

CHAPITRE 12



Conclusions

La modélisation du refroidissement d'une pièce métallique permet dès à présent de prédire non seulement la microstructure finale mais également les contraintes résiduelles et la forme exacte de la pièce. Cet outil de calcul autorise une meilleure optimisation des traitements thermiques de refroidissement. Il permet d'éviter un certain nombre d'essais coûteux en industrie.

Une validation supplémentaire du modèle sera possible très prochainement grâce aux essais actuellement en cours au laboratoire de métallurgie de l'école des mines de Nancy.

J'espère dans l'avenir, pouvoir perfectionner le modèle de façon à réduire les temps de calcul. Par ailleurs, j'envisage également de poursuivre son développement afin de traiter le revenu d'une pièce ou encore la simulation des phénomènes présents lors de la soudure.

J'ai cherché une solution concrète au problème de remaillage. Au cours de cette thèse, plusieurs approches ont été étudiées et il me semble important de résumer la solution qui me semble la meilleure :

- détection de l'instant de remaillage par un estimateur d'erreur global basé sur les contraintes
- création d'un nouveau maillage après correction du contour défini par l'ancien maillage dans les zones de contact entre la matrice et la pièce. La densité nodale de ce maillage est déterminée grâce à un estimateur local d'erreur basé sur les déformations
- il faut, à partir de la solution fournie par l'ancien maillage, calculer des contraintes et variables d'état tant à l'intérieur que sur le contour du nouveau maillage. La méthode d'interpolation en $1/R^2$ constitue une approche efficace et précise pour les variables intérieures. Une solution adaptée à la formulation du contact doit être envisagée pour les variables de contour
- le début de la simulation avec le nouveau maillage indique si un remaillage correct a été réalisé. Une convergence lente, un pas de temps très réduit révèlent un problème dans une des étapes précédentes.

Dans la situation actuelle la méthode de remaillage est interactive. Un remaillage entièrement automatique basé sur les développements et les résultats de cette thèse sera réalisé dans les prochains mois.

Dans le LAGAMINE, les critères géométriques de remaillage existent, il serait dommage de ne pas les utiliser. Ils constitueront donc une information supplémentaire pour

déterminer l'instant du remaillage et les densités nodales du nouveau maillage.

Le domaine d'application du remaillage n'est pas limité au forgeage ou à l'estampage d'une pièce métallique. La simulation du phénomène d'extrusion peut également être envisagée. Le formage des matières plastiques constitue un autre débouché.

Pour terminer, j'espère pouvoir utiliser mes développements sur de nombreux cas pratiques et permettre aux industriels d'améliorer la qualité de leurs produits et la rentabilité de leurs procédés de fabrication.



ANNEXES

ANNEXE 1

Calcul de la matrice des contraintes pour un problème mécanique axisymétrique

Cette matrice est due à la différenciation des termes géométriques des forces mécaniques, soit :

$$\begin{aligned}
 (dF_{x\sigma})_i &= \sum_{PI} \left(\sigma_1 \left(dx \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) + x \left(\frac{\partial dy}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} - \frac{\partial dy}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) \right) \right. \\
 &\quad + \sigma_{12} \left(dx \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) + x \left(-\frac{\partial dx}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial dx}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) \right) \\
 &\quad \left. + \sigma_3 \phi_i d|J| \right) W \\
 (dF_{y\sigma})_i &= \sum_{PI} \left(\sigma_{12} \left(dx \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) + x \left(\frac{\partial dy}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} - \frac{\partial dy}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sigma_2 \left(dx \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) + x \left(-\frac{\partial dx}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial dx}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) \right) \right) W
 \end{aligned}$$

On sait que : $x = x_k \phi_k$ $dx = dx_k \phi_k$
 $y = y_k \phi_k$ $dy = dy_k \phi_k$

avec la ϕ_k comme fonction d'interpolation du noeud k

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 dx \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) &= \phi_k \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) dx_k y_j = A_i \\
 x \left(\frac{\partial dy}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} - \frac{\partial dy}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) &= \phi_k \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) x_k dy_j = B_i \\
 dx \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) &= \phi_k \left(-\frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) dx_k x_j = C_i \\
 x \left(-\frac{\partial dx}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial dx}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) &= \phi_k \left(-\frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) x_k dx_j = D_i
 \end{aligned}$$

d'où : $A_i = \phi_k S_{ij} dx_k y_j$ $C_i = \phi_k S_{ji} dx_k x_j$

$B_i = \phi_k S_{ij} x_k dy_j$ $D_i = \phi_k S_{ji} x_k dx_j$

si $S_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi}$

$$\begin{aligned}
|J| &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\
\text{soit : } d|J| &= \frac{\partial dx}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial dy}{\partial \xi} - \frac{\partial dx}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial dy}{\partial \xi} \\
&= \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} dx_k y_j + \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} x_k dy_j \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} dx_k y_j - \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} x_k dy_j \right) \\
&= S_{kj} (dx_k y_j + x_k dy_j) \\
&= (S_{jk} dx_j y_k + S_{kj} x_k dy_j)
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats précédents, on peut écrire les termes $(dF_{x\sigma})_i$ et $(dF_{y\sigma})_i$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
(dF_{x\sigma})_i &= \sum_{PI} (\sigma_1 (\phi_k S_{ij} (dx_k y_j + x_k dy_j) \\
&\quad + \sigma_{12} (\phi_k S_{ji} (dx_k x_j + x_k dx_j) \\
&\quad + \sigma_3 \phi_i x (S_{jk} dx_j y_k - S_{kj} x_k dy_j) \cdot W \\
(dF_{y\sigma})_i &= \sum_{PI} (\sigma_{12} (\phi_k S_{ij} (dx_k y_j + x_k dy_j) \\
&\quad + \sigma_2 (\phi_k S_{ji} (dx_k x_j + x_k dx_j)) \cdot W
\end{aligned}$$

En permutant dans certains termes les indices j et k, on peut mettre ces deux équations sous la forme :

$$\begin{bmatrix} dF_{x\sigma} \\ dF_{y\sigma} \end{bmatrix}_i = [K_\sigma]_{ij} \begin{bmatrix} dx_j \\ dy_j \end{bmatrix}$$

avec

$$[K_\sigma]_{ij} = \sum_{PI} \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 \phi_j S_{ik} y_k & \sigma_1 x S_{ij} \\ -\sigma_{12} (x S_{ij} + \phi_j S_{ik} x_k) & + \sigma_3 \phi_1 S_{kj} x_k \\ \hline -\sigma_3 \phi_i S_{ki} y_k & \\ \hline \sigma_{12} \phi_j S_{ik} y_k & \sigma_{12} x S_{ij} \\ -\sigma_2 (x S_{ij} + \phi_j (S_{ik} x_k)) & \end{array} \right]$$

On peut exprimer S_{ij} en fonction de dérivées par rapport aux coordonnées x, y par l'intermédiaire de la matrice jacobienne :

$$S_{ij} = (\phi_{i,x} \phi_{j,y} - \phi_{j,x} \phi_{i,y}) |J|$$

On peut ensuite vérifier les relations suivantes :

$$S_{ik} y_k = \phi_{i,x} |J| \quad S_{kj} y_k = -\phi_{j,x} |J|$$

$$S_{ik} y_k = -\phi_{i,y} |J| \quad S_{kj} y_k = \phi_{j,y} |J|$$

qui permettent de simplifier la forme de $[K_{\sigma}]_{ij}$ donnée ci-dessus, et obtenir le résultat final (6.27.).



ANNEXE 2

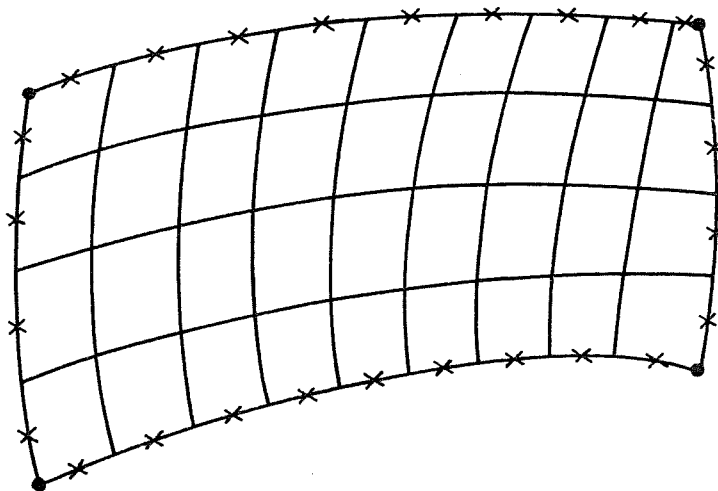
Problèmes à résoudre lors de la création d'un nouveau maillage

1. Introduction

A partir des informations stockées dans l'ancien maillage et des données fournies par l'utilisateur, le programme REMDATA crée un nouveau maillage. Rappelons que ce programme est spécialement adapté au traitement d'éléments finis quadrilatéraux du second degré (éléments PL8LS) et des éléments de contact correspondants (éléments CNT2D). Nous présentons ici nos solutions à quelques problèmes spécifiques à la création d'un nouveau maillage.

2. Repérage des noeuds de contour

Suite à une relecture des données décrivant les éléments de l'ancien maillage, le programme REMDATA isole les noeuds qui appartiennent à un seul élément PL8LS. Ces noeuds sont, soit des noeuds médians (x) des paraboles constituant le contour, soit des noeuds de coins (•) (fig. 1).



*Figure 1.
Repérage des noeuds
de contour*

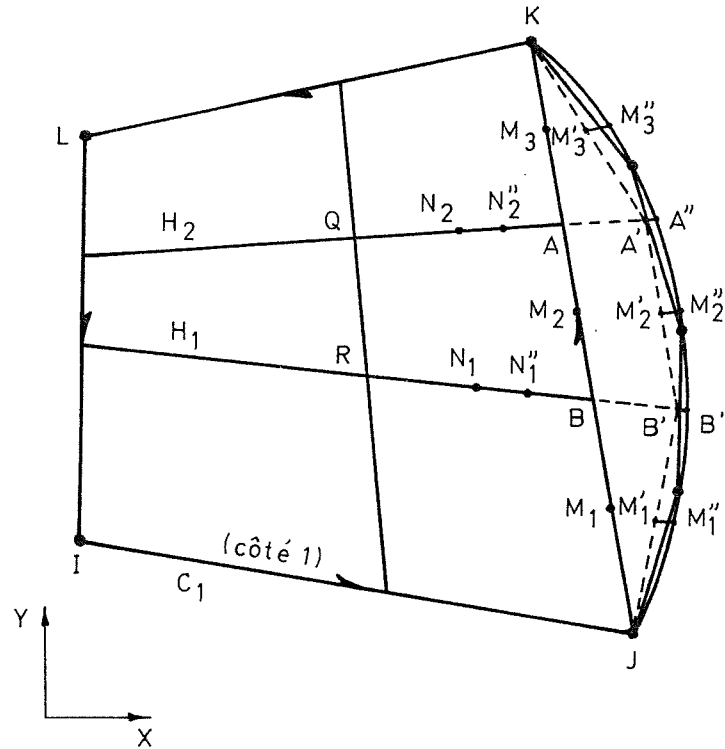
On recherche ensuite les côtés des éléments PL8LS ayant un de ces noeuds comme point milieu. Les noeuds de coins sont ceux pour lesquels aucun côté n'a été trouvé. Pour obtenir le contour C de la pièce modélisée, il suffit à présent d'ordonner les côtés des éléments PL8LS identifiés ci-dessus. A cette fin, un programme de tri particulièrement adapté a été créé.

3. Traitement des côtés non linéaires

Lorsqu'une zone quadrilatérale contient un ou plusieurs côtés inclus dans le contour, la procédure est la suivante :

- a. subdivision en éléments comme si tous les côtés de la zone étaient linéaires ;
- b. adaptation du côté non linéaire pour que les noeuds correspondants soient bien situés sur le contour.

La fig. 2 permet d'illustrer la méthode appliquée :



- a. parmi les noeuds du contour, le programme repère la succession des paraboles correspondant au côté étudié,
- b. une approximation linéaire de la position des noeuds A, B est obtenue en A' B' par l'intersection des droites H₁, H₂ avec les segments linéaires joignant les points du contour. Les noeuds milieux tels que M'₁, M'₂, M'₃ sont situés au milieu des nouveaux segments tels que JB', B'A', A'K ;
- c. la localisation exacte des points M'₁, B', M'₂, A', M'₃ sur le contour s'obtient à partir de la notion de paraboles isoparamétriques :
 - définition d'une coordonnée prioritaire, X pour les côtés horizontaux ou proche de l'horizontale et Y pour les côtés verticaux ou proche de la verticale,
 - repérage de la parabole du contour non linéaire qui contient le nouveau

point. Sa description isoparamétrique est la suivante :

$$X = \frac{1}{2} \xi (1 - \xi) X_1 + (1 - \xi^2) X_2 + \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) X_3 \quad (1 a)$$

$$Y = \frac{1}{2} \xi (1 - \xi) Y_1 + (1 - \xi^2) Y_2 + \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) Y_3 \quad (1 b)$$

où (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , (X_3, Y_3) sont les coordonnées des trois points déterminant la parabole de contour. Les valeurs respectives de -1, 0, 1 sont leur coordonnée isoparamétrique ξ

- connaissant la valeur de la coordonnée prioritaire X (Y) du nouveau point, la résolution de l'équation du second degré 1a (1b) détermine sa coordonnée isoparamétrique ξ . Cette valeur introduite dans l'équation restante 1b (1a) fournit la coordonnée non prioritaire du point.

d. ensuite, les points N_1, N_2 sont repositionnés en N''_1, N''_2 points milieux des segments RB'' , QA'' . On pourrait cependant imaginer de corriger tous les points situés sur les droites H_2 et H_1 .

L'application de cette méthode à des cas pratiques nous a conduit à réaliser des développements supplémentaires.

Pour repérer la succession des paraboles correspondant aux côtés non linéaires JK, il ne suffit pas de déterminer la position des noeuds J et K dans la liste ordonnée L_C des noeuds de contour et d'envisager la suite des noeuds de J à K. Si ces derniers ne sont pas des extrémités de paraboles, le contour décrit est alors faussé et d'ailleurs le nombre de noeuds intermédiaires peut être tel qu'il n'y corresponde pas un nombre entier de paraboles.

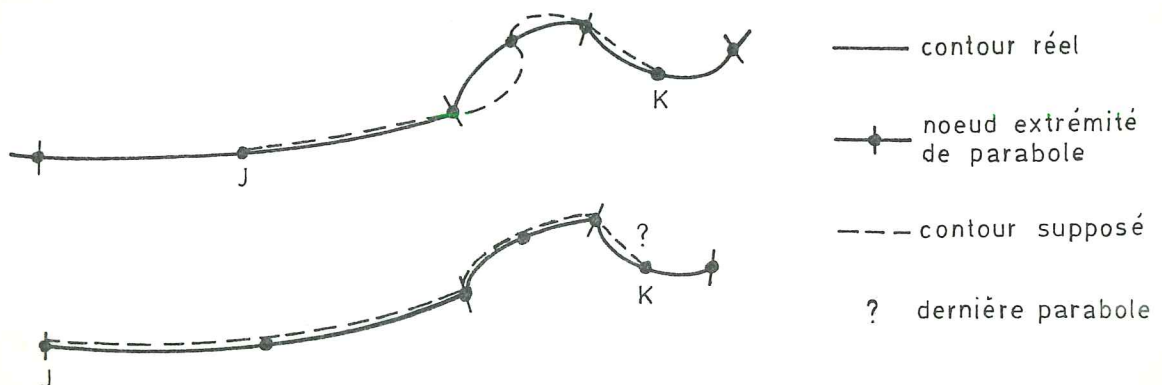


Figure 3.- Contour compris entre les noeuds J et K

Une solution simple serait de faire démarrer la liste des noeuds de contour L_C en un point début de parabole (un noeud de coin par exemple). Tous les noeuds ont un numéro

d'ordre N dans cette liste, un N pair correspondrait à un point médian de parabole et un N impair à une extrémité.

N_j pair \rightarrow début des paraboles : le $(N_j - 1)^{\text{ème}}$ noeud de la liste L_C

N_k pair \rightarrow fin des paraboles : le $(N_k + 1)^{\text{ème}}$ noeud de la liste L_C

Cette approche est inadéquate à cause des substitutions de contour : d'une part l'apparition des noeuds supplémentaires aux points de début et de fin de contact entre la pièce et la matrice fausse l'ordre des noeuds dans L_C ; d'autre part, on peut rencontrer une situation telle que celle de la fig. 4 :

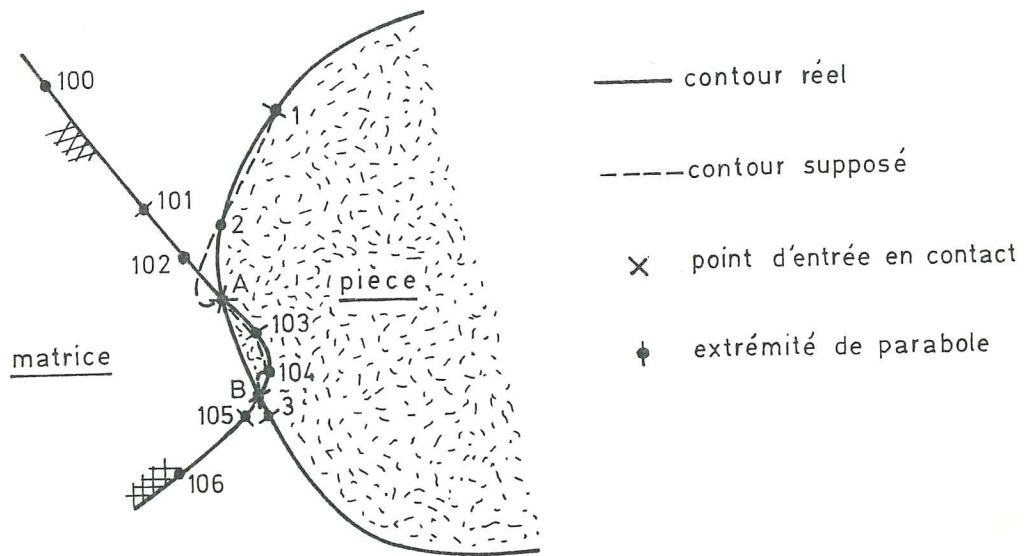


Figure 4.- Cas litigieux où le contour réel et supposé diffèrent.

Etudions la liste L_C des noeuds concernant la portion contour du noeud 1 à 3 :

Numéro d'ordre dans L_C	Repérage du noeud sur la figure 4
1	1
2	2
3	A
4	103
5	104
6	B
7	3

Les noeuds 1 et 3 extrémités de paraboles conservent un numéro d'ordre impair, cependant, la succession des trois paraboles 1, 2, A ; A, 103, 104 ; 104, B, 3 ne correspond pas au contour réel :

- 1 2 A : le contour réel peut être représenté par une parabole mais le noeud 2 n'est pas situé dans le tiers central entre les noeuds 1 et A et la parabole obtenue ne correspond pas au contour réel,
- A 103 104 : le noeud milieu 104 est devenu noeud extrémité, alors que le noeud extrémité 103 est devenu milieu. Cependant dans le cas présent, cette parabole colle assez bien au contour réel,
- 104 B 3 : le contour présente une discontinuité au niveau du point B, que la parabole 104 B 3 ne peut évidemment traduire.

Selon la position des noeuds A et B par rapport aux paraboles du contour du solide ou de la matrice, on peut définir un grand nombre de cas litigieux où les nouvelles paraboles ne correspondent pas au contour réel. Si dans certaines situations l'erreur commise est négligeable, d'autres cas entraînent une modification inacceptable du contour réel. Pour résoudre ces problèmes, il faut ajouter à la liste L_C une caractéristique des noeuds de contour :

- noeud médian de parabole
- noeud extrémité de parabole
- noeud d' "entrée" en contact ou de "fin" de contact.

Des informations supplémentaires sont nécessaires pour chaque noeud d' "entrée" en contact :

- la parabole de la pièce concernée
- la parabole de la matrice concernée
- la coordonnée paramétrique ξ du point dans chacune de ces paraboles.

Chaque fois qu'un point d' "entrée" en contact apparaît dans la localisation d'un point sur le contour, on effectue la recherche de la parabole exacte :

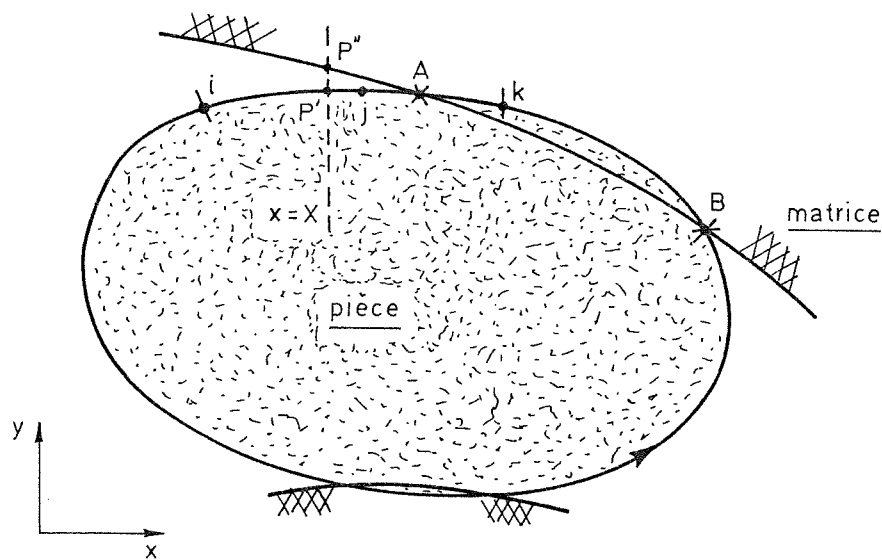


Figure 5.

Localisation d'un point sur le contour de la pièce ou de la matrice

- P = point à localiser sur le contour
- A = point d'entrée en contact (ou sortie selon le sens de parcours du contour)
- x = coordonnée principale du point P
- ξ_c = coordonnée isoparamétrique relative à la parabole du contour de la pièce
- ξ_m = coordonnée isoparamétrique relative à la parabole de la matrice.

Le programme calcule ξ_c^P et ξ_m^P par l'équation (1a) et par comparaison avec les valeurs de ξ_c^A et ξ_m^A , il choisit la parabole de contour. Par (1b), il obtient l'ordonnée Y du point P.



ANNEXE 3

Présentation de l'élément de contact

1. Introduction

Une recherche concernant les différentes méthodes de modélisation du contact, ainsi qu'une description détaillée du modèle adopté dans le LAGAMINE sont disponibles en EF4. Nous nous contenterons ici d'énoncer les choix réalisés dans cette approche qui traite le cas du frottement de COULOMB.

2. Loi constitutive

La relation constitutive relie les dérivées matérielles des *contraintes*" $\overset{\nabla}{\underline{\sigma}}$ (la pression p et les deux contraintes tangentielles de frottement τ_R, τ_S) à la vitesse du déplacement relatif de la frontière de la pièce forgée et de la matrice $\dot{\underline{\varepsilon}}$. Les deux vecteurs $\overset{\nabla}{\underline{\sigma}}$ et $\dot{\underline{\varepsilon}}$ sont exprimés dans les axes locaux définis sur la figure 1.

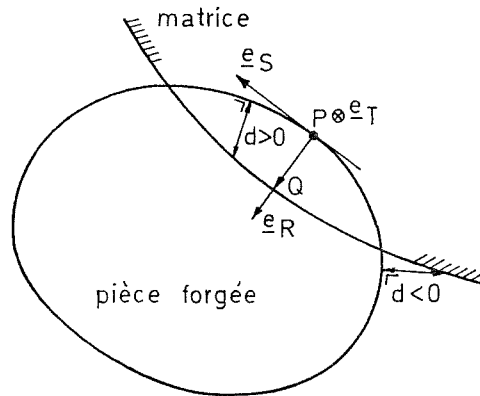


Figure 1.- Illustration de la formulation du contact

$$\overset{\nabla}{\underline{\sigma}} = \frac{d\sigma}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau}_S \\ \dot{\tau}_T \end{Bmatrix} \quad \dot{\underline{\varepsilon}} = \frac{dd}{dt} = \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_R \\ \dot{\varepsilon}_S \\ \dot{\varepsilon}_T \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Nous nous situons dans un contexte de grands déplacements et par conséquent, à un point du solide correspond une multitude de points de fondation successifs. Ce fait explique que l'intégration de la vitesse $\dot{\epsilon}$ n'a pas de sens. La loi constitutive est donc hypoélastique, la forme hyperélastique n'existe pas.

Le formalisme élastoplastique classique est utilisé. La surface de plasticité est déterminée par le critère de COULOMB :

$$f = |\tau| - \phi p \quad \text{avec } |\tau| = \sqrt{\tau_T^2 + \tau_S^2} \quad (2)$$

si $f < 0$ le contact est collant (domaine élastique)

si $f = 0$ le contact est glissant (domaine plastique)

si $f > 0$ est impossible.

Le domaine élastique est particulièrement modélisé par la méthode de pénalisation adaptée à l'approche par éléments finis travaillant de façon incrémentale.

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau}_S \\ \dot{\tau}_T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_\tau & 0 \\ 0 & 0 & K_\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_R \\ \dot{\epsilon}_S \\ \dot{\epsilon}_T \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Les coefficients K_p et K_τ doivent être très grands pour limiter l'interpénétration des deux surfaces en contact. Leur valeur est cependant limitée par des problèmes de convergence numérique.

En pratique, il existe une valeur totale de la première composante de la déformation

$$\epsilon : \quad \epsilon_R = d \quad (4)$$

qui n'est pas égale à l'intégrale temporelle de ϵ_R . On peut donc exprimer la pression de contact par la relation hyperélastique :

$$p = K_p d \quad (5)$$

La loi constitutive adoptée est du type non associée pour tenir compte du fait que seul le glissement tangentiel accompagné de frottement est dissipatif ($\dot{\epsilon}_R^p = 0$). CHARLIER a donc

défini une surface d'écoulement g différente de la surface de plasticité f .

$$\left\{ \begin{array}{l} g = |\tau| - a \\ \dot{\varepsilon}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_R^P = 0 \\ \dot{\varepsilon}_S^P = \dot{\lambda} \tau_S / |\tau| \\ \dot{\varepsilon}_T^P = \dot{\lambda} \tau_T / |\tau| \end{array} \right. \quad (6)$$

En exprimant la condition de cohérence sur f au cours du déplacement plastique ($f = 0$) et en l'absence d'écrouissage, on obtient la formulation générale adaptée au cas des métaux :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} \\ \dot{\tau}_S \\ \dot{\tau}_T \end{array} \right\} = \left(\begin{bmatrix} K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_\tau & 0 \\ 0 & 0 & K_\tau \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\phi K_p \tau_S}{|\tau|} & K_\tau \frac{\tau_S^2}{|\tau|^2} & K_\tau \frac{\tau_S \tau_T}{|\tau|^2} \\ \frac{-\phi K_p \tau_T}{|\tau|} & K_\tau \frac{\tau_S \tau_T}{|\tau|^2} & K_\tau \frac{\tau_T^2}{|\tau|^2} \end{bmatrix} \right) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_R \\ \dot{\varepsilon}_S \\ \dot{\varepsilon}_T \end{array} \right\} \quad (7)$$

3. Objectivité

Les équations définies ci-dessus permettent de traduire l'équilibre en un instant donné. Dans le cadre des éléments finis, le temps est divisé en pas de temps de longueur finie Δt . Selon le schéma d'intégration temporel choisi, l'équilibre est respecté en un instant précis du pas ou en moyenne. Le chapitre 4 a traité ce concept pour les équations thermiques, nous ne l'approfondirons pas ici. Il est cependant important de vérifier qu'avec l'hypothèse admise *des déplacements linéaires au cours du pas*, un mouvement de corps rigide affectant simultanément la pièce et la matrice n'induit pas de contraintes de contact.

CHARLIER a montré que lorsque les coordonnées de la pièce et de la matrice varient linéairement du début à la fin du pas, on a une transformation isomorphe. Les longueurs sont modifiées mais les angles sont conservés. Il en résulte que pour un déplacement de corps rigide, les vitesses tangentielles relatives $\dot{\varepsilon}_T$ et $\dot{\varepsilon}_S$ sont nulles mais pas la vitesse de pénétration $\dot{\varepsilon}_p$.

Le schéma est objectif pour la vitesse tangentielle mais pas pour la vitesse normale.

CHARLIER propose donc de prendre :

$$\dot{\varepsilon}_R = \frac{d^B - d^A}{\Delta t} \quad (8)$$

où $\begin{cases} d^B = \text{distance d'interpénétration en fin de pas} \\ d^A = \text{distance d'interpénétration en début de pas.} \end{cases}$

Cette vitesse de pénétration est objective et en accord avec le choix de la relation hyperélastique (5) pour exprimer la pression de contact.

4. Discrétisation spatiale.

Nous sommes dans le cadre d'un programme d'éléments finis cinématiquement admissibles, de type isoparamétrique. Nous supposons que vous connaissez les bases de la méthode des éléments finis et décrivons uniquement les concepts particuliers aux éléments de contact utilisés. Il s'agit de l'élément de contact en état plan ou axisymétrique. Il est déterminé par 3 noeuds situés sur la frontière de la pièce forgée et une suite de paraboles ou segments de droite définissant la matrice.

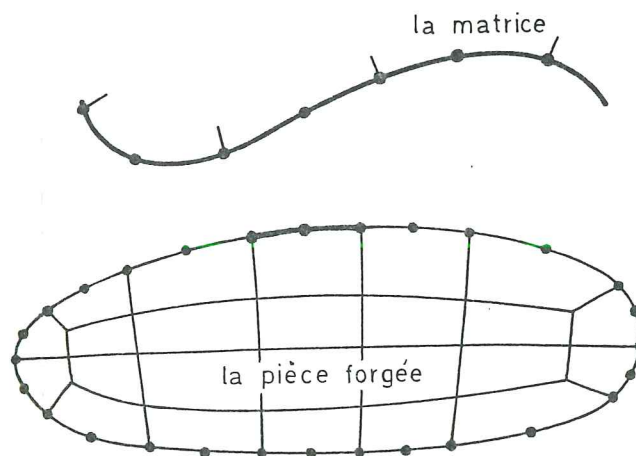


Figure 2.- Représentation d'un élément de contact.

L'utilisation de la loi (7) et (8) implique le calcul de la distance d et de la vitesse $\dot{\xi}$ entre la frontière de la pièce et la matrice. La formulation isoparamétrique permet de définir les coordonnées et les vitesses de tout point de la matrice en fonction des valeurs nodales. Dans le cas d'une matrice parabolique, la formule qui fournit la distance d et la coordonnée isoparamétrique ξ de la matrice est du second degré.

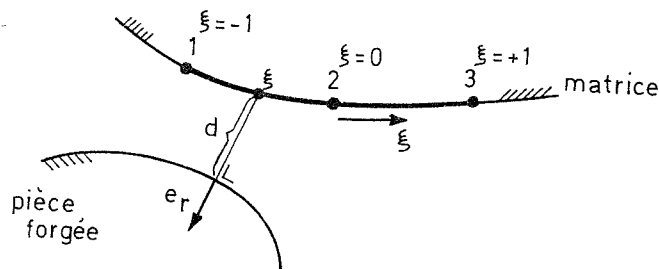


Figure 3. - Définition de la distance d et de la coordonnée ξ

On obtient deux couples de valeurs (d_1, ξ_1) et (d_2, ξ_2) . Deux conditions nous permettent d'éliminer une de ces valeurs :

$d > 0$ (9) vu la direction de \underline{e}_R il ne peut y avoir contact et donc légère interpénétration que si d est positif.

$-1 \leq \xi \leq 1$ (10) pour que le point de contact soit situé dans la parabole étudiée. Néanmoins, ces conditions ne suffisent pas toujours pour choisir le couple de valeur (d, ξ) . La comparaison des normales à la pièce et à la matrice au point d'intersection permet d'éliminer en toute sécurité un des points qui représente un faux contact (fig. 4).

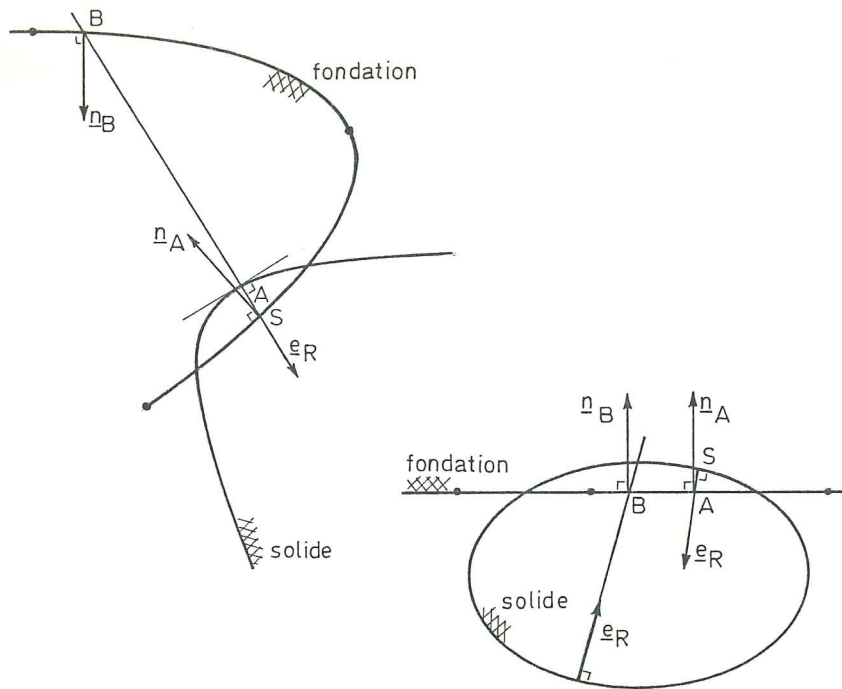


Figure 4.- Vrai et faux contact.

Dans les deux cas représentés, la normale \underline{e}_R à la pièce intersecte la matrice en A et B. En A, la pièce et la matrice s'interpénètrent, le contact est vrai. En B, le contact est faux. Le produit scalaire des vecteurs normaux intérieurs à la pièce et à la matrice est négatif en A et positif en B. Son signe est donc un critère efficace lorsque la matrice est composée d'un arc de parabole.

$$\underline{e}_R \cdot \underline{n}_A < 0 \text{ contact} \quad (11)$$

$$\underline{e}_R \cdot \underline{n}_B > 0 \text{ décollement}$$

Ce ne serait plus le cas si elle était composée d'une série de paraboles de courbures inversées (fig. 5), considérées simultanément dans un élément de contact.

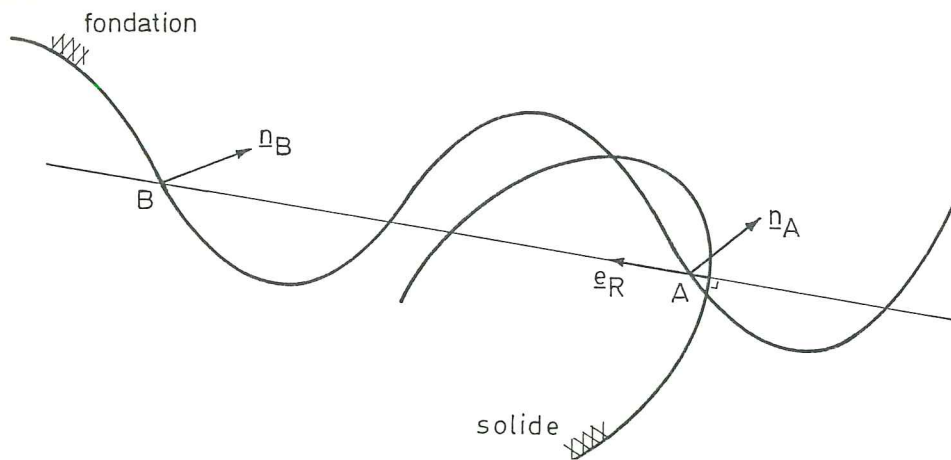


Figure 5.- Cas d'une matrice contenant des paraboles de courbures inversées.

Le contact se produit-il en A ou en B ? Dans la version de l'élément proposée par CHARLIER, ce problème n'est pas résolu. L'utilisateur doit se prémunir de cette ambiguïté par une modélisation appropriée, en limitant le nombre de paraboles prises en compte simultanément. Nous proposons une solution au chapitre 10.

