

CHAPITRE 6

L'élément fini thermique métallurgique mécanique couplé



- 6.1. Introduction
- 6.2. Vue d'ensemble du LAGAMINE
- 6.3. Vue d'ensemble de l'élément couplé CPLA
- 6.4. Schéma d'intégration de base
- 6.5. Intégration de la loi mécanique
 - 6.5.1. Introduction
 - 6.5.2. Calcul de la contrainte $\underline{\sigma}_{n+1}^e$ dans l'hypothèse d'un comportement élastique
 - 6.5.3. Test de plasticité
 - 6.5.4. Recherche de l'état de contrainte $\underline{\sigma}$ (L) correspondant à l'entrée en plasticité
 - 6.5.5. Calcul de la contrainte au point C milieu de l'incrément plastique
 - 6.5.6. Calcul de la contrainte en fin de pas
 - 6.5.7. Notion de sous-intervalles
- 6.6. Calcul de la matrice tangente
 - 6.6.1. Introduction
 - 6.6.2. Matrice tangente mécanique \underline{K}_M (cas axisymétrique)
 - 6.6.3. La matrice couplée mécanique thermique \underline{K}_{MT} (cas axisymétrique)
 - 6.6.4. La matrice tangente thermique \underline{K}_T (cas axisymétrique)
 - 6.6.5. La matrice tangente thermique mécanique couplée \underline{K}_{TM}
 - 6.6.6. Matrice tangente utilisée pour une analyse thermique, mécanique, métallurgique axisymétrique
- 6.7. Stabilité du schéma d'intégration
- 6.8. L'état plan généralisé
 - 6.8.1. Introduction
 - 6.8.2. L'élément CPLA en état plan généralisé

6.1. INTRODUCTION

La méthode des éléments finis est particulièrement adaptée à l'étude de pièces de forme quelconque dont le matériau présente une loi de comportement relativement complexe. Dans le domaine de l'analyse thermique, mécanique, métallurgique, peu de codes considèrent l'ensemble du problème et donc tous les couplages rappelés au chapitre 2 (figure 2.1). A notre connaissance, hormis le code LAGAMINE décrit dans cet ouvrage, on peut citer les codes d'éléments finis suivants :

- le code développé par SJÖSTRÖM (CP11)
- le code développé par INOUE (CP2, CP3).

De nombreuses autres équipes de chercheurs travaillent avec deux codes séparés. Une première étude thermique métallurgique est réalisée à l'aide d'un code éléments finis, différences finies ou encore un modèle mathématique particulier adapté à une géométrie simple. L'histoire thermique et microstructurale obtenue constitue alors une donnée d'entrée pour un code d'analyse thermomécanique. En procédant de cette façon, on néglige forcément deux couplages (couplages 2 et 4 de la figure 2.1) :

- l'influence de l'état de contraintes et de déformations sur les cinétiques de transformation
- la source de chaleur constituée par la dissipation plastique.

L'importance du premier couplage a été mise en évidence au paragraphe 5.3. Quant au second couplage, il est généralement licite de le négliger dans une simulation de refroidissement par trempe (voir 5.1).

Selon nos informations, cette approche découplée est réalisée par les chercheurs suivants :

- DENIS avec le code MARC (CP31)
- FISCHER et RAMMERSTOFFER avec ADINA (CP16, CP17, CP42)
- ASSAKER avec SAMCEF (CP24, CP25)
- STAFFORD avec NIKE et TOPAZ (FOR12)
- FLETCHER (CP22)
- VANSEVENANT (CP33).

Nous mentionnerons également les travaux de GIUSTI (CP34), de LEBLOND et DEVAUX (CP43 avec SYSTUS), mais, par manque d'information, nous ignorons s'il faut les classer parmi les approches à code unique ou non.

Remarquons que tous ces codes ne sont pas uniquement dédiés au calcul des contraintes résiduelles après trempe. Le calcul des contraintes résiduelles induites par la soudure, le grenailage sont également considérés.

Dans ce chapitre, nous allons décrire l'intégration du modèle présenté au chapitre 5 dans le code d'éléments finis LAGAMINE.

En outre, un développement supplémentaire a été nécessaire pour simuler la trempe d'un profilé métallique du type poutre. En effet, l'équilibre existant entre les zones tendues et comprimées d'une section en l'absence de forces mécaniques extérieures doit être respecté. Ni l'état plan de contrainte, ni l'état plan de déformation ne prennent en compte cet équilibre. Par conséquent, un nouvel état dénommé "*état plan généralisé*" a été développé. Ce travail fut réalisé en collaboration avec BOURDOUXHE (EF15). Nous y consacrerons le paragraphe 6.

6.2. VUE D'ENSEMBLE DU LAGAMINE

Un schéma général du programme LAGAMINE (fig. 4.18) a été présenté au chapitre 4 concernant l'analyse thermique métallurgique. Son extension au cas thermique mécanique métallurgique est immédiate, un schéma simplifié (fig. 6.1) vous permettra de bien visualiser l'architecture du programme.

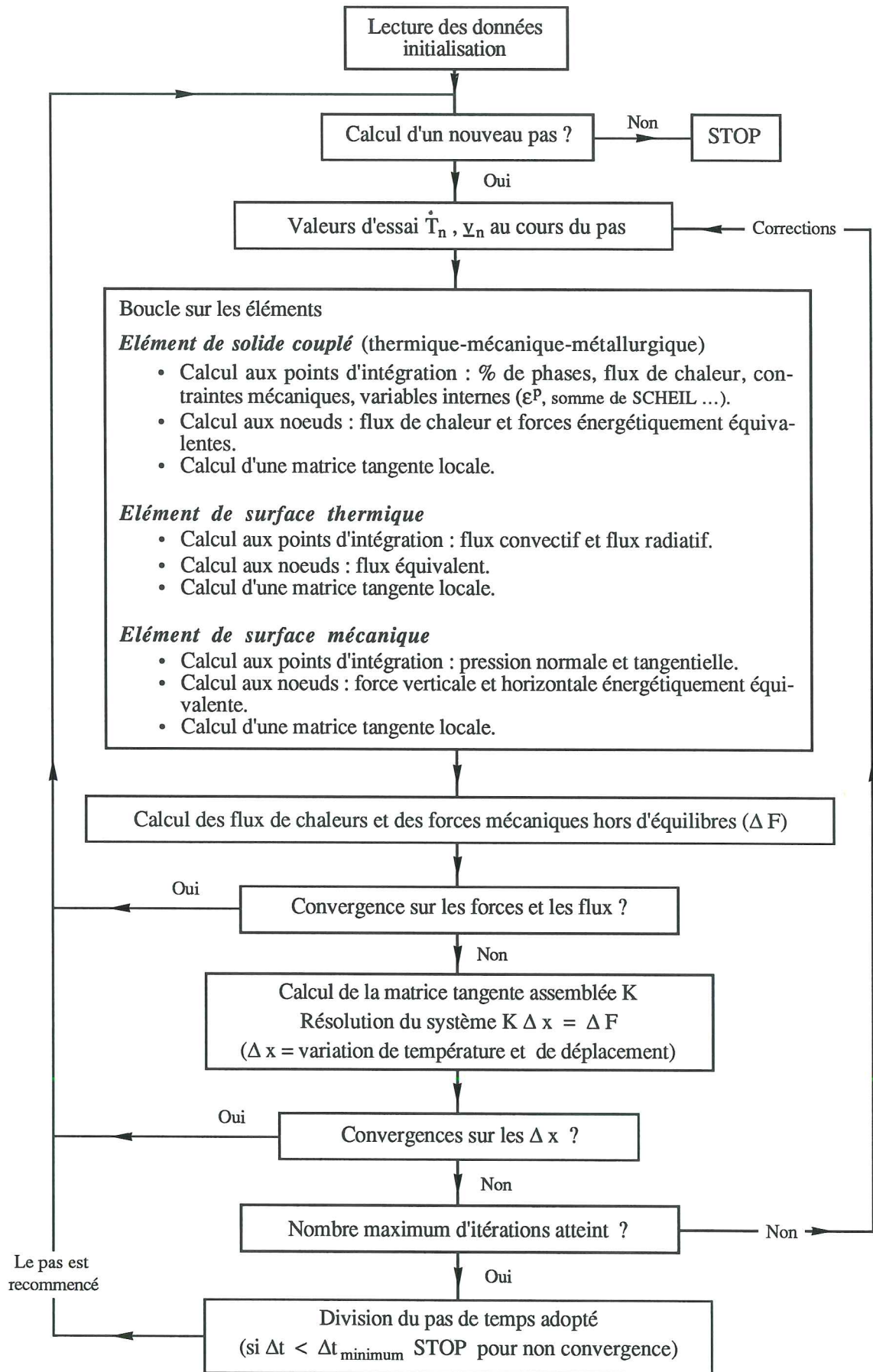


Figure 6.1. Organigramme du LAGAMINE (Thermique-mécanique-métallurgique).

6.3. VUE D'ENSEMBLE DE L'ELEMENT COUPLE CPLA

L'élément couplé CPLA (élément couplé plan) contient l'ensemble des développements relatifs au couplage thermique-mécanique-métallurgique dans le solide en cours de refroidissement. Il constitue un apport original de cette thèse. Il s'agit d'un élément plan isoparamétrique à 8 noeuds. Le champ de déplacement et de température sont calculés par les mêmes fonctions d'interpolation à partir des valeurs nodales.

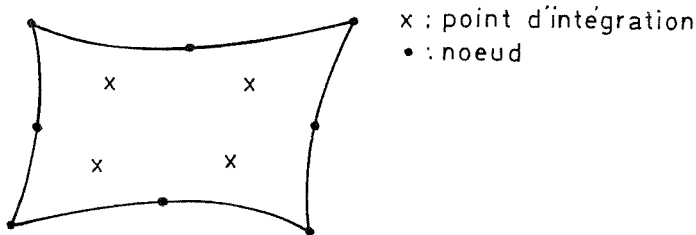


Figure 6.2.
L'élément CPLA

Une objection à ce choix est la suivante : la vitesse de déformation totale D_{ij} (5.3)

sera du premier degré alors que la vitesse de déformation due à la dilatation (5.2 1b) sera du second degré.

Pour éviter cette incohérence, on peut imaginer de superposer un élément thermique à 4 noeuds à l'élément mécanique à 8 noeuds. Nous avons renoncé à cette approche pour deux raisons :

1. cette approche complique la prise en compte des nombreux couplages existant entre ces deux éléments différents,
2. cette approche implique une perte de précision du calcul thermique. En effet, le flux conductif (4.68) est relié au gradient de la température qui est linéaire dans un élément à 8 noeuds et constant pour un élément à 4 noeuds, le flux capacitif (4.68) relié à T passera d'une fonction parabolique à une fonction linéaire ...

Envisageons le pas de temps Δt qui fait passer un élément de son état au temps t_n à un état voisin mais différent au temps t_{n+1} . Suite à l'organisation de LAGAMINE (fig. 6.1), les informations suivantes sont connues lorsqu'on entre dans la routine élément :

- en t_n :
 - températures nodales T_n
 - coordonnées nodales \underline{X}_n
 - contraintes $\underline{\sigma}_n$ et flux \underline{q}_n aux points d'intégration
 - % des phases métallurgiques $(y_k)_n$, la dureté Hv_n aux points d'intégration
 - variables internes : déformation plastique cumulée $\bar{\epsilon}_n^p$, la somme de SCHEIL $(\Sigma)_n$

- les valeurs d'essai de la vitesse \underline{v}_n et de la dérivée de la température T_n constantes.

A la sortie de cette routine, toutes les informations connues en t_n doivent l'être également en t_{n+1} et une matrice tangente locale doit avoir été calculée.

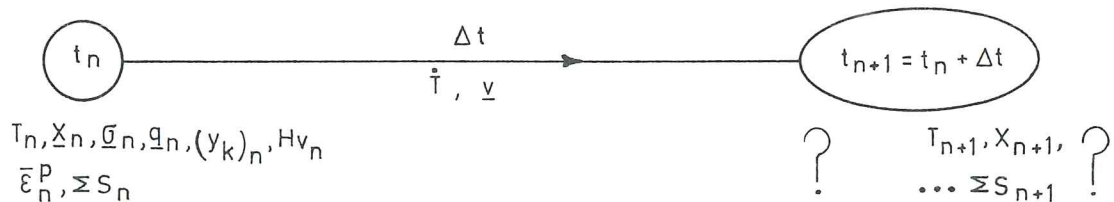


Figure 6.3.- Passage de l'état au temps t_n à l'état au temps t_{n+1}

Les valeurs T_{n+1} et X_{n+1} sont obtenues immédiatement à partir des valeurs d'essai \dot{T}_n et \underline{v}_n . Quant aux autres variables, elles sont reliées aux lois constitutives du matériau.

$\underline{\sigma}$ et $\bar{\epsilon}^p$ → loi élastoplastique thermique métallurgique (5.63., 5.66)

\underline{q} → loi d'équilibre thermique (5.6)

$y_k, H v, \Sigma s$ → loi de cinétique de transformation (5.17., 5.18., 5.11., 5.12., 3.7.)

6.4. SCHEMA D'INTEGRATION DE BASE

Dans notre code, les valeurs d'essai \dot{T}_n et \underline{v}_n permettent de prévoir l'histoire des températures et des déformations au cours du pas. Un calcul mécanique-métallurgique couplé basé sur ces deux valeurs est réalisé dans une première étape. L'importance des couplages entre l'analyse mécanique-métallurgique (voir chapitre 5) justifie cette approche. Le terme de source de chaleur résultant des transformations est également évalué dans cette première étape. Le calcul de l'équilibre thermique est ensuite réalisé lors d'une seconde étape. Ce schéma d'intégration constitue un apport original de cette thèse. Une version de base sans sous-intervalles d'intégration est décrite ci-dessous. L'apport des sous-intervalles d'intégration sera envisagé au paragraphe 6.5.7.

Schéma d'intégration de base

- Boucle sur les points d'intégration :

1. Calcul des paramètres mécaniques et métallurgiques

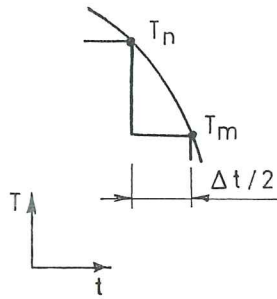
- soit :

$$T_m = \frac{T_n + T_{n+1}}{2} \quad (6.1.)$$

NB. : l'indice m concerne toutes les valeurs définies à mi-pas en

$$t_m = t_n + \frac{\Delta t}{2} \quad (6.2.)$$

-



calcul des paramètres métallurgiques $(y_k)_m$, Hv_m , ΣS_m par application des lois de cinétique de transformation, à partir des valeurs en début de pas $(y_k)_n$, Hv_n , ΣS_n , de la discrétisation de la courbe de refroidissement ci-contre (fig. 6.4) et de l'hypothèse du tenseur contrainte $\underline{\sigma}_n$ constant de t_n à t_m

Figure 6.4

- calcul d'une vitesse de transformation y_k supposée constante au cours du pas

$$\dot{y}_k = \frac{2 [(y_k)_m - (y_k)_n]}{\Delta t} \quad (6.3.)$$

- calcul de la quantité de chaleur Q_1 dégagée suite aux transformations de phases pendant la première moitié du pas :

$$Q_1 = \dot{y}_k H_k (T_m) \frac{\Delta t}{2} \quad (6.4.)$$

- calcul des paramètres mécaniques (5.6.3.b), (5.6.6b)

$$\chi = (y_k)_m \chi_k (T_m) \quad (6.5.a)$$

$$\dot{\chi} = \dot{y}_k \chi_k (T_m) + (y_k)_m \frac{\partial \chi_k}{\partial T} \dot{T} \quad (6.5.b)$$

- calcul des vitesses de déformation thermique et métallurgique supposées constantes au cours du pas :

$$(5.47.) \rightarrow D_{ij}^{th} = \delta_{ij} \left[(y_k)_m \alpha_k (T_m) \dot{T} + \dot{y}_k \int_0^{T_m} \alpha_k (\zeta) d\zeta \right] \quad (6.6.a)$$

$$(5.46.) \rightarrow D_{ij}^{tr} = \delta_{ij} \dot{y}_k \varepsilon_{k o^c}^{tr} \quad (6.6.b)$$

- calcul de la vitesse de déformation résultant de la plasticité de transformation :

$$D_{ij}^{pt} = F((y_k)_m, \bar{\sigma}_n) \dot{y}_k s_{ij} = C^{pt} s_{ij} \quad (6.6.c)$$

Le coefficient C^{pt} est pris constant au cours du pas alors que la variation du déviateur des contraintes s_{ij} est prise en compte (voir formule 5.66)

- calcul de $(s_{ij})_{n+1}$ par les lois (5.63) et (5.66) à partir des paramètres définis ci-dessus (les détails de cette intégration sont fournis ci-après au § 6.5).

- calcul de la matrice constitutive mécanique C_{ij} telle que $\underline{\sigma} = \underline{C} \underline{\varepsilon}$ (détails supplémentaires au § 6.6).

- calcul des paramètres métallurgiques $(y_k)_{n+1}$, Hv_{n+1} , ΣS_{n+1} par application des lois de cinétique de transformation, à partir des valeurs à mi-pas $(y_k)_m$, $(Hv)_m$, ΣS_m , de la discrétisation de la courbe de refroidissement ci-contre (fig. 6.5) et de l'hypothèse du tenseur contrainte $\underline{\sigma}_{n+1}$ constant de t_m à t_{n+1}

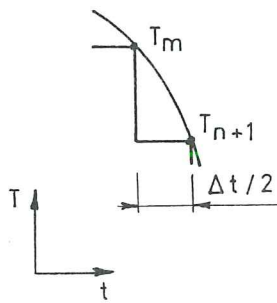


Figure 6.5

- calcul de la quantité de chaleur Q_2 dégagée suite aux transformations de phases pendant la seconde moitié du pas :

$$Q_2 = [(y_k)_{n+1} - (y_k)_m] H_k (T_{n+1}) \quad (6.7.)$$

Soit une chaleur totale $Q = Q_1 + Q_2$ et un taux moyen de chaleur dissipé par

$$\text{transformation } r = \frac{Q}{\Delta t} \quad (6.8.)$$

2. Calcul des paramètres thermiques

- les paramètres k_n, ρ_n, c_n sont connus
- calcul des paramètres $k_{n+1}, \rho_{n+1}, c_{n+1}$

$$k_{n+1} = (y_k)_{n+1} k_k(T_{n+1}) \quad (6.9.)$$

...

- calcul de grad $T_n, \text{grad } T_{n+1}$ (4.71.)
- calcul des flux de chaleurs $(q_k)_{n+1}, (q_c)_{n+1}, (q_{tr})_{n+1}$ à l'aide de (4.68.)
- calcul des coefficients de la matrice constitutive thermique par (4.74), (4.75), (4.76).
- Calcul des forces et des flux nodaux équivalents
- Calcul de la matrice constitutive thermique.

Des essais numériques ont montré que ce schéma est stable et donne une bonne précision pour les refroidissements provoquant des transformations par diffusion. En présence de transformation martensitique, il n'est raisonnablement stable que si le couplage de la température M_s avec la contrainte hydrostatique est négligé, une amélioration du schéma de base permet de résoudre ce cas (voir § 6.7).

6.5. INTEGRATION DE LA LOI MECANIQUE

6.5.1. Introduction

Une description approfondie du schéma d'intégration des lois élastoplastiques a été réalisée par CHARLIER (EF4, chapitre 5) pour des lois purement mécaniques. Il justifie le choix des *schémas de la normale moyenne et du point milieu* qui est adapté pour les différentes lois élastoplastiques de LAGAMINE. De façon générale, on détermine l'état de contrainte final $\underline{\sigma}^e$ dans l'hypothèse d'un pas entièrement élastique et on réalise ensuite deux itérations élastoplastiques. Pour terminer, les variables d'écrouissage sont ajustées à l'état de contraintes. Nous allons étendre ce schéma d'intégration au cas élastoplastique thermique métallurgique.

La figure 6.6. rappelle succinctement les trois schémas les plus courants pour l'intégration d'une loi élastoplastique. Ils diffèrent essentiellement par la direction de la normale considérée dans la loi de normalité (5.27).

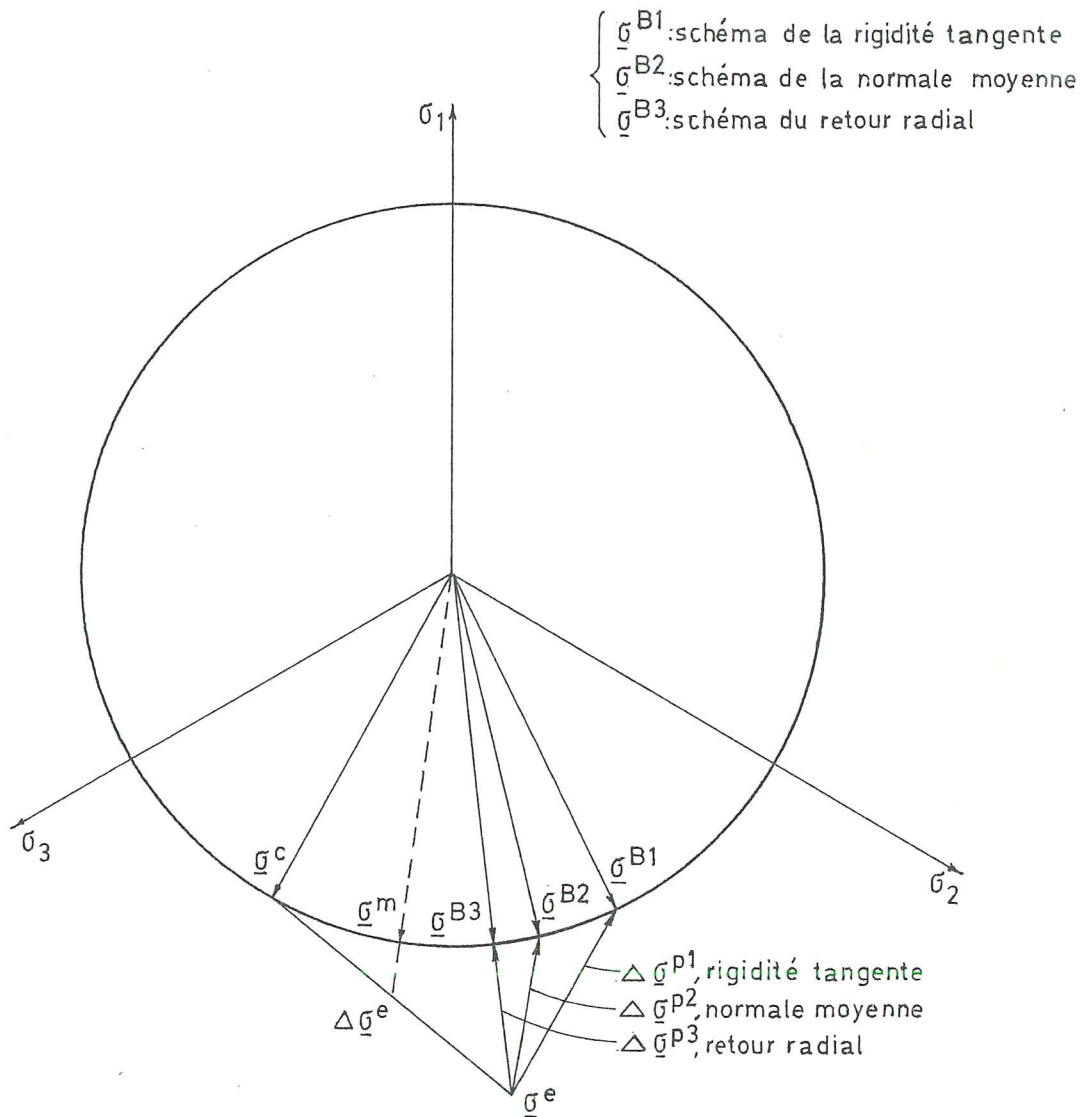


Figure 6.6.

Comparaison des 3 schémas pour une loi de VON MISES sans écrouissage (d'après EF4)

6.5.2. Calcul de la contrainte $\underline{\sigma}_{n+1}^e$ dans l'hypothèse d'un comportement élastique.

Dans ce cas, la vitesse de déformation se décompose en 4 termes :

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^{th} + D_{ij}^{tr} + D_{ij}^{pt} \quad (6.10.)$$

Remarquons que la plasticité de transformation, indépendante de la plasticité classique, est conservée. Les relations (6.6) définissant les trois derniers termes sont données au paragraphe précédent. Par un développement identique à celui réalisé pour la loi élastique thermique (5.4.2), on trouve :

$$\dot{\sigma}_m^e = \chi D_m^e + \frac{\dot{\chi}}{\chi} \sigma_m \quad (6.11.a)$$

$$\frac{\dot{\nu}_e}{s_{ij}} = 2 G D_{ij}^e + \frac{\dot{G}}{G} s_{ij} \quad (6.11.b)$$

où D_m^e , D_{ij}^e sont obtenus directement à partir de (6.10) et χ , $\dot{\chi}$, G , \dot{G} par (6.5.)

Par conséquent, la contrainte $\underline{\sigma}_{n+1}^e$ est définie par :

$$(\sigma_m)_{n+1} = (\sigma_m)_n + \dot{\sigma}_m^e \Delta t \quad (6.12.a)$$

$$s_{n+1} = s_n + \dot{s}^e \Delta t \quad (6.12.b)$$

$$\dot{s}_{ij}^e = \frac{\dot{\nu}_e}{s_{ij}} + W_{ik} s_{kj} + W_{jk} s_{ki} \quad (6.12.c)$$

où $W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ est la vitesse de rotation.

La formule (6.12.c) est la définition de la dérivée objective de JAUMANN.

6.5.3. Test de plasticité

Suite à la définition de la surface de plasticité de VON MISES (5.57), la contrainte $\underline{\sigma}_{n+1}^e$ sera effectivement élastique si elle respecte l'inégalité :

$$\frac{1}{2} (s_{ij})_{n+1} (s_{ij})_{n+1} - \kappa_{n+1}^2 \leq 0 \quad (6.13.)$$

En pratique, suite aux hypothèses \dot{T} constante, \dot{y}_k constante donnée par (6.3.), on peut déterminer T_{n+1} et $(y_k)_{n+1}$. Quant à $\bar{\epsilon}_{n+1}^P$, il est pris égal à $\bar{\epsilon}_n^P$ dans l'hypothèse d'un pas entièrement élastique. On obtient :

$$\kappa_{n+1} = \kappa(\bar{\epsilon}_n^P, T_{n+1}, (y_k)_{n+1}) \quad (6.14.)$$

Lorsque l'inégalité (6.13) est respectée, on accepte la contrainte $\underline{\sigma}_{n+1}^e$ comme contrainte en fin de pas. Dans le cas contraire, cela signifie qu'on est sorti du domaine élastique et il faut réaliser un calcul d'incrément élastoplastique.

6.5.4. Recherche de l'état de contrainte $\underline{\sigma}$ (L) correspondant à l'entrée en plasticité.

Pour une analyse mécanique unidimensionnelle, la figure 6.7 illustre notre schéma d'intégration.

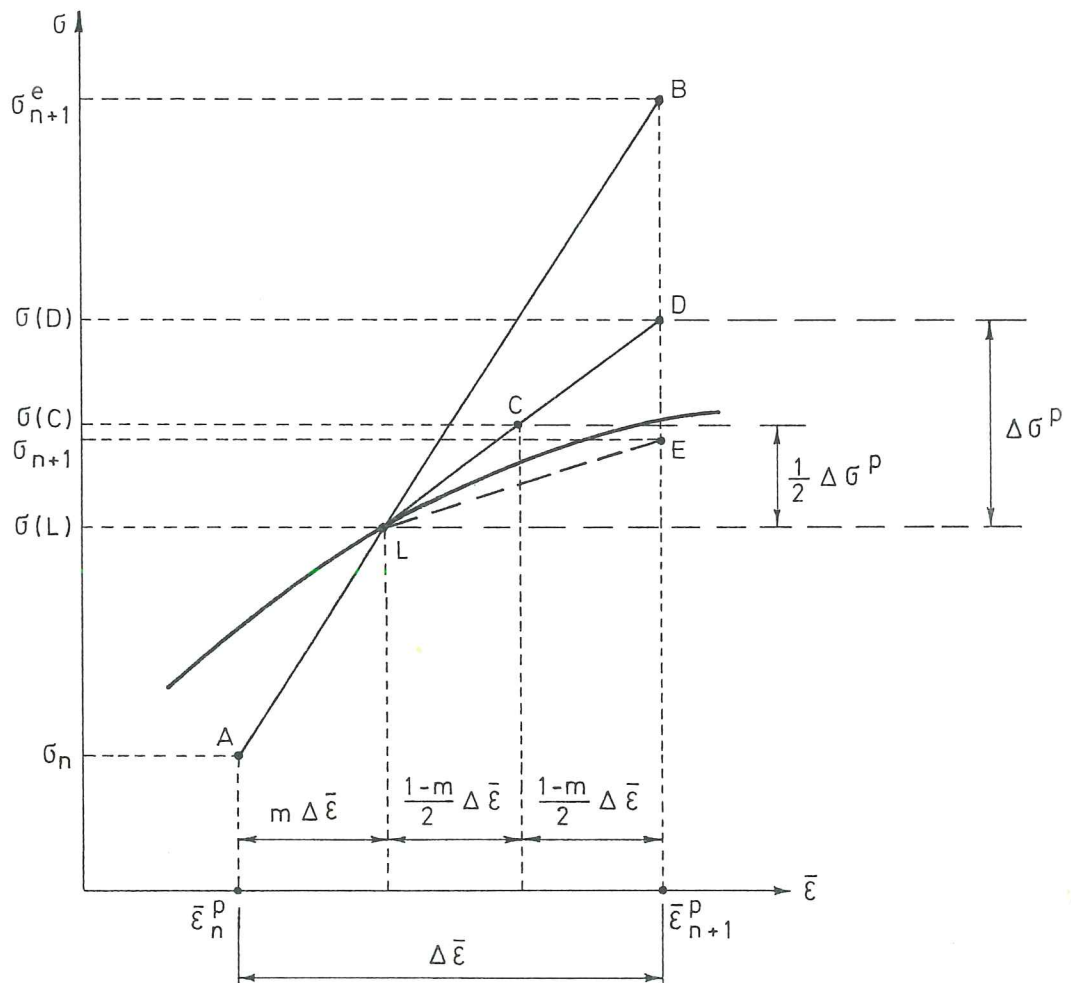


Figure 6.7.- Schéma d'intégration de la loi élastoplastique mécanique

Le coefficient m détermine la fraction élastique du pas et le point L d'entrée en plasticité a pour contrainte :

$$\underline{s}(L) = \underline{s}_n + m \dot{\underline{s}}^e \Delta t \quad (6.15.)$$

Seule la contrainte déviatorique est considérée puisque selon nos hypothèses, la contrainte hydrostatique n'est pas affectée par la plasticité (5.4.3). A partir des équations (6.13), (6.14) et (6.15), on peut déterminer le coefficient m , solution de l'équation du second degré :

$$((s_{ij})_n + m \dot{s}_{ij}^e \Delta t) ((s_{ij})_n + m \dot{s}_{ij}^e \Delta t) - 2 \left[\kappa_n^2 + m \left(\frac{\kappa_{n+1}^2 - \kappa_n^2}{\Delta t} \right) \cdot \Delta t \right] = 0 \quad (6.16.)$$

où l'on suppose une variation linéaire du κ , en fonction de la température et de la microstructure.

6.5.5. Calcul de la contrainte au point C milieu de l'incrément plastique.

La contrainte au point C est calculée à partir du tenseur élastoplastique évalué en L (fig. 6.7). On a donc :

$$\underline{s}(C) = \underline{s}(L) + \dot{s}_{ij}(L) \frac{1-m}{2} \Delta t \quad (6.17.)$$

où le tenseur \dot{s}_{ij} est défini par les relations (5.66.), (6.6.c) et (6.6.d) :

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{s}_{ij}(L) = & 2 G [\delta_{ik} \delta_{jl} - \gamma s_{ij}(L) s_{kl}(L)] d_{kl} + \frac{\gamma}{2 G \mu} s_{ij}(L) \left(\frac{\dot{G}}{G} + 4 G \mu \kappa \dot{z} \right) \\ & + \frac{\gamma}{\mu} s_{ij}(L) C^{pt} \end{aligned} \quad (6.18.)$$

et la dérivée de JAUMANN (6.12.c).

Précisons que dans cette relation :

- $G, \dot{G}, d_{kl}, C^{pt}$ ont une valeur moyenne constante tout au long du pas

$$\dot{Z} = \frac{\partial \kappa}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \kappa}{\partial y_k} \dot{y}_k \approx \frac{\kappa_{n+1} - \kappa_n}{\Delta t} \quad (\text{voir (5.66.c) et (6.14.)})$$

$$\mu(T, y_k, \bar{\epsilon}^p) = \frac{9}{4} \frac{1}{\sigma^{p2} E_T} \quad (5.33.)$$

$$\text{où } \sigma^p = \sigma^p(T_L, (y_k)_L, \bar{\epsilon}_n^p) \quad (\text{voir 5.40.})$$

et $E_T((y_k)_L, T_L)$ est défini par une loi de mélange, les valeurs indicées L étant calculées en l'instant $t_L = t_n + m \Delta t$.

- γ est une fonction (5.66.b) des coefficients définis ci-dessus.

6.5.6. Calcul de la contrainte en fin de pas.

Les contraintes en C sont utilisées pour évaluer $\dot{s}_{ij}(C)$ et en déduire les contraintes au point E (figure 6.7.) :

$$\underline{s}_{n+1} = \underline{s}(E) = \underline{s}(L) + \dot{s}_{ij}(C) (1 - m) \Delta t$$

$$\nabla s_{ij}(C) = 2 G [\delta_{ik} \delta_{jl} - \gamma s_{ij}(C) s_{kl}(C)] d_{kl} + \frac{\gamma}{2 G \mu} s_{ij}(C) \cdot \left(\frac{\dot{G}}{G} + 4 G \mu \kappa \dot{z} \right) + \frac{\gamma}{\mu} s_{ij}(C) C^{pt}$$

où les paramètres $G, \bar{G}, d_{kl}, C^{pt}, \dot{z}$ sont définis comme ci-dessus (6.4.5.)

et μ est calculé à partir de $\sigma^p(T_C, (y_k)_C, \bar{\epsilon}_n^p)$ et de $E_T((y_k)_C, T_C)$.

6.5.7. Notion de sous-intervalles.

Il est connu que la précision des contraintes mécaniques obtenues dépend du soin apporté lors de leur intégration. Il en est de même pour les calculs métallurgiques comme nous l'avons montré au § (3.2.2.2.c).

Afin de pouvoir réaliser des pas de grandeur maximale et donc économiser le nombre de résolutions du système global d'équations sans diminuer la précision des résultats, l'intégration des lois constitutives peut être réalisée par sous-intervalles :

- [soit Δt le pas de temps
- [soit n_{intv} le nombre de sous-intervalles.

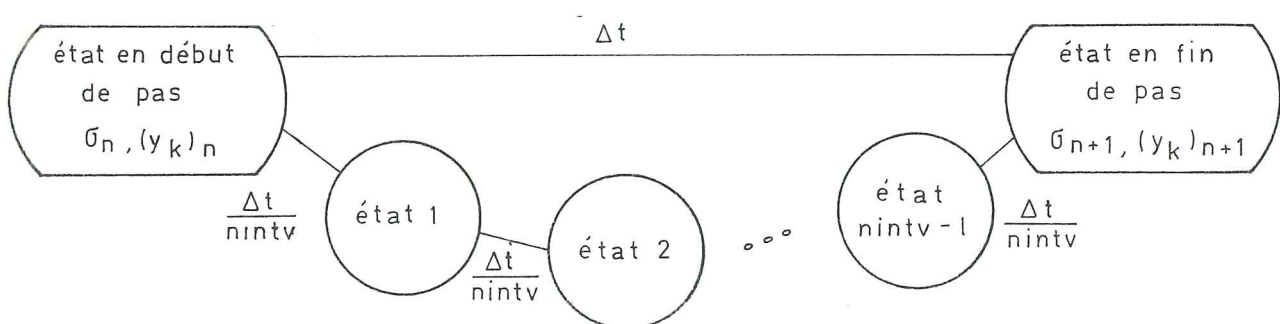
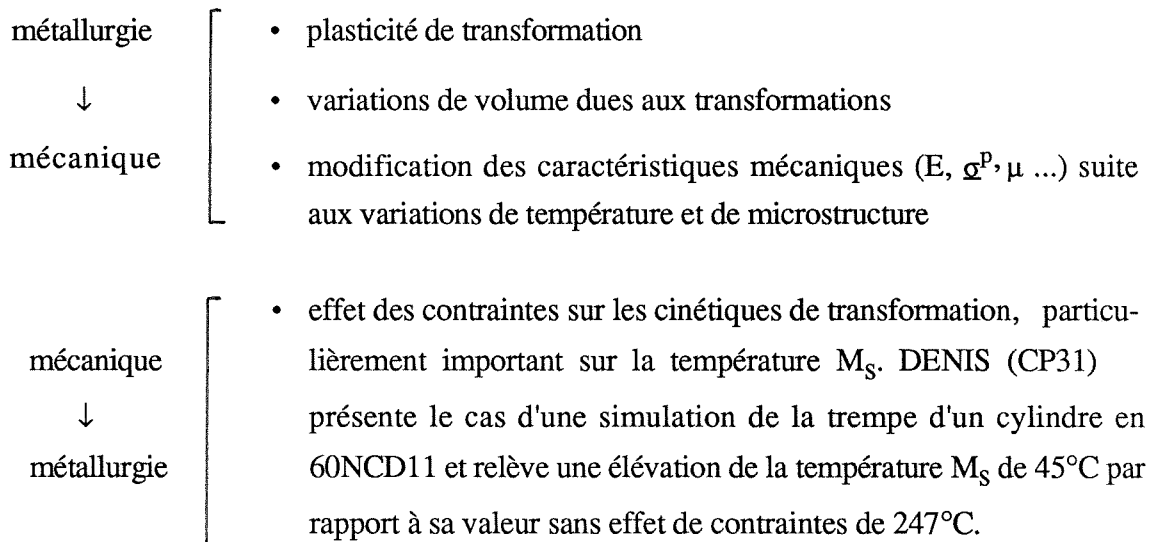


Figure 6.8.- Utilisation des sous-intervalles d'intégration.

Le schéma de base (§ 6.4) est présenté sans sous-intervalle. Nous avons appliqué une intégration avec sous-intervalles au calcul mécanique et métallurgique (point 1 du schéma d'intégration). En effet, ces paramètres dépendent fortement de l'histoire du matériau, le couplage entre l'état mécanique et métallurgique est important :



Concernant le calcul thermique (point 2 du schéma d'intégration), seul le flux dû aux transformations dépend fortement de l'histoire du matériau. Ce flux est en fait un produit du calcul mécanique-métallurgique. Les paramètres k, ρ, c varient doucement. Quant à la température, son évolution T est fixée au cours du pas par hypothèse. De plus, l'équilibre thermique est basé sur des flux définis en un instant donné par une approche totale et non incrémentale. La loi de conduction de FOURIER en est un exemple. Par conséquent, la notion de sous-intervalles d'intégration est inutile, elle n'a pas été appliquée au calcul thermique.

6.6. CALCUL DE LA MATRICE TANGENTE

6.6.1. Introduction

De façon générale, l'expression de la matrice tangente peut être obtenue en différenciant les forces internes. Nous ne reviendrons pas sur ce point qui a déjà fait l'objet de nombreuses publications (EF13, EF10, EF11). Suite à notre analyse couplée, les forces internes sont soit mécaniques, soit thermiques. En toute généralité, on peut noter :

$$\underline{K} = \frac{\partial \underline{F}_{mec}}{\partial \underline{u}_{nod}} + \frac{\partial \underline{F}_{mec}}{\partial \underline{T}_{nod}} + \frac{\partial \underline{F}_{ther}}{\partial \underline{T}_{nod}} + \frac{\partial \underline{F}_{ther}}{\partial \underline{u}_{nod}} \quad (6.19)$$

Concernant l'analyse thermique mécanique métallurgique, les tests du programme ont été réalisés sur des simulations de refroidissement de cylindres. Cette géométrie correspond en effet à celle des essais réalisés en laboratoire ainsi qu'aux cas traités par de nombreux chercheurs (CP11, CP12, CP7, CP8). Nous étudierons donc la matrice tangente relative à une analyse axisymétrique. Précisons les relations générales (6.19) pour ce cas particulier :

$$(F_x)_i = \sum_{PI} \left(\phi_{i,x} \sigma_1 + \phi_{i,y} \sigma_{12} + \frac{\phi_i}{X} \sigma_3 \right) |J| X W \quad (6.20.)$$

$$(F_y)_i = \sum_{PI} (\phi_{i,x} \sigma_{12} + \phi_{i,y} \sigma_2) |J| X W$$

$$(F_T)_i = \sum_{PI} (\phi_{i,x} q_{kx} + \phi_{i,y} q_{ky} + \phi_i (q_{tr} - q_c)) |J| X W$$

où σ_1 = contrainte radiale ; X = coordonnée radiale ;
 σ_2 = contrainte axiale ; Y = coordonnée axiale ;
 σ_3 = contrainte circonférentielle ; $(F_x)_i, (F_y)_i$ = forces mécaniques au noeud i ;
 σ_{12} = contrainte tangentielle ;
 ϕ_i = fonction d'interpolation du noeud i. $(F_T)_i$ = flux au noeud i.

Une matrice tangente complète entraîne la prise en compte des termes suivants :

$$\underline{K}_M = \frac{\partial \underline{F}_{méc}}{\partial \underline{u}_{nod}} = \sum_{PI} \underline{B}^T X |J| W \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{u}_{nod}} + \sum_{PI} \underline{\sigma} W \frac{\partial}{\partial \underline{u}_{nod}} (\underline{B}^T X |J|) \quad (6.21.a)$$

matrice des petites déformations matrice des contraintes initiales

$$\underline{K}_{MT} = \frac{\partial \underline{F}_{méc}}{\partial T_{nod}} = \sum_{PI} \underline{B}^T X |J| W \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial T_{nod}} + 0 \quad (6.21.b)$$

matrice couplée mécanique thermique

$$\underline{K}_T = \frac{\partial \underline{F}_{ther}}{\partial T_{nod}} = \sum_{PI} \underline{B}^T X |J| W \frac{\partial \underline{q}}{\partial T_{nod}} + 0 \quad (6.21.c)$$

matrice thermique habituelle (chapitre 4)

$$\underline{K}_{TM} = \frac{\partial \underline{F}_{ther}}{\partial \underline{u}_{nod}} = \sum_{PI} \underline{B}^T X |J| W \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{u}_{nod}} + \sum_{PI} \underline{q} W \frac{\partial}{\partial \underline{u}_{nod}} (\underline{B}^T X |J|) \quad (6.21.d)$$

matrice couplée thermique mécanique matrice des flux initiaux

où $\underline{u}_{\text{nod}}$ et $\underline{T}_{\text{nod}}$ sont les déplacements et les températures nodaux.

Afin de préciser les notations indicielles et matricielles utilisées ci-après, représentons le système d'équations linéarisées à résoudre pour un élément :

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} K_{1,1} \cdots K_{1,16} \\ \vdots \\ \vdots \\ K_M \\ \vdots \\ K_{16,1} \cdots K_{16,16} \end{matrix} & \begin{matrix} K_{1,17} \cdots K_{1,24} \\ \vdots \\ \vdots \\ K_{MT} \\ \vdots \\ K_{16,17} \cdots K_{16,24} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} K_{17,1} \cdots K_{17,16} \\ \vdots \\ \vdots \\ K_{TM} \\ \vdots \\ K_{24,1} \cdots K_{24,16} \end{matrix} & \begin{matrix} K_{17,17} \cdots K_{17,24} \\ \vdots \\ \vdots \\ K_T \\ \vdots \\ K_{24,17} \cdots K_{24,24} \end{matrix} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} (\Delta u_x)_1 \\ (\Delta u_y)_1 \\ \vdots \\ (\Delta u_x)_8 \\ (\Delta u_y)_8 \\ \hline \Delta T_1 \\ \vdots \\ \Delta T_8 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} (\Delta F_x)_1 \\ (\Delta F_y)_1 \\ \vdots \\ (\Delta F_x)_8 \\ (\Delta F_y)_8 \\ \hline (\Delta F_T)_1 \\ \vdots \\ (\Delta F_T)_8 \end{array} \right\} \quad (6.22.)$$

Analysons séparément chacune des sous-matrices \underline{K}_M , \underline{K}_{MT} , \underline{K}_{TM} et \underline{K}_T .

6.6.2. Matrice tangente mécanique \underline{K}_m (cas axisymétrique).

Concernant la matrice des déformations ou matrice géométrique $(\underline{K}_M)_G$, le développement classique suivant fait apparaître la matrice d'incidence \underline{C}_M :

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{u}_{\text{nod}}} = \frac{\partial}{\partial \underline{u}_{\text{nod}}} (\underline{C}_M \underline{B}) = \underline{C}_M \underline{B} \quad (6.23.)$$

$$(\underline{K}_M)_G = \sum_{PI} \underline{B}^T \underline{C}_M \underline{B} |J| X W \quad (6.24.)$$

avec $d\underline{\sigma} = \underline{C}_M d\underline{L}$ où $d\underline{L}^T = \left\langle \frac{\partial dx}{\partial x}, \frac{\partial dy}{\partial y}, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dx}{\partial y} + \frac{\partial dy}{\partial x} \right), \frac{dx}{x} \right\rangle$
 $d\underline{\sigma}^T = \langle d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_{12}, d\sigma_3 \rangle$

La matrice d'incidence \underline{C}_M représente l'influence d'une perturbation infinitésimale de la géométrie en fin de pas sur les contraintes. Elle dépend donc de la forme de la loi constitutive et du type d'intégration numérique adopté. Pour la calculer, nous utilisons une méthode de perturbations numériques : nous donnons successivement à chaque composante de \underline{L} un très petit incrément, et nous en déduisons numériquement l'incrément

correspondant de $\underline{\sigma}$. Ceci permet de construire la matrice d'incidence \underline{C}_M colonne par colonne. Elle est en général non symétrique.

Plusieurs raisons ont empêché l'utilisation d'une forme analytique de la matrice \underline{C}_M :

- pour une loi élastoplastique avec couplage thermique métallurgique ou non, on peut déterminer un tenseur constitutif instantanément tangent \underline{C}^{ep}

$$\forall \sigma_{ijkl} = C_{ijkl}^{ep} D_{kl} \quad (6.25.)$$

Le calcul de ce tenseur constitue une procédure classique en plasticité ; la méthode employée est rappelée par CHARLIER (EF4 p. 87). Cependant, en présence de sous-intervalles d'intégration, ce tenseur C^{ep} est différent de la matrice d'incidence. Rappelons que pour une simulation de forgeage ou d'estampage, ce sont les grands déplacements et grandes rotations qui entraînent l'utilisation de sous-intervalles. Pour une simulation de refroidissement d'une pièce métallique, c'est la présence des couplages mécaniques métallurgiques qui justifie l'emploi des sous-intervalles ;

- pour une loi élastoviscoplastique couplée ou non au problème thermique, il n'est pas possible d'écrire une relation du type (6.25) (EF4, p. 94). Par conséquent seule une méthode numérique permet de calculer \underline{C}_M et d'obtenir une matrice de rigidité parfaitement tangente. Cependant, la plupart des codes prenant en compte de tels matériaux travaillent avec une matrice sécante.

Cette technique numérique de calcul de C_M est évidemment coûteuse en temps CPU. Dans le cas de l'analyse couplée mécanique thermique métallurgique, elle conduit à des temps de calcul excessifs étant donné le nombre important d'opérations à effectuer pour chaque sous-intervalle (§ 6.3.). Nous avons choisi de l'appliquer uniquement au dernier sous-intervalle du pas, la matrice \underline{C}_M obtenue est donc uniquement approchée ; elle coïncide avec le tenseur constitutif instantanément tangent en fin de pas. Dans les autres cas (analyse mécanique ou mécanique thermique couplée), le calcul de la matrice d'incidence exacte est effectué.

Quelle que soit la méthode de calcul de \underline{C}_M , la forme finale de la *matrice géométrique* $(\underline{K}_M)_G$ est obtenue à partir de (6.24) et (6.20), soit :

$$[K_G]_{ij} = \begin{bmatrix} (K_G)_{2(i-1)+1, 2(j-1)+1} & (K_G)_{2(i-1)+1, 2j} \\ (K_G)_{2i, 2(j-1)+1} & (K_G)_{2i, 2j} \end{bmatrix} \quad (6.26.)$$

$$= \sum_{PI} |J| X W \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \phi_{i,x} \left(C_{11} \phi_{j,x} + C_{13} \phi_{j,y} + \frac{C_{14} \phi_j}{X} \right) \\ + \phi_{i,y} \left(C_{31} \phi_{j,x} + C_{33} \phi_{j,y} + C_{34} \frac{\phi_j}{X} \right) \\ + \frac{\phi_i}{X} \left(C_{41} \phi_{j,x} + C_{43} \phi_{j,y} + C_{44} \frac{\phi_j}{X} \right) \end{array} & \begin{array}{l} \phi_{i,x} (C_{12} \phi_{j,y} + C_{13} \phi_{j,x}) \\ + \phi_{i,y} (C_{32} \phi_{j,y} + C_{33} \phi_{j,x}) \\ + \frac{\phi_i}{X} (C_{42} \phi_{j,y} + C_{44} \phi_{j,x}) \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} \phi_{i,y} \left(C_{21} \phi_{j,x} + C_{23} \phi_{j,y} + C_{24} \frac{\phi_j}{X} \right) \\ + \phi_{i,x} \left(C_{31} \phi_{j,x} + C_{33} \phi_{j,y} + C_{34} \frac{\phi_j}{X} \right) \end{array} & \begin{array}{l} \phi_{i,y} (C_{22} \phi_{j,y} + C_{23} \phi_{i,y}) \\ + \phi_{i,x} (C_{32} \phi_{i,x} + C_{33} \phi_{j,x}) \end{array} \end{array} \right]$$

où C_{ab} représente la composante (a, b) de la matrice d'incidence \underline{C}_M .

Le calcul de la matrice des contraintes est assez fastidieux, réalisé avec la collaboration de BOURDOUXHE (EF15, EF28), ce travail est donné en annexe 1. On obtient un résultat relativement simple :

$$[K_\sigma]_{ij} = \sum_{PI} W \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \sigma_1 \phi_j \phi_{i,x} |J| \\ - \sigma_{12} (X S_{ij} - \phi_j \phi_{i,y} |J|) \\ + \sigma_3 \phi_i \phi_{i,x} |J| \end{array} & \begin{array}{l} \sigma_1 X S_{ij} \\ + \sigma_3 \phi_i \phi_{i,y} |J| \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} \sigma_{12} \phi_j \phi_{i,x} |J| \\ - \sigma_2 (X S_{ij} - \phi_j \phi_{i,y} |J|) \end{array} & \sigma_{12} X S_{ij} \end{array} \right] \quad (6.27.)$$

$$\text{avec } S_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi}$$

La matrice tangente \underline{K}_M est obtenue par la somme de la matrice géométrique et de la matrice des contraintes.

$$[K_M]_{ij} = [K_G]_{ij} + [K_\sigma]_{ij} \quad (6.28.)$$

6.6.3. La matrice couplée mécanique thermique \underline{K}_{MT} (cas axisymétrique)

A nouveau la notion de matrice d'incidence intervient :

$$d\underline{\sigma} = \underline{C}_{MT} dT \quad (6.29.)$$

Elle est réduite à une matrice colonne \underline{C}_{MT} (4 x 1). De nouveau, pour une analyse thermique mécanique avec une loi élastoplastique, on peut calculer une matrice tangente instantanée qui correspond à \underline{C}_{MT} uniquement si la subdivision en sous-intervalles n'est pas utilisée. En cas de couplage métallurgique, la forme analytique de cette matrice tangente instantanée est difficile à obtenir puisque la température influence les transformations de phase qui à leur tour modifient les contraintes.

En pratique, nous avons utilisé une méthode de perturbation de la température en fin de pas. Cette méthode donne de bons résultats pour l'analyse thermique mécanique. Cependant, lorsque la métallurgie est prise en compte, le résultat est médiocre et la matrice tangente obtenue n'est visiblement pas de bonne qualité. Nous attribuons ce fait à l'aspect discontinu des transformations : selon la taille de la perturbation, on peut en effet atteindre ou non un domaine de transformation. Le caractère exponentiel des transformations joue également un rôle : selon l'instant considéré de la transformation, on peut avoir une vitesse de transformation très importante ou non. Le choix de la taille de la perturbation de température est donc très délicat, il semble varier selon la transformation en cours.

Finalement, nous avons préféré négliger la matrice \underline{K}_{MT} dans ce cas plutôt que de prendre une matrice non tangente.

Précisons cependant la forme finale de \underline{K}_{MT} obtenue à partir de (6.21) et (6.29) pour une analyse thermique mécanique :

$$[\underline{K}_{MT}]_{ij} = \begin{bmatrix} (\underline{K}_{MT})_{2(i-1)+1, 16+j} \\ (\underline{K}_{MT})_{2i, 16+j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{i,x} \phi_j C_1 + \phi_{i,y} \phi_j C_3 + \frac{\phi_i}{X} \phi_j C_4 \\ \phi_{i,y} \phi_j C_2 + \phi_{i,x} \phi_j C_3 \end{bmatrix} \quad (6.30.)$$

où C_a représente la composante $\underline{C}_{MT}(a, 1)$ de la matrice \underline{C} .

6.6.4. La matrice tangente thermique \underline{K}_T (cas axisymétrique).

Cette matrice a été établie pour un cas plan au chapitre 4. Son extension au cas axisymétrique est immédiate :

$$(\underline{K}_T)_{16+i, 16+j} = \sum_{PI} [-C_1 \phi_{i,x} \phi_{j,x} - C_{21} \phi_{i,x} \phi_j - C_{22} \phi_{i,y} \phi_j - (C_3 - C_4) \phi_i \phi_j] |J| X W \quad (6.31.)$$

où les coefficients C_1, C_{21}, C_{22}, C_3 et C_4 sont définis par les formules (4.74), (4.75) et (4.76).

6.6.5. La matrice tangente thermique mécanique couplée \underline{K}_{TM} .

Envisageons le second terme de (6.21.d), soit *la matrice des flux initiaux*. Par une démarche analogue à celle de la matrice des contraintes mécaniques, on obtient :

$$[\underline{K}_{TM\sigma}]_{ij} = [(\underline{K}_{TM\sigma})_{16+i, 2(j-1)+1} (\underline{K}_{TM\sigma})_{16+i, 2j}] \quad (6.32.)$$

$$= \sum_{PI} \frac{1}{X} \left[\begin{array}{cc} \phi_j \phi_{i,x} (q_k)_x - (X S_{ij} - \phi_j \phi_{i,y}) (q_k)_y & X (S_{ij} (q_k)_x + \phi_i \phi_{i,y} (q_c - q_{tr})) \\ + [\phi_j + X (\phi_{i,x} + \phi_{i,y})] \phi_i (q_c - q_{tr}) & \phi_i \phi_{i,y} (q_c - q_{tr}) \end{array} \right]$$

On a pu vérifier que pour un problème de refroidissement de cylindre (analyse mécanique thermique métallurgique) cette matrice n'avait aucune influence significative. Quant au premier terme de \underline{K}_{TM} , il implique le calcul de :

1. $\frac{\partial (q_k)_x}{\partial x}, \frac{\partial (q_k)_y}{\partial x}, \frac{\partial (q_k)_x}{\partial y}, \frac{\partial (q_k)_y}{\partial y}$
Variation du flux conductif suite à une perturbation de la géométrie en fin de pas.
2. $\frac{\partial q_c}{\partial x}, \frac{\partial q_c}{\partial y}$
Variation du flux capacitif suite à une perturbation de la géométrie en fin de pas.
3. $\frac{\partial q_{tr}}{\partial x}, \frac{\partial q_{tr}}{\partial y}$
Variation du flux dû au changement de phase, suite à une perturbation de la géométrie en fin de pas.

Rappelons les relations permettant le calcul des flux (4.68) :

$$(q_k)_s = k_n (a T_{n,s} + b T_{n+1,s}) + k_{n+1} (b T_{n,s} + T_{n+1,s}) \quad (4.68.)$$

$$q_c = (d \rho_n c_n + e \rho_{n+1} c_{n+1}) \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t}$$

$$q_{tr} = d r_n + e r_{n+1}$$

On voit immédiatement que les termes du point 2 seront nuls et les termes du point 1 non nuls. Cependant, ils sont dus au calcul des dérivées globales $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ de la température. Ils seront du même ordre que les termes intervenant dans la matrice $K_{TM\sigma}$, on peut donc les négliger. Les termes du point 3 impliquent le calcul de $\frac{\partial r_{n+1}}{\partial x}$, $\frac{\partial r_{n+1}}{\partial y}$.

A nouveau, la forme analytique de ce terme est peu accessible car une modification de la géométrie en fin de pas entraîne une variation des contraintes mécaniques qui affectent à leur tour les changements de phase qui engendrent le terme r_{n+1} . Comme pour le calcul de K_{MT} , la méthode des perturbations ne donne pas de bons résultats et la matrice K_{TM} n'a finalement pas été prise en compte pour le calcul de la matrice tangente.

6.6.6. Matrice tangente utilisée pour une analyse thermique, mécanique métallurgique axisymétrique.

Suite à la recherche résumée dans les paragraphes précédents, nous avons recours à une matrice tangente découplée pour traiter les problèmes thermiques, mécaniques, métallurgiques.

$$\underline{K} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 1,7 \cdots \cdots 1,16 \\ \underline{K}_M \\ 16,1 \cdots \cdots 16,16 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c} 17,17 \cdots \cdots 17,24 \\ \underline{K}_T \\ 24,17 \cdots \cdots 24,24 \end{array} \end{array} \right]_{24 \times 24} \quad (6.33.)$$

Cette matrice est non symétrique.

6.7. STABILITE DU SCHEMA D'INTEGRATION

Le schéma proposé au § 6.3 a été testé progressivement en introduisant un couplage à la fois :

- terme D_{ij}^{tr} (variation du volume due au changement de phase)
- terme D_{ij}^{pt} (plasticité de transformation)
- effet de $\bar{\sigma}$ sur les cinétiques des transformations de diffusion
- effet de $\bar{\sigma}$ sur M_s
- effet de σ_m sur M_s

Seul le dernier couplage $M_s(\sigma_m)$ a posé problème. Alors que pour les autres couplages, un nombre de sous-intervalles imposé à 5 ou à 60 donne des résultats très proches, lorsque le couplage $M_s(\sigma_m)$ est présent, la convergence laisse à désirer, les résultats diffèrent selon le nombre de sous-intervalles imposé. Pour un nombre faible de sous-intervalles, le processus diverge.

Rappelons les notations et les relations fondamentales :

$$\text{avec } y_6 = C_\gamma [1 - \exp(\alpha(M_s - T))] \quad (6.34.a, \text{ voir 5.18.})$$

y_6 = fraction volumique de martensite

$$M_s = M_{S0} + A \sigma_m + B \bar{\sigma} \quad (6.34.b)$$

$$C_\gamma = 1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5 \quad (6.34.c)$$

Analysons la situation pour le schéma proposé en 6.3 :

- appelons M_{s1} la température M_s est calculée en fonction de l'état de contrainte hydrostatique $(\sigma_m)_n$ et de la contrainte équivalente $\bar{\sigma}_n$ de début de pas.

Soit $(\dot{y}_6)_1$ la première valeur de la dérivée \dot{y}_6 (6.3.) utilisée par le calcul mécanique.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ si } T_m < M_{s1} \\ \bullet \text{ si } (y_6)_m > (y_6)_n \end{array} \right\} (\dot{y}_6)_1 = \frac{(y_6)_m - (y_6)_n}{\Delta t/2} \quad (6.35.)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } T_m < M_{s1} \\ \text{si } (y_6)_m < (y_6)_n \\ \text{si } T_m > M_{s1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\dot{y}_6)_1 = 0 \\ (\dot{y}_6)_1 = 0 \end{array}$$

- dans le cas où \dot{y}_6 est non nul, le terme D_{ij}^r (6.6.b) constitue un terme important de la déformation D_{ij} ; il influence le calcul de la contrainte $(\sigma_m)_{n+1}$ qui a tendance à diminuer (augmentation de volume austénite → martensite)
- En fin de pas, une nouvelle valeur de M_s est obtenue à partir de $\underline{\sigma}_{n+1} : M_{s2}$. On a souvent $M_{s2} < M_{s1}$ et parfois même $T_{n+1} > M_{s2}$, la vitesse de transformation martensitique pour la seconde moitié du pas $(\dot{y}_6)_2$ sera :

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } T_{n+1} < M_{s2} \\ (y_6)_{n+1} > (y_6)_m \end{array} \right\} (\dot{y}_6)_2 = \frac{(y_6)_{n+1} - (y_6)_m}{\Delta t/2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } T_{n+1} < M_{s2} \\ (y_6)_{n+1} < (y_6)_m \end{array} \right\} (\dot{y}_6)_2 = 0 \text{ et le pourcentage } (y_6)_m \text{ est conservé}$$

$$\text{si } T_{n+1} > M_{s2} \quad (\dot{y}_6)_2 = 0$$

Les termes $(\dot{y}_6)_1$ et $(\dot{y}_6)_2$ peuvent être très différents. Or, la contrainte $\underline{\sigma}_{n+1}$ est calculée dans l'hypothèse de $(\dot{y}_6)_1$ constant au cours du pas. Ce type de problème subsiste quel que soit le nombre de sous-intervalles d'intégration utilisé.

Un premier essai de modification du schéma proposé en (6.3) a été d'adopter un processus itératif :

si $(\dot{y}_6)_1$ et $(\dot{y}_6)_2$ diffèrent de plus de 10%, une valeur corrigée de $(\dot{y}_6)_1$ est adoptée : $\frac{(y_6)_{n+1} - (y_6)_n}{\Delta t}$ et le calcul mécanique métallurgique est recommencé.

Si dans la plupart des cas, ce processus convergeait ($\dot{y}_6)_1 \approx (\dot{y}_6)_2$ il subsistait parfois des oscillations qui empêchaient toute convergence de ce procédé itératif.

Vu l'importance de la contrainte hydrostatique pour la température M_s nous avons cherché à obtenir une valeur de $(\sigma_m)_m$ meilleure que $(\sigma_m)_m \approx (\sigma_m)_n$ pour le calcul de M_{s1} . Repartons de la relation (5.63.a) :

$$\dot{\sigma}_m = \chi \left(D_m - y_k \alpha_k \dot{T} - \dot{y}_k \int_0^{T(t)} \alpha_k(\tau) d\tau - \dot{y}_k \varepsilon_k^{tr} \right) + \frac{\dot{\chi}}{\chi} \sigma_m \quad (6.37.)$$

Les paramètres calculés par une loi de mélange sont connus en début de pas :

$$\alpha_{dil} = y_k \alpha_k \quad \text{et} \quad \chi = y_k \chi_k \quad (6.38.)$$

Dès à présent, nous noterons α_{dil} le coefficient de dilatation pour éviter toute confusion avec le coefficient α de la loi de KOISTINEN-MARBURGER.

On envisage le cas d'une transformation martensitique et par conséquent seuls y_1 et y_6 sont non nuls. On a forcément :

$$\dot{y}_6 = -\dot{y}_1 > 0 \quad (6.39.)$$

Le coefficient $\dot{\chi}$ vaut (6.38, 6.39) :

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \frac{\partial}{\partial t} (y_k \chi_k) = \dot{y}_k \chi_k + y_k \frac{\partial \chi_k}{\partial T} \dot{T} \\ &= \dot{y}_6 (\chi_6 - \chi_1) + \frac{\partial \chi_k}{\partial T} y_k \dot{T} \end{aligned} \quad (6.40.a)$$

$$\approx C_\chi \dot{T} \quad (6.40.b)$$

avec $C_\chi = \frac{\partial \chi_6}{\partial T} y_6 + \frac{\partial \chi_1}{\partial T} y_1$

On néglige le premier terme de (6.40.a) dans la mesure où l'on a vu au § 5.4.4.5. que le module de YOUNG et le coefficient de POISSON dont dépend χ sont peu affectés par une modification de la microstructure.

Suite à ces observations (6.38, 6.39, 6.40), on peut exprimer la dérivée de la contrainte hydrostatique (6.37) en début de pas de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\dot{\sigma}_m)_n = & \chi \left\{ D_m - \alpha_{dil} \dot{T} - \dot{y}_6 \left[\varepsilon_{6\ 0^\circ C}^{tr} + \int_0^{T(t)} (\alpha_6(\tau) - \alpha_1(\tau)) d\tau \right] \right\} \\ & + \frac{\sigma_m}{\chi} C_\chi \dot{T} \end{aligned} \quad (6.41.)$$

où tous les coefficients sont calculés en début de pas.

En pratique, selon notre schéma d'intégration, seul \dot{y}_6 est inconnu. On peut cependant en trouver une relation analytique à partir de l'équation (6.34)

$$\dot{y}_6 = C_\gamma \alpha (A \dot{\sigma}_m + B \dot{\bar{\sigma}} - \dot{T}) \exp(\alpha (M_s - T)) \quad (6.42.)$$

Dans cette formule, nous négligeons le terme $B\dot{\bar{\sigma}}$, car nous avons constaté qu'au cours d'un pas, en présence de transformation martensitique, la variation de la contrainte hydrostatique σ_m est nettement plus importante que la variation de la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$. Une confirmation de ce fait réside dans l'observation suivante : un coefficient B non nul et A nul n'entraînent pas de problème de stabilité du schéma d'intégration de base. Les variations de M_s avec $\dot{\bar{\sigma}}$ sont donc moins fortes que celles observées pour un coefficient A non nul, puisque ce cas entraîne l'instabilité du schéma d'intégration.

A partir des relations (6.41) et (6.42), on obtient directement :

$$\begin{aligned} (\dot{\sigma}_m)_n = & \frac{\chi D_m + \left\{ \frac{\sigma_m}{\chi} C_\chi + \chi C_{tr} C_\gamma \alpha \exp[\alpha (M_s - T)] - \chi \alpha_{dil} \right\} \dot{T}}{1 + \chi C_{tr} C_\gamma \alpha \exp[\alpha (M_s - T)]} \quad (6.43.) \\ \text{avec } C_{tr} = & \varepsilon_{6\ 0^\circ C}^{tr} + \int_0^{T(t)} (\alpha_6(\tau) - \alpha_1(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

Cette relation permet d'évaluer la contrainte hydrostatique au milieu du pas $(\sigma_m)_m$:

$$(\sigma_m)_m = (\sigma_m)_n + (\dot{\sigma}_m)_n \frac{\Delta t}{2} \quad (6.44.)$$

qui est utilisée pour calculer la température martensitique M_{s1} . La suite du schéma de base est conservée telle quelle. Le schéma ainsi modifié est nettement plus stable que le schéma initial :

- les valeurs $(y_6)_1$ et $(y_6)_2$ sont proches l'une de l'autre,
- un calcul réalisé avec 5 ou 60 sous-intervalles d'intégration donne des résultats très proches.

Remarque.

Dans le cas où le terme $\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}$ ne pourrait plus être négligé dans l'équation (6.40.), il faudrait trouver une solution du type :

$$\dot{y}_6 = \langle D \rangle \frac{\nabla}{\sigma} + J \dot{T}$$

avec $\langle D \rangle$ matrice de dimension 4 x 1

$$\langle \frac{\nabla}{\sigma} \rangle = \langle \frac{\nabla}{\sigma_1} \quad \frac{\nabla}{\sigma_2} \quad \frac{\nabla}{\sigma_{12}} \quad \frac{\nabla}{\sigma_3} \rangle \quad (\text{voir 6.20.})$$

J = scalaire.

et introduire cette valeur dans le calcul de $(\dot{\sigma}_m)_n$ et $(\frac{\nabla}{\sigma_{ij}})_n$, le nombre des opérations nécessaires au calcul approché de M_{s1} devient alors très important.

Jusqu'à présent, les cas que nous avons rencontrés n'ont pas requis de tels développements.

6.8. L'ETAT PLAN GENERALISE

6.8.1. Introduction.

Le nouvel état plan a dû être développé pour permettre l'analyse thermique mécanique métallurgique du refroidissement d'une poutrelle en fin de laminage. En effet, si on élimine les sections proches des extrémités, toutes les sections sont équivalentes et une analyse bidimensionnelle suffit. Cependant, ni l'état plan de déformation, ni l'état plan de contrainte ne permettent de tenir compte de l'autoéquilibrage des contraintes. Cet autoéquilibrage résulte du fait qu'en cours de refroidissement, la poutrelle n'est soumise à aucune

sollicitation extérieure et que, par conséquent, les zones tendues et comprimées de chaque section doivent s'équilibrer à tout moment.

En état plan généralisé, on modélise le comportement d'une mince tranche de poutre, dont les deux faces sont astreintes à rester planes mais peuvent se rapprocher, s'éloigner et tourner l'une par rapport à l'autre autour de n'importe quel axe contenu dans le plan de la section. L'équilibre transversal est donc pris en compte.

En pratique, pour réaliser cet état plan généralisé, on ajoute un noeud à l'élément CPLA développé précédemment (§ 3). A ce noeud correspond trois nouveaux degrés de liberté ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) qui expriment le déplacement transversal relatif et les rotations relatives des faces de la tranche de poutre étudiée. Ces trois degrés de liberté sont communs à tous les éléments qui discrétisent la section de poutre. Par conséquent, le noeud supplémentaire est identique pour tous ces éléments. En plus des déplacements dans le plan de la section (u_x, u_y), on a à présent le déplacement transversal relatif à la section u_z . Ce déplacement régit les variations d'épaisseur en tout point de la section étudiée, il permet donc le calcul des contraintes transversales.

Cette notion d'état plan généralisé était en fait développée au même moment par une autre équipe de chercheurs : celle du CEMEF. La simulation de la genèse des contraintes résiduelles lors du refroidissement d'un rail fut traité par le CEMEF (FOR 8) et un calcul analogue concernant une poutrelle fut présenté par BOURDOUXHE de notre équipe (FOR 1).

6.8.2. L'élément CPLA en état plan généralisé.

En tout point d'un élément, les champs de déplacements et de température sont définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 u_x &= \phi_i (u_x)_i & (6.45.) \\
 u_y &= \phi_i (u_y)_i \\
 u_z &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\
 T &= \phi_1 T_1
 \end{aligned}$$

où : les valeurs indicées i concernent le noeud i

α_1 = translation du point (0,0)

α_2 = rotation autour de l'axe x

α_3 = rotation autour de l'axe y

u_z = déplacement transversal relatif des deux faces de la tranche étudiée.

Les forces internes peuvent être séparées selon trois types :

– les forces internes mécaniques dans le plan x y

$$\underline{F}_{\text{méc p}} = \sum_{\text{PI}} \underline{B}_u^T \underline{\sigma} |J| e W \quad (6.46.)$$

où $\underline{F}_{\text{méc p}}^T = \langle (F_x)_1 (F_y)_1 (F_x)_2 (F_y)_2 \cdots (F_x)_8 (F_y)_8 \rangle$

e = épaisseur de la tranche de la poutre étudiée

W = poids du point de GAUSS

|J| = déterminant du jacobien de la transformation isoparamétrique

$$\underline{\sigma} = \langle \sigma_1 \sigma_2 \sigma_{12} \sigma_3 \rangle$$

$$\underline{B}_u = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & \phi_{2,x} & 0 & \cdots & \phi_{8,x} & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} & 0 & \phi_{2,y} & \cdots & 0 & \phi_{8,y} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & \phi_{2,y} & \phi_{2,x} & \cdots & \phi_{8,y} & \phi_{8,x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– les forces transversales

$$\underline{F}_{\text{méc z}} = \sum_{\text{PI}} \underline{B}_\alpha^T \underline{\sigma} |J| e W \quad (6.47.)$$

où $\underline{F}_{\text{méc z}}^T = \langle F_z M_y M_x \rangle$

avec F_z : résultante des contraintes transversales pour l'élément

M_y : moment résultant par rapport à l'axe y

M_x : moment résultant par rapport à l'axe x

$$\underline{B}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & y \end{bmatrix}$$

– les forces internes thermiques

$$\underline{F}_T = \sum_{PI} \underline{B}_T^T \underline{q} |J| e W \quad (6.48.)$$

$$\text{où } \underline{E}_T^T = \langle q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_8 \rangle$$

flux nodaux équivalents

$$\underline{q} = \langle (q_k)_x \quad (q_k)_y \quad q_c \quad q_{tr} \rangle$$

flux conductifs selon x et y, flux capacitif et flux dû aux changements de phase

$$\underline{B}_T^T = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & \phi_{2,x} & \dots & \phi_{8,x} \\ \phi_{1,y} & \phi_{2,y} & \dots & \phi_{8,y} \\ -\phi_1 & -\phi_2 & \dots & -\phi_8 \\ +\phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_8 \end{bmatrix}$$

Précisons la structure de la matrice tangente :

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} \dots K_{1,16} & K_{1,17} \dots K_{1,24} & K_{1,25} \dots K_{1,26} & K_{1,27} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{16,1} \dots K_{16,16} & K_{16,17} \dots K_{16,24} & K_{16,25} \dots & K_{16,27} \\ \hline K_{17,1} \dots K_{17,16} & K_{17,17} \dots K_{17,24} & K_{17,25} \dots & K_{16,27} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{24,1} \dots K_{24,16} & K_{24,17} \dots K_{24,24} & K_{24,25} \dots & K_{24,27} \\ \hline K_{25,1} \dots K_{25,16} & K_{25,17} \dots K_{25,24} & K_{25,25} \dots & K_{25,27} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{27,1} \dots K_{27,16} & K_{27,17} \dots K_{27,24} & K_{27,25} \dots & K_{27,27} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\Delta u_x)_1 \\ (\Delta u_y)_1 \\ \vdots \\ (\Delta u_y)_8 \\ \Delta T_1 \\ \vdots \\ \Delta T_8 \\ \Delta \alpha_1 \\ \Delta \alpha_2 \\ \Delta \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\Delta F_x)_1 \\ (\Delta F_y)_1 \\ \vdots \\ (\Delta F_y)_8 \\ \Delta q_1 \\ \vdots \\ \Delta q_8 \\ \Delta F_z \\ \Delta M_y \\ \Delta M_x \end{Bmatrix} \quad (6.49.)$$

Suite à l'étude de la matrice tangente de l'élément axisymétrique pour l'analyse thermique métallurgique mécanique, on prend \mathbf{K}_{MPT} et \mathbf{K}_{TMP} nuls. Par extension de cette étude, on adopte également $\mathbf{K}_{\text{T}\alpha}$, $\mathbf{K}_{\alpha\text{T}}$ nuls. On découple donc les aspects thermiques et mécaniques au niveau de la matrice tangente.

Il subsiste :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{MP}} & 0 & \mathbf{K}_{\text{MP}\alpha} \\ 0 & \mathbf{K}_{\text{T}} & 0 \\ \mathbf{K}_{\alpha\text{MP}} & 0 & \mathbf{K}_{\alpha} \end{bmatrix} \quad (6.50.)$$

Les termes \mathbf{K}_{MP} et \mathbf{K}_{T} sont analogues aux termes \mathbf{K}_{M} et \mathbf{K}_{T} (6.22.) dont le calcul a été développé au § 6.4 pour le cas axisymétrique. Nous ne reviendrons pas sur ces termes. En revanche, les termes \mathbf{K}_{α} , $\mathbf{K}_{\text{MP}\alpha}$ et $\mathbf{K}_{\alpha\text{MP}}$ sont entièrement neufs. Ils résultent de la prise en considération de l'équilibre transversal.

On les obtient par dérivation des forces internes. Ce calcul ne présente pas de difficultés particulières, si ce n'est sa longueur. Nous vous renvoyons à la référence EF28 pour les détails des calculs dont seuls les résultats sont fournis ci-après :

$$\bullet \mathbf{K}_{\alpha\alpha} = \sum_{\text{PI}} \frac{|J| W}{e} (C_{44} + \sigma_3) \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} \quad (6.51.a)$$

$$(6.51.b)$$

$$\bullet (\mathbf{K}_{\text{MP}\alpha})_i = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\text{MP}\alpha})_{2(i-1)+1,25} & (\mathbf{K}_{\text{MP}\alpha})_{2(i-1)+1,26} & (\mathbf{K}_{\text{MP}\alpha})_{2(i-1)+1,27} \\ (\mathbf{K}_{\text{MP}\alpha})_{2i,25} & (\mathbf{K}_{\text{MP}\alpha})_{2i,26} & (\mathbf{K}_{\text{MP}\alpha})_{2i,27} \end{bmatrix} \quad i = 1, 8$$

$$= \sum_{\text{PI}} |J| W \begin{bmatrix} \phi_{i,x} (C_{14} + \sigma_1) + \phi_{i,y} (C_{34} + \sigma_2) \\ \phi_{i,y} (C_{24} + \sigma_2) + \phi_{i,x} (C_{34} + \sigma_{12}) \end{bmatrix} (1 \times y)$$

$$\begin{aligned}
\bullet (K_{\alpha MP})_j &= \begin{bmatrix} (K_{\alpha MP})_{25, 2(j-1)+1} & (K_{\alpha MP})_{25, 2j} \\ (K_{\alpha MP})_{26, 2(j-1)+1} & (K_{\alpha MP})_{26, 2j} \\ (K_{\alpha MP})_{27, 2(j-1)+1} & (K_{\alpha MP})_{27, 2j} \end{bmatrix} & (6.51.c) \\
&= \sum_{PI} |J| W \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C_{41} \phi_{j,x} + C_{43} \phi_{j,y} & C_{42} \phi_{j,y} + C_{43} \phi_{j,x} \\ + \alpha_2 \phi_j \frac{\sigma_3}{e} + \sigma_3 \phi_{j,x} & + \alpha_3 \phi_j \frac{\sigma_3}{e} - \sigma_3 \phi_{j,x} \end{bmatrix} \\
&\quad + |J| W \sigma_3 \phi_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

où les coefficients C_{kl} sont les termes (k, l) de la matrice reliant $d\mathbf{u}$ à

$$\left\langle \frac{\partial du_x}{\partial x}, \frac{\partial du_y}{\partial y}, \frac{\partial du_x}{\partial y} + \frac{\partial du_y}{\partial x}, \frac{du_z}{e} \right\rangle$$

On remarque la non symétrie de la matrice K à la différence observée entre les matrices $K_{MP\alpha}^T$ et $K_{\alpha MP}$.

Ces matrices représentent le couplage des forces dans le plan de la section et des forces transversales aux déplacements transversaux u_z et aux déplacements u_x, u_y respectivement.

Physiquement, il n'y a pas de raison qu'il y ait symétrie entre ces couplages et il ne faut donc pas être étonné du résultat. Si on symétrise malgré tout la matrice \underline{K} , on observe une nette augmentation du nombre d'itérations et parfois même le processus itératif de recherche ^{de l'équilibre} diverge.

Une méthode de résolution non symétrique est donc nécessaire pour traiter une analyse thermique mécanique métallurgique en état plan généralisé.



