

CHAPITRE 8

Décision de remaillage



8.1. Introduction

8.2. Remaillage systématique

8.3. Estimateur d'erreur (bibliographie)

8.3.1. Théorie basée sur les résidus

8.3.2. L'estimateur simplifié de ZIENKIEWCZ

8.3.3. Etude de l'énergie de déformation

8.3.4. Estimateurs basés sur les contraintes

8.3.5. Estimateurs ~~Estimateurs~~ basés sur la déformation

8.3.6. Estimateurs basés sur la loi de comportement et les champs de contraintes statiquement admissibles

8.4. Estimateurs d'erreur introduits dans le LAGAMINE

8.5. Critère de remaillage sans estimation de l'erreur

8.5.1. Mesure de la distorsion des éléments

8.5.2. Etude des valeurs propres

8.5.3. Mesure des recouvrements ou des baillements entre la pièce et la matrice

8.6. Concordance des critères avec ou sans estimateurs d'erreur

8.7. Conclusion

8.1. INTRODUCTION

De façon générale, dans les simulations numériques, le terme d'erreur s'applique à la différence observée entre les résultats obtenus par calculs et les phénomènes réels étudiés.

Plusieurs sources d'erreurs coexistent, citons par exemple :

- la différence entre le comportement réel du matériau et la loi constitutive adoptée,
- les erreurs de mesure des paramètres du matériau,
- les erreurs faites lors de l'introduction des données d'un code de calcul ...

Ce type d'erreurs est indépendant de la méthode de calcul utilisée, il est propre à chaque cas traité et s'analyse en quelque sorte au coup par coup.

Par contre, l'utilisation de la méthode des éléments finis (type déplacement) en analyse non linéaire fait apparaître trois types d'erreur :

- **l'erreur de discrétisation spatiale** qui est due aux hypothèses de la méthode. Rappelons que l'on évalue les déplacements en une série de points discrets : les noeuds. Entre ces noeuds, le déplacement est calculé à partir de fonctions d'interpolation définies par le type d'éléments choisis. Plus le maillage est fin, plus cette erreur est réduite. La théorie assure en effet la convergence vers la solution exacte lorsque la taille de l'élément tend vers zéro pour une analyse linéaire (EF 3). En pratique, chaque maillage utilise des éléments de taille finie et il y correspond une erreur dite de discrétisation spatiale ;
- **l'erreur de discrétisation temporelle** apparaît lorsque le facteur temps intervient dans les phénomènes à simuler, par exemple, lorsque les charges appliquées à la pièce étudiée varient au cours du temps, ou si le matériau a un comportement visqueux. Dans la simulation numérique, le temps est subdivisé en intervalles appelés "*pas de temps*". Au cours d'un pas, on exprime des hypothèses sur l'évolution des variables (température, déplacement) et on choisit d'exprimer l'équilibre en un instant donné ou en moyenne. Ces différents choix déterminent ce qu'on appelle "*le schéma d'intégration*". Le chapitre 4 présentait une série de schémas d'intégration adaptés aux problèmes thermiques. Le choix final du schéma utilisé dans le code LAGAMINE tenait compte du couplage à l'analyse mécanique. Une

présentation générale des schémas utilisés par le code LAGAMINE pour différentes lois constitutives mécaniques est disponible en EF 4. Le chapitre 5 de cette thèse présente le cas particulier de la loi élasto-plastique en grande déformation avec évolution de la température et de l'état microstructural.

Un schéma d'intégration adapté au problème traité et un pas de temps approprié permettent de limiter l'erreur de discrétisation temporelle ;

- **les erreurs dues à la résolution** approchée du système d'équations discrétisées non linéaires obtenu. Ce type d'erreur peut être facilement dominé par l'utilisation d'une norme appropriée qui détermine le nombre d'itérations nécessaires pour trouver un système en équilibre.

Pour vérifier cet équilibre, on calcule les forces dites hors d'équilibre, c'est-à-dire la différence entre les forces nodales intérieures (énergétiquement équivalentes aux contraintes) \underline{F}^I et les forces nodales extérieures \underline{F}^E (énergétiquement équivalentes aux forces imposées et aux réactions d'appui) :

$$F_k^{HE} = F_k^I - F_k^E \quad (8.1)$$

$k = 1$, nombre total de degrés de liberté

Pratiquement, ce vecteur n'est jamais nul et on admet dans tous les programmes d'éléments finis incrémentaux et non-linéaires l'existence d'un léger déséquilibre. Pour le mesurer, on compare la norme des forces hors d'équilibre à la norme des forces imposées \underline{F} et des réactions d'appui \underline{R} . On obtient ainsi le critère d'équilibre :

$$f_F = |\underline{F}^{HE}| / |\underline{F} + \underline{R}| \quad (8.2)$$

$f_F < \text{PRECF}$ à l'équilibre

La valeur PRECF est la précision à atteindre, elle est choisie par l'utilisateur.

Lorsque l'équilibre n'est pas atteint une itération supplémentaire est nécessaire, il faut calculer un champ de déplacement plus précis et en déduire de nouvelles contraintes (EF 4).

A ce moment, une seconde norme indique si le processus itératif de recherche de l'équilibre peut être arrêté. On compare la norme de l'incrément de déplacement $\Delta \underline{u}$ à la norme des déplacements imposés \underline{u} ou à défaut aux incréments de déplacements obtenus à la

première itération.

$$f_u = \frac{|\Delta \underline{u}|}{|\underline{u}|} \quad (8.3.)$$

$$f_u < \text{PRECU à l'équilibre}$$

La valeur PRECU est imposée par l'utilisateur.

En conclusion, un choix approprié des valeurs PRECU, PRECF permet de limiter l'erreur due à la résolution du système.

NB. : un soin particulier est appliqué au calcul des normes dans une analyse couplée thermomécanique. Les grandeurs thermiques et mécaniques n'ont pas toujours le même ordre de grandeur et l'utilisation directe des formules (8.2 et 8.3) conduit à des incohérences (voir EF 9).

Dans ce chapitre, nous traiterons uniquement l'erreur de discrétisation spatiale : comment la mesurer, que faire pour la réduire ? Les deux autres types d'erreur (erreur de discrétisation temporelle et erreur de résolution) peuvent être limitées par un choix adéquat du schéma d'intégration temporelle et de la précision à atteindre lors de la résolution des équations d'équilibre discrétisées.

Une dernière précision de vocabulaire avant d'aborder les mesures d'erreur. On appelle **erreur globale**, un pourcentage donnant l'erreur de tout un maillage. L'**erreur locale** est par contre, définie pour chaque élément ou chaque noeud du maillage. C'est une valeur relative ou absolue selon les cas.

8.2. REMAILLAGE SYSTEMATIQUE

La décision de remailler s'appuie généralement sur une estimation de l'erreur globale entre la solution approchée obtenue par la méthode de calcul et la solution exacte.

Il est cependant fréquent que cette estimation ne soit pas disponible dans le code de calcul utilisé :

- soit aucun développement relatif aux erreurs n'est implanté ;
- soit une méthode donnant accès à une estimation de l'erreur locale et donc une localisation des zones à remailler est programmée; mais aucune erreur

globale n'est fournie (ER 7, ER 20, ER 21, ER 22, ER 23).

Dans ce cas, c'est l'utilisateur qui doit décider de l'instant adéquat pour effectuer un remaillage. Cette approche reste cependant souvent arbitraire et basée sur l'expérience de l'utilisateur. Par exemple, dans FOR 35, lors de l'écrasement d'un lopin cylindrique, un remaillage est effectué chaque fois que la hauteur a diminué de 5%.

On peut aussi décider d'appliquer un remaillage systématique tous les pas ou tous les 4 ou 5 pas. Cette méthode peut être efficace si le coût du remaillage est réduit, elle est surtout utilisée lorsque le remaillage consiste simplement en une relocalisation des noeuds existants (REM 12).

8.3. ESTIMATEURS D'ERREUR (bibliographie)

Les calculs par éléments finis en petites déformations, petits déplacements pour des matériaux à comportement linéaire sont devenus classiques. Même si le coût de telles analyses est nettement inférieur aux simulations de formage, il n'en reste pas moins que l'on désire avoir une solution approchée la meilleure possible pour un coût minimum. Cette recherche de l'optimum requiert une mesure de la qualité de la solution obtenue ; elle a donc entraîné l'élaboration de théories fournissant des estimateurs d'erreur. Nous résumons ci-après les différentes approches trouvées dans la littérature et leur extension possible au cas non linéaire qui nous occupe.

8.3.1. Théorie basée sur les résidus (BABUSKA, ZIENKIEWICZ, CAGO, KELLY, RHEINBOLDT).

8.3.1.1. Introduction

Ces estimateurs d'erreur sont basés sur des informations obtenues pendant la résolution et sont donc qualifiés d'estimateurs d'erreur a posteriori.

L'existence et l'efficacité de ces estimateurs a été démontrée par BABUSKA et ses collègues dans les conditions suivantes :

- éléments linéaires,
- utilisation de nouveaux maillages définis selon la version-h (voir chap. 7) ;
- définition asymptotique qui garantit la précision de l'estimateur lorsque la taille de l'élément tend vers zéro et lorsque l'erreur est uniformément répartie.

L'expérience des ingénieurs montre cependant que ces indications sont efficaces dans des conditions pratiques : éléments de dimensions finies et parfois même maillage grossier, utilisation d'éléments paraboliques, méthode de raffinement différente de la h-version (p-version ou remaillage avec maillages indépendants).

Nous présenterons ici trois estimateurs d'erreur introduits sur base de l'analyse linéaire :

1. un estimateur basé sur le concept d'éléments hiérarchiques, facilement utilisable uniquement dans ce cadre (ER1) ;
2. un estimateur plus général (ER3) ;
3. un estimateur borne supérieure de l'erreur (ER13, ER14).

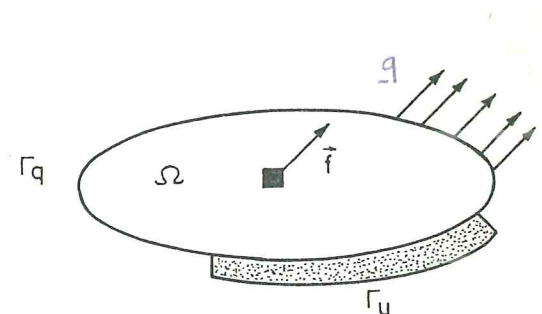
8.3.1.2. Estimateur pour les éléments finis hiérarchiques (ER1).

Par simplicité, nous présenterons les développements dans un domaine à deux dimensions. Tout au long de ce chapitre, nous ferons référence au problème continu classique de l'équilibre d'un solide occupant le domaine Ω . Ce solide est soumis à des sollicitations de deux types : des forces volumiques de densité \underline{f} et des forces de surface \underline{q} réparties sur la partie Γ_q de sa frontière Γ . Sous l'effet de ce chargement, le solide se déforme pour adopter une nouvelle configuration d'équilibre. Nous nous placerons dans une hypothèse de petites déformations, si bien que les deux configurations seront identiques. Nous noterons $\underline{u}(\underline{x})$, le déplacement d'un point \underline{x} de Ω . Un déplacement \underline{u}_d peut être imposé au solide sur Γ_u , partie complémentaire de Γ_q , de mesure non nulle ; nous prendrons $\underline{u}_d = 0$ dans les applications.

On utilisera indifféremment les notations :

\underline{u} ou u_i	avec $i = 1,2$	le vecteur déplacement
\underline{f} ou f_i	avec $i = 1,2$	
\underline{q} ou q_i	avec $i = 1,2$	

les vecteurs force définis ci-dessus.



Dans l'hypothèse d'un matériau élastique linéaire isotrope, les équations exprimant l'équilibre de ce solide sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
L \underline{u} + \underline{f} &= 0 && \text{pour } \underline{x} \in \Omega \\
M \underline{u} + \underline{q} &= 0 && \text{pour } \underline{x} \in \Gamma_q \\
\underline{u} &= 0 && \text{pour } \underline{x} \in \Gamma_u \quad \text{avec } \Gamma_q \cup \Gamma_u = \Gamma
\end{aligned} \tag{8.4.}$$

où L et M sont des opérateurs différentiels linéaires.

La résolution de ce problème par la méthode des éléments finis conduit à un système de n équations linéaires discrétisées :

$$K_{ij} u_j^N = f_i^N \quad \text{avec } i, j = 1, n \tag{8.5.}$$

où n est le nombre de degrés de liberté

K_{ij} est la matrice de rigidité

\underline{u}^N est un vecteur de n composantes u_i^N qui contient les déplacements nodaux inconnus selon les différentes directions (2 directions puisque nous nous limitons au cas bidimensionnel)

\underline{f}^N est un vecteur de n composantes f_i^N qui contient les forces nodales énergétiquement équivalentes à \underline{f}

La solution approchée \hat{u} fournie par cette méthode est définie par la relation :

$$\begin{aligned}
\hat{u}_j &= N_{ji} u_i^N \quad \text{avec } j = 1, 2 \quad i = 1, n \\
&\text{pour } \forall x \in \Omega
\end{aligned} \tag{8.6.}$$

Le déplacement approché \hat{u} en un point quelconque du domaine Ω est calculé à partir des déplacements nodaux u_i^N et de la matrice des fonctions d'interpolation N_{ji} adoptées.

Lorsque l'on considère des éléments finis hiérarchiques, le système d'équations linéaires discrétisées est très semblable au système (8.5). Les fonctions d'interpolation particulières utilisées (voir chapitre 7) entraînent des modifications dans le calcul de la matrice de rigidité K_{ij} et le vecteur \underline{f}^N relatif aux forces appliquées.

Par ailleurs, le vecteur inconnu perd sa signification physique immédiate de déplacement nodal. Nous parlerons à présent d'un vecteur \underline{a} de n paramètres inconnus. Le système d'équations devient :

$$K_{ij} a_j = f_i \quad \text{avec } i, j = 1, n \tag{8.7.}$$

Et la solution approchée \hat{u} est obtenue à partir des fonctions d'interpolation spéciales N_{ji}

utilisées :

$$\begin{aligned} \hat{u}_j &= N_{ji} a_i && \text{avec } j = 1, 2 \\ & && i = 1, n \\ & && \text{pour } \forall x \in \Omega \end{aligned} \quad (8.8.)$$

Si pour décrire le domaine Ω , on ajoute par raffinement hiérarchique du maillage m degrés de liberté (DDL) aux n degrés existants, la taille du système d'équations (8.7) augmente. Nous avons recours à la notation matricielle pour illustrer les propriétés particulières du système obtenu :

$$\begin{bmatrix} K_{nn} & K_{nm} \\ K_{mn} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_n \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_n \\ f_m \end{Bmatrix} \quad (8.9.)$$

Appelons \underline{a}^n le vecteur solution du système (8.7.), il permet d'obtenir une première approximation \underline{a}^* du vecteur inconnu a de dimension $n + m$ du système (8.9) :

$$\begin{aligned} a_i^* &= a_i^n && i = 1, n \\ a_k^* &= K_{kj}^{-1} (f_j - K_{ji} a_i^n) && j = n + 1, n + m \\ & && k = n + 1, n + m \end{aligned} \quad (8.10.)$$

Introduisons le vecteur d'erreur \underline{e} défini en tout point du domaine Ω par la différence entre le déplacement réel \underline{u} et sa valeur approchée \hat{u} (8.8) :

$$\underline{e} = \underline{u} - \hat{u} \quad \text{ou} \quad e_j = u_j - \hat{u}_j \quad j = 1, 2 \quad (8.11.)$$

Cette erreur peut être approchée par la différence entre deux solutions approchées \hat{u}^n et \hat{u}^{n+m} utilisant respectivement n et $n + m$ DDL.

$$\underline{e} \approx \hat{u}^{n+m} - \hat{u}^n \quad (8.12.)$$

Remarquons que grâce à l'approximation (8.10) une résolution complète du système à $n + m$ DDL (8.9) est inutile. On obtient :

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{N}_{ij} \mathbf{a}_i^* = \mathbf{N}_{ij} \mathbf{K}_{ir}^{-1} (\mathbf{f}_r^m - \mathbf{K}_{rl} \mathbf{a}_l^n) \quad (8.13.)$$

$$\begin{aligned} \text{où } j &= 1, 2 \\ i, r &= n+1, n+m \\ l &= 1, n \end{aligned}$$

L'erreur définie en (8.12) est purement locale, elle ne traduit pas globalement les déséquilibres existant dans les équations (8.4). Pour y pourvoir, on définit "la norme énergétique de l'erreur" :

$$\|\underline{\mathbf{e}}\|_E^2 = \int_{\Omega} \mathbf{e}_j \mathbf{L} \mathbf{e}_j \, d\Omega \quad j = 1, 2 \quad (8.14.)$$

Introduisons à présent le vecteur résidu qui traduit le déséquilibre du solide dû à l'utilisation d'un champ de déplacement approché $\hat{\mathbf{u}}$ et non exact $\underline{\mathbf{u}}$:

$$\underline{\mathbf{r}} = \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{f}} \quad \text{pour } \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (8.15.)$$

$$\underline{\mathbf{r}} = \mathbf{M} \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{q}} \quad \text{pour } \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q$$

On démontre que la norme énergétique de l'erreur est reliée aux résidus. En effet, on a en tout point intérieur :

il vient successivement

$$\mathbf{L} \underline{\mathbf{e}} = \mathbf{L} \underline{\mathbf{u}} - \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}} \quad (8.11.)$$

$$\mathbf{L} \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{f}} = 0 \quad (8.4.)$$

d'où

$$\underline{\mathbf{r}} = -\mathbf{L} \underline{\mathbf{e}} \quad (8.16.)$$

et par conséquent

$$\|\underline{\mathbf{e}}\|_E^2 = - \int_{\Omega} \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{r}} \, d\Omega \quad (8.17.)$$

La norme énergétique de l'erreur mesure le travail des résidus d'équilibre $\underline{\mathbf{r}}$ sur les erreurs de déplacement $\underline{\mathbf{e}}$.

Toutes les notions nécessaires ayant été précisées, nous pouvons à présent aborder l'estimateur d'erreur η_{n+1} introduit en ER1.

$$\eta_{n+1}^2 = \|\underline{\mathbf{e}}^{n+1}\|_E^2 \quad (8.18.)$$

L'erreur notée \underline{e}^{n+1} est définie par la différence entre la solution approchée \hat{u}^n calculée à partir de n DDL et la solution \hat{u}^{n+1} calculée avec un seul DDL supplémentaire. En appliquant les relations (8.16) et (8.10) pour $m = 1$, on a :

$$e_j^{n+1} = N_{j \ n+1} a_{n+1} \quad (8.19.a)$$

$$a_{n+1} = (f_{n+1} - K_{n+1 \ j} a_j^n) / K_{n+1 \ n+1} \quad (8.19.b)$$

Cette dernière relation peut également être obtenue en substituant $\hat{u}_j = N_{ji} a_i^n$ ($i = 1, n$) dans les équations d'équilibre et en pondérant N_{jn+1} . Par conséquent on a la relation :

$$f_{n+1} - K_{n+1 \ i} a_i^n = \int_{\Omega} N_{j \ n+1} r_j \ d \Omega \quad (8.19.c)$$

En utilisant (8.17.), (8.18.) et (8.19.), on obtient la forme suivante de l'estimateur η_{n+1} :

$$\eta_{n+1}^2 = - \int_{\Omega} e_j^{n+1} r_j \ d \Omega = \frac{\left[\int_{\Omega} N_{j \ n+1} r_j \ d \Omega \right]^2}{K_{n+1 \ n+1}} \quad \text{avec } j = 1, 2 \quad (8.20.)$$

Une borne supérieure de cet estimateur d'erreur est définie comme suit : (8.21.)

$$\eta_{n+1}^2 = \frac{\left[\int_{\Omega} N_{j \ n+1} r_j \ d \Omega \right]^2}{K_{n+1 \ n+1}} \leq \epsilon_{n+1}^2 = \frac{\left(\int_{\Omega} N_{j \ n+1} N_{j \ n+1} \ d \Omega \right) \cdot \left(\int_{\Omega} r_j r_j \ d \Omega \right)}{K_{n+1 \ n+1}}$$

L'estimateur η_{n+1} traduit la correction de l'énergie calculée suite à l'introduction d'un nouveau DDL. Supposons ce nouveau DDL $n + 1$ affecté à la direction x alors que l'erreur e est essentiellement selon la direction y , l'estimateur η_{n+1} obtenu sera faible et incorrect. En effet, si selon la direction x , la discrétisation est suffisante pour approcher la solution réelle, un DDL en plus modifiera très peu le calcul de l'énergie. Une estimation précise de l'erreur implique de sommer les estimateurs η_{n+1} relatifs à une infinité de DDL nouveaux dans chaque direction.

En pratique, cependant, la formule simplifiée (8.21) permet de calculer uniquement les estimateurs η_{n+1} correspondant à un premier raffinement du maillage (fig. 8.2).

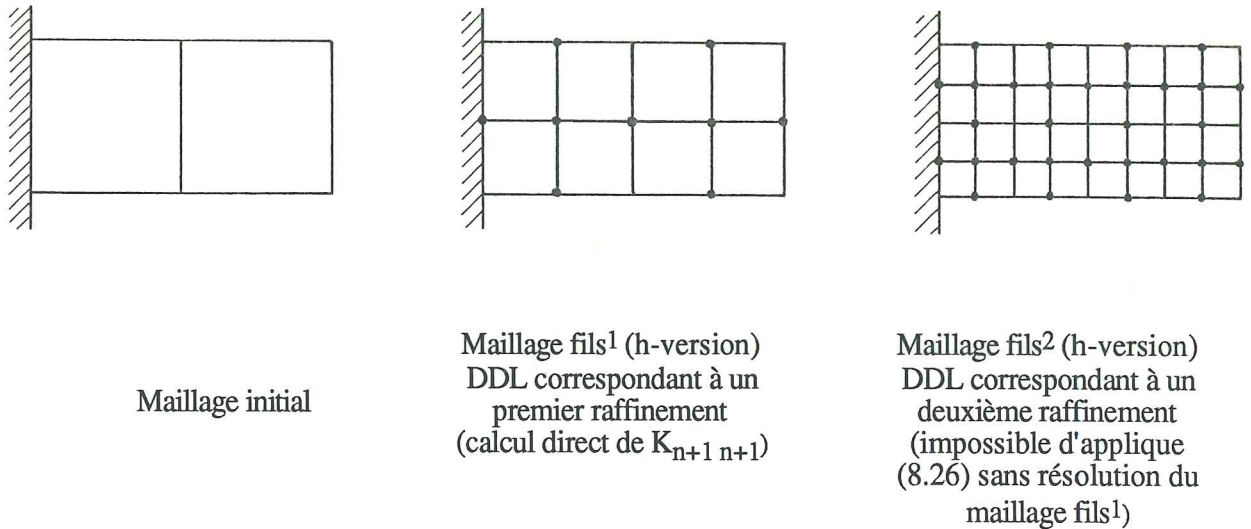


Figure 8.2. - Définition des DDL de premier raffinement

L'estimateur d'erreur sera donc obtenu en sommant les η_{n+1} relatifs aux DDL introduits lors d'un premier raffinement. Si les fonctions d'interpolation correspondantes $N_{j_{n+1}}$ sont orthogonales au résidu r_j , l'estimateur sera de piètre qualité.

ZIENKIEWICZ, CAGO et KELLY ont alors recours à la borne supérieure ϵ_{n+1} de η_{n+1} . Bien que défini de façon heuristique, ce paramètre, une fois sommé sur chaque nouveau DDL correspondant au premier raffinement du maillage fournit un estimateur d'erreur globale efficace, généralement surestimé.

L'évaluation de ϵ_{n+1}^2 entraîne le calcul du résidu défini par la relation (8.15). Le champ de déplacement \hat{u} calculé par éléments finis n'a généralement pas un degré de continuité suffisant pour que le résidu soit continu.

Pour éviter toute difficulté, le terme $\int_{\Omega} r_j r_j \, d\Omega$ est subdivisé en une intégration à l'intérieur des éléments (domaine Ω_e) et aux interfaces des éléments (zones I *Fig 8.3*)

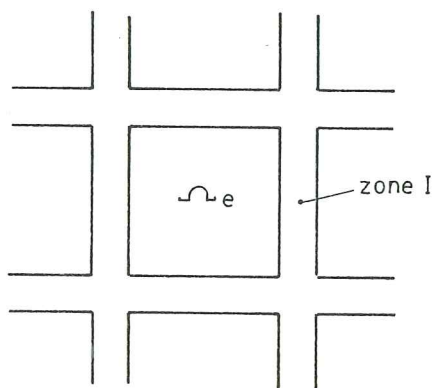


Figure 8.3.- Définition des zones intérieures Ω_e et des zones d'interfaces.

Sur chaque élément Ω_e , le résidu est continu et son intégration est immédiate. L'interface est de largeur nulle ($\delta \rightarrow 0$) et on peut écrire :

$$\int_I r_j r_j d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\int_0^{\delta} r_j dn_j \right)^2 d\Gamma = \int_{\Gamma} J^2 d\Gamma \quad (8.22.)$$

avec $J = \int_0^{\delta} r_j dn_j$

\underline{n} = normale à l'interface

$j = 1, 2$

En pratique, on peut relier J au saut de contraintes existant entre deux éléments finis projetés dans la direction appropriée (utilisation de 8.15, 8.22, des définitions de l'opérateur L et des contraintes). Dans la solution exacte, les contraintes sont continues et le saut de contraintes est nul sur toute interface intérieure au solide. Il est donc logique que le terme J apparaisse dans le calcul d'erreur lié aux éléments finis. Par ailleurs, le terme J couvre également les discontinuités existant entre les forces externes appliquées à la surface et les contraintes internes évaluées par éléments finis.

La forme finale de l'estimateur global basé sur les n_{n+1} s'écrit :

$$\|\underline{e}\|_E^2 = \sum_{n+1} \epsilon_{n+1}^2 \quad (8.23.)$$

$$= \sum_{n+1} \frac{\sum_e \int_{\Omega_e} N_{j_{n+1}} N_{j_{n+1}} d\Omega \cdot \int_{\Omega_e} r_j r_j d\Omega + \sum_k \int_{\Gamma_k} N_{j_{n+1}} N_{j_{n+1}} d\Gamma \cdot \int_{\Gamma_k} J^2 d\Gamma}{K_{n+1 \ n+1}}$$

$j = 1, 2$ cas bidimensionnel

$e = 1$, nombre total d'éléments couvrant le domaine

$n + 1 =$ ensemble des DDL correspondant à un premier raffinement du maillage.

$k = 1$, nombre total d'interfaces (internes et appartenant au contour)

Cet estimateur est d'usage aisé dans un cadre d'éléments hiérarchiques (h-version). Dans un code classique, il implique l'introduction des diverses fonctions $N_{j_{n+1}}$ et du terme de rigidité $K_{n+1 \ n+1}$ correspondant.

Rappelons que quel que soit l'estimateur d'erreur utilisé, le taux de convergence vers un maillage optimum est généralement plus rapide pour la p-version (ER1, ER3, ER4, ER5). Cette version a cependant le désavantage de supprimer l'interprétation physique aisée des inconnues a_n qui ne correspondent plus aux déplacements nodaux (ER23). La h-version est cependant plus efficace en présence de singularités internes à l'élément telle que la plasticité par exemple (ER4). Une combinaison des deux versions semble donc la meilleure stratégie ; cela entraîne cependant une complexité grandissante du code de calcul.

8.3.1.3. Estimateur général - méthode des éléments finis classiques linéaires (ER3 et ER10).

Nous traitons le même système d'équations différentielles (8.4) que dans le paragraphe précédent (8.3.1.2.) et les hypothèses de base utilisées pour établir l'estimateur sont identiques :

- a) seuls les DDL constituant un premier raffinement du maillage sont pris en compte pour évaluer l'erreur globale ;
- b) une seule itération est utilisée dans la résolution du problème relatif au maillage raffiné (éq. 8.19.b).

On retrouve par un chemin légèrement différent le résultat (8.21) :

$$\eta_{n+1}^2 = \frac{\left(\int_{\Omega} N_{j, n+1} r_j d\Omega \right)^2}{K_{n+1, n+1}} \quad j = 1, 2 \quad (8.24.)$$

Cependant, les auteurs (KELLY, CAGO, ZIENKIEWICZ et BABUSKA) réussissent ensuite à exclure les termes $N_{j, n+1}, K_{n+1, n+1}$, pour les remplacer par des paramètres plus faciles d'accès tels que la taille de l'élément h et le degré polynomial des fonctions d'interpolation p .

Nous ne reproduirons pas ici la démonstration des estimateurs d'erreur proposés. Elle est disponible en ER3, nous insistons cependant sur les éléments nécessaires au développement :

- le fait que l'erreur \underline{e} (8.11) satisfasse les équations initiales (8.4) où le vecteur force interne \underline{f} est remplacé par le résidu \underline{r} (8.15) et où les tractions de surface \underline{q} sont légèrement modifiées :

$$L \underline{e} + \underline{r} = 0 \quad \text{pour } \underline{x} \in \Omega \quad (8.25.a)$$

$$M \underline{e} + (\underline{q} - M \hat{u}) = 0 \quad \text{pour } \underline{x} \in \Gamma_q \quad (8.25.b)$$

Etant donné la discontinuité du résidu \underline{r} , la première relation (8.25.a) est généralement vérifiée séparément à l'intérieur des éléments et à leurs interfaces (démonstration ER3, ER29) ;

- les propriétés des vecteurs propres et valeurs propres
- pour le cas unidimensionnel, le fait que l'erreur nodale e_i soit nettement inférieure à la norme énergétique de l'erreur $\|e\|_E$:

$$|e_i| \leq c h^p \|e\|_E \quad (8.26.)$$

i = noeud considéré

h = dimension de l'élément

p = degré d'interpolation

c = constante indépendante de la solution \hat{u}

$\|e\|$ = norme énergétique de l'erreur (8.14).

Ceci entraîne l'absence d'un terme J traduisant la discontinuité des contraintes entre éléments ;

- pour le cas bidimensionnel, on se base sur la superposition des cas unidimensionnels. Deux hypothèses supplémentaires sont introduites :
 - taille constante des éléments
 - subdivision en parts égales entre éléments du saut de contraintes aux interfaces.

Finalement la norme énergétique de l'erreur est définie pour chaque élément :

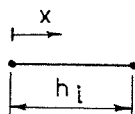
– cas 1 – D

$$\|e\|_{EI_i}^2 = \frac{h_i^2}{\pi^2 p^2} \int_{I_i} r^2 dx \quad (8.27.)$$

p = degré d'interpolation

Figure 8.4.

Elément I_i



– cas 2 – D

$$\| \underline{\epsilon} \|_{\mathbb{E}}^2 \Omega_e = \frac{h^2}{24 ap} \int_{\Omega_e} r_j r_j d\Omega + \frac{h}{ap} \int_{\Gamma_k} J^2 d\Gamma \quad (8.28.)$$

h = dimension constante des éléments

p = degré d'interpolation, la formule a été vérifiée expérimentalement pour $p \leq 5$

a = constante dépendant de la nature du problème

et donc des opérateurs L et M $\left(a = \frac{E}{1 - \nu}$ pour

un cas élastique isotrope)

Γ_k = interface entre élément ou avec le contour

J = saut des contraintes (8.22.)

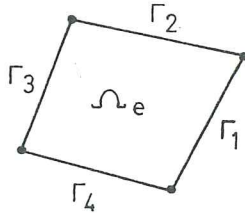


Figure 8.5.

Elément Ω_e

L'estimateur global absolu est obtenu par la somme de l'erreur sur tous les éléments NB. Formule exacte pour une analyse linéaire et uniquement approchée dans un cas non linéaire (ER16).

L'utilisation d'une valeur relative est nécessaire pour interpréter cette erreur. L'estimation de l'énergie exacte soit $\sqrt{\| \hat{u} \|_{\mathbb{E}}^2 + \| \underline{\epsilon} \|_{\mathbb{E}}^2}$ permettra de définir un **estimateur d'erreur global en pourcent** :

$$\eta = \frac{\| \underline{\epsilon} \|_{\mathbb{E}}}{\sqrt{\| \hat{u} \|_{\mathbb{E}}^2 + \| \underline{\epsilon} \|_{\mathbb{E}}^2}} \cdot 100 \quad (8.30.)$$

Afin de vérifier la qualité de l'estimateur d'erreur (8.29), on définit son efficacité par le paramètre θ .

$$\theta = \frac{\| \underline{\epsilon} \|_{\mathbb{E}}}{\| \underline{\epsilon} \|_{\text{exacte}}} \quad (8.31.)$$

On aimerait avoir les propriétés suivantes :

- a) $\theta \geq 1$: l'erreur est surestimée, la situation est sécuritaire
- b) $\theta \rightarrow 1$: en cas de raffinements successifs, on tend vers la solution exacte.

Si **a** et **b** sont vérifiés pour le cas 1-D, seul **b** l'est pour le cas 2-D. Pour résoudre ce problème, un facteur correcteur K_2 a été établi sur base de propriétés de l'estimateur démontrées par BABUSKA et RHEINBOLD uniquement dans le cas linéaire

$$\text{Pour } \forall \text{ élément } \Omega_e : \|\underline{e}\|_{E\Omega_e}^* = K_2 \|\underline{e}\|_{E\Omega_e} = \left(1 + \alpha \frac{\|\underline{e}\|_{E\Omega_e}}{\|\hat{u}\|_{E\Omega_e}}\right) \|\underline{e}\|_{E\Omega_e} \quad (8.32.)$$

avec $\alpha = 2$ (paramètre déterminé par l'expérience).

Les valeurs corrigées $\|\underline{e}\|_E^*$ et η^* ainsi obtenues sont effectivement surestimées et sécuritaires.

Remarques :

1. Les deux estimateurs d'erreur définis au niveau d'éléments bidimensionnels (8.23) et (8.28) montrent l'importance des sauts de contraintes entre éléments.
Ils confirment l'hypothèse très répandue parmi les ingénieurs que ces discontinuités sont une mesure de l'erreur locale des contraintes.

2. Un indicateur local d'erreur précisant les zones à remailler est facilement accessible. Si on définit :

– $\bar{\eta}$ le pourcentage maximum d'erreur admis

$$- \|\underline{e}\|_m = \frac{\bar{\eta} \|\underline{u}\|_E}{m} \quad (8.33.) \text{ l'erreur moyenne autorisée par élément}$$

m = nombre total d'éléments

$$- \|\underline{u}\|_E = \sqrt{\|\hat{u}\|_E^2 + \|\underline{e}\|_E^2} \text{ estimation de l'énergie exacte}$$

on obtient : (8.34.)

$$\xi = \frac{\|\underline{e}\|_{E\Omega_e}}{\|\underline{e}\|_m} \left\{ \begin{array}{l} \leq 1 \text{ erreur acceptable} \\ > 1 \text{ plus } \xi \text{ est grand, plus l'erreur locale est excessive et} \\ \text{remaillage est nécessaire} \end{array} \right.$$

En fait une répartition égale de l'erreur sur tous les éléments constitue un maillage optimum. Dans ce but la taille h des nouveaux éléments est reliée à ξ et à la taille actuelle

h_e des éléments

$$h = \frac{h_e}{\xi^{1/p}} \quad (p = \text{degré d'interpolation}) \quad (8.35.)$$

Cette formule conduit à raffiner certaines zones et adopter un maillage plus grossier là où la finesse du maillage était excessive.

3. L'implantation d'estimateurs (8.27), (8.28) et (8.32) définie dans ce paragraphe, est possible dans des codes classiques non hiérarchiques. Cependant même s'il y a progrès par rapport à l'estimateur (8.25) du paragraphe précédent, les développements et les calculs systématiques nécessaires restent importants.

8.3.1.4. Un estimateur borne supérieure de l'erreur - analyse linéaire (ER13, ER14).

Dans la méthode aux différences finies, l'erreur de discrétisation est assimilée aux termes tronqués de la série de TAYLOR approchant les opérateurs différentiels. L'injection de cette erreur de troncature dans l'équation à résoudre permet d'améliorer la solution calculée (ER11). En pratique, l'erreur est toujours sous-estimée car tous les termes manquants de la série de TAYLOR ne peuvent être pris en compte.

Le problème d'un estimateur d'erreur sous-estimé n'est donc pas propre à la méthode des éléments finis (cf. estimateurs définis précédemment). KELLY et ses collaborateurs ont essayé de définir des bornes supérieure et inférieure de la solution exacte, valables quelle que soit la méthode de calcul (Eléments finis, Différences Finies ou Eléments Frontières, ER13). Ils présentent leur développement pour le cas particulier des équations d'équilibre :

$$\begin{cases} L \underline{u} + \underline{f} = 0 \\ M \underline{u} + \underline{q} = 0 \\ \underline{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \underline{u} + \underline{f} = 0 & \text{pour } \underline{x} \in \Omega \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{n}} + \underline{q} = 0 & \text{pour } \underline{x} \in \Gamma_q \\ \underline{u} = 0 & \text{pour } \underline{x} \in \Gamma_u \end{cases} \quad (8.36.)$$

Kelly définit la norme de la solution \underline{u} de la façon suivante :

$$B(\underline{u}, \underline{u}) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad \text{avec } i = 1, 2 \quad (8.37.)$$

On démontre facilement (ER14) que cette norme représente le double de l'énergie conventionnelle de déformation pour le cas traité. Par ailleurs, la signification des notations

\underline{u} , \hat{u} , \underline{e} définies au paragraphe 8.3.1.2 est conservée.

Par définition (8.11) on a la relation :

$$B(\underline{u}, \underline{u}) = B(\hat{u} + \underline{e}, \hat{u} + \underline{e}) \quad (8.38.)$$

et grâce à (8.37), il vient successivement :

$$\begin{aligned} B(\underline{u}, \underline{u}) &= B(\hat{u}, \hat{u}) + 2 B(\hat{u}, \underline{e}) + B(\underline{e}, \underline{e}) \\ &= B(\hat{u}, \hat{u}) + 2 (B(\underline{u}, \underline{u}) - B(\hat{u}, \hat{u})) + B(\underline{e}, \underline{e}) \end{aligned} \quad (8.39.)$$

Par conséquent, si on a évalué une borne supérieure $B_s(\underline{e}, \underline{e})$ et inférieure $B_i(\underline{e}, \underline{e})$ de la norme de l'erreur, on peut calculer une borne supérieure $B_s(\underline{u}, \underline{u})$ et inférieure $B_i(\underline{u}, \underline{u})$ de la norme de la solution exacte. On définit alors une estimation d'erreur globale en pourcent :

$$\eta = \frac{B_s(\underline{u}, \underline{u}) - B_i(\underline{u}, \underline{u})}{B(\hat{u}, \hat{u})} \cdot 100 \quad (8.40)$$

Nous présentons ci-après l'application de la méthode de KELLY au cas des éléments finis type déplacement.

Borne inférieure $B_i(\underline{e}, \underline{e})$.

L'inégalité de SCHWARTZ permet d'écrire :

$$[B(\underline{e}, \hat{u})]^2 < B(\underline{e}, \underline{e}) \cdot B(\hat{u}, \hat{u}) \quad (8.41.)$$

soit avec la relation (8.39.) :

$$\frac{B(\underline{u}, \hat{u}) - B(\hat{u}, \hat{u})}{B(\hat{u}, \hat{u})} < B(\underline{e}, \underline{e}) \quad (8.42.)$$

Les propriétés des éléments finis du type déplacement entraînent l'égalité des termes $B(\underline{u}, \hat{u})$ et $B(\hat{u}, \hat{u})$ et on peut donc prendre $B_i(\underline{e}, \underline{e}) = 0$.

Dès lors, la norme fournie par un calcul éléments finis $B(\hat{u}, \hat{u})$ constitue une borne inférieure $B_i(\underline{u}, \underline{u})$ de la norme de la solution exacte (8.39).

Cette conclusion concerne le cas habituel de déplacements imposés nuls et de forces internes et de traction de surface non nulles. Puisque la norme employée représente le double de

l'énergie de déformation, on a simplement redémontré que l'énergie calculée par les éléments finis de type déplacement est sous-estimée, ce qui est bien connu (EF3).

Borne supérieure $B_s(\mathbf{e}, \mathbf{e})$.

On sait que dans les conditions générales définies ci-dessus, les éléments finis type équilibre constituent une approche duale et définissent une borne supérieure de l'énergie. Les détails du développement permettant d'établir la borne supérieure de l'erreur sont disponibles en ER13 et ER14. Afin de ne pas alourdir cette revue bibliographique, nous nous contenterons de fournir les éléments nécessaires à la démonstration :

- L'erreur $\underline{\mathbf{e}}$ vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{L}\underline{\mathbf{e}} + \underline{\mathbf{r}} = 0 & \text{pour } \underline{\mathbf{x}} \in \Omega \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} + \left(\underline{\mathbf{q}} - \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{n}}} \right) = 0 & \text{pour } \underline{\mathbf{x}} \in \Gamma_q \\ \underline{\mathbf{e}} = 0 & \text{pour } \underline{\mathbf{x}} \in \Gamma_u \end{cases} \quad (8.43.)$$

Cette propriété a déjà été introduite pour définir l'estimateur précédent (8.27a, b). Elle est simplement adaptée au choix particulier du système d'équation (8.36) ;

- L'analyse duale appliquée aux équations (8.43) permet de définir une fonctionnelle I qu'il faut minimiser pour obtenir une borne supérieure optimum de l'erreur ;
- KELLY démontre que le problème général (8.43) peut être résolu élément par élément. La partie discontinue du résidu doit alors être partitionnée entre éléments à interface commune de telle façon que le résidu soit auto-équilibré sur chaque élément. On a donc :

$$\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{r}}^* + \underline{\rho} \quad (8.44.)$$

– avec $\underline{\mathbf{r}}^*$ = partie continue du résidu définie à l'intérieur des éléments Ω_e

$\underline{\rho}$ = partie discontinue du résidu défini sur le pourtour Γ_e des éléments

$$\underline{\rho}_j = \underline{\rho}_j^{-i} + \underline{\rho}_j^{-k} \quad (8.45.)$$

– avec partition du résidu existant à l'interface Γ_j entre les éléments Ω_{ei} et Ω_{ek}

L'expression de l'auto-équilibre du résidu sur l'élément Ω_{ei} est la suivante :

$$\int_{\Omega_{ei}} \underline{r}^* d\Omega - \int_{\Gamma_{ei}} \underline{\rho}^{-i} d\Gamma = 0 \quad (8.46.)$$

- Pour chaque élément, KELLY montre que la norme de l'erreur $B(\underline{e}, \underline{e})$ vérifie la fonctionnelle I sans la minimiser. Par conséquent, une borne supérieure de l'erreur relative au système global (8.43) peut être obtenue en sommant la contribution de chaque élément :

$$B_s(\underline{e}, \underline{e}) = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_{ei}} \left(\frac{\partial \underline{e}}{\partial x_i} \frac{\partial \underline{e}}{\partial x_i} \right) d\Omega_e \quad (8.47.)$$

m = nombre total d'éléments Ω_e recouvrant le domaine Ω

En pratique, plusieurs problèmes subsistent pour utiliser cette formulation :

- même pour un cas simple (élément plan linéaire à 4 noeuds) la répartition du résidu d'interface assurant un auto-équilibrage des résidus par élément n'est pas unique (ER14). La solution finalement retenue pour déterminer les coefficients de répartition du résidu d'interface est de minimiser la fonctionnelle suivante :

$$H = \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega_{ei}} \underline{r}^* d\Omega - \int_{\Gamma_{ei}} \underline{\rho}^{-i} d\Gamma \right)^2 \quad (8.48.)$$

KELLY utilise un algorithme de gradient conjugué et arrive à obtenir H nul selon la précision de l'ordinateur ;

- l'erreur exacte \underline{e} étant inconnue a priori, KELLY définit les fonctions :

$$\Phi = \frac{\partial \underline{e}}{\partial x_1} \quad \Psi = \frac{\partial \underline{e}}{\partial x_2} \quad (8.49.)$$

utiles pour évaluer $B_s(\underline{e}, \underline{e})$ (8.47). Suite à l'analyse duale réalisée (ER13, ER14), il sait que ces fonctions doivent vérifier les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} &= -\underline{r} && \text{pour } \underline{x} \in \Omega \\ \Phi n_1 + \Psi n_2 &= \underline{\rho} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial \underline{n}} && \text{pour } \underline{x} \in \Gamma_q \end{aligned} \quad (8.50.)$$

où \underline{n} est la normale extérieure unitaire au solide. Par conséquent, il choisit $\underline{\phi}$ et $\underline{\psi}$ satisfaisant à priori ces relations, et contenant un certain nombre de constantes. Pour chaque élément, un système linéaire d'équations permet de définir ces constantes à partir des conditions de frontières découlant de (8.50.b).

- si pour éviter la minimisation de la fonctionnelle (8.48.), on utilise un facteur simple de répartition de ρ , l'autoéquilibrage des résidus n'est plus assuré. Le système d'équations linéaires cités plus haut n'est plus valable, il faut recourir à la méthode des moindres carrés pour obtenir une estimation des constantes des fonctions $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Psi}$. Dans ce cas, la propriété de borne supérieure de la formule n'est plus démontrée ; il faut avoir recours à l'expérience numérique.

8.3.1.5. Conclusions.

Les estimateurs d'erreur basés sur les résidus ont été largement développés dans le cadre du calcul linéaire. Leur extension au cas non linéaire se heurte à une difficulté de taille : l'erreur n'est plus bornée par le résidu. On peut par exemple réduire la norme du résidu sans nécessairement réduire l'erreur calculée spatiale (ER26).

Abandonnant les estimateurs basés sur le résidu, les théoriciens se sont penchés sur les problèmes non linéaires. Malheureusement pour nous, les chercheurs tels que BABUSKA et RHEINBOLT s'attachent plus particulièrement aux études paramétriques conduisant à la définition d'une surface d'équilibre traduisant le comportement et la stabilité du système étudié (ER8 - 1982 -, ER9 - 1986). Le premier travail réside évidemment dans le choix des paramètres (déformation, charge, ...) constituant le système local de coordonnées de cette surface d'équilibre. L'erreur sur l'évolution de la forme de cette surface sera traduite par l'erreur de points spécifiques tels que les bifurcations ou l'erreur sur des chemins parcourus sur cette surface.

Nous n'avons pas approfondi cet aspect, car il nous semble inutile de brûler les étapes. Déterminer de façon précise une surface résumant par exemple la relation entre le taux de déformation maximum, la vitesse de déplacement des matrices et un paramètre relatif au matériau pour un cas pratique de formage est utopique à l'heure actuelle. Les temps de calcul relatifs à des conditions précises de chargement et de matériaux (soit la localisation d'un point de la surface précitée) sont toujours très importants.

8.3.2. L'estimateur simplifié de ZIENKIEWICZ.

8.3.2.1. Analyse linéaire (ER5).

ZIENKIEWICZ et ZHU traitent le problème linéaire élastique classique :

$$(8.4.) \quad \begin{cases} \mathbf{L} \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{f}} = 0 \\ \mathbf{M} \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{q}} = 0 \\ \underline{\mathbf{u}} = 0 \end{cases} \Rightarrow (8.51.) \quad \begin{cases} \mathbf{S}^T \underline{\mathbf{D}} \mathbf{S} \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{f}} = 0 & \text{pour } \underline{\mathbf{x}} \in \Omega \\ \mathbf{G} \underline{\mathbf{D}} \mathbf{S} \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{q}} & \text{pour } \underline{\mathbf{x}} \in \Gamma_q \\ \underline{\mathbf{u}} = 0 & \text{pour } \underline{\mathbf{x}} \in \Gamma_u \end{cases}$$

où \mathbf{S} = opérateur différentiel reliant les déformations aux déplacements nodaux :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{S} \underline{\mathbf{u}}$$

$\underline{\mathbf{D}}$ = matrice d'élasticité reliant les contraintes aux déformations : $\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathbf{D}} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$

\mathbf{G} = matrice ligne contenant les coefficients directeurs de la normale.

Ils ajoutent à l'erreur $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ sur les déplacements, l'erreur $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\sigma$ sur les contraintes et $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon$ sur les déformations :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad \text{et} \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\sigma = \underline{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (8.52.)$$

avec $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ tenseurs contraintes et déformations exactes et $\hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$, $\hat{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ tenseurs calculés par éléments finis.

On peut définir facilement la norme énergétique de l'erreur $\|\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_E$ (8.14) en fonction de $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\sigma$ et $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon$:

$$\|\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_E = \left(\int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{L} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega \right)^{1/2} \quad (8.14.)$$

$$= \left(\int_{\Omega} (\mathbf{S}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \underline{\mathbf{D}} (\mathbf{S}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \, d\Omega \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon^T \mathbf{D} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon \, d\Omega \right)^{1/2} \quad (8.53.a)$$

$$= \left(\int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\sigma^T \underline{\mathbf{D}}^{-1} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_\sigma \, d\Omega \right)^{1/2} \quad (8.53.B)$$

Définissons également une norme plus directe, la norme dite L_2 de l'erreur :

$$\| \underline{\varepsilon} \|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}^T \underline{\varepsilon} d\Omega \right)^{1/2} \quad (8.54.a)$$

$$\| \underline{\varepsilon}_{\sigma} \|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} \underline{\varepsilon}_{\sigma}^T \underline{\varepsilon}_{\sigma} d\Omega \right)^{1/2} \quad (8.54.b)$$

Quelle que soit la norme et l'erreur utilisée, on a la relation suivante exacte pour une analyse linéaire :

$$\| \underline{\varepsilon} \|^2 = \sum_{i=1}^m \| \underline{\varepsilon} \|_{\Omega_i}^2 \quad (8.55. ; \text{voir également } 8.29.)$$

avec m = nombre total d'éléments du maillage

$\| \underline{\varepsilon} \|_{\Omega_i}$ = norme de l'erreur sur l'élément Ω_i

Le calcul exact de $\underline{\varepsilon}_{\sigma}$ et $\underline{\varepsilon}_{\varepsilon}$ n'est généralement pas possible puisque pour les problèmes non académiques, les tenseurs exacts $\underline{\sigma}$ et $\underline{\varepsilon}$ sont inconnus. Cependant, on peut évaluer des tenseurs $\underline{\sigma}^*$ et $\underline{\varepsilon}^*$ plus précis que ceux obtenus par la méthode des éléments finis $\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}$. Dès 1985, ZIENKIEWICZ proposait la méthode suivante (ER18) :

- soit le tenseur $\underline{\sigma}^*$ continu sur le solide étudié
- supposons que ce tenseur peut être défini par ses valeurs nodales $\underline{\sigma}^*$ grâce aux fonctions d'interpolations \underline{N} utilisées pour les déplacements (8.6).

$$\underline{\sigma}^* = \underline{N} \bar{\underline{\sigma}}^* \quad (8.55.)$$

- imposons l'égalité de $\underline{\sigma}^*$ et $\hat{\underline{\sigma}}$ au sens moyen :

$$\int_{\Omega} \underline{N}^T (\underline{\sigma}^* - \hat{\underline{\sigma}}) d\Omega = 0 \quad (8.56.)$$

soit en tenant compte de (8.55.) :

$$\int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{N} \bar{\underline{\sigma}}^* d\Omega = \int_{\Omega} \underline{N}^T \hat{\underline{\sigma}} d\Omega$$

$$\underline{M} \bar{\underline{\sigma}}^* = \underline{B} \quad (8.57.)$$

\underline{M} = matrice semblable à la matrice de masse cohérente

$$\underline{B} = \int_{\Omega} \underline{N}^T \hat{\underline{\sigma}} d\Omega$$

= matrice, second membre du système linéaire.

- pour simplifier la résolution du système (8.57), la matrice \underline{M} est généralement diagonalisée.

Expliquée pour la recherche de $\underline{\sigma}^*$, cette méthode peut bien entendu être appliquée pour calculer $\underline{\varepsilon}^*$. La matrice d'élasticité \underline{D} permet d'ailleurs de passer facilement du champ des contraintes au champs des déformations ou inversement.

On peut à présent calculer une valeur approchée de l'erreur :

$$\underline{e}_\sigma \approx \underline{\sigma}^* - \hat{\underline{\sigma}} \quad \underline{e}_\varepsilon \approx \underline{\varepsilon}^* - \hat{\underline{\varepsilon}} \quad (8.58.)$$

ce qui permet d'évaluer la norme énergétique $\|\underline{e}\|_E$ et la norme L_2 de l'erreur $\|\underline{e}\|_{L_2}$.

RANK a d'ailleurs démontré (ER5) que la norme L_2 de \underline{e}_σ est égale à la norme énergétique définie au § 8.3.1.3. (équation 8.28) pour un élément bilinéaire. Comme on l'a vu précédemment (8.30), on peut définir à partir de la norme énergétique de l'erreur, un estimateur d'erreur global en pourcent. A nouveau, l'expérience montre que cet estimateur est sous-estimé et les auteurs proposent les facteurs correcteurs résumés dans le tableau (fig. 8.6.).





1,1		1,3		1,6		1,4	
-----	---	-----	---	-----	--	-----	---

Figure 8.6.- Tableau des facteurs correcteurs suggérés en ER5.

8.3.2.2. Analyse non linéaire (ER16).

Sans entrer dans les détails d'une formulation, rappelons que les variables du problème sont à présent :

- la vitesse \underline{v}
- le taux de déformation $\dot{\underline{\varepsilon}}$ avec $\dot{\underline{\varepsilon}} = \underline{S} \underline{v}$
- la contrainte $\underline{\sigma}$ avec $\underline{s} = \underline{A} \dot{\underline{\varepsilon}}$ pour la formulation du type NORTON–HOFF présentée en ER16 (\underline{s} = déviateur de $\underline{\sigma}$)

Le signe \wedge indiquera les valeurs obtenues par la méthode des éléments finis et l'on définit :

$$\text{– les erreurs } \underline{e}_\varepsilon = \dot{\underline{\varepsilon}} - \hat{\dot{\underline{\varepsilon}}} \quad \text{et} \quad \underline{e}_\sigma = \underline{\sigma} - \hat{\underline{\sigma}} \quad (8.48.)$$

- la norme de l'énergie de dissipation totale qui remplace la norme de l'énergie de déformation $\|\underline{u}\|_E$ de l'estimation en analyse linéaire

$$\|D\| = \left[\int_{\Omega} \underline{\sigma}^T \dot{\underline{\varepsilon}} d\Omega \right]^{1/2} \quad (8.59.)$$

- la norme énergétique de l'erreur pour une analyse viscoplastique :

$$\|\underline{e}\|_E = \left(\int_{\Omega} (\underline{\sigma} - \hat{\underline{\sigma}})^T (\dot{\underline{\varepsilon}} - \hat{\dot{\underline{\varepsilon}}}) d\Omega \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} \underline{e}_{\sigma}^T \underline{e}_{\dot{\varepsilon}} d\Omega \right)^{1/2} \quad (8.60)$$

Comme en analyse linéaire (8.53), on peut calculer $\|\underline{e}\|_E$ à partir d'une seule erreur \underline{e}_{σ} ou $\underline{e}_{\dot{\varepsilon}}$ grâce à la relation connue entre $\underline{\sigma}$ et $\dot{\underline{\varepsilon}}$. En pratique les trois formes de $\|\underline{e}\|_E$:

$$\|\underline{e}\|_E = f(\underline{e}_{\sigma}, \underline{e}_{\dot{\varepsilon}}) ; \|\underline{e}\|_E = g(\underline{e}_{\sigma}) ; \|\underline{e}\|_E = h(\underline{e}_{\dot{\varepsilon}}) \quad (8.61.)$$

ne sont pas équivalentes car l'opérateur A reliant $\underline{\sigma}$ à $\dot{\underline{\varepsilon}}$ contient des valeurs approchées.

L'estimation des erreurs \underline{e}_{σ} , $\underline{e}_{\dot{\varepsilon}}$ est obtenue à l'aide de champs $\underline{\sigma}^*$, $\dot{\underline{\varepsilon}}^*$ plus précis que $\underline{\sigma}$ et $\dot{\underline{\varepsilon}}$ comme expliqué pour le cas linéaire.

Dans tous les cas traités par ZIENKEWICZ, l'estimateur d'erreur global basé sur \underline{e}_{σ} s'est avéré le plus efficace, c'est-à-dire la plus proche de l'erreur réelle.

Conclusions.

1. Un indicateur d'erreur local peut facilement être défini de façon analogue à ce qui a été présenté pour l'estimateur général (§ 8.3.1.3. équation 8.34).
2. L'implantation dans un code classique linéaire ou non linéaire implique des développements très réduits. Les temps de calculs de l'erreur sont faibles.

Le fondement théorique de cet estimateur est assuré pour le cas linéaire puisqu'il est équivalent à l'estimateur général (8.3.1.3) pour un élément bilinéaire. Pour terminer, son extension très aisée au cas non linéaire en fait un estimateur idéal pour les praticiens. Comme nous le verrons au § 8.4, c'est un estimateur de cette famille qui a été introduit dans le code LAGAMINE.

8.3.3. Etude de l'énergie de déformation.

L'énergie interne ou énergie de déformation est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega} u_d \, d\Omega \quad (8.62.)$$

où u_d représente l'énergie de déformation spécifique exacte. La méthode des éléments finis cinématiquement admissibles permet d'obtenir une borne inférieure de l'énergie de déformation U pour un solide soumis à des forces internes et tractions de surfaces avec des déplacements imposés nuls (EF3). L'énergie calculée U tend asymptotiquement vers l'énergie exacte U pour un nombre infini de degrés de liberté. En pratique, on cherche donc à intégrer le plus précisément possible l'énergie spécifique et l'utilisation d'un maillage raffiné dans les zones de fortes variations de u_d est en accord avec ce principe.

Dans un cadre d'éléments hiérarchiques de type h, MELOSH (ER22 : 1977) étudie la variation de l'énergie potentielle totale π suite à l'introduction de nouveaux degrés de liberté (DDL). Il montre que pour un élément, une estimation de cette variation est obtenue par la différence entre l'énergie interne calculée avec un nombre réduit ou non de déplacements nodaux.

$$\left(\frac{\Delta\pi}{\Delta u} \right)_{\Omega_e} = \int_{\Omega_e} u_d^c \, d\Omega - \int_{\Omega_e} u_d^r \, d\Omega \quad (8.63.)$$

où u_d^c = énergie interne spécifique calculée dans l'élément classique
 u_d^r = énergie interne spécifique calculée avec un nombre réduit de DDL

$$\left(\frac{\Delta\pi}{\Delta u} \right)_{\Omega_e} = \text{variation de l'énergie totale suite à l'introduction de DDL}$$

En pratique, MELOSH utilise des éléments plans à 8 noeuds et il évalue $\left(\frac{\Delta\pi}{\Delta u} \right)_{\Omega_e}$ en mesurant la différence entre l'énergie interne spécifique u_d au centre de l'élément et cette valeur u_d en tout autre point de l'élément. Cette méthode constitue effectivement une mesure de l'énergie interne fournie par les plus hauts modes de déplacements de l'élément.

En observant les isovaleurs de $\left(\frac{\Delta\pi}{\Delta u} \right)_{\Omega_e}$, MELOSH détermine les zones où un maillage raffiné est nécessaire.

PEANO (ER23 : 1979) développe des idées semblables dans le cadre des éléments hiérarchiques de type p.

SHEPHARD (ER7 : 1980) a développé une procédure de maillage adaptatif pour éléments finis classiques, basée sur le raffinement semi-automatique des zones à fortes variations de l'énergie interne. Le fondement théorique de sa méthode est une formule établie dans sa thèse (ER 30) qui définit une borne de l'erreur pour un élément Ω_e

$$|u_d - \hat{u}_d|_{\Omega_e} \leq C_j h_e^k |D^k u_d|_{\Omega_e} \quad (8.64.)$$

\hat{u}_d : énergie spécifique de déformation calculée par éléments finis

h_e : taille de l'élément considéré

C_j : constante inconnue pour un problème et un maillage donné

k : ordre des fonctions d'interpolation de l'élément

D^k : opérateur différentiel d'ordre k .

Pour des éléments linéaires pour lesquels \hat{u}_d est une constante et k vaut un, l'erreur est proportionnelle à la taille de l'élément multipliée par la dérivée première de u_d . La figure 8.5 illustre effectivement l'augmentation de précision obtenue lorsque les éléments de petite taille sont placés où les variations de u_d sont les plus fortes.

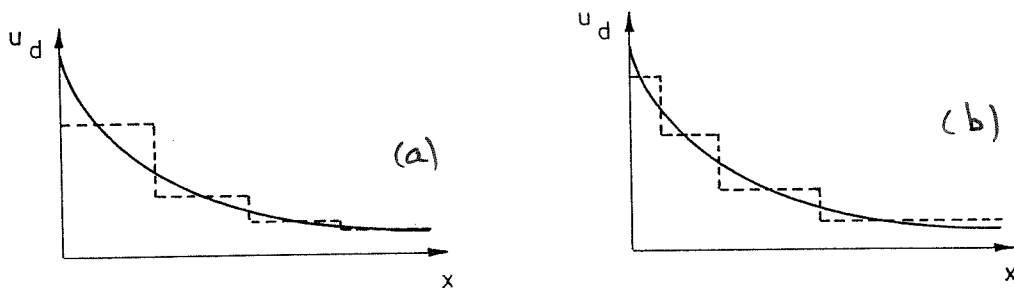


Figure 8.7.- Problème unidimensionnel :

— solution exacte ---- solution par 4 éléments finis linéaires (a égaux, b inégaux). (ER7)

Pour les éléments quadratiques, la formule (8.64) entraîne l'application d'un opérateur dérivée d'ordre 2 à l'énergie de déformation u_d . Le calcul des dérivées secondes est malaisé et SHEPHARD l'évite en affirmant que dans les problèmes pratiques les zones où $|D^1 u_d|$ et $|D^2 u_d|$ sont importants, coïncident.

Dans la procédure de maillage semi-automatique utilisée par SHEPHARD, la densité du maillage est déterminée par la position des noeuds (N_C) sur le contour C_1 et sur certaines courbes C_2 séparant les régions à mailler. Suite à une analyse réalisée avec un maillage grossier, la valeur de \hat{u}_d est connue en certains points de ces courbes. A l'aide de fonctions splines cubiques, SHEPHARD détermine une valeur approchée de l'énergie u_d le long de C_1, C_2 .

Il positionne alors les noeuds N_C de telle façon que la variation de u_d soit constante entre deux noeuds. Dans le maillage obtenu à partir de ces données, les zones de fortes variations de u_d coïncident effectivement avec les zones fortement raffinées du maillage.

BOTKIN (ER20 : 1983 et ER21 : 1986) utilise également le critère local (8.64). La procédure de raffinement du maillage est cependant différente de celle de SHEPHARD.

ODEN et DEMKOWICZ (ER25 : 1985 ; ER26 : 1986) présentent une version approfondie de ce type d'approche. En explicitant les termes constituant l'énergie de déformation, ils obtiennent pour un problème d'élasticité plane et des éléments bilinéaires :

$$\| \underline{e} \|_{E\Omega_e} < C h_e \left[\int_{\Omega_e} 2(G + \lambda) (u_{1,11}^2 + u_{2,22}^2) + 2G (u_{1,22}^2 + u_{2,11}^2) d\Omega \right]^{1/2} \quad (8.65.)$$

$\| \underline{e} \|_E^2$ = norme énergétique de l'erreur définie précédemment (8.14.)

G, λ = coefficients de lamé

u_1, u_2 = déplacements selon les 2 directions

$,11, ,22$ = dérivées secondes selon les 2 directions

C = constante fonction de l'élément, de sa taille et de sa forme.

Cette formule requiert l'estimation des dérivées seconde du déplacement. Les auteurs proposent trois techniques pour obtenir ces dérivées :

- une méthode basée sur le saut des déformations à l'interface des éléments. Cette approche conduit à la forme suivante de (8.65) :

$$\| \underline{e} \|_{E\Omega_e}^2 < C' h_e^2 \int_{\Gamma_k} J^2 d\Gamma \quad (8.66.)$$

où J traduit le saut des contraintes existant à l'interface de l'élément (8.22). On retrouve en partie l'estimateur du paragraphe 8.3.1.3. équation (8.28). Cependant des différences non négligeables subsistent : la partie continue du résidu n'intervient pas et un facteur supplémentaire h_e apparaît ;

- une formule de différence finie calculant les dérivées secondes à partir des valeurs de \underline{u} connues aux noeuds voisins (méthode inadéquate pour un maillage irrégulier) ;
- l'utilisation de fonctions d'extraction (ER25, ER26) qui permettent d'obtenir des résultats précis mais entraînent de nombreux développements et des temps de calcul importants.

Conclusions

L'approche simplifiée de SHEPHARD rencontre certainement les habitudes des ingénieurs, par ailleurs, elle entraîne des développements réduits du code de calcul. Cependant, elle présente le grand désavantage de ne pas fournir un estimateur réel d'erreur permettant de se situer par rapport à la solution réelle. **Cette méthode indique seulement les zones où un maillage fin est nécessaire, SANS TENIR COMPTE DE L'ETAT DE RAFFINEMENT DU MAILLAGE EXISTANT.**

La méthode proposée par MELOSH ne fournit pas non plus d'estimateur précis de l'erreur. Cependant si la variation d'énergie interne suite à l'introduction de nouveaux degrés de liberté tend vers zéro, on suppose que l'on tend vers la solution exacte (voir discussion sur l'estimateur η_{n+1} paragraphe 8.3.1.2). Par ailleurs, cette méthode tient compte de l'état de raffinement du maillage existant pour déterminer les zones à raffiner.

L'approche présentée par DEMKOWICZ semble plus précise puisqu'elle donne une borne supérieure de l'erreur. La constante intervenant dans la définition de cette borne (8.65) reste cependant assez floue selon les articles que nous avons pu consulter. Cette approche implique des développements du code plus importants que les méthodes de SHEPHARD, BOTKIN et MELOSH. Elle entraîne de plus, des temps de calculs plus longs puisqu'il faut évaluer une dérivée seconde au lieu d'une dérivée première.

L'étude de l'énergie de déformation est importante pour les analyses linéaires. Son extension à l'analyse non linéaire adaptée au formage des métaux entraîne cependant une révision complète de cette approche. Dans ce cas en effet, l'énergie de déformation n'a plus la même importance et on travaille le plus souvent avec la dissipation de l'énergie (voir paragraphe 8.3.2.2.).

8.3.4. Estimateurs basés sur les contraintes.

Selon les développements de KELLY (paragraphe 8.3.1.3., équation 8.28), considérer uniquement les sauts de contraintes entre éléments conduit à négliger une partie de l'erreur et l'estimateur d'erreur obtenu est difficile à interpréter. Cette difficulté n'a guère empêché le développement d'estimateurs basés uniquement sur les contraintes.

- ER24 - 1985 : YOKOHAMA étudie la simulation de problèmes élastoplastiques bidimensionnels. Il dispose d'un mailleur automatique d'éléments triangulaires linéaires. Son approche n'utilise pas d'éléments hiérarchiques mais des maillages indépendants créés par son mailleur. Sa méthode de résolution du système d'équations linéaires obtenu est itérative, elle permet de partir de la solution du précédent maillage et d'obtenir une convergence très rapide. Décrivons sa procédure :

- par une série d'analyses successives correspondant à des maillages de plus en plus fins, il localise la contrainte maximale $\underline{\sigma}_{\max}^v$

- pour le dernier maillage étudié (étape v), il vérifie en tout point l'inégalité :

$$e = \frac{|\underline{\sigma}^v - \underline{\sigma}^{v-1}|}{|\underline{\sigma}^v|} \cdot \left| \frac{\underline{\sigma}^v}{\underline{\sigma}_{\max}^v} \right| < \theta \quad (8.67.)$$

e = estimation de l'erreur par rapport à la solution exacte.

$v, v-1$ = deux étapes successives du raffinement du maillage.

θ = erreur tolérée par l'utilisateur.

Pour démontrer la validité de son estimateur d'erreur ϵ , YOKOHAMA utilise une formule basée uniquement sur l'expérience :

$$\frac{\underline{\sigma}_{\max} - \underline{\sigma}_{\max}^v}{\underline{\sigma}_{\max}} \div \left(\frac{h}{a} \right)^k \quad k \in [1,2] \quad (8.68.)$$

où $\underline{\sigma}_{\max}$ = contrainte exacte maximum.

h = mesure de la taille des éléments.

a = grandeur caractéristique du problème.

Cette relation a été vérifiée pour des maillages réguliers d'éléments linéaires, triangulaires, carrés ou rectangles.

- ER15 - 1987 : ROBERTI et MELKANOV travaillent avec un code d'éléments triangulaires linéaires hiérarchiques de type h . Ils établissent l'erreur sur un élément dit "père" selon le saut des contraintes obtenu lorsque cet élément est divisé en éléments dits "fils". Ils démontrent l'exactitude de leurs estimateurs lorsque la taille des éléments tend vers zéro et qu'il n'y a pas de zone où la contrainte est constante. Le cas des zones où la contrainte est constante entraîne en effet toujours le calcul d'une erreur sous-estimée. Les propriétés géométriques des éléments (père-fils) (fig. 8.8) et la valeur constante de la contrainte sur chaque élément sont des piliers de la démonstration de validité de l'estimateur.

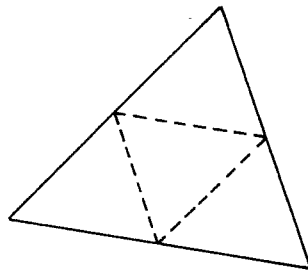


Figure 8.8.- élément père (—) - éléments fils (...).

Ces méthodes impliquent l'existence d'un code adapté à des études successives avec des maillages de plus en plus fins. Leur validité dans des cas généraux est loin d'être démontrée puisque la première méthode est basée sur une formule issue de l'expérience et la seconde traite un seul type d'élément.

Par contre, l'estimateur simplifié proposé par ZIENKIEWICZ couvre un domaine très vaste : analyse linéaire ou non, élément fini de type déplacement de géométrie quelconque. Cet estimateur aurait sa place dans ce paragraphe puisqu'il peut être calculé en se basant uniquement sur l'erreur des contraintes \underline{e}_σ (8.58 et 8.53b). HUANG (ER27) présente une simulation d'extrusion où cet estimateur permet de décider l'instant opportun pour remailler et de définir le nouveau maillage.

L'approche développée par MORGAN et ZIENKIEWICZ (ER16, ER17) dans le cadre de l'étude des fluides incompressibles nous paraît intéressante et transposable au domaine du formage des métaux. Elle peut se résumer de la façon suivante :

- choix d'une variable scalaire clé ρ qui caractérise la solution,
- calcul de l'erreur e entre la valeur exacte de ρ et sa valeur $\hat{\rho}$ par calcul. Un estimateur de e_I pour un élément linéaire est obtenu par la différence entre une approximation linéaire et quadratique de cette variable

$$e_{I_e} = \frac{1}{2} x (h - x) \frac{d^2 \hat{\rho}}{dx^2} \Big|_{\text{élément}} \quad (8.69.)$$

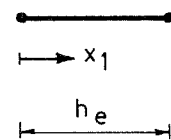


Figure 8.9.

- choix d'une norme de l'erreur sur l'élément :

$$|e_{I_e}| = \left(\int_0^h \frac{e_{I_e}}{h} dx \right)^{1/2} \cong \frac{1}{11} h^2 \frac{d^2 \hat{\rho}}{dx^2} \quad (8.70.)$$

L'extension au cas 2 D fait intervenir toutes les dérivées secondes de ρ . La notion d'erreur différente selon les directions envisagées apparaît. Cette information est exploitée par un mailleur spécialement adapté qui caractérise les éléments par leur taille et leur orientation.

Dans le domaine mécanique, plusieurs choix de la variable clé ρ pourraient être testés, notamment la contrainte hydrostatique ou la contrainte équivalente de VON MISES. Cette dernière supposition justifie la classification de la méthode de MORGAN dans ce paragraphe consacré aux estimateurs basés sur les contraintes.

Les résultats montrés par MORGAN démontrent l'efficacité de sa méthode, cependant un important travail de mise au point est nécessaire :

- choix de la variable clé
- calcul de dérivées secondes
- création d'un mailleur évolué.

Le mailleur présenté par MORGAN est fortement lié au type d'élément utilisé (triangle à 3 noeuds) et plusieurs "*coefficients basés sur l'expérience*" indiquent qu'il a requis une expérimentation numérique intensive.

8.3.5. Estimateur basé sur la déformation.

Dans le cas des calculs linéaires, les contraintes constituent souvent le résultat essentiel, ce qui explique l'attrait des estimateurs basés sur ces dernières. Dans la simulation numérique des procédés de mise à forme, les contraintes sont toujours importantes mais les déformations prennent un rôle prépondérant. Les taux de déformation et la déformation cumulée déterminent la forgeabilité d'une pièce. En fonction de la température de mise en oeuvre, un matériau accepte les déformations dans une zone limitée de vitesse de déformation et de déformation cumulée.

En dehors de ces conditions, le forgeage est impossible, soit parce que les forces à mettre en jeu sont excessives, soit parce que la microstructure obtenue serait de piètre qualité, la présence de microfissures ou même de cassures serait à craindre. On comprend dès lors l'importance des déformations et de la recherche d'estimateurs leur étant associés.

Par ailleurs, en dehors du phénomène physique, le principal problème de l'application des éléments finis (formulation lagrangienne) au formage réside dans l'importance des déformations atteintes. Par conséquent, l'approche de CHENG (FOR36) basée sur les déformations n'a rien d'étonnant. Sa méthode peut se résumer comme suit :

- l'erreur totale est estimée par la somme des erreurs sur les éléments ;

- l'erreur au temps t est supposée bornée par la somme des erreurs au cours des différents pas de temps Δt ;
- pour un pas, l'incrément d'erreur sur un élément fini est obtenu par les dérivées premières des incréments de déformation effective. Pour un élément bidimensionnel isoparamétrique, on a :

$$\Delta E_e = \left[\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \overline{\Delta \varepsilon}_{,p} \overline{\Delta \varepsilon}_{,p} J \, d\xi \, d\eta \right]^{1/2} \quad (8.71.)$$

où $\overline{\Delta \varepsilon}$ = incrément de la déformation effective.

J = déterminant de la matrice Jacobienne.

$_{,p}$ = dérivée partielle par rapport à ξ, η .

Les dérivées premières des incréments de la déformation effective seront connues si les dérivées secondes des incréments de déplacement le sont. CHENG propose l'utilisation d'une méthode d'extraction de fonction continue à l'aide d'une procédure de lissage par les moindres carrés (FOR 36). Cette méthode peut être ajoutée à celle suggérée par ODEN et DEMKOWICZ pour obtenir les dérivées secondes.

8.3.6. Estimateur basé sur la loi constitutive et un champ de contraintes statiquement admissibles.

LADEVEZE, COFFINAL et PELLE présentent une méthode originale dont le but est de déterminer directement en une seule itération un maillage "*fil*s" quasi optimal et fiable à partir d'un maillage "*père*" grossier.

Leur idée est de déterminer un champ de déplacements \hat{u} cinématiquement admissible, un champ de contraintes $\underline{\sigma}$ statiquement admissible et de déterminer une erreur liée au non respect de l'équation constitutive des deux champs \hat{u} et $\underline{\sigma}$. Leur méthode s'applique à l'analyse linéaire (élastique) et non linéaire (élastoplastique). Un élément triangulaire à 3 noeuds est disponible en analyse 2-D et un tétraèdre à 4 noeuds en l'analyse 3 D.

L'analyse par éléments finis fournit directement \hat{u} , mais on devine de suite que la construction d'un champ statiquement admissible $\underline{\sigma}$ constitue le point essentiel de cette approche. Ce résultat est obtenu via deux étapes successives :

- A.- Le calcul d'une distribution de forces \underline{F} sur les côtés des éléments telle que chaque élément est en équilibre et respecte les conditions de chargement.
- B.- La construction à l'intérieur de chaque élément d'un champ $\underline{\sigma}$ en équilibre avec \underline{F} .

Résumer la méthode risque de la rendre totalement incompréhensible et nous vous renvoyons aux références ER2 et ER17 pour plus de détails. Remarquons simplement que l'étape A rappelle un peu la démarche présentée en 2.3.1.4. où il fallait répartir le résidu pour qu'il soit auto-équilibré sur chaque élément.

Comme dans cette approche, LADEVEZE se heurte dans ses calculs intermédiaires au problème de la non unicité de la solution et il détermine une fonction à minimiser afin de choisir la meilleure solution. L'auteur assure qu'une grande partie des développements peuvent être faits analytiquement et qui est possible de relier explicitement \underline{F} à des quantités calculées dans la solution éléments finis.

L'étape B dépend fortement du type d'élément traité et de la précision désirée.

La somme des erreurs obtenues pour chaque élément fournit une estimation de l'erreur globale. Comme pour l'estimateur général (8.3.1.3.) la notion du maillage optimum tel que l'erreur est égale sur chaque élément entraîne une estimation de la taille des éléments nécessaires en tout point (équations 8.33, 8.34, 8.35).

L'utilisation d'une erreur sur la loi de comportement et non d'une norme de différence entre $\underline{\sigma}$ et $\hat{\underline{\sigma}}$ approché par EF est justifiée par un souci de précision. Dans une analyse non linéaire, la contrainte en un instant précis ne détermine pas l'état du matériau, l'état des paramètres d'écrouissage intervient également. Leurs valeurs sont affectées par toute l'histoire de chargement des matériaux.

Les résultats pratiques montrés par les auteurs sont témoins de l'efficacité de leur méthode et les temps CPU annoncés sont très raisonnables (p. 175 ER17). L'introduction de leur méthode dans un code classique implique un travail de développement important. Par ailleurs, malgré les arguments cités en faveur de l'estimation de l'erreur sur la loi de comportement, ce choix est déroutant car dans un cadre industriel, c'est souvent sur cette loi que la plus grande approximation est réalisée.

8.4. ESTIMATEURS D'ERREUR INTRODUIT DANS LE LAGAMINE

Au vu de la bibliographie qui précède, seul un nombre restreint d'estimateurs d'erreur peut être utilisé dans la simulation du formage des métaux. En effet, parmi les estimateurs