text{avec} \quad Ve = \int_0^t \bar{f}(T, \sigma) (t - \tau)^3 d\tau \quad (5.7.)$$

$$\bar{f}(T, \sigma) = \exp(C \sigma_m) f(T)$$

La fonction  $\bar{f}(T, \sigma)$  traduit le déplacement des courbes TTT sous l'effet d'une contrainte moyenne  $\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ . Le paramètre  $C$  est une constante déterminée pour chaque acier.

Passons à présent au modèle implanté dans notre programme. Il s'agit du modèle de DENIS (CP31). En se basant sur les résultats d'essais de sollicitations mécaniques simples, on voit que le décalage  $D$  des courbes TTT pour un état de contrainte triaxial quelconque doit être de la forme suivante :

$$D = f(\bar{\sigma}, \sigma_m, \bar{\epsilon}^P) \quad (5.8.)$$

où  $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$  avec  $s_{ij}$  = partie déviatorique du tenseur des contraintes

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \text{ (contrainte moyenne)}$$

$$\bar{\epsilon} = \int d\bar{\epsilon}^P \text{ avec } d\bar{\epsilon}^P = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P} \quad \text{où } d\epsilon_{ij}^P \text{ incrément de déformation plastique}$$

• **effet de  $\sigma_m$  :**

- rappelons que l'effet de ralentissement de la transformation observé pour les hautes pressions n'est pas considéré ;
- l'influence de la partie moyenne d'un tenseur contrainte appliqué à la structure est négligé, en se basant sur les essais de NOCKE (CP\*23) qui montrent une accélération de la transformation pratiquement identique pour une transformation perlitique sous essai uniaxial de traction ou de compression. On admet donc que la contrainte moyenne est sans effet sur le décalage des courbes TTT.

• **effet de  $\bar{\sigma}$  :**

- les variations des temps de début et de fin de transformation en fonction de  $\bar{\sigma}$  sont illustrées à la figure 5.6, pour deux températures,
- à partir de ces courbes, on détermine une seule courbe exprimant la variation relative des temps de début et de fin de transformation en fonction de  $\bar{\sigma}$  soit  $g(\bar{\sigma})$  (fig. 5.7).

NB. - la fonction  $g$  dépend de la température,

- pour  $\bar{\sigma}$  proche de la limite d'élasticité de l'austénite, l'effet est très important.

• **effet de  $\bar{\epsilon}^P$  :**

- une analyse analogue à celle effectuée pour  $\bar{\sigma}$  permet de déterminer l'influence de  $\bar{\epsilon}^P$  sur le décalage des courbes TTT (fig. 5.8) : elle se traduit par une courbe  $h(\bar{\epsilon})^P$  exprimant la variation relative des temps de début et de fin de transformation en fonction de  $\bar{\epsilon}^P$ . Toutefois, cette information n'est pas complète. On constate en effet que l'influence des déformations plastiques dépend de la température à laquelle elles se développent : cette influence est plus ou moins marquée selon qu'elles apparaissent à des températures plus ou moins proches de la température de transformation ;

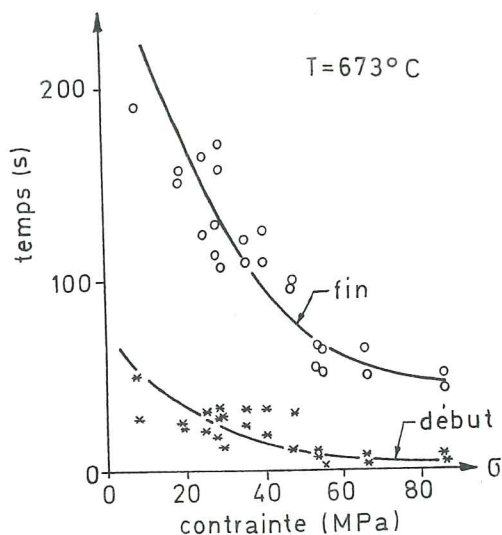
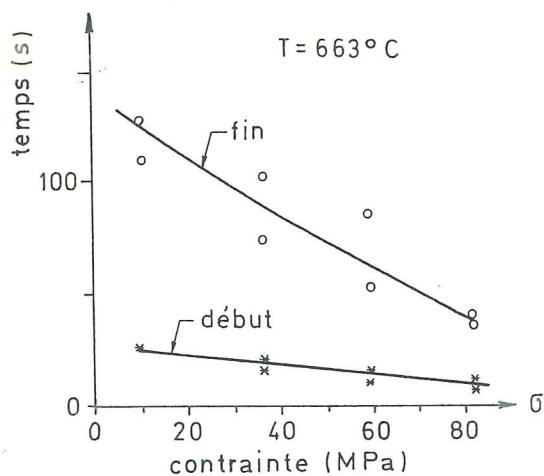


Figure 5.6.- Variation des temps de début et de fin de transformation suite à l'application d'une contrainte de traction, acier XC80 (d'après CP8).

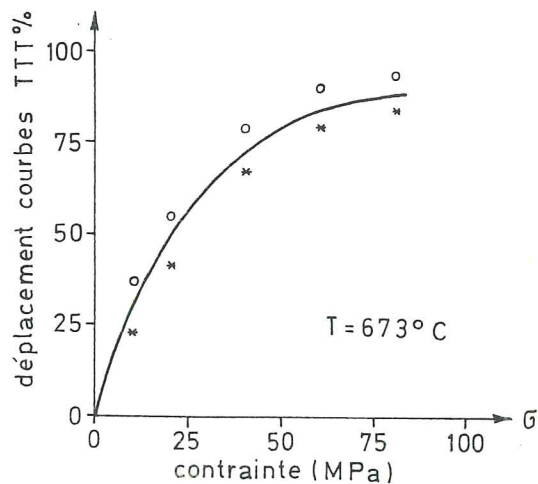
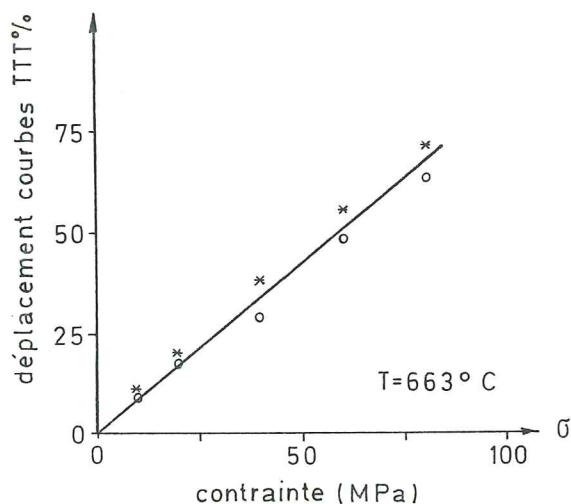


Figure 5.7.- Déplacement relatif des courbes de début et de fin de transformation suite à l'application d'une contrainte de traction, acier XC80 (d'après CP8).

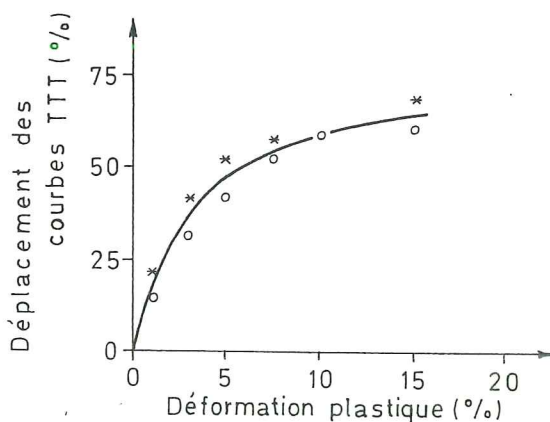


Figure 5.8.- Déplacements relatifs des courbes de début et de fin de transformation suite à l'application d'une déformation plastique.

- en pratique l'effet de  $\bar{\epsilon}^P$  peut être négligé. DENIS l'a vérifié pour la transformation perlitique de l'acier XC80 (CP8). Dans le cas du refroidissement par trempe d'éprouvettes cylindriques, on observe une déformation plastique *cumulée* de 1% au maximum. L'effet d'une déformation plastique de 1% à une température proche de l'auténite entraîne le décalage de la courbe TTT de l'ordre de 18%. Un  $\bar{\epsilon}^P$  cumulé de 1% correspond donc à un décalage inférieur qui peut être négligé face à celui de 70 à 90% provoqué par une contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  proche de la limite d'élasticité de l'austénite dans ce mode de refroidissement.

Finalement, on admet que le décalage des courbes TTT dépend uniquement de la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  :

$$D = g(\bar{\sigma}) \quad (5.9.)$$

Cette modification des courbes TTT a évidemment un effet sur la modélisation des transformations anisothermes :

- le temps d'incubation  $\Pi(T)$  (fig. 3.1.) de la transformation isotherme est modifié :

$$\Pi_{\sigma}(T) = (1 - D) \Pi(T) \quad (5.10)$$

Par conséquent, la somme de SCHEIL (3.2.) devient :

$$\int_0^{t_j} \frac{dt}{\Pi_{\sigma}(T)} = 1 \quad (5.11.)$$

et la période de germination est affectée par l'état de contrainte.

- le coefficient  $b$  de la loi de JOHNSON–MEHL–AVRAMI (3.1.) est modifié :

$$b_{\sigma} = \frac{b}{(1 - D)^{n_{\sigma}}} \quad n_{\sigma} = n \quad (5.12.)$$

ce qui traduit l'accélération de la transformation.

Alors que les essais sont réalisés sous contrainte et température constantes et correspondent à un décalage constant des courbes TTT, le processus de trempe entraîne une évolution continue de la température et de l'état de contraintes du matériau.

Pour le calcul de la somme de SCHEIL, on étend en quelque sorte le principe d'additivité et le décalage  $D(\bar{\sigma})$  est calculé avec la contrainte équivalente actualisée.

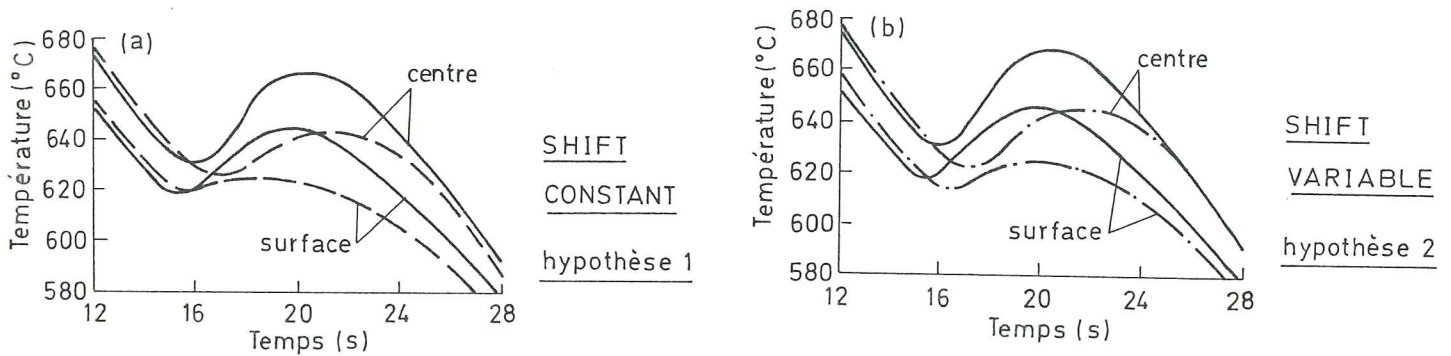
Pour le calcul de la croissance, deux choix sont possibles :

- $\bar{\sigma}$  juste avant transformation et pris constant ensuite (hypothèse 1),
- $\bar{\sigma}$  actualisé au cours du changement de phase (hypothèse 2).

Une analyse détaillée des résultats fournis par ce modèle pour le refroidissement d'un

cylindre massif d'acier eutectoïde a été réalisée par DENIS (CP8). Du point de vue des transformations, l'écart entre essais et simulations a diminué par rapport au cas où l'effet des contraintes était négligé.

Les résultats ne permettent cependant pas de choisir la contrainte  $\sigma$  à prendre en compte dans le calcul de la croissance (hypothèse 1 ou 2). La comparaison simulation - expérience (fig. 5.9) montre une sous-estimation de l'effet des contraintes sur les transformations. Rappelons que seule l'influence de contraintes constantes sur des transformations isothermes a été mesurée, et que dans le calcul, on a appliqué le principe d'additivité pour passer au cas anisotherme. Les résultats semblent montrer qu'il faut considérer l'histoire thermomécanique de la pièce dans son ensemble. Des informations expérimentales supplémentaires seront cependant nécessaires avant de pouvoir envisager un modèle plus performant.



**Figure 5.9.- Evolution de la température pendant la transformation perlitique (acier XC80), cylindre de 13 mm de diamètre.**  
 — expérience ; -.- calcul

### 5.3.2. La transformation martensitique.

#### 5.3.2.1. Phénomènes observés et modèles proposés.

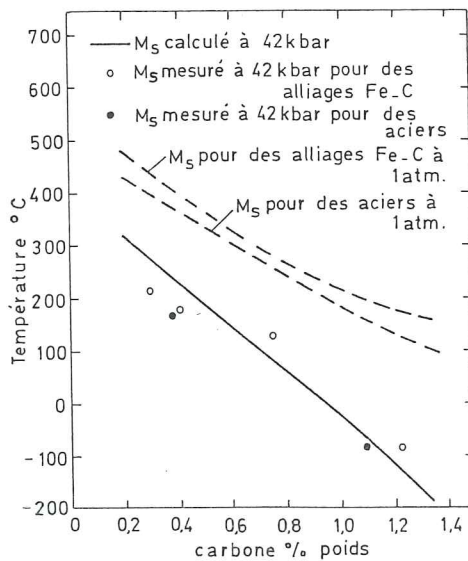
Pour une pression hydrostatique  $p$  croissante, les observations expérimentales montrent une diminution de la température  $M_S$  de transformation (fig. 5.3., 5.10). Cette évolution de la température  $M_S$  est prévue par la thermodynamique, lorsque la pression intervient dans le bilan énergétique. Les variations de  $M_S$  avec la pression suivent la loi de CLAPEYRON :

$$\frac{dM_s}{dp} = \frac{M_s \Delta V}{\Delta H} \quad (5.13.)$$

$\Delta V (M_s, p)$  = variation de volume ;

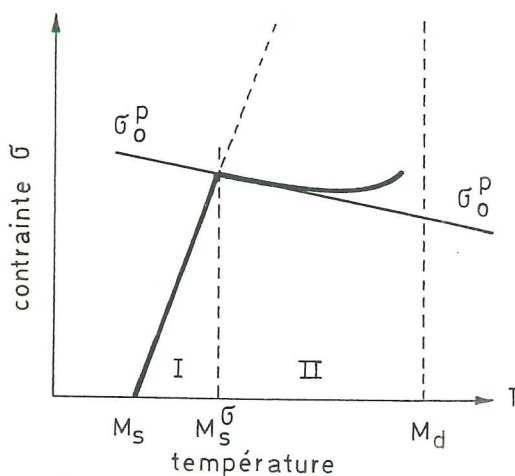
$\Delta H (M_s, p)$  = enthalpie de transformation.

Pour un acier 60NCD11, cette relation donne  $dM_s / dp = - 0,06^\circ\text{C} / \text{MPa}$  alors que SCHMIDTMANN observe une valeur expérimentale de  $- 0,05^\circ\text{C} / \text{MPa}$  pour un alliage Fe - 0,5% C (CP9).



**Figure 5.10.-** Influence de la pression sur la température  $M_s$  d'alliages Fe-C (d'après CP9).

L'application d'une contrainte constante sur une éprouvette uniaxiale (traction ou compression) à température variable provoque une augmentation de la température  $M_s$  (figure 5.11).



**Figure 5.11.-** Représentation schématique des variations de la contrainte nécessaire pour provoquer la transformation martensitique en fonction de la température d'essai (d'après CP31).

$\sigma_0^P$  = limite d'élasticité

Dans le domaine I, la contrainte nécessaire pour induire la transformation est inférieure à la limite d'élasticité de l'austénite, elle croît linéairement avec la température de l'essai. Au-delà de la température  $M_s^\sigma$ , cette contrainte est d'abord proche de  $\sigma_0^p$ , puis elle augmente rapidement avec la température de l'essai. La température  $M_d$  est la limite pour laquelle on peut induire une transformation martensitique par l'application d'une contrainte. *Le concept de SCHEIL* selon lequel la transformation martensitique est un mode de déformation composé d'un cisaillement et d'une dilatation a donné lieu à des développements thermodynamiques fournissant  $dM_s / d\sigma$  (modèles valables uniquement dans le domaine élastique : CP\*14, CP\*15 et modèles également valables dans le domaine plastique : CP\*16, CP\*17).

Un dernier mode d'interaction mécanique est **la déformation plastique de l'austénite** avant transformation.

Selon la température à laquelle cette déformation a lieu, les phénomènes observés diffèrent :

- si  $T \gg M_s$  : peu d'influence
- si  $T$  est proche de  $M_s$  : on observe une diminution de  $M_s$ .

A nouveau, la littérature propose différents modèles. Nous vous renvoyons aux ouvrages de DENIS (CP 31) et GAUTHIER (CP32) pour une bibliographie plus complète.

De façon générale, on peut cependant observer que les modèles théoriques, basés sur la thermodynamique et la connaissance du mécanisme de transformation font intervenir de nombreux paramètres souvent difficilement accessibles. Par ailleurs, ils sont développés pour des sollicitations mécaniques simples et leur généralisation à des états de contraintes complexes paraît très difficile.

Quoi qu'il en soit, la prise en compte de ces phénomènes dans la simulation numérique des processus de refroidissement est importante. Par exemple, FLETCHER (CP22) présente un modèle où l'influence des contraintes sur la température  $M_s$  est négligée et il justifie l'écart observé entre ses expériences et ses simulations par cette simplification excessive.

### *5.3.2.2. Modèle adopté dans nos simulations.*

Nous avons utilisé un modèle macroscopique phénoménologique qui donne une approche réaliste des faits et est manipulable dans un calcul aux éléments finis.



Au vu des phénomènes décrits ci-dessus, il faut une relation liant la variation de température de transformation  $\Delta M_s$  à la composante hydrostatique  $\sigma_m$  du tenseur des contraintes, à la partie déviatorique  $s_{ij}$  traduite par  $\bar{\sigma}$  (contrainte équivalente) et à la déformation plastique équivalente cumulée  $\bar{\epsilon}^P$  :

$$\Delta M_s = f(\sigma_m, \bar{\sigma}, \bar{\epsilon}^P) \quad (5.14.)$$

Nous utilisons une formule fournie par INOUE pour traduire l'effet de l'état de contrainte (CP2, CP13) :

$$(\Delta M_s)_\sigma = A \sigma_m + B \bar{\sigma} \quad (5.15.)$$

où A et B sont des constantes liées à la nature de l'acier.

L'effet des déformations plastiques de l'austénite doit être pondéré en fonction des températures auxquelles elles se produisent. On obtient une relation du type :

$$(\Delta M_s)_\epsilon = \int_{T_{\text{aust}}}^{M_s} C(T) d\bar{\epsilon}^P \quad (5.16.)$$

où  $T_{\text{aust}}$  est la température d'austénisation et C (T) est une fonction de la température, maximum pour T proche de  $M_s$  puisque l'effet d'une déformation plastique est le plus important dans ce domaine de température.

DENIS (CP31) a montré pour un acier 60NCD11 que cet effet  $(\Delta M_s)_\epsilon$  est négligeable face à la variation  $(\Delta M_s)_\sigma$ .

Nous négligerons systématiquement l'effet de  $\bar{\epsilon}^P$  et calculerons la température martensitique de la façon suivante :

$$M_s = M_{s0} + \Delta M_s = M_{s0} + A \sigma_m + B \bar{\sigma} \quad (5.17.)$$

où  $M_{s0}$  est la température de transformation en l'absence de sollicitation mécanique.

Comme INOUE, nous adoptons une cinétique de transformation identique à celle sans contrainte traduite par la loi de KOISTINEN MARBURGER (3.14) :

$$y_m = 1 - \exp(-\alpha (M_s - T)) \quad (5.18.)$$

$\alpha$  = constante caractéristique de chaque matériau ;

T = température

$y_m$  = fraction de martensite formée.

Cette cinétique est cependant décalée puisque la température  $M_s$  est modifiée par l'état de contraintes. GAUTHIER justifie l'emploi de cette formule par des expériences réalisées pour des contraintes de traction inférieures à la limite d'élasticité du matériau (CP32). De plus, les références (CP2, CP3, CP7, CP13) présentent des simulations basées sur cette formule, dont les résultats sont en accord avec les expériences.

## 5.4. LOI CONSTITUTIVE MECANIQUE

### 5.4.1. Introduction.

Dans le but de bien sérier les problèmes et de mettre en évidence les hypothèses relatives à une loi mécanique thermique métallurgique, nous allons traiter successivement les lois suivantes :

1. la loi élastique thermique,
2. la loi élastoplastique thermique,
3. la loi élastoplastique thermique métallurgique.

Vous remarquerez que les lois traitées sont non visqueuses. Nous négligeons le fluage du métal dans la mesure où nous traitons des refroidissements rapides de pièces de massivité réduite. En effet, le fluage du métal est important et doit être pris en compte si le métal reste une période de temps significative à haute température. Une étude de FISCHER (CP17) a donné les résultats suivants :

- refroidissement lent ( $0,04^\circ \text{C/sec}$ ) d'un disque de turbine volumineux (diamètre extérieur 2,2 m), l'effet du fluage est prépondérant ;
- refroidissement rapide ( $8^\circ \text{C/sec}$ ) d'un cylindre considéré comme infiniment long de diamètre de 5 cm. L'effet du fluage est tout à fait négligeable.

A l'heure actuelle, les exemples de simulation traités à l'aide de notre programme concernent le refroidissement de poutrelles métalliques par arrosage et refroidissement naturel. Les épaisseurs des parois sont de l'ordre de quelques centimètres et la vitesse de refroidissement varie fortement selon l'instant et la situation du point considéré.

Avant l'arrosage, le profilé est à très haute température ( $1100^\circ \text{C}$ ) et il se refroidit rapidement ( $1,4^\circ \text{C/s}$ ). Pendant l'arrosage, on a des vitesses de refroidissement très importantes :  $100$  à  $800^\circ \text{C/s}$  selon les points, ensuite le profilé se refroidit plus doucement :

- de  $600^\circ \text{C} \rightarrow 300^\circ \text{C} \sim 0,12^\circ \text{C/s}$
- de  $300^\circ \text{C} \rightarrow 127^\circ \text{C} \sim 0,03^\circ \text{C/s}$ .

Dans la première partie du refroidissement ( $T > 600^\circ \text{C}$ ), il semble tout à fait licite de

négliger le fluage, notre approche est en accord avec celle des nombreux chercheurs traitant également des refroidissements rapides de pièces non massives (CP37, CP38, CP16, CP3). Pour la seconde partie du refroidissement ( $R < 600^\circ \text{C}$ ), la vitesse de refroidissement est plus lente, mais on est à plus basse température, la question reste posée. Pour y répondre, des comparaisons "*expériences-simulations*" relatives aux refroidissements ( $T < 600^\circ \text{C}$ ) lents d'éprouvettes cylindriques sont prévues, elles permettront de s'assurer de l'effet négligeable du fluage. Si nécessaire, un modèle visqueux peut bien entendu être introduit dans le code, il faut cependant être conscient des difficultés relatives à la détermination des données mécaniques de chacune des phases. Augmenter la sophistication du modèle est inutile si les informations expérimentales requises sont absentes. A notre connaissance, seul INOUE (CP4) présente un modèle viscoplastique avec prise en compte effective des interactions de changements de phase. FISCHER (CP17), RAMMERSTORFER (CP16) ou encore FLETCHER (CP22) utilisent également des modèles visqueux, cependant les deux premiers auteurs donnent très peu d'informations sur leur modèle de fluage, quant au troisième, il parle de relations empiriques indépendantes des différentes phases en présence.

#### 5.4.2. Loi élastique couplée à l'analyse thermique.

En petites déformations, on peut écrire :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{th} \quad (5.19.)$$

$$\varepsilon_{ij} = \text{déformation totale}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^e &= \text{déformation élastique mécanique exprimée par la loi de HOOKE} \\ &= \frac{1}{3} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{rr} \delta_{ij}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{th} &= \text{dilatation thermique} \\ &= \alpha \Delta T \delta_{ij} \end{aligned}$$

La relation inverse est :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \varepsilon_{kl} - \frac{E\alpha\Delta T\delta_{ij}}{1 - 2\nu} \quad (5.20.)$$

Pour passer aux grandes déformations, on admet également la subdivision de la vitesse totale  $D_{ij}$  en une partie élastique  $D_{ij}^e$  et une partie thermique  $D_{ij}^{th}$  :

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^{th} \quad (5.21.a)$$

$$\text{avec} \quad D_{ij}^{th} = \alpha \dot{T} \delta_{ij} \quad (5.21.b)$$

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = & \frac{E}{1+\nu} \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] D_{kl} - \frac{E\alpha}{1-2\nu} \delta_{ij} \dot{T} \\ & + \left( \frac{\sigma_{ij}}{E} \frac{\partial E}{\partial T} + \frac{\sigma_{rr} \delta_{ij} - (1-2\nu) \sigma_{ij}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \nu}{\partial T} \right) \dot{T} \end{aligned} \quad (5.21.c)$$

où  $\overset{\nabla}{\sigma}_{ij}$  est la dérivée de JAUMANN des contraintes de CAUCHY.

Toutefois, n'importe quelle dérivée objective en rotation pourrait convenir (EF27).

En utilisant les relations (5.21.a et b) on peut simplifier la relation (5.21.c) :

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = & \frac{E}{1+\nu} \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) D_{kl}^e \\ & + \left( \frac{\sigma_{ij}}{E} \frac{\partial E}{\partial T} + \frac{\sigma_{rr} \delta_{ij} - (1-2\nu) \sigma_{ij}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \nu}{\partial T} \right) \dot{T} \end{aligned} \quad (5.22.)$$

En séparant les contraintes déviatoriques et la contrainte moyenne, on obtient :

$$\dot{\sigma}_m = \chi D_m^e + \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial T} \sigma_m \dot{T} \quad (5.23.)$$

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} = 2 G d_{ij}^e + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial T} s_{ij} \dot{T}$$

$$\text{où } D_m^e = \frac{1}{3} D_{ii}^e \quad ; \quad d_{ij}^e = D_{ij}^e - \delta_{ij} D_m^e \quad ; \quad \chi = \frac{E}{1-2\nu} \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

### 5.4.3. Loi élastoplastique couplée à l'analyse thermique.

À présent, la vitesse de déformation est décomposée en 3 termes :

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^{th} + D_{ij}^p \quad (5.24.a)$$

ou en termes déviatoriques :

$$d_{ij} = d_{ij}^e + d_{ij}^p \quad \text{car } d_{ij}^{th} = 0 \quad (5.24.b)$$

Le terme  $D_{ij}^p$  représente la vitesse de déformation plastique. Son expression dépend de la loi de plasticité choisie. Nous utilisons une loi de plasticité associée avec écrouissage isotrope et nous adoptons la surface de plasticité de VON MISES qui est indépendante de la contrainte hydrostatique.

Dès lors, la forme générale de la loi est :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_m = & \chi D_m^e + \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial T} \sigma_m \dot{T} \\ \overset{\nabla}{s}_{ij} = & 2 G (d_{ij} - d_{ij}^p) + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial T} s_{ij} \dot{T} \end{aligned} \quad (5.25.)$$

La surface de plasticité a la forme suivante :

$$f = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - \kappa^2 = 0$$

$$\text{avec } \kappa = \sqrt{\frac{1}{3}} \bar{\sigma}^p(\bar{\epsilon}^p, T) \quad (5.26.a)$$

où  $\bar{\sigma}^p$  = contrainte d'écoulement du matériau

$$\bar{\epsilon}^p = \int_0^t \bar{D}^p dt \quad \text{avec } \bar{D}^p = \sqrt{\frac{3}{2} D_{ij}^p D_{ij}^p} \quad (5.26.b)$$

Exprimons l'hypothèse de normalité (5.27.) et la relation de cohérence (5.28.) :

$$D_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \Lambda s_{ij} \quad (5.27.)$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \overset{\nabla}{s}_{ij} - 2 \kappa \left( \frac{\partial \kappa}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \kappa}{\partial \bar{\epsilon}^p} \bar{D}^p \right) = 0 \quad (5.28.)$$

La relation (5.27) montre directement l'égalité entre le tenseur de déformation plastique  $D_{ij}^p$  et son déviateur  $d_{ij}^p$ .

A partir des deux relations (5.27.) et (5.28.), on retrouve la formule classique (CP2, CP3, CP21) :

$$d_{ij}^p = \mu \left( s_{kl} \overset{\nabla}{s}_{kl} - 2 \kappa \frac{\partial \kappa}{\partial T} \dot{T} \right) s_{ij} \quad (5.29.)$$

En utilisant les relations (5.25.) et (5.29), on peut obtenir une formulation originale de la loi élastoplastique. Les détails des calculs sont donnés ci-après.

Posons :

$$z = 2 \kappa \frac{\partial \kappa}{\partial T} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial T} \quad (5.30.)$$

En introduisant (5.29.), dans (5.25), on a :

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} = 2 G (d_{ij} - \mu (s_{kl} \overset{\nabla}{s}_{kl} - z \dot{T}) s_{ij}) + B s_{ij} \dot{T} \quad (5.31.)$$

Multiplions cette relation par  $s_{ij}$  :

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} s_{ij} = 2 G d_{ij} s_{ij} - 2 G \mu s_{ij} s_{ij} s_{kl} \overset{\nabla}{s}_{kl} + 2 G \mu z \dot{T} s_{ij} s_{ij} + B s_{ij} s_{ij} \dot{T} \quad (5.32.)$$

Par (5.26.a), on a :  $s_{ij} s_{ij} = 2 \kappa^2$

Par conséquent, on obtient :

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} s_{ij} = \frac{1}{1 + 4 G \mu \kappa^2} \{ 2 G (d_{ij} s_{ij} + 2 \mu z \kappa^2 \dot{T}) + 2 B \kappa^2 \dot{T} \} \quad (5.33.)$$

$$\text{En posant, } \gamma = \frac{2 G \mu}{1 + 4 G \mu \kappa^2}; \text{ il vient :} \quad (5.34.a)$$

$$\nabla s_{ij} = \frac{\gamma}{\mu} d_{ij} s_{ij} + \gamma \dot{T} \kappa^2 \left( 2z + \frac{B}{G\mu} \right) \quad (5.34.b)$$

Si on note que :  $\frac{\gamma}{2 G \mu} = 1 - 2 \gamma \kappa^2$  et que le calcul indiciel permet d'écrire  $d_{ij} = \delta_{ik} \delta_{kl} d_{kl}$  ; on a la forme finale utilisée dans notre modèle, soit :

$$\boxed{\nabla s_{ij} = 2 G (\delta_{ik} \delta_{jl} - \gamma s_{ij} s_{kl}) d_{kl} + \frac{\gamma}{2 G \mu} (B + 2 G \mu z) \dot{T} s_{ij}} \quad (5.35.)$$

où  $\mu$  est un coefficient déterminé par expérience.

Si l'on effectue un essai de traction uniaxiale à température constante et que l'on trace le diagramme  $(\sigma, \bar{\epsilon})$  où  $\sigma$  est la contrainte vraie et  $\bar{\epsilon}$  la déformation logarithmique, on a :

$$\hat{\sigma}_{11} = \frac{2}{3} \sigma ; \hat{\sigma}_{22} = -\frac{1}{3} \sigma ; \hat{\sigma}_{33} = -\frac{1}{3} \sigma$$

$$\hat{D}_{11}^p = D_{11} = \dot{\bar{\epsilon}} \quad (\text{en négligeant les déformations élastiques})$$

Donc, on a :

$$\hat{D}_{11}^p = \mu \hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{kl} \hat{\sigma}_{kl} \quad (5.36.)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \mu \frac{2}{3} \sigma \left( \frac{4}{9} \sigma \dot{\sigma} + \frac{1}{9} \sigma \dot{\sigma} + \frac{1}{9} \sigma \dot{\sigma} \right)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \mu \frac{4}{9} \sigma^2 \dot{\sigma}$$

Vu que le module tangent dans le diagramme  $(\sigma, \bar{\epsilon})$  représenté (figure 5.12.), vaut

$$E_t = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\bar{\epsilon}}}$$

on obtient finalement :

$$\mu = \frac{9}{4} \frac{1}{\sigma^2 E_t} \quad (5.37.)$$

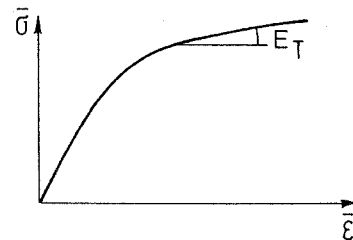


Figure 5.12.

Cette formule permet de calculer  $\mu$  point par point si l'on dispose du diagramme  $(\sigma, \bar{\epsilon})$  expérimental. En grandes déformations, un tel essai est difficile, nous vous renvoyons aux références (EF18bis) et (EF26) pour plus de précisions.

#### 5.4.4. Loi constitutive utilisée pour l'analyse mécanique couplée à l'analyse thermique et métallurgique.

##### 5.4.4.1. Introduction.

A présent, la vitesse de déformation se décompose en 5 termes :

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^{th} + D_{ij}^p + D_{ij}^{tr} + D_{ij}^{pt}$$

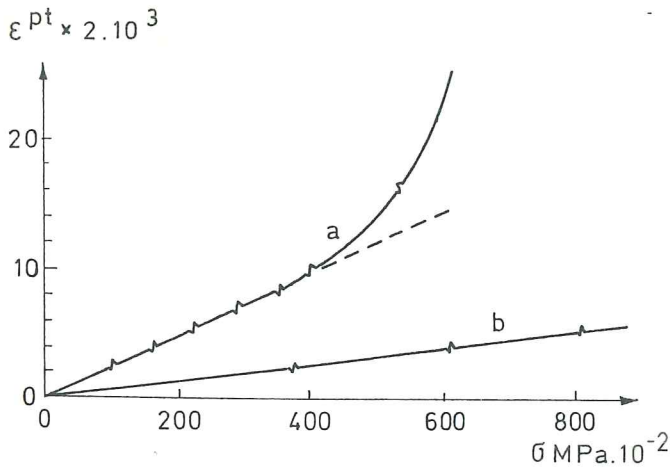
Les 2 termes additionnels  $D_{ij}^{tr}$  et  $D_{ij}^{pt}$  sont liés aux transformations de phases métallurgiques. Quant aux 3 premiers termes, leur signification a déjà été expliquée et les relations permettant de les évaluer ont été présentées pour un matériau monophasique de température variable en 5.4.2. et 5.4.3. L'extension de ces développements au cas multiphasique entraîne certaines hypothèses que nous allons préciser dans les paragraphes suivants.

##### 5.4.4.2. La plasticité de transformation.

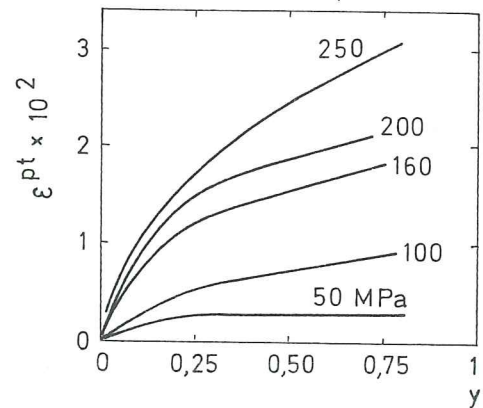
Les changements de volume qui accompagnent une transformation de phase ont été déterminés par l'expérience. Par ailleurs, lorsqu'on applique une contrainte à une pièce métallique, les déformations élastiques et plastiques sont prévisibles par une loi de comportement élastoplastique (voir hypothèses en 5.4.1.). Par conséquent, lorsqu'une contrainte est appliquée en cours de transformation, on peut prévoir les déformations totales à partir des variations de volume des phases considérées et de la contrainte appliquée. Cette prévision n'est cependant pas en accord avec les déformations mesurées, que les contraintes appliquées soient supérieures ou non à la limite d'élasticité.

Dans le cas où une transformation de phase a lieu en présence d'une contrainte, un nouveau terme de déformations permanentes apparaît : **la plasticité de transformation**, notée  $\epsilon^{pt}$  en petites déformations. Dans notre approche,  $D_{ij}^{pt}$  représente la vitesse de déformation due à cette plasticité de transformation.

De nombreuses expériences ont mis ce phénomène en évidence ; elles ont montré que la plasticité de transformation peut être reliée à la contrainte appliquée et à l'avancement de la transformation (fig. 5.13, fig. 5.14).



**Figure 5.13.-** Plasticité de transformation en fonction de la contrainte constante appliquée pendant une transformation complète  
 a)  $\alpha \leftrightarrow \gamma$  pour du fer à  $910^\circ$   
 b)  $\alpha + Fe_3C \leftrightarrow \gamma$  pour un alliage Fe 0,4 C (d'après CP\*23)



**Figure 5.14.-** Variations de la déformation de plasticité de transformation en fonction du taux de martensite formée  $y$  pour différentes contraintes de traction constante appliquée, alliage Fe-Ni-C (d'après CP32)

L'explication de ce phénomène est basée sur une analyse de l'état microscopique du matériau. Deux concepts se complètent (CP1) :

- **concept de GREENWOOD et JOHNSON** : la variation de volume qui accompagne la transformation de phase crée des contraintes internes microscopiques. Lorsqu'une contrainte externe (macroscopique) est appliquée pendant cette transformation, elle s'ajoute aux contraintes internes et conduit à un écoulement plastique dans la phase la moins résistante, orienté dans le sens d'application de la contrainte ;
- **concept de MAGGEE** : la plasticité de transformation est due à l'orientation préférentielle des plaquettes de martensite suite à l'application d'une contrainte macroscopique. Ce mécanisme permet d'expliquer la présence de plasticité de transformation pour les transformations par cisaillement (bainite ou martensite) qui n'entraînent parfois aucune modification de volume.

La modélisation de la plasticité de transformation a fait l'objet de très nombreuses recherches, une bibliographie complète a été réalisée par DENIS (CP31) et il n'entre pas dans nos intentions d'effectuer à nouveau ce travail. Nous vous présentons uniquement les grandes lignes de cette recherche bibliographique. Les travaux cités concernent généralement les petites déformations et on utilise la notation  $\epsilon^{pt}$  pour désigner la plasticité de transformation.



- **modèles théoriques de GREENWOOD-JOHNSON (CP\*27)** : utilisation de la théorie macroscopique de la plasticité à l'échelle d'une inclusion dans une matrice

$$\varepsilon^{pt} = \frac{5}{6} \frac{\sigma}{\bar{\sigma}^p} \frac{\Delta V}{V} \quad (5.38.)$$

$\sigma$  : contrainte appliquée

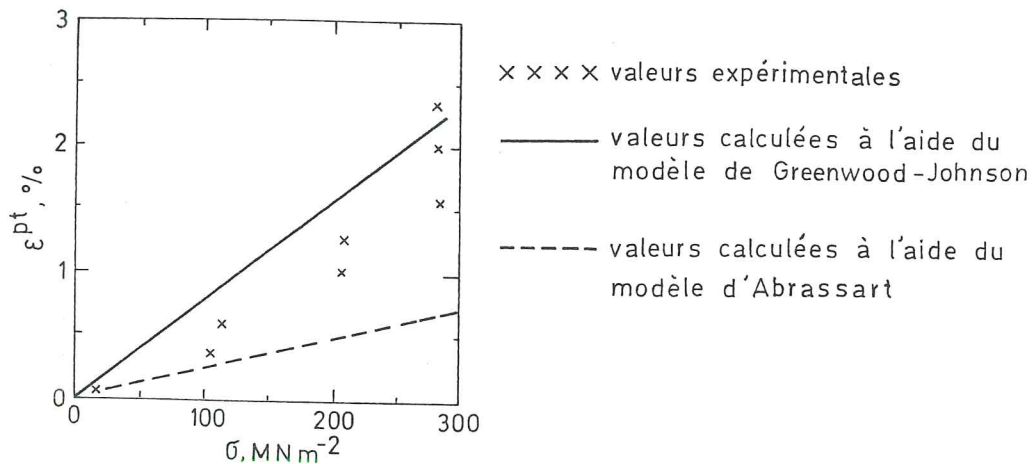
$\bar{\sigma}^p$  : contrainte d'écoulement de la phase la moins résistante

$\frac{\Delta V}{V}$  : variation volumique au cours de la transformation

limite de validité :  $\sigma$  monoaxiale faible, constante, transformation complète

- **ABRASSART (CP\*28)** : adaptation du modèle précédent pour y introduire l'influence du taux de phase formé (y)

$$\varepsilon^{pt} = \frac{3}{4} \frac{\sigma}{\bar{\sigma}^p} \frac{\Delta v}{V} \left( y - \frac{2}{3} y^{3/2} \right) \quad (5.39.)$$



**Figure 5.15.-** Acier 60NCD11 ; valeur de la plasticité de transformation en fonction de la contrainte appliquée (d'après CP9).

- **modèle de LEBLOND et RANIECKI (CP\*29)** : utilisation d'une méthode d'homogénéisation pour passer des grandeurs locales ( $\varepsilon_{ij}$  et  $\sigma_{ij}$  de chaque phase) à une loi de comportement macroscopique du matériau.

Formule finale de LEBLOND :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{pt} = \frac{\frac{\Delta V}{V}}{\sigma_1^p} s_{ij} (\ln y) \dot{y} \quad (5.40.)$$

$\dot{\epsilon}_{ij}^{pt}$  = vitesse de déformation due à la plasticité de transformation

$\sigma_1^p$  = contrainte d'écoulement de la phase mère

$s_{ij}$  = déviateur des contraintes macroscopiques

Limite de validité : établie pour des états triaxiaux avec des contraintes de faible niveau

- **modèles phénoménologiques** (la loi est obtenue par une modélisation des faits expérimentaux) : à partir d'expériences réalisées pour des sollicitations simples, FRANITZA et GIUSTI proposent une formulation de la plasticité de transformation étendue à des sollicitations mécaniques triaxiales :

$$\text{FRANITZA (CP*30) : } \dot{\epsilon}_{ij}^{pt} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V} \beta s_{ij} \frac{1}{\sigma_1^p} (1 - y_M) \dot{y}_M \quad (5.41.)$$

$y_M$  = proportion de Martensite formée

$\beta$  = constante définie par expérience

$\frac{\Delta V}{V}$  = variation <sup>relative</sup> de volume en cas de transformation complète

Limite de validité : la transformation martensitique.

GIUSTI (CP\*31) utilise une formule voisine, il montre que sa modélisation peut être déduite directement par des considérations thermodynamiques.

TANAKA suit une démarche thermodynamique analogue (CP\*32)

- **simulation à l'échelle microscopique par la méthode des éléments finis :**
  - approche bidimensionnelle par DESALOS (CP\*33)
  - approche tridimensionnelle par LEBLOND (CP20, CP23) et SJÖSTRÖM (CP41)
  - principe :
    - modélisation par éléments finis d'un petit volume d'austénite, soumis à une contrainte extérieure ( $\sigma^{ext}$ )
    - transformation successive des éléments (austénite → ferrite CP20, austénite → perlite CP42) avec modification de volume et de propriétés mécaniques (chaque phase est élastoplastique)
  - observations : - la superposition des contraintes externes appliquées et des contraintes internes dues au changement de phase conduit à une plastification de l'austénite

- la transformation terminée, on obtient :

$$\epsilon^{pt} = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^e - \epsilon_{ij}^{\Delta V} \quad (5.42.)$$

où  $\epsilon_{ij}$  = déformation totale

$\epsilon_{ij}^e$  = déformation due à la contrainte extérieure ( $\sigma^{ext}$ )  
appliquée

$\epsilon_{ij}^{\Delta V}$  = déformation due à la modification de volume

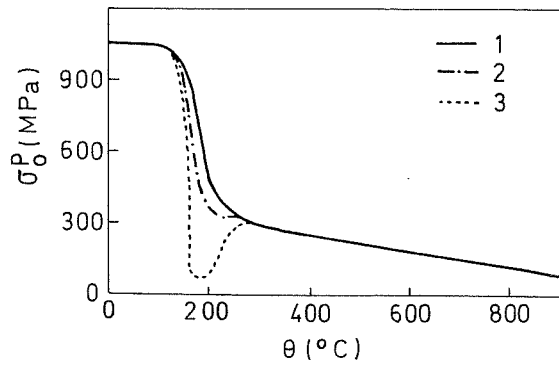
- on cherche la relation  $\epsilon^{pt} = f(\sigma)$

SJÖSTRÖM a trouvé pour différentes contraintes appliquées :

$\epsilon_{ij}^{pt} \div s_{ij}$  pour les transformations complètes.

- remarque : les résultats obtenus sont fonction :
  - de la taille de l'élément de matière discrétisée
  - des conditions aux limites
  - du choix du critère de transformation
  - du choix du comportement mécanique de chaque phase.

- **modèles microscopiques** : ces modèles traitent le matériau à l'échelle microscopique. On y retrouve des grandeurs liées à la vitesse des dislocations, ou encore les contraintes microscopiques (voir 5.1). Ils sont basés sur le concept de GREENWOOD-JOHNSON (CP\*24, CP10) et sur celui de MAGGEE (CP\*25, CP\*26). Leur usage dans des conditions pratiques est cependant difficile car ils font appel à des grandeurs très peu accessibles et leur validité est restreinte à des cas de sollicitations mécaniques simples
- **modèle basé sur la valeur de la limite d'élasticité** : certains codes (CP16, CP17, CP42) représentent la plasticité de transformation par une loi de comportement thermoélastoplastique classique incluant une diminution de la limite d'élasticité du matériau  $\sigma_0^p$  dans son domaine de transformation de phase (fig. 5.16).

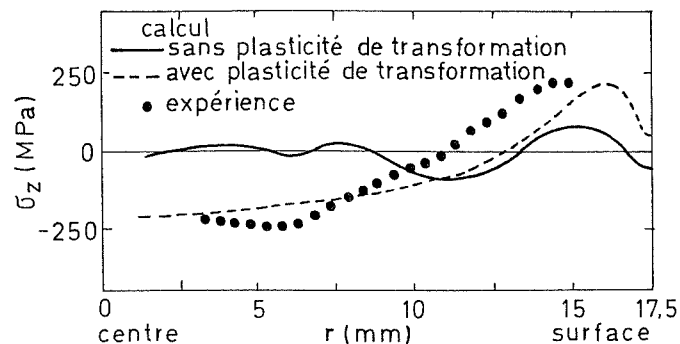


**Figure 5.16.** – Variation de la limite d'élasticité  $\sigma_0^p$  en fonction de la température d'après (CP31)  
 1. Expérimentale  
 2 et 3. Simulations de la plasticité de transformation.

Cette simplification ne tient cependant pas compte du fait physique essentiel suivant : la déformation de plasticité de transformation est une fonction sans seuil de l'avancement de la transformation.

Des modèles plus précis pour lesquels la limite d'élasticité dépend du taux de phase formé sont proposés pour le cas particulier de la transformation martensitique induite par la déformation plastique de l'austénite (CP\*34, CP\*35).

Au vu de cette brève synthèse bibliographique, vous pouvez réaliser l'abondance des recherches effectuées sur la plasticité de transformation. Ce fait s'explique par une différence importante du profil des contraintes résiduelles obtenu par calcul selon que l'on néglige ou non ce phénomène. Dans de nombreux cas, seul le calcul avec prise en compte de la plasticité de transformation (fig. 5.17) permet d'obtenir des résultats comparables aux mesures expérimentales (CP31, CP44, CP17, CP35).



**Figure 5.17.** - Profils radiaux de la contrainte résiduelle axiale dans le cas d'une trempe martensitique à l'eau à 20°C d'un cylindre de diamètre 35 mm en acier de type 60NCD11 (CP31)

Les modèles les plus faciles à utiliser et adaptés aux états triaxiaux sont les modèles phénoménologiques. Dans le code LAGAMINE, nous avons choisi la formule de GIUSTI, également adoptée par DENIS (CP7, CP9) :

$$d\varepsilon_{ij}^{pt} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^{pt}}{\bar{\sigma}} s_{ij} \quad (5.43.)$$

$d\bar{\varepsilon}^{pt}$  = incrément de plasticité de transformation effective

$$= \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^{pt} d\varepsilon_{ij}^{pt}}$$

$$\bar{\sigma} = \text{contrainte effective} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$$

La fonction décrivant  $\bar{\varepsilon}^{pt}$  dépend de la transformation et de l'acier (CP7) ; elle est obtenue à partir d'essais sous contraintes uniaxiales.

Pour la transformation martensitique des aciers 35NCD16 et 60NCD11, on obtient :

$$\bar{\varepsilon}^{pt} = \kappa_6 \bar{\sigma} (2 - y_M) y_M \quad (5.44.a)$$

$$\text{d'où } d\varepsilon_{ij}^{pt} = 3 \kappa_6 (1 - y_M) s_{ij} dy_M \quad (5.44.b)$$

où  $y_M$  est le taux de martensité et  $\kappa_6$  une constante.

Pour la transformation perlitique de l'acier XC80, on a :

$$\bar{\varepsilon}^{pt} = K_3 (\bar{\sigma} - \sigma_s) y_{pe} \quad (5.45.a)$$

$$\text{d'où } d\varepsilon_{ij}^{pt} = \frac{3}{2} K_3 \frac{\bar{\sigma} - \sigma_s}{\bar{\sigma}} s_{ij} dy_{pe} \quad (5.45.b)$$

où  $y_{pe}$  est le taux de perlite et  $\sigma_s$  une contrainte seuil

#### 5.4.4.3. Le changement de volume dû aux transformations de phases $D_{ij}^{tr}$ et à la dilatation thermique $D_{ij}^{th}$ .

La variation de volume observée suite aux changements de phase dépend évidemment de la température à laquelle on se place. On a adopté la température de référence de 0° C, pour définir une variation de volume (CP7) :  $\varepsilon_k^{tr}$  0° C constante

$$D_{ij}^{tr} = \delta_{ij} \dot{y}_k \varepsilon_k^{tr} \text{ 0° C} \quad (5.46.)$$

avec  $k$  qui varie de 2 à 6 (voir 3.19). En pratique en un point, une seule transformation a lieu en un instant donné et par conséquent un seul  $\dot{y}_k$  est différent de zéro.

Le terme de dilatation thermique présenté précédemment :

$$D_{ij}^{th} = \alpha(T) \dot{T} \delta_{ij} \quad (3.19.)$$

concernait un matériau monphasique. Il faut à présent prendre en compte la dilatation des différents constituants par une loi de mélange :

$$\begin{aligned} D_{ij}^{th} &= \delta_{ij} \frac{d}{dt} \left[ y_k \int_0^{T(t)} \alpha_k(\tau) d\tau \right] \\ &= \delta_{ij} \left[ y_k \alpha_k(T) \dot{T} + \dot{y}_k \int_0^{T(t)} \alpha_k(\tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

#### 5.4.4.4. La plasticité classique dans un matériau multiphasique

$D_{ij}^p$

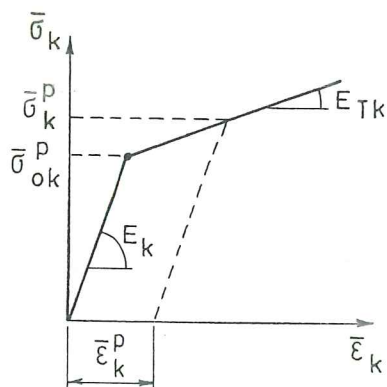
Suite à la prise en compte de l'évolution microstructurale, le modèle thermoélastoplastique défini précédemment (§ 5.4.3) doit être modifié. La contrainte d'écoulement du matériau qui dépendait de la déformation plastique cumulée et de la température est également influencée par la composition microstructurale :

$$\bar{\sigma}^p = \bar{\sigma}^p(\bar{\epsilon}^p, T, y_k) \quad k = 1,6 \quad (5.48.)$$

Pour chaque constituant  $k$  et chaque température  $T$ , on adopte une loi de comportement  $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}^p$  bilinéaire (écrouissage linéaire isotrope) (fig. 5.18.) :

$$\bar{\sigma}_k^p = \sigma_{ok}^p + \bar{\epsilon}_k^p \frac{E_k E_{Tk}}{E_k - E_{Tk}} = \sigma_{ok}^p + \bar{\epsilon}_k^p H_k \quad (5.49.)$$

(pas de somme sur  $k$ )



$\sigma_{0k}^p$  = limite d'élasticité

$E_k$  = module de YOUNG

$E_{Tk}$  = module tangent

$H_k$  = coefficient d'érouissage

$$= \frac{E_k E_{Tk}}{E_k - E_{Tk}} \quad (\text{pas de somme sur } k)$$

$\bar{\epsilon}_k^p$  = déformation plastique équivalente cumulée

$$= \int_0^t (\bar{D}^p)_k dt \quad \text{où } (\bar{D}^p)_k = \sqrt{\frac{3}{2}} (D_{ij}^p)_k$$

Figure 5.18

Comportement élasto-plastique avec érouissage linéaire isotrope d'une phase k.

En pratique, le comportement mécanique d'une phase est fortement influencé par la température à laquelle cette phase s'est formée (CP7, CP37). Prenons l'exemple de la perlite : l'épaisseur des lamelles alternées de ferrite et de cémentite constituant cette phase diminue avec sa température de formation, et on observe une augmentation de la limite d'élasticité et du module tangent pour une température de formation décroissante.

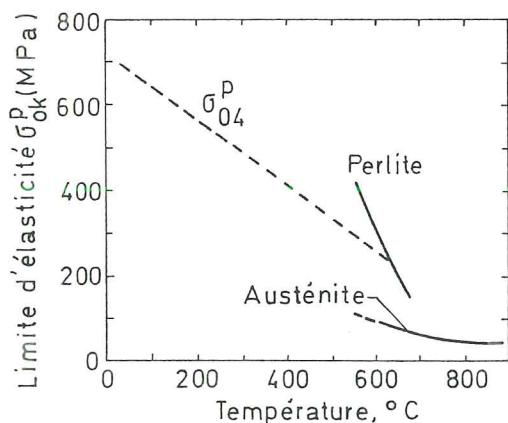


Figure 5.19.- Limite d'élasticité de l'acier XC80 en fonction de la température (d'après CP7)

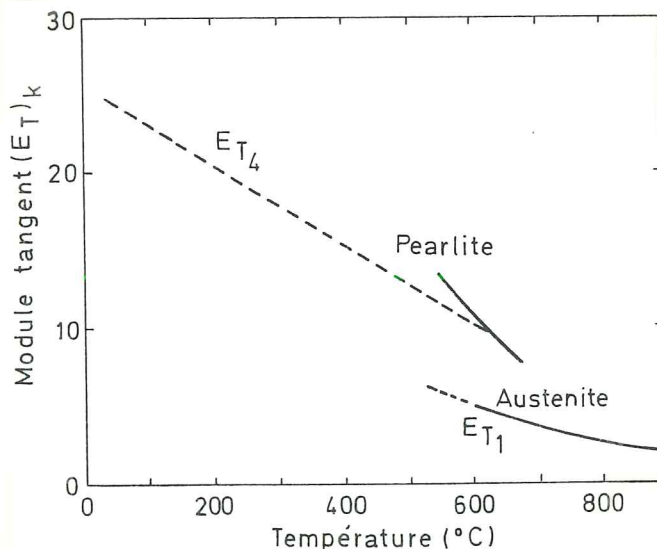


Figure 5.20.- Module tangent de l'acier XC80 en fonction de la température (d'après CP7)

— : caractéristique en fonction de la température de formation

--- : caractéristique de la perlite formée entre 620°C et 650°C.

Puisque la perlite formée au cours du refroidissement continu couvre un certain intervalle de température de formation, une valeur moyenne des paramètres  $\bar{\sigma}^P_4$  et  $E_{T4}$  (indiquée en traits interrompus fig. 5.19 et 5.20) doit être adoptée pour définir le comportement mécanique de la perlite (fig. 5.18). Si l'on sait avant le calcul dans quelle plage de température la perlite se forme, on pourra d'autant mieux préciser ces paramètres. Dans la mesure où ni les contraintes microscopiques  $\sigma_k$ , ni les vitesses de déformation plastique microscopique  $d_k^P$  relatives à chaque constituant ne sont connues, il faut définir une loi de comportement mécanique globale qui concerne l'état de contraintes macroscopiques calculé par le code LAGAMINE. Envisageons la loi suivante :

$$\bar{\sigma}^P (\bar{\varepsilon}^P, T, y_k) = y_k \sigma_{ok}^P (T) + \bar{\varepsilon}^P \cdot [y_k H_k (T)] \quad (4.50.a)$$

que l'on peut écrire :

$$\bar{\sigma}^P = \bar{\sigma}_o + H \bar{\varepsilon}^P$$

en posant, pour la limite d'élasticité globale :

$$\bar{\sigma}_o = y_k \bar{\sigma}_{ok} (T) \quad (4.50.b)$$

et pour le coefficient d'érouissage global :

$$H = y_k H_k (T) \quad (4.50.c)$$

et en notant  $\bar{\varepsilon}^P$  la déformation plastique équivalente cumulée, commune à tous les constituants :

$$\bar{\varepsilon}^P = \int_0^t \bar{D}^P dt \quad \text{avec} \quad \bar{D}^P = \sqrt{\frac{3}{2} D_{ij}^P D_{ij}^P} \quad (5.26.b)$$

Cette formulation implique deux hypothèses :

**a. la limite élastique globale est donnée par une loi de mélange.**

Comme le fait remarquer SJÖSTRÖM (CP38), on peut faire deux objections :

- dès que pour un constituant,  $\sigma^P_k$  est atteint, une partie du matériau va subir des déformations plastiques et son comportement global déviara d'une loi élastique linéaire. Ce phénomène se présentera avant que la contrainte macroscopique équivalente n'atteigne la valeur  $\sigma^P_o$ . D'autre part, un comportement complètement plastique ne peut être atteint que lorsque la phase dont le  $\sigma^P_k$  est le plus grand est plastique, c'est-à-dire bien après que la valeur globale  $\sigma^P_o$  n'ait prédit un comportement plastique. En réalité, il existe une zone de transition entre un comportement



élastique et plastique, comme pour tous les matériaux cristallins. Dans cet esprit, une loi de mélange constitue probablement une bonne approximation ;

- une objection plus sérieuse est issue de l'aspect microstructural. Si le constituant le moins résistant est continu et ne contient que quelques îlots de constituants plus résistants, le comportement global du matériau sera celui du constituant le moins résistant. En effet, dans ce cas, l'expérience n'observe pratiquement aucun effet suite à l'existence d'îlots de constituants plus résistants. Dans la situation inverse, lorsque le constituant le plus résistant est continu, la limite d'élasticité réelle sera probablement plus proche de celle du constituant le plus résistant que de celle prévue par la loi de mélange.

SJÖSTRÖM cite plusieurs auteurs (CP37, p. 64) qui ont effectué des vérifications expérimentales pour des structures métalliques biphasiques (austénite-martensite, ferrite-martensite, ...) et qui confirment l'utilisation de la loi de mélange en première approximation.

En adoptant la relation (4.50b), nous avons étendu ce résultat au cas où plus de 2 phases sont en présence.

#### **b. la déformation plastique équivalente cumulée est commune à tous les constituants k.**

Ceci suppose que lorsqu'une nouvelle phase est formée, elle est consolidée par toute la déformation plastique qui a eu lieu dans l'austénite avant transformation, ce qui ne reflète certainement pas la réalité. En particulier, dans le cas de la transformation martensitique de l'acier 60NCD11 au cours d'une trempe, DENIS a montré que, suite à l'écrouissage très important de la martensite, les déformations plastiques observées dans l'austénite sont de l'ordre de 1% et elles conduisent à des limites d'écoulement du métal irréalistes après transformation. Présentons succinctement les options prises par HILDENWALL, DENIS, SJÖSTRÖM, face à cette incohérence avec la réalité physique :

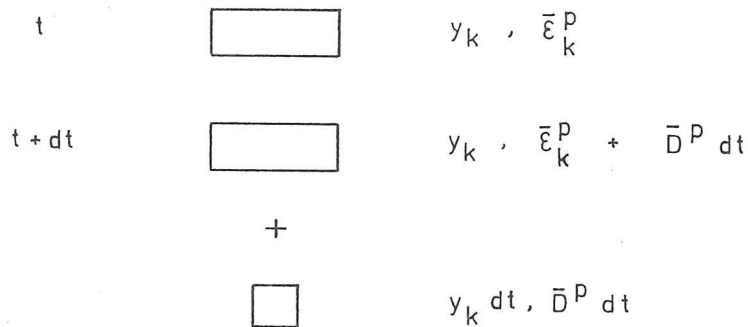
- HILDENWALL (CP37) définit des déformations plastiques équivalentes différentes pour chaque constituant  $(\bar{\epsilon}^P)_k$ . Si au cours d'un intervalle de temps  $\Delta t$ , il trouve un incrément de déformation équivalente plastique "global"  $\Delta \bar{\epsilon}^P$ , il calcule des  $\bar{\epsilon}_k^P$  de la façon suivante :

- pour  $k = 1$  (austénite) :  $\bar{\epsilon}_1^p(t + \Delta t) = \bar{\epsilon}_1^p(t) + \Delta \bar{\epsilon}^p$  (5.51.)

(formulation classique)

- pour  $k \neq 1$  :  $\bar{\epsilon}_k^p(t + \Delta t) = \frac{y_k(t) \bar{\epsilon}_k^p(t) + \frac{y_k(t) + y_k(t + \Delta t)}{2} \Delta \bar{\epsilon}^p}{y_k(t + \Delta t)}$  (5.52.)

- SJÖSTRÖM (CP38) considère que dans le domaine des transformations, l'austénite restante continue à s'écrouir (5.51) et les nouvelles phases formées ne s'écrouissent que par les déformations plastiques qu'elles subissent. Pour définir ce  $\epsilon^p_k$ , SJÖSTRÖM observe ce qui se passe au cours d'un pas où un accroissement de volume de la phase  $k$  ( $k \neq 1$ ) apparaît :



**Figure 5.21.-** Petit élément de volume de phase  $k$  dont la taille augmente d'un volume infinitésimal  $y_k dt$  au cours d'un pas suite à une transformation

En début de pas, on a :  $\bar{\epsilon}_k^p \text{ début} = \bar{\epsilon}_k^p$  (5.53.)

En fin de pas, on a :  $\bar{\epsilon}_k^p \text{ fin} = \frac{y_k (\bar{\epsilon}_k^p + \bar{D}^p dt) + \dot{y}_k dt \bar{D}^p dt}{y_k + y_k dt}$  (5.54.)

En cours de pas, on a donc :  $\frac{d \bar{\epsilon}_k^p}{dt} = \bar{D}_k^p = \frac{\bar{\epsilon}_k^p \text{ début} - \bar{\epsilon}_k^p \text{ fin}}{dt}$   
 $\cong \bar{D}^p - \frac{1}{y_k} \dot{y}_k \bar{\epsilon}_k^p$  (5.55.)

Soit en toute généralité :  $\bar{\epsilon}_k^p = \int_{t_{dk}}^t \left\{ \bar{D}^p - \frac{1}{y_k} \dot{y}_k \bar{\epsilon}_k^p \right\} dt$  (5.56.)

où  $t_{dk}$  est le temps de début de transformation de la phase  $k$ , et l'indice  $k$  indique une phase particulière et non un indice sommatoire.

Le modèle complet de SJÖSTRÖM consiste en un écrouissage cinématique, mais seul l'aspect écrouissage isotrope a été considéré ci-dessus ;

- DENIS (CP31) présente un modèle "isotrope modifié" où seule l'austénite est écrouie (écrouissage isotrope), les nouvelles phases obtenues suite aux transformations sont supposées parfaitement plastiques.

Dans le code LAGAMINE, actuellement seuls les modèles d'écrouissage isotrope de toutes les phases (modèle classique) ou d'écrouissage isotrope modifié (modèle de DENIS) sont prévus. Ces modèles sont en accord avec la formule (4.50a) alors que ceux de HILDENWALL et de SJÖSTRÖM impliquent de remplacer le second terme par la somme sur les différents  $k$  de  $\bar{\epsilon}_k y_k H_k$ . Notons que INOUE (CP13, CP36) adopte le modèle isotrope classique.

Au sujet de l'importance du choix d'un modèle d'écrouissage, il est bon de rappeler les faits suivants :

- la discussion relative au choix d'un modèle d'écrouissage isotrope classique d'HILDENWALL, SJÖSTRÖM ou DENIS **concerne uniquement les cas où une transformation de phase** (et donc la présence de plasticité de transformation) se **produit simultanément avec la plasticité classique**. DENIS a montré (CP31) que pour la trempe martensitique d'un cylindre de  $\varnothing$  34 mm, seule une mince couche superficielle était affectée ;
- le choix général d'un écrouissage isotrope et non cinématique peut être critiqué. INOUE (CP14) a effectué des comparaisons expérience-simulation avec un code contenant l'écrouissage cinématique et isotrope mais négligeant la plasticité de transformation. Le modèle avec écrouissage cinématique était le plus précis. RAMMERSTORFER (CP16) et SJÖSTRÖM (CP11) prennent en compte la plasticité de changement de phase et la plasticité classique avec écrouissage cinématique. Leurs résultats sont en bon accord avec l'expérience mais ils ne montrent pas de simulations avec écrouissage isotrope. Par contre, DENIS (CP31) avec un modèle plastique classique avec écrouissage isotrope mixte et prise en compte de la plasticité de transformation montre également des résultats en bon accord avec l'expérience.

Dans une première étape du développement, nous avons choisi le modèle plus simple d'écrouissage isotrope, la comparaison avec l'expérience nous dira si l'introduction d'un modèle cinématique est nécessaire ou non.

Poursuivons la description du modèle de plasticité en présence d'une structure multiphasique. On adopte une surface de plasticité identique au cas d'une structure monophasique mais qui tient compte d'une contrainte d'écoulement donnée par (4.50.a) :

$$f = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - \kappa^2 = 0 \quad (5.57.)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{1}{3} \bar{\sigma}^p(\bar{\epsilon}^p, T, y_k)}$$

L'hypothèse de normalité est semblable à (5.27) ; quant à la condition de consistance (5.28), elle devient :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} s_{ij} - 2 \kappa \left( \frac{\partial \kappa}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \kappa}{\partial \bar{\epsilon}^p} \bar{D}^p + \frac{\partial \kappa}{\partial y_k} \dot{y}_k \right) = 0 \quad (5.58.)$$

On obtient finalement (5.57., 5.27., 5.58.) :

$$d_{ij}^p = \mu \left[ s_{kl}^{\nabla} s_{kl} - 2 \kappa \left( \frac{\partial \kappa}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \kappa}{\partial y_k} \dot{y}_k \right) \right] s_{ij} \quad (5.59.)$$

Les essais pour déterminer  $\mu$  se font à température  $T$  constante et pour des microstructures en équilibre ( $\dot{y}_k = 0$ ).

#### 5.4.4.5. Formule finale de la loi mécanique thermique métallurgique couplée.

La plasticité classique et la plasticité de transformation concernent uniquement la partie déviatorique du tenseur contrainte. Inversément, les modifications de volume affectent uniquement la contrainte hydrostatique. Par conséquent, il est aisé de calculer le tenseur contrainte en deux étapes :

- A : la contrainte hydrostatique,
- B : le tenseur contrainte déviatorique.

#### A. Calcul de la contrainte hydrostatique.

Les vitesses de déformation en présence sont les suivantes :

$$D_m = D_m^e + D_m^{th} + D_m^{tr} \quad (5.60.)$$

où l'indice m indique la valeur moyenne  $\left(D_m = \frac{1}{3} D_{ii}\right)$  et les termes  $D_m^{th}$  et  $D_m^{tr}$  ont été explicitées en 5.4.4.3 :

$$D_m^{th} = y_k \alpha_k \dot{T} \dot{y}_k \int_0^{T(i)} \alpha_k(\tau) d\tau \quad (5.61.)$$

$$D_m^{tr} = y_k \bar{\epsilon}_{k0}^{tr} \quad (5.62.)$$

$D_m^e$  représente la vitesse de déformation élastique moyenne  $\left(D_m^e = \frac{1}{3} D_{ii}^e\right)$ .

Par une démarche similaire à celle présentée en 5.4.2 (loi élastique thermique couplée), on obtient :

$$\dot{\sigma}_m = \chi (D_m - D_m^{th} - D_m^{tr}) + \dot{\chi} \sigma_m \quad (5.63.)$$

avec  $\chi = \frac{E}{1-2\nu}$  et  $\dot{\chi} = \frac{\partial \chi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \chi}{\partial y_k} \dot{y}_k$

Le module de YOUNG E et le coefficient de POISSON  $\nu$  sont obtenus par une loi de mélange (3.19) pour tenir compte de la microstructure multiphasique. En pratique, cependant, la seule différence significative observée est une diminution du E relatif à l'austénite de 8 à 10% par rapport aux autres phases (CP38).

## B. Calcul du tenseur déviatorique des contraintes.

Le tenseur déviatorique de la vitesse de déformation se décompose de la façon suivante :

$$d_{ij} = d_{ij}^e + d_{ij}^p + d_{ij}^{pt} \quad (5.64.)$$

où  $d_{ij}^e$  = vitesse de déformation déviatorique élastique

$d_{ij}^p$  = vitesse de déformation plastique classique

$$= \mu \left[ s_{kl} \overset{\nabla}{s}_{kl} - 2 \kappa \left( \frac{\partial \kappa}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \kappa}{\partial y_k} \dot{y}_k \right) \right] s_{ij} \quad (5.59.)$$

$d_{ij}^{pt}$  = vitesse de déformation de plasticité de transformation

$$= F(y_s, \bar{\sigma}) \dot{y}_s s_{ij} \quad (5.65.)$$

La formule (5.65) résume les différentes formules adaptées aux différentes transformations (5.44b, 5.45b). Rappelons qu'une seule transformation arrive en un point à un instant donné et par conséquent, l'indice s n'est pas sommatoire, il peut prendre des valeurs entre 2 et 6 (3.19).

On peut utiliser la formule générale thermoélastoplastique (5.25) à condition d'y ajouter la plasticité de transformation et de tenir compte de la possibilité d'un matériau multiphasique. Ce dernier point signifie que le module de cisaillement  $G$  est obtenu par une loi de mélange et que sa dérivée dépend à la fois de  $\dot{T}$  et de  $\dot{y}_k$ . On a :

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} = 2 G (d_{ij} - d_{ij}^p - d_{ij}^{pl}) + \frac{\dot{G}}{G} s_{ij} \quad (5.66.)$$

avec  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  et  $\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial G}{\partial y_k} \dot{y}_k$

Le passage de cette forme à la forme finale est calqué sur les développements du paragraphe 5.4.3. ; nous ne les reprendrons pas ici. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{s}_{ij} = & 2 G [ \delta_{ik} \delta_{jl} - \gamma s_{ij} s_{kl} ] d_{kl} \\ & + \frac{\gamma}{2 G \mu} s_{ij} \left( \frac{\dot{G}}{G} + 4 G \mu \kappa \dot{Z} \right) + \frac{\gamma}{\mu} s_{ij} \dot{y}_s F(y_s, \bar{\sigma}) \end{aligned} \quad (5.67.a)$$

avec  $\gamma = \frac{2 G \mu}{1 + 4 G \mu \kappa^2}$  (5.67.b)

$$\dot{Z} = \frac{\partial \kappa}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \kappa}{\partial y_k} \dot{y}_k \quad (5.67.c)$$

Remarquons la différence avec le cas élastoplastique thermique (5.35) : un troisième terme est apparu et le second terme est modifié suite à la prise en compte de la microstructure multiphasique.