

**UNIVERSITE DE LIEGE**  
**FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES**

**ANALYSE STATIQUE DU COMPORTEMENT DES  
STRUCTURES A PAROIS MINCES PAR LA METHODE DES  
ELEMENTS FINIS ET DES BANDES FINIES DE TYPE PLAQUE  
ET COQUE SURBAISSEE DEFORMABLES EN CISAILEMENT**

**par**

**BUI HUNG CUONG**

Ingénieur civil des constructions de  
l'Ecole supérieure de Génie civil du Vietnam

**2008**

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade scientifique  
de Docteur en Sciences de l'Ingénieur

# TABLE DES MATIERES

**RESUME**

**ABSTRACT**

**NOTATIONS**

## **CHAPITRE 1 – INTRODUCTION**

- 1.1. Caractéristiques des profils à parois minces
  - 1.1.1. Formes de section et proportions géométriques
    - 1.1.1.1. Formes de section
    - 1.1.1.2. Proportions géométriques
  - 1.1.2. Nuances d'acier
  - 1.1.3. Imperfections
    - 1.1.3.1. Imperfections géométriques
      - 1.1.3.1.1. Imperfections locales
      - 1.1.3.1.2. Imperfections globales
    - 1.1.3.2. Contraintes résiduelles, écrouissage et modèles matériels
      - 1.1.3.2.1. Profils fabriqués à partir d'aciers au carbone
      - 1.1.3.2.2. Profils fabriqués à partir d'aciers inoxydables
- 1.2. Généralités sur le comportement des barres à parois minces
  - 1.2.1. Gauchissement des sections à parois minces
  - 1.2.2. Modes de flambement
  - 1.2.3. Comportement non-linéaire

## **CHAPITRE 2 – ETAT DE LA QUESTION**

- 2.1. Introduction
- 2.2. Etat du sujet étudié
  - 2.2.1. Generalised Beam Theory (GBT)
  - 2.2.2. Méthodes semi-empiriques
  - 2.2.3. Méthodes numériques
    - 2.2.3.1. Méthode des éléments finis
    - 2.2.3.2. Méthode des bandes finies

2.2.3.2.1. Méthode des bandes finies semi-analytiques

2.2.3.2.2. Méthode des bandes finies de type spline

2.3. Objectifs de la thèse

## **CHAPITRE 3 –ANALYSE LINEAIRE ET FLAMBEMENT DES STRUCTURES**

### **A PAROIS MINCES**

3.1. Introduction

3.2. Théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER

3.3. Théorie des coques surbaissées de MARGUERRE

3.4. Rotation dans le plan

3.5. Formulation des modèles de bandes finies et d'éléments finis

3.5.1. Expression de l'énergie interne

3.5.2. Méthode des bandes finies

3.5.2.1. Fonctions de forme d'une bande finie

3.5.2.2. Matrice de rigidité d'une bande finie

3.5.2.3. Matrice géométrique

3.5.2.4. Matrice de transformation géométrique

3.5.2.5. Résolution et phénomènes de verrouillage

3.5.3. Méthode des éléments finis

3.5.3.1. Fonctions de forme d'un élément fini

3.5.3.2. Matrice de rigidité d'un élément fini

3.5.3.3. Vecteur de charges

3.5.3.4. Matrice de transformation géométrique

3.5.3.5. Résolution et phénomènes de verrouillage

3.5.3.6. Matrice géométrique

3.6. Applications numériques

3.6.1. Plaques planes isolées

3.6.1.1. Comportement linéaire des plaques

3.6.1.1.1. Patch test

3.6.1.1.2. Plaque soumise à des charges uniformément réparties

3.6.1.2. Flambement linéarisé des plaques

- 3.6.1.2.1. Plaque soumise à des contraintes uniformes de compression
- 3.6.1.2.2. Plaque soumise à des charges linéaires de compression
- 3.6.2. Structures à parois minces
  - 3.6.2.1. Comportement linéaire des structures à parois minces
    - 3.6.2.1.1. Poutre de section en I soumise à des charges latérales uniformément réparties
    - 3.6.2.1.2. Coque SCORDELIS-LO
    - 3.6.2.1.3. Cylindre avec diaphragmes rigides soumis à des forces concentrées
  - 3.6.2.2. Flambement linéarisé des structures à parois minces
    - 3.6.2.2.1. Profil court de section en C avec raidisseur tombé, soumis à des contraintes de compression uniformes
    - 3.6.2.2.3. Barre de section en C en compression uniforme et en flexion uniforme
    - 3.6.2.2.4. Panne de section en C avec raidisseurs intermédiaires en flexion uniforme
    - 3.6.2.2.5. Tube de section circulaire en compression axiale uniforme
- 3.7. Conclusions

## **CHAPITRE 4 – ANALYSE NON-LINEAIRE GEOMETRIQUE ELASTIQUE DES STRUCTURES A PAROIS MINCES**

- 4.1. Introduction
- 4.2. Formulation
  - 4.2.1. Hypothèses de base et axes de référence de l'élément
  - 4.2.2. Principe incrémentiel de la description lagrangienne actualisée
    - 4.2.2.1. Principe incrémentiel
    - 4.2.2.2. Matrice linéaire incrémentielle des déplacements
    - 4.2.2.3. Matrice géométrique
    - 4.2.2.4. Second membre de l'équation du principe incrémentiel
    - 4.2.2.5. Matrice tangente
- 4.3. Méthode de solution
  - 4.3.1. Stage de prédiction
  - 4.3.2. Stage de correction

- 4.3.2.1. Relation entre  $\{\sigma_{n+1}\}$  et  $\{s_{n+1}\}$
- 4.3.2.2. Forces nodales Q
- 4.3.3. Stage de détection
- 4.4. Stratégie de solution à l'intérieur d'un pas
  - 4.4.1. Point de départ et notation
  - 4.4.2. Méthode de RIKS
  - 4.4.3. En suivant la réponse d'équilibre dans le sens positif
    - 4.4.3.1. Travail extérieur positif
    - 4.4.3.2. Règle d'angle
- 4.5. Applications numériques
  - 4.5.1. Plaques isolées
    - 4.5.1.1. Plaque carrée soumise à des charges latérales uniformément réparties
    - 4.5.1.2. Plaque carrée simplement supportée soumise à une charge comprimée avec petite excentricité
    - 4.5.1.3. Flambement hors du plan d'un poteau avec petite imperfection
    - 4.5.1.4. Console soumise à la flexion pure
  - 4.5.2. Structures à parois minces
    - 4.5.2.1. Cornière de console soumise à une charge comprimée au centre de cisaillement à l'extrémité libre
    - 4.5.2.2. Coque soumise à une charge au centre
    - 4.5.2.3. Cornière chargée sur son aile
- 4.6. Conclusions

## **CHAPITRE 5 – ANALYSE NON-LINEAIRE MIXTE GEOMETRIQUE ET MATERIELLE DES STRUCTURES A PAROIS MINCES**

- 5.1. Introduction
- 5.2. Formulation
  - 5.2.1. Diagramme contrainte-déformation
  - 5.2.2. Théorie incrémentielle de la plasticité
    - 5.2.2.1. Hypothèses de base
    - 5.2.2.2. Surfaces de plasticité
    - 5.2.2.3. Postulat de DRUCKER

- 5.2.2.4. Surface de plasticité initiale
- 5.2.2.5. Critère de plasticité
  - 5.2.2.5.1. Critère de TRESCA
  - 5.2.2.5.2. Critère de VON MISES
- 5.2.2.6. Ecrouissage isotrope
- 5.2.2.7. Lois constitutives incrémentielles en forme matricielle
- 5.2.2.8. Formes alternatives des critères de plasticité et détermination du vecteur incrémental
- 5.2.3. Expressions de base pour les plaques déformables en cisaillement
- 5.2.4. Points singuliers sur la surface de plasticité
- 5.2.5. Transcription en grands déplacements
- 5.3. Types des modèles matériels
- 5.4. Stratégie de solution à l'intérieur d'un pas
- 5.5. Applications numériques
  - 5.5.1. Analyse élasto-plastique d'un poteau soumis à une force de compression axiale avec petite imperfection
  - 5.5.2. Analyse élasto-plastique d'un poteau à inertie variable soumis à une charge de compression axiale avec petite excentricité
  - 5.5.3. Analyse élasto-plastique d'un poteau court
  - 5.5.4. Comportement des poteaux creux carrés formés à froid
  - 5.5.5. Cornières laminées chargées centriquement
  - 5.5.6. Barre courte de section en C soumise à une compression uniforme
  - 5.5.7. Portique avec membres à inertie variable
- 5.6. Conclusions

## **CHAPITRE 6 - CONCLUSIONS**

- 6.1. Bilan de la thèse
- 6.2. Apports de la thèse
- 6.3. Perspectives d'avenir

## **BIBLIOGRAPHIE**

## **ANNEXE**

# TABLE OF CONTENTS

**RESUME**

**ABSTRACT**

**NOTATIONS**

## **CHAPTER 1 – INTRODUCTION**

1.3. Characteristics of thin-walled sections

1.1.1. Forms of section and geometric proportions

1.1.1.1. Forms of section

1.1.1.2. Geometric proportions

1.1.2. Steel grades

1.1.3. Imperfections

1.1.3.1. Geometric imperfections

1.1.3.1.1. Local imperfections

1.1.3.1.2. Global imperfections

1.1.3.2. Residual stresses, strain-hardening and material models

1.1.3.2.1. Thin-walled sections fabricated from carbon steels

1.1.3.2.2. Thin-walled sections fabricated from stainless steels

1.4. Overview of the behaviour of thin-walled sections

1.2.1. Warping of thin-walled sections

1.2.2. Buckling modes

1.2.3. Nonlinear behaviour

## **CHAPTER 2 –STATE OF THE ART**

2.1. Introduction

2.2. State of the art

2.2.1. Generalised Beam Theory (GBT)

2.2.2. Semi-empirical methods

2.2.3. Numerical methods

2.2.3.1. Finite element method

2.2.3.2. Finite strip method

2.2.3.2.1. Semi-analytical finite strip method

2.2.3.2.2. Spline finite strip method

2.3. Objectives of the thesis

## **CHAPTER 3 –LINEAR AND BUCKLING ANALYSIS OF THIN-WALLED STRUCTURES**

3.1. Introduction

3.2. Plate theory of MINDLIN-REISSNER

3.3. Shallow shell theory of MARGUERRE

3.4. In-plane rotation

3.5. Formulation of the finite strip and finite element models

3.5.1. Internal energy expression

3.5.2. Finite strip method

3.5.2.1. Shape functions of a finite strip

3.5.2.2. Stiffness matrix of a finite strip

3.5.2.3. Geometric matrix

3.5.2.4. Geometric transformation matrix

3.5.2.5. Solution and locking phenomena

3.5.3. Finite element method

3.5.3.1. Shape function of a finite element

3.5.3.2. Stiffness matrix of a finite element

3.5.3.3. Load vector

3.5.3.4. Geometric transformation matrix

3.5.3.5. Solution and locking phenomena

3.5.3.6. Geometric matrix

3.6. Numerical applications

3.6.1. Isolated plane plates

3.6.1.1. Linear behaviour of the plates

3.6.1.1.1. Patch test

3.6.1.1.2. Plate under uniformly distributed loads

3.6.1.2. Linearized buckling of the plates



- 3.6.1.2.1. Plate under uniform compression stresses
- 3.6.1.2.2. Plate under linearly distributed loads
- 3.6.2. Thin-walled structures
  - 3.6.2.1. Linear behaviour of the thin-walled structures
    - 3.6.2.1.1. I-section beam under lateral distributed loads
    - 3.6.2.1.2. SCORDELIS-LO shell
    - 3.6.2.1.3. Cylinder with rigid diaphragms under pick loads
  - 3.6.2.2. Linearized buckling of the thin-walled structures
    - 3.6.2.2.1. Short length channel section under uniform compression stresses
    - 3.6.2.2.3. Channel section under uniform compression and under uniform flexion
    - 3.6.2.2.4. Purlin of channel section with intermediate stiffeners under uniform flexion
    - 3.6.2.2.5. Circular tube under uniform axial compression
- 3.7. Conclusions

## **CHAPTER 4 – NONLINEAR GEOMETRIC ANALYSIS OF THIN-WALLED STRUCTURES**

- 4.1. Introduction
- 4.2. Formulation
  - 4.2.1. Basic hypotheses and reference axes of the element
  - 4.2.2. Increment principle of the updated Lagrange description
    - 4.2.2.1. Increment principle
    - 4.2.2.2. Increment linear matrix
    - 4.2.2.3. Geometric matrix
    - 4.2.2.4. Second member of the equation of the increment principle
    - 4.2.2.5. Tangent matrix
- 4.3. Solution method
  - 4.3.1. Prediction stage
  - 4.3.2. Correction stage
    - 4.3.2.1. Relation between  $\{\sigma_{n+1}\}$  and  $\{s_{n+1}\}$
    - 4.3.2.2. Nodal forces Q

- 4.3.3. Detection stage
- 4.4. Solution strategy in the interior of a step
  - 4.4.1. Commencement point and notation
  - 4.4.2. Method of RIKS
  - 4.4.3. Traversing equilibrium path in positive sense
    - 4.4.3.1. Positive external work
    - 4.4.3.2. Angle criterion
- 4.5. Numerical applications
  - 4.5.1. Isolated plates
    - 4.5.1.1. Square plate under uniformly distributed loads
    - 4.5.1.2. Simply supported square plate under compression loads with a small eccentricity
    - 4.5.1.3. Out of plane buckling of a column with a small imperfection
    - 4.5.1.4. Cantilever under uniform flexion
  - 4.5.2. Thin-walled structures
    - 4.5.2.1. Cantilever of angle section under a compression load on the shear centre at the free end
    - 4.5.2.2. Shell under a load at the centre
    - 4.5.2.3. Angle section loaded on an arm
- 4.6. Conclusions

## **CHAPTER 5 – NONLINEAR GEOMETRIC AND MATERIAL ANALYSIS OF THIN-WALLED STRUCTURES**

- 5.1. Introduction
- 5.2. Formulation
  - 5.2.1. Stress-strain diagram
  - 5.2.2. Flow theory of the plasticity
    - 5.2.2.1. Basic hypotheses
    - 5.2.2.2. Plasticity surfaces
    - 5.2.2.3. Postulate of DRUCKER
    - 5.2.2.4. Initial plasticity surface
    - 5.2.2.5. Plasticity criterion

- 5.2.2.5.1. Criterion of TRESCA
- 5.2.2.5.2. Criterion of VON MISES
- 5.2.2.6. Isotropic strain-hardening
- 5.2.2.7. Constitutive increment law in matrix form
- 5.2.2.8. Alternative form of the plasticity criteria and determination of the flow vector
- 5.2.3. Basic expressions for the shear deformable plates
- 5.2.4. Singular points on the plasticity surface
- 5.2.5. Transcription in large displacements
- 5.3. Types of the material models
- 5.4. Solution strategy in the interior of a step
- 5.5. Numerical applications
  - 5.5.1. Elastic-plastic analysis of a column under an axial compression load with a small imperfection
  - 5.5.2. Elastic-plastic analysis of a tapered column under an axial compression load with a small eccentricity
  - 5.5.3. Elastic-plastic analysis of a stub column
  - 5.5.4. Behaviour of cold-formed columns of square hollow section
  - 5.5.5. Laminated angles axially loaded
  - 5.5.6. Stub channel section under uniform compression
  - 5.5.7. Frame with tapered members
- 5.6. Conclusions

## **CHAPTER 6 - CONCLUSIONS**

- 6.1. Summary of the thesis
- 6.2. Contribution of the thesis
- 6.3. Perspectives in the future

## **BIBLIOGRAPHY**

## **ANNEX**

## RESUME

Le but final de cette thèse est la proposition d'une technique de résolution du problème du sixième degré de liberté des méthodes de bandes finies et d'éléments finis de plaque et de coque surbaissée déformable en cisaillement (le problème de rotation dans le plan) et de l'appliquer dans la formulation des bandes finies et des éléments finis afin d'analyser le comportement des structures à parois minces.

Tout d'abord, le présent travail introduit les caractéristiques des profils à parois minces tels que formes de la section, nuances d'acier et imperfections initiales de type géométrique (défaut de rectitude, de planéité), structural (contraintes résiduelles) ou matériel (écrouissage). Ceux-ci sont nécessaires aux analyses ultérieures.

Ensuite, une étude bibliographique aborde les méthodes de calcul des barres à parois minces tant analytiques que semi-empiriques ou numériques. Les méthodes analytiques ont été basées sur les théories de VLASOV et de BENSCOTER et une méthode intitulée 'Generalized Beam Theory' développée par SCHARDT avec ses collègues depuis le début des années 1970 en Allemagne. Les méthodes semi-empiriques tiennent compte de l'influence du voilement sur le comportement global par le concept de largeur et de section effectives. Les méthodes numériques sont la méthode des éléments finis de type plaque, de type coque et la méthode des bandes finies.

Puis, une technique originale est proposée avec succès pour introduire dans les relations standard déformation-déplacement des théories des plaques et des coques surbaissées, la rotation dans le plan pour assurer la conformité des variables nodales rotatives aux jonctions spatiales. L'application de cette technique sert à mettre au point les bandes finies et les éléments finis de type plaque et coque surbaissée. Il est proposé un programme d'éléments finis, nommé FENALYSE, qui est capable d'analyser la linéarité, la non-linéarité et le flambement des structures à parois minces qui sont composées ou peuvent être modélisées par plaques planes et coques surbaissées. Tandis que les bandes finies ne sont développées que pour calculer le flambement des profils à parois minces qui sont simplement appuyés et un programme intitulé FLAMBANDE est proposé. Les verrouillages de cisaillement et de membrane sont éliminés par la technique d'intégration réduite. La description lagrangienne actualisée est utilisée dans l'analyse non-linéaire. Les éléments finis de type plaque et de type coque surbaissée permettent de considérer, entre autre, les phénomènes inhérents aux profils à parois minces tels que la torsion non uniforme avec gauchissement, la distorsion de la section, les phénomènes d'instabilité couplées, la plasticité, les contraintes résiduelles, les imperfections locales et globales, le changement de la limite d'élasticité sur la section. Plusieurs exemples numériques tant académiques que pratiques sont réalisés afin de montrer la fiabilité de ces éléments finis.

## ABSTRACT

The final objective of this thesis is the proposal of a technique resolving the problem of the sixth degree of freedom in the finite strip and finite element methods for shear deformable plate and shallow shell (the in-plane rotation problem) and the application of the technique in the formulation of the finite strips and finite elements to analyse the behaviour of thin-walled structures.

Firstly, the present work introduces the characteristics of the thin-walled sections, such as forms of section, steel grades and initial imperfections of geometrical type (defect of straightness, flatness), structural (residual stresses) or material (work-hardening). Those are necessary in the later analyses.

Secondly, a bibliographic study is concerned with the methods calculating thin-walled sections as well analytical as semi-empirical or numerical. The analytical methods were based on the theories of VLASOV and BENSCOTER and a method entitled ‘Generalized Beam Theory’ developed by SCHARDT with his colleagues since the beginning of the years 1970 in Germany. The semi-empirical methods account for the influence of the local buckling on the global behaviour by the concept of effective width and section. The numerical methods are the finite element method for plate and shell and the finite strip method.

Finally, an original technique is successfully proposed to introduce, in the standard deformation-displacement relations of the plate and shallow shell theories, the in-plane rotation to ensure the conformity of the nodal rotations at the spatial junctions. The application of this technique is to develop finite strips and finite elements for plate and shallow shell. It is proposed a finite element program, named FENALYSE, which is capable analysing the linearity, the nonlinearity and the buckling of thin-walled structures which are composed or can be modelled by plane plates and shallow shells. While the finite strips are only developed for calculating the buckling of the thin-walled sections, which are simply supported and a program entitled FLAMBANDE is proposed. The shear locking and membrane locking are eliminated by the reduced integration technique. The updated Lagrange description is used in the nonlinear analysis. The finite elements for plate and shallow shell allow considering, amongst others, the inherent phenomena of thin-walled sections, such as non-uniform torsion with warping, the distortion of the section, the coupled instability phenomena, the plasticity, the residual stresses, the local and global imperfections and the change of the elastic limit on the section. Numerous numerical examples both academic and practical are carried out in order to show the reliability of these finite elements.

# NOTATIONS

## Règles générales

Les renvois bibliographiques sont indiqués entre parenthèses carrées.

La convention de sommation d'EINSTEIN s'applique aux indices inférieurs  $i, j, k, l$ .

Chaque symbole, notation ou abréviation est toujours défini dans le texte dès sa première apparition.

## Symboles

$\{x\}$	- vecteur de colonne
$\{x\}^T$	- vecteur transposé ou vecteur de ligne
$[x]$	- matrice
$[x]^T$	- matrice transposée
$ x $	- déterminant d'une matrice
$[x]^{-1}$	- inverse d'une matrice
$dx$	- différentielle ou incrément
$\Delta x$	- accroissement
$\delta x$	- variation
$\partial$	- symbole de la dérivée partielle
$\vec{x}$	- vecteur

## Abréviation

CECM	- Convention Européenne de la Construction Métallique
GBT	- Generalised Beam Theory (en anglais)
RI	- intégration réduite
SRI	- intégration réduite sélectionnée

## Notations

Seules les notations les plus importantes sont reprises ici.

$A_e$	- aire d'une bande finie ou d'un élément fini
$a, b$	- dimensions d'une bande finie
$\{a\}$	- vecteur incrémental
$[B_{pb}], [B_s]$	- matrices de déformation-déplacement
$C_1, C_2, C_3$	- constants définissant une surface de plasticité
$[D_{pb}], [D_s]$	- matrices de rigidité matérielle (loi constitutive de HOOKE)
$[D], D_{ijkl}$	- lois constitutives incrémentielles
$[D^{ep}], [D_{pb}^{ep}]$	- lois constitutives incrémentielles élasto-plastique isotropes
$E, E_t$	- module d'élasticité et module tangente
$e_{ij}$	- tenseur de déformation de GREEN
$e_{ij}^*, \{e^*\}$	- parties non-linéaire du tenseur de GREEN
$F$	- fonction de charge
$\{F\}$	- vecteur de forces nodales extérieures
$f_i, \{f\}$	- force volumique
$f_y$	- limite élastique
$f_u$	- résistance à la traction (limite ultime)
$G$	- module d'élasticité de cisaillement
$[G]$	- matrice attachée à l'écriture de la matrice géométrique
$H$	- module plastique
$H_{i,x}, h_{,x}$	- premières dérivées par rapport à $x$
$h$	- hauteur entre un point sur la surface curviligne et son point de projection sur le plan de référence dans la théorie des coques surbaissées
$[I]$	- matrice d'unité
$J_1', J_2', J_3'$	- trois invariants du tenseur des déviateurs des contraintes
$[J]$	- matrice jacobéenne
$[K]_e$	- matrice de rigidité de l'élément
$[K_L]$	- matrice linéaire incrémentielle des déplacements
$[K_G]$	- matrice géométrique (matrice des contraintes initiales)
$[K_T]$	- matrice tangente
$k$	- paramètre d'écrouissage
$[L]$	- matrice de transformation géométrique
$l$	- longueur
$[N]$	- matrice des fonctions de forme
$\{p\}$	- vecteur des variables nodaux
$\{Q\}$	- vecteur de forces nodales internes

$\{R\}$	- vecteur de forces résiduelles (hors-équilibres)
$s_{ij}, \{s\}$	- contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF N°2
U	- énergie interne
u, v, w	- déplacements
v	- volume
W	- travail externe
x, y, z	- coordonnées ou axes de coordonnées
$[Z]$	- matrice intervenant dans la matrice des contraintes initiales
$\Gamma_0, \Gamma_n, \Gamma_{n+1}^\Delta$	- configurations
$\delta_{ij}$	- symbole de KRONECKER
$\varepsilon_{ij}, \{\varepsilon\}$	- tenseur de déformation infinitésimale
$\varepsilon$	- déformation normale
$\bar{\varepsilon}^p$	- déformation plastique de comparaison
$\gamma$	- déformation de cisaillement
$\gamma^*$	- déformation de cisaillement fictive
$\xi, \eta$	- coordonnées naturelles ou axes des coordonnées naturelles
$\nu$	- coefficient de POISSON
$\kappa$	- facteur correctif de cisaillement
$\lambda$	- valeur propre concernant le problème de flambement
$d\lambda$	- multiplicateur plastique
$\sigma_{ij}, \{\sigma\}$	- contraintes de CAUCHY (contraintes vraies)
$\sigma'_{ij}$	- déviateur des contraintes
$\bar{\sigma}$	- contrainte de comparaison
$\sigma_{Y_0}$	- limite élastique initiale
$\sigma_Y$	- limite élastique courante
$\theta, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	- rotations
$\Pi$	- énergie potentielle



# CHAPITRE 1. INTRODUCTION

## 1.1. Caractéristiques des profils à parois minces

Avec le développement de la construction métallique, les profils utilisés peuvent être classés en trois catégories principales

(i) Les profils laminés à chaud, apparu au temps de naissance de la construction métallique, constituent les gammes traditionnelles de profils. Ils sont assemblés entre eux par boulonnage ou soudage et jouent un rôle important dans la construction métallique à cause de leur grande capacité portante.

(ii) Les profils reconstitués de plaques par rivetage, boulonnage ou soudage permettent de produire de très grandes sections et ces éléments peuvent résister à des efforts beaucoup plus importants.

(iii) Les profils formés à froid par pliage ou par profilage à partir de tôles, quoique récemment apparus, occupent déjà une large place en construction métallique. Les formes abondantes et complexes des profils à parois minces leur permettent de participer à plusieurs états de sollicitations. La construction mixte, dont les composantes sont des éléments formés à froids, permet d'élargir leurs domaines d'application. Les tôles de base sont des bandes d'acier re-laminées à froid ou de larges bandes laminées à chaud. Elles sont recouvertes d'une couche de protection anti-corrosion (peinture, film plastique, galvanisation, électro-zingage, etc....).

### 1.1.1. Formes de section et proportions géométriques

#### 1.1.1.1. Formes de section

La figure 1.1 montre les profils laminés à chaud et les profils reconstitués soudés les plus courants [A1-2001, E1-2003]. Plusieurs entre eux peuvent être classés comme éléments à parois minces, en fonction de l'élançement des parois et du type de sollicitation.

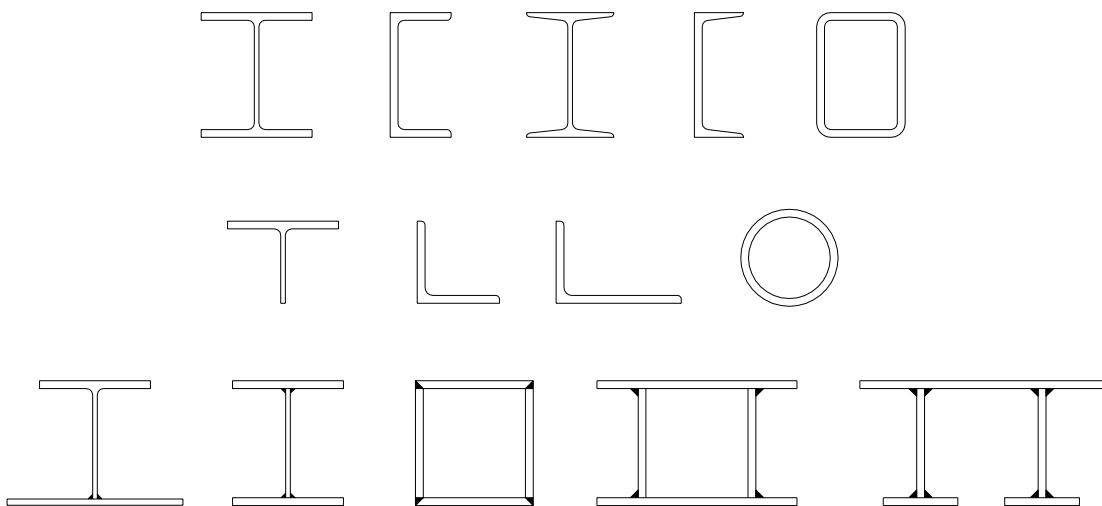


Figure 1.1. Profils laminés à chaud et profils reconstitués soudés.

La figure 1.2 présente les profils et les tôles profilées à froid [E2-2004, R1-2000] avec comme tendance d'utiliser des sections de plus en plus hautement raidies.

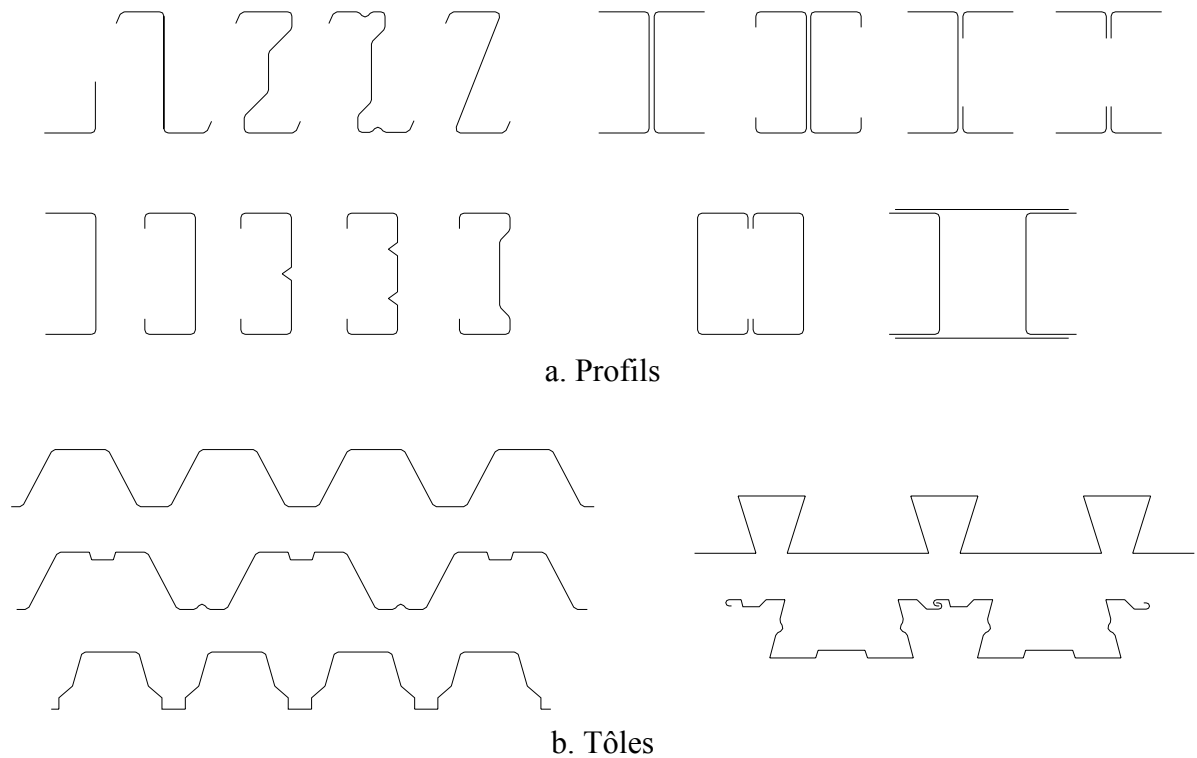


Figure 1.2. Profils et tôles formés à froid.

Les règles de calcul limitent, en général, l'épaisseur  $t$  de la tôle de base des profils et tôles formés à froid en fonction du type d'élément.

$0.5 \leq t \leq 4$  mm, pour les tôles profilées à froid;

$1.0 \leq t \leq 8$  mm, pour les profils formés à froid.

Les méthodes de fabrication des profils formés à froid permettent de produire des sections innovatrices [N1-2003]. La figure 1.3 présente quelques exemples

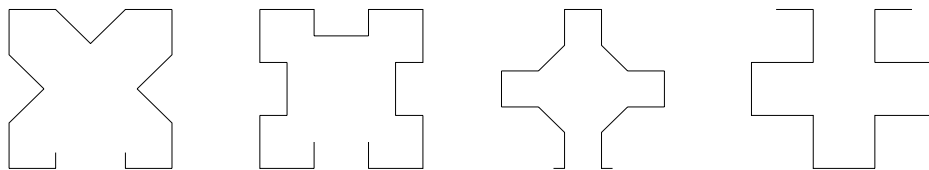


Figure 1.3. Sections innovatrices formées à froid.

### 1.1.1.2. Proportions géométriques

Soit l'épaisseur  $t$  des parois, la largeur  $b$  de la section et la longueur  $l$  d'un profil. Lorsque les proportions satisfont les relations:

$$\frac{b}{t} \geq 10 ; \quad \frac{l}{b} \geq 10 \quad (1.1)$$

Selon VLASOV [V1-1961], le profil considéré peut être classé comme barre à parois minces quelque soit la forme de sa section. Il est évident que ces limites inférieures couvrent de larges types de profils (formés à froid ou non). Cependant, il faut ajouter des limites supérieures pour les rapports largeur-épaisseur des parois minces afin d'empêcher des déformations exagérées de celles-ci. Ces limites supérieures sont toujours liées aux profils formés à froid. Elles sont données dans les divers

codes et supposées représenter le champ pour lequel les expériences et les vérifications par tests sont suffisantes. Les règles de la partie 1.3, EUROCODE 3 [E2-2004] ne sont valables que si les limites suivantes sont respectées:

$$\frac{h}{t} < 500; \quad \frac{b}{t} < 60; \quad \frac{c}{t} < 50 \quad (1.2)$$

où h est la hauteur, b est la largeur de la section et c est la largeur du raidisseur.

### 1.1.2. Nuances d'acier

Les profils à parois minces (laminés à chaud ou reconstitués ou formés à froid) peuvent être fabriqués soit en acier au carbone, soit en acier inoxydable ou en aluminium allié. On ne considère ici que les aciers au carbone et les aciers inoxydables. Les divers codes ne couvrent que le calcul des structures en acier, fabriquées à partir d'aciers conformes aux nuances données dans ces codes. L'EUROCODE 3, partie 1-1 [E1-2003] fournit les nuances d'acier au carbone pour les profils laminés à chaud et les profils creux. Le tableau 1.1 donne les valeurs nominales de limite d'élasticité  $f_y$  et de résistance à la traction  $f_u$  pour les aciers de construction laminés à chaud.

Tableau 1.1. Nuances d'acier pour les aciers de construction laminés à chaud.

Norme et nuance d'acier	Epaisseur nominale t de l'élément [mm]			
	t ≤ 40 mm		40 mm < t ≤ 80 mm	
	$f_y$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$f_u$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$f_y$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$f_u$ [N/mm <sup>2</sup> ]
EN 10025-2				
S 235	235	360	215	360
S 275	275	430	255	410
S 355	355	510	335	470
S 450	440	550	410	550
EN 10025-3				
S 275 N/NL	275	390	255	370
S 355 N/NL	355	490	335	470
S 420 N/NL	420	520	390	520
S 460 N/NL	460	540	430	540
EN 10025-4				
S 275 M/ML	275	370	255	360
S 355 M/ML	355	470	335	450
S 420 M/ML	420	520	390	500
S 460 M/ML	460	540	430	530
EN 10025-5				
S 235 W	235	360	215	340
S 355 W	355	510	335	490
EN 10025-6				
S 460 Q/QL/QL1	460	570	440	550

Les aciers qui sont utilisés pour fabriquer des profils et tôles formés à froids, doivent présenter une bonne ductilité. Les nuances d'acier appropriées sont données dans la norme EN 1993-1-3 : 2004 [E2-2004]. Le tableau 1.2 présente quelques nuances de ces aciers.

Le traitement mécanique de mise en forme engendre des déformations plastiques dues au dépassement de la limite élastique de l'acier lors du laminage ou du pliage à froid des profils. Ce processus de fabrication conduit à une augmentation de la limite d'élasticité de l'acier par écrouissage (voir le sous-paragraphe 1.1.3.2).

Tableau 1.2. Nuances d'acier pour les tôles de base des profils formés à froid.

Types d'acier (qualité structurale)	Norme	Nuance	$f_{yb}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$f_u$ (N/mm <sup>2</sup> )
Tôles laminées à chaud à partir d'aciers non alliés	EN 10025: Part 2	S 235	235	360
		S 275	275	430
		S 355	355	510
Tôles laminées à chaud à partir d'aciers à haute résistance	EN 10025: Part 3	S 275 N	275	370
		S 355 N	355	470
		S 420 N	420	520
		S 460 N	460	550
		S 275 NL	275	370
		S 355 NL	355	470
		S 420 NL	420	520
		S 460 NL	460	550
Tôles relaminées à froid	ISO 4997	CR 220	220	300
		CR 250	250	330
		CR 320	320	400
Tôles galvanisées à chaud	EN 10147	S 220 GD+Z	220	300
		S 250 GD+Z	250	330
		S 280 GD+Z	280	360
		S 320 GD+Z	320	390
		S 350 GD+Z	350	420

L'EUROCODE 3, partie 1-4 [E3-2004], donne les nuances d'acier inoxydable repris au tableau 1.3 pour les aciers inoxydables. Comme il n'existe pas de palier de plasticité comme pour les aciers au carbone, la limite élastique  $f_y$  est communément définie par la contrainte nominale correspondante à la déformation plastique irréversible de 0.2%.

Tableau 1.3. Valeurs nominales de la limite élastique  $f_y$  et de la résistance à la traction  $f_u$  pour les aciers inoxydables structurels.

Type d'acier inoxydable	Nuance	Forme de produit							
		Bande relaminée à froid		Bande laminée à chaud		Plaque laminée à chaud		Barres et sections	
		$t \leq 6$ mm		$t \leq 12$ mm		$t \leq 75$ mm		$t \leq 250$ mm	
		$f_y$	$f_u$	$f_y$	$f_u$	$f_y$	$f_u$	$f_y$	$f_u$
		N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>
Aciers ferriques	1.4003	280	450	280	450	250 <sup>2)</sup>	450 <sup>2)</sup>	260 <sup>3)</sup>	450 <sup>3)</sup>
	1.4016	260	450	240	450	240 <sup>2)</sup>	430 <sup>2)</sup>	240 <sup>3)</sup>	400 <sup>3)</sup>
	1.4512	210	380	210	380	-	-	-	-
Aciers austéniques	1.4306							180	460
	1.4307	220	520	200	520	200	500	175	450
	1.4541							190	500
	1.4301	230	540	210	520	210	520		
	1.4401	240	530	220	530	220	520	200	500
	1.4404							230	530
	1.4539							200	500
	1.4571		540		540				
	1.4432	240	550	220	550	220	520	200	500
	1.4435								
	1.4311	290	550	270	550	270	550	270	550
	1.4406	300	580	280	580	280	580	280	580
	1.4439	290		270		270			
	1.4529	300	650	300	650	300	650		
	1.4547	320	650	300	650	300	650	300	650
1.4318	350	650	330	650	330	630	-	-	
Aciers austéniques - ferriques	1.4362	420	600	400	600	400	630	400 <sup>1)</sup>	600 <sup>1)</sup>
	1.4462	480	660	460	660	460	640	450	650

<sup>1)</sup>  $t \leq 160$  mm;    <sup>2)</sup>  $t \leq 25$  mm;    <sup>3)</sup>  $t \leq 100$  mm;

La relation typique contrainte-déformation de l'acier au carbone et de l'acier inoxydable est présentée, respectivement, à la figure 1.4.

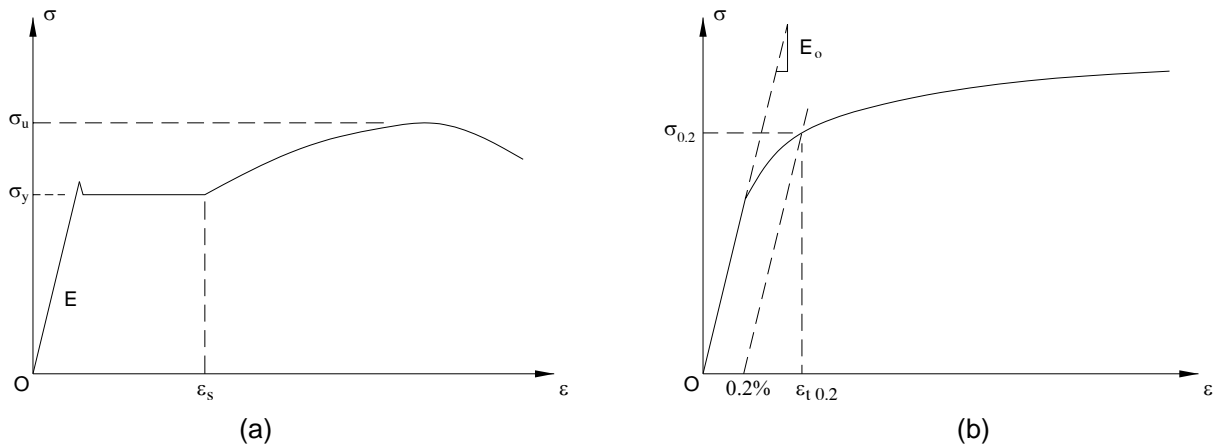


Figure 1.4. Diagrammes typiques contrainte-déformation;  
a. de l'acier au carbone; b. de l'acier inoxydable.

Pour l'acier au carbone:  $\sigma_y$  est la contrainte de limite élastique;  $\sigma_u$  est la contrainte de limite ultime;  $\varepsilon_s$  est la déformation à partir de laquelle l'écroutissage commence;  $E$  est le module d'élasticité.

Pour l'acier inoxydable:  $\sigma_{0.2}$  est la contrainte correspondant à la déformation plastique de 0.2%;  $\varepsilon_{t0.2}$  est la déformation totale correspondant à  $\sigma_{0.2}$ ;  $E_0$  est le module d'élasticité initial.

### 1.1.3. Imperfections

La réponse post-critique des profils à parois minces est difficile à prévoir à cause de la non-linéarité géométrique et matérielle. Toutefois, les méthodes numériques telles que les éléments finis ou les bandes finies ont atteint un niveau de maturité tel que plusieurs entre eux peuvent décrire avec succès le comportement non-linéaire jusqu'à la ruine des profils à parois minces. Le premier obstacle pour réussir n'est pas les formulations mécaniques ni les méthodes de solution, mais c'est le manque fondamental de connaissance de l'état initial du profil et la non-unification dans la détermination des grandeurs et distributions pour modéliser les imperfections initiales. L'état initial d'un profil à parois minces peut être caractérisé par les imperfections géométriques locale et globale, les contraintes résiduelles, le changement de la limite élastique et de la limite ultime sur la section transversale du profil.

#### 1.1.3.1. Imperfections géométriques

Les imperfections géométriques sont la déviation du profil par rapport à la géométrie parfaite. Les imperfections géométriques comprennent le défaut de rectitude le long du profil, le défaut de planéité des parois et le vrillage d'une section à l'autre. La technique communément adoptée afin de définir la distribution des imperfections initiales est de réaliser une analyse linéaire de flambement et puis d'utiliser un des modes propres, choisi selon un critère spécifique, comme la forme initiale. L'utilisation des imperfections maximales pour un mode propre de flambement est une estimation conservative car les imperfections maximales ne sont pas périodiques le long de l'élément. Le pire mode d'imperfection qui cause la plus grande réduction de la capacité portante est lié souvent au premier mode de flambement. Les déplacements nodaux d'un mode de flambement sont normalisés

en utilisant le déplacement maximal dans la structure et ce déplacement maximal est pris égal à l'unité. En multipliant les déplacements normalisés par un facteur approprié, qui est l'amplitude, les imperfections initiales rattachées au mode propre considéré peuvent être calculées.

### 1.1.3.1.1. Imperfections locales

SCHAFFER et PEKÖZ [S1-1998], après avoir effectué plusieurs campagnes de mesures expérimentales, ont montré que le défaut de planéité des parois peut être classifié en deux catégories: type 1, l'imperfection locale maximale est située à l'âme du profil et type 2, la déviation maximale est située à la semelle raidie ou non raidie (Fig. 1.5). Ils ont proposé des formules simples pour déterminer l'amplitude de l'imperfection.

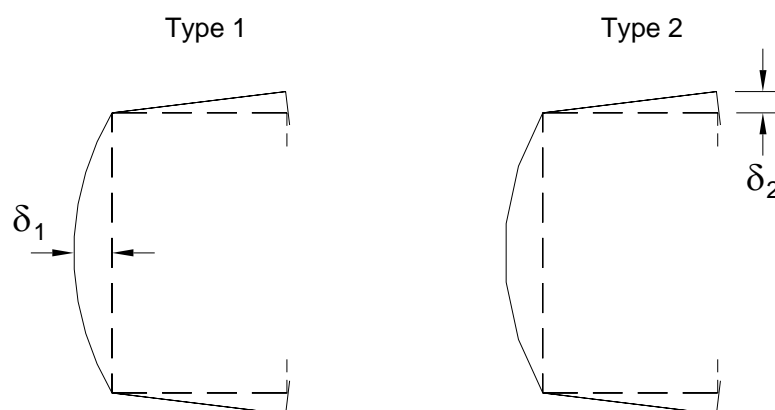


Figure 1.5. Définition des imperfections locales.

Les formules suivantes qui sont réécrites ici en forme relative sont appliquées pour l'épaisseur inférieure à 3mm.

Pour le type 1 lorsque le rapport hauteur/épaisseur ( $h/t$ ) est inférieur à 200:

$$\frac{\delta_1}{h} \approx 0.006 \quad (1.3)$$

Une autre expression est aussi recommandée:

$$\frac{\delta_1}{t} \approx 6e^{-2t} \quad (\delta_1 \text{ et } t \text{ en mm}) \quad (1.4)$$

Pour le type 2, lorsque le rapport largeur/épaisseur ( $b/t$ ) est inférieur à 100, la déviation maximale est prise approximativement égale à l'épaisseur de la plaque:

$$\frac{\delta_2}{t} \approx 1 \quad (1.5)$$

Le type 1 peut être considéré comme convenant au flambement local des plaques et le type 2 caractérise le flambement distorsionnel de la semelle. Les équations (1.3), (1.4) et (1.5) donnent les valeurs maximales pour des imperfections avec ondulations régulières. SCHAFFER *et al.* [S1-1998, S2-1998] ont proposé également un traitement de probabilité pour évaluer l'amplitude et la fréquence des imperfections.

HANCOCK [H1-1981] a suggéré que la distribution des imperfections locales des plaques dans un poteau formé à froid peut être supposée analogue au mode de flambement local. Pour le flambement local d'une barre composée de plaques, une plaque flambe en une demi-onde dans la direction

transversale et en une série d'ondes longitudinales. Ainsi, une distribution de double onde sinusoïdale peut y être utilisée afin de modéliser les imperfections géométriques locales de la plaque d'âme (type 1, Fig. 1.5). SIVAKUMARAN et ABDEL-RAHMAN [S7-1998] ont présenté une formule retenue dans la norme britannique BS 5950 pour la limite supérieure de l'amplitude du défaut de planéité des plaques comprimées:

$$\frac{\delta_1}{t} = 0.145 \left( \frac{h}{t} \right) \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad (1.6)$$

Ils ont appliqué cette formule pour l'analyse non-linéaire des barres à section en C comprimées axialement et ils ont estimé approximativement la longueur de la demi-onde longitudinale au moyen des largeurs de l'âme et la semelle. L'équation (1.6) semble plus générale que les équations (1.3) et (1.4) car elle ne limite pas le domaine de validité du rapport hauteur/épaisseur ( $h/t$ ) et elle a tenu compte non seulement de l'élanement de la paroi considérée mais encore des propriétés matérielles, la limite élastique  $f_y$  et le module d'élasticité  $E$ . Si les valeurs de la limite élastique dans le tableau 1.1 sont remplacées dans l'équation (1.6) en utilisant le module d'élasticité  $E=210000 \text{ N/mm}^2$ , l'amplitude  $\delta_1$  obtenue est de l'ordre de celle donnée par l'équation (1.3).

Il faut noter que les imperfections géométriques initiales dans la simulation numérique peuvent être employées non seulement pour représenter la géométrie imparfaite mais encore pour tenir compte d'autres imperfections telles que les contraintes résiduelles, la non-homogénéité matérielle, l'excentricité du chargement, etc. si ces dernières, surtout les contraintes résiduelles, ne sont pas explicitement modélisées. A cause de l'incertitude associée aux grandeur et distribution des contraintes résiduelles, leur influence peut être prise en compte dans la modélisation numérique par une augmentation appropriée des imperfections géométriques initiales. KAITILA [K1-2002] a proposé d'utiliser l'amplitude du défaut de planéité de l'âme des barres de section en C et l'a employé dans l'analyse non-linéaire de barres en compression aux températures ambiante et élevée. Il a trouvé une précision acceptable avec les résultats expérimentaux des autres auteurs. La raison de cette modélisation simplifiée est que l'influence des contraintes résiduelles est négligeable à température élevée. L'expression de l'amplitude est d'une forme simple comme l'équation (1.3):

$$\frac{\delta_1}{h} = \frac{1}{200} = 0.005 \quad (1.7)$$

ASHRAF *et al.* [A2-2006] ont proposé une autre formule applicable aux sections en U, en C et cornières qui sont fabriquées en acier inoxydable:

$$\frac{\delta_1}{t} = 0.023 \frac{\sigma_{0.2}}{\sigma_{cr}} \quad (1.8)$$

où  $\sigma_{0.2}$  est la contrainte correspondante à la déformation plastique de 0.2% et identifiée à partir des éprouvettes prélevées dans les faces des profils,  $\sigma_{cr}$  est la contrainte critique de la plaque d'âme.

Dans un article datant 1995 [B1-1995], on étudie l'influence des défauts de planéité de l'âme des profilés reconstitués soudés sur leur résistance en flexion et compression, BRAHAM *et al.* ont montré que, au point de vue strictement théorique, l'imperfection  $\delta_1/t$  doit être utilisée au lieu de  $\delta_1/h$ , mais au point de vue pratique, ils préfèrent une expression des tolérances de fabrication sous la forme:



$$\frac{\delta_1}{h} \leq \frac{1}{\varphi} \quad (1.9)$$

Ils ont comparé les formules préconisées par de nombreux codes, recommandations et d'autres auteurs avec leurs quelques 350 mesures effectuées sur des poutres reconstituées soudées à la sortie d'usine. Ils ont trouvé que le cas avec  $\varphi=72$  dans l'expression (1.9) cadre assez bien avec la limite supérieure des résultats des mesures réelles, donc:

$$\frac{\delta_1}{h} \leq \frac{1}{72} = 0.0139 \quad (1.10)$$

L'expression (1.10) fournit une valeur maximale 2 fois plus grande que les expressions (1.3) et (1.6). Ce n'est pas surprise car les imperfections sont causées par des fabrications différentes (formé à froid et reconstitué soudé) et en plus les contraintes résiduelles ne sont pas comptées dans le modèle de BRAHAM *et al.* [B1-1995]. Ils ont donc du prendre une plus grande valeur limite. Cet article autorise aussi les observations intéressantes suivantes:

- (i) la longueur longitudinale de la demi-onde de l'imperfection locale de l'âme d'une poutre reconstituée soudée est approximativement égale à la hauteur de l'âme;
- (ii) il existe certainement pour chaque mode de sollicitation – flexion, compression, ... - une forme géométrique de l'imperfection qui soit la plus défavorable au comportement de la poutre. Mais, l'imperfection provient de la fabrication, indépendamment de la sollicitation qui sera appliquée ultérieurement à la poutre. Ainsi, il est plus adéquat de considérer les imperfections réelles;
- (iii) l'une des origines des défauts de planéité est liée aux contraintes résiduelles car les contraintes résiduelles de compression cause des défauts de planéité lorsqu'elles atteignent la valeur critique de flambement des plaques. Il est évident que le comportement ultérieur d'une poutre est influencé par une action conjuguée des défauts de planéité et des contraintes résiduelles.

#### **1.1.3.1.2. Imperfections globales**

L'une des caractéristiques marquantes du comportement des profils à parois minces est le couplage entre les modes d'instabilités local et global. L'introduction de cette interaction dans l'analyse non-linéaire est faite par la simulation simultanée des défauts local et global dans les modes propres de flambement correspondants. KAITILA [K1-2002] a montré que la grandeur de l'imperfection globale a une influence plus défavorable sur la charge de ruine d'un poteau de section en C que l'imperfection locale. Les imperfections globales comprennent les imperfections de flexion et de torsion. Divers auteurs ont mesurés ces défauts des profils, RONDAL [R1-2000] a rassemblé leurs résultats qui sont reprises dans le tableau 1.4 pour les défauts de rectitude et dans le tableau 1.5 pour les défauts de torsion (vrillage).

Tableau 1.4. Flèches relatives mesurées.

Auteur et référence	Type de profil	$f_0/l$ caractéristique (moyenne plus deux écarts types)
C.E.C.M [G3-1976]	Ensemble de tous les profils	1/800 à 1/1000
MATTHEY [M2-1985]	I, axe fort	1/1590
	I, axe faible	1/1010
	$I_{\text{redressés}}$ , axe fort	1/2940
	$I_{\text{redressés}}$ , axe faible	1/4350
ITOH [I1-1984]	$I_{\text{laminés}}$ , axe fort	1/4850
	$I_{\text{laminés}}$ , axe faible	1/5430
	$I_{\text{soudés}}$ , axe fort	1/3060
	$I_{\text{soudés}}$ , axe faible	1/1190
COSTA FERREIRA et RONDAL [C1-1985]	Cornières profilées à froid	1/740
COSTA FERREIRA [C2-1986]	Cornières pliées à froid	1/2420
BATISTA [B3-1988]	U et C pliés à froid	1/2530

Tableau 1.5. Torsions relatives mesurées (en degré/mètre).

Auteur et référence	Type de profil	$\theta_0/l$ caractéristique
ITOH [I1-1984]	I laminés	0.12
	I soudés	0.30
MATTHEY [M2-1985]	I laminés	0.07
COSTA FERREIRA [C2-1986]	Cornières pliées à froid	0.53

BATISTA [B3-1988] a effectué la mesure des déformations initiales dans le sens longitudinal des profils longs de section en U et en C, pour plusieurs génératrices de ces profils. Ces mesures permettent de visualiser les imperfections dans les deux directions principales, sur les bords libres des sections en U ou en C et sur les raccordements semelle-raideur des sections en C. Il existe deux types de déformations: déformation en forme de plusieurs demi-ondes et déformation en une seule demi-onde. RONDAL [R1-2000] a observé aussi différents types de déformées (Fig. 1.6) et on voit bien, à partir de ces observations, que les imperfections géométriques peuvent être décomposées en défauts globaux et locaux ou distorsionnels.

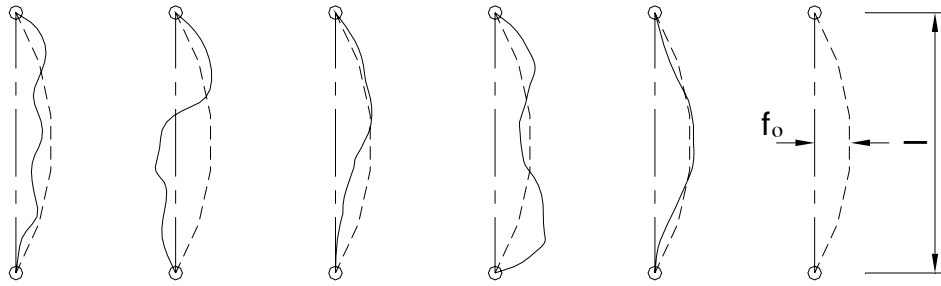


Figure 1.6. Différents types de déformées observées et déformée sinusoïdale théorique considérée.

On admet la forme sinusoïdale de la déformée globale pour une barre simplement appuyée à ses deux extrémités:

$$z = f_o \sin \frac{\pi y}{l} \quad (1.11)$$

dans lequel  $y$  est l'axe longitudinal.

Lorsque la stabilité des barres est calculée au moyen d'une analyse de second ordre, la flèche relative initiale de 1/1000 est préconisée par C.E.C.M [E4-1984]. Tandis que quelques auteurs [R4-1998, R11-2000, D1-2002] ont mentionné une autre valeur de 1/1500, qui est la moyenne statistique des profils laminés à chaud selon BJORHOVDE. Dans le cas d'une analyse non-linéaire prenant en compte le déversement d'une barre fléchie, selon l'EUROCODE 3, partie 1-1 [E1-2003] il est suffisant d'introduire l'imperfection initiale de flexion pour l'axe faible du profil considéré et il n'est pas nécessaire, en général, d'inclure en plus une imperfection de torsion. Toutefois, quelques auteurs utilisent à la fois les imperfections de flexion et de torsion dans leurs recherches sur le comportement des poutres [P1-1995, P2-1999].

### 1.1.3.2. Contraintes résiduelles, écrouissage et modèles matériels

Les contraintes résiduelles existent toujours dans les profils de construction en acier à cause du processus de fabrication: laminage à chaud, soudage, découpage au chalumeau, d'une part, et formage à froid par pliage et profilage, d'autre part. Par contre, l'écrouissage, qui est en général le phénomène d'augmentation de la limite élastique et de diminution de la ductilité, n'est produit que par le formage à froid. Parmi deux méthodes du formage à froid, le profilage entraîne un accroissement de la limite élastique qui est importante dans les arrondis et assez appréciable dans les faces planes. Par contre, le pliage à la presse cause une augmentation similaire aux arrondis, mais les faces planes sont moins influencées par le pliage. Ainsi, les contraintes résiduelles et l'écrouissage apparaissent tout dans les éléments formés à froid et leur intensité est plus importante aux mêmes endroits de la section droite de l'élément, les arrondis. C'est pourquoi, on a choisi de présenter simultanément ces derniers dans le même sous-paragraphe. Une autre raison plus significative est que quelques auteurs modélisent leur modèle de recherche avec contraintes résiduelles et écrouissage, en même temps, et puis les comparent aux résultats expérimentaux.

A titre d'exemple [G1-1974], la figure 1.7 montre les variations de la limite élastique mesurée dans quelques sections formées à froid et la figure 1.8 montre l'influence des méthodes de formage à froid sur l'accroissement de la limite élastique,

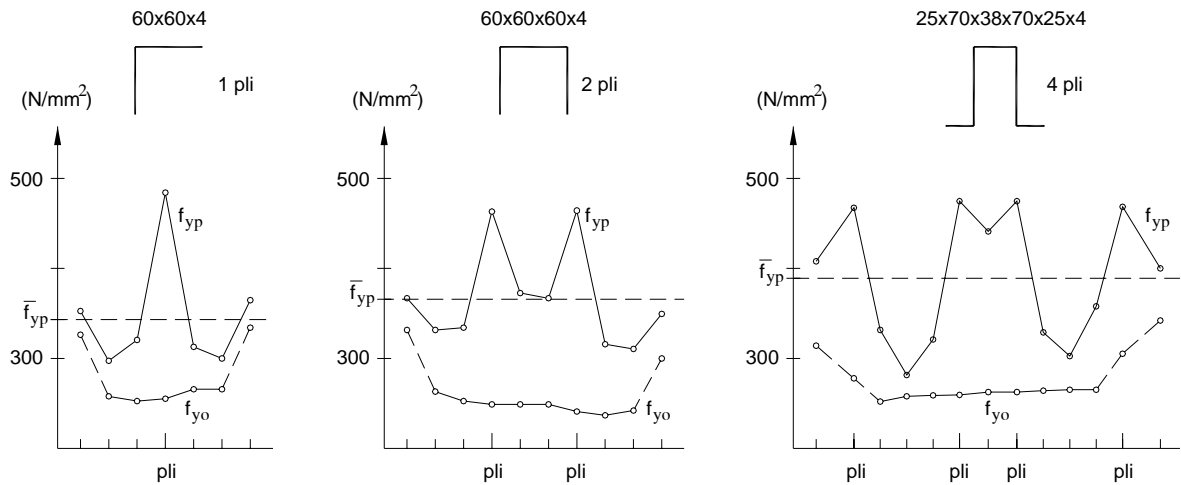


Figure 1.7. Augmentation de la limite élastique à cause du formage à froid.

où  $f_{yo}$  est la limite élastique du feuillard;  $f_{yp}$  est la limite élastique du profil;  $\bar{f}_{yp}$  est la limite élastique moyenne sur l'ensemble du profil. On voit bien, sur la figure 1.7, l'accroissement de la limite élastique moyenne  $\bar{f}_{yp}$  en relation avec le nombre de plis.

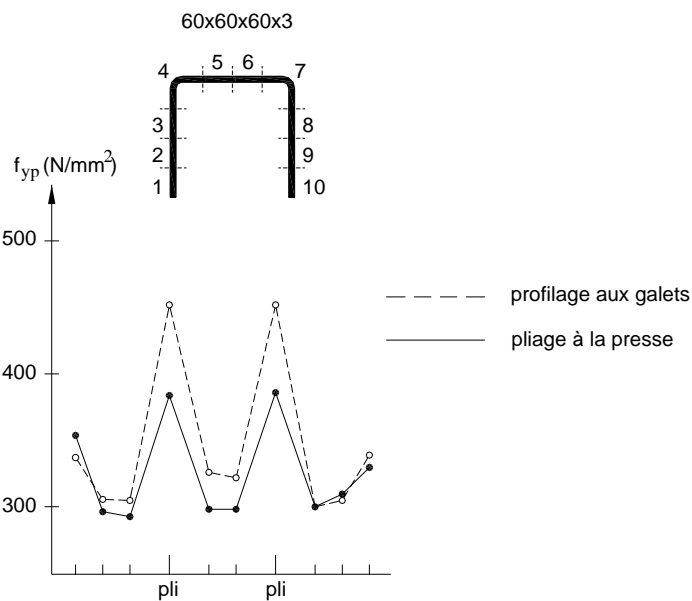


Figure 1.8. Accroissement de la limite élastique dû au profilage et au pliage.

Les contraintes résiduelles longitudinales sur la section droite d'un profil sont auto-équilibrées et elles sont idéalisées comme la somme de deux types: membrane et flexion. Le type membranaire est essentiel dans les profils laminés à chaud, tandis que le type flexionnel prédomine pour les profils formés à froid. La variation des contraintes résiduelles à travers l'épaisseur mène à la plastification prématurée des faces des profils formés à froid.

### 1.1.3.2.1. Profils fabriqués à partir d'aciers au carbone

BATISTA [B3-1988] a mesuré les contraintes résiduelles sur les parties planes des sections en U et en C formées à froid pour les aciers de nuance 360 N/mm<sup>2</sup>. Il a trouvé que pour les sections de

type U (figure 1.9a)<sup>1</sup>, elles ne dépassent pas 40 N/mm<sup>2</sup> et pour les sections de type C (figure 1.9b), elles atteignent 90 N/mm<sup>2</sup>, sauf sur les bords libres où les contraintes résiduelles peuvent atteindre 200 N/mm<sup>2</sup>.

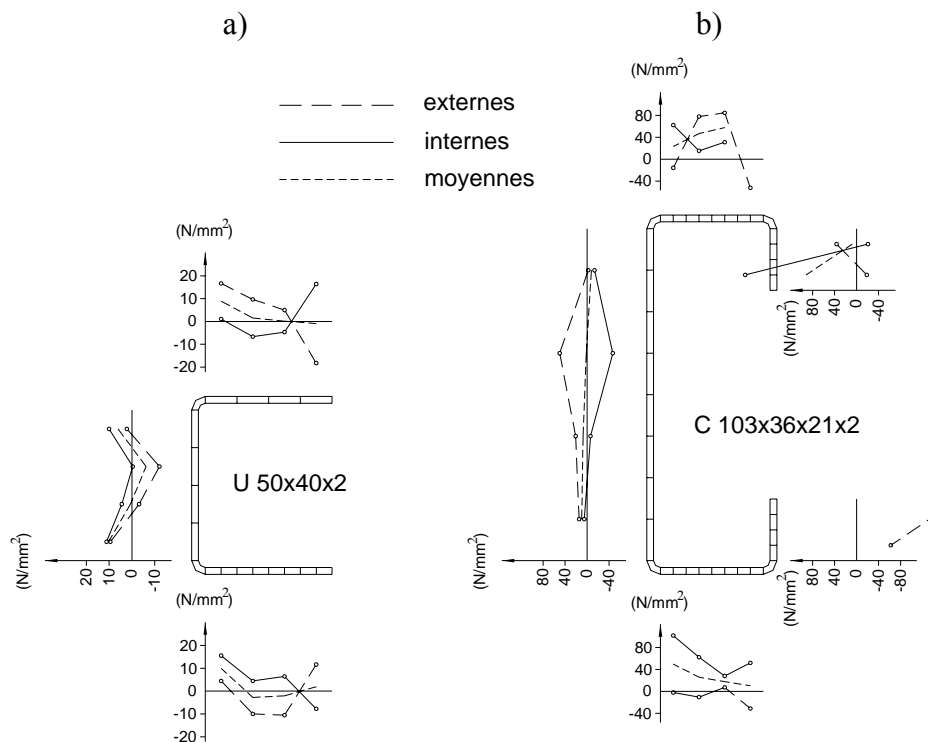


Figure 1.9. Mesure des contraintes résiduelles pour les spécimens de sections en U et en C.

SCHAFFER et PEKÖZ [S1-1998] ont suggéré des recommandations afin de modéliser les contraintes résiduelles. Les résultats statistiques pour les contraintes résiduelles membranaires sont résumés dans le tableau 1.6 où on voit que les contraintes résiduelles membranaires dans les profils profilés sont plus élevées que dans les profils pliés. Les contraintes résiduelles significatives existent premièrement dans les arrondis. Par contre, la limite élastique est également élevée dans ces coins comme l'indique les figures 1.7 et 1.8. Si de larges contraintes résiduelles membranaires sont modélisées dans les arrondis ou d'autres zones fortement influencées par l'écroutissage, la limite élastique relevée dans ces régions doit être aussi modélisée. Inversement, si les contraintes résiduelles membranaires sont ignorées, il ne faut pas inclure l'augmentation de la limite élastique dans les simulations.

<sup>1</sup>Il y a peut-être une petite erreur entre les lignes représentant les contraintes résiduelles sur les faces externe et interne de la semelle inférieure de la section en U50x40x2 dans la référence [B3-1988]. On l'observe sur la figure 1.9.

Tableau 1.6. Contraintes résiduelles membranaires en % $f_y$ .

Élément de la section droite	Profilage		Pliage	
	Moyenne	Variance	Moyenne	Variance
Arrondis	6.8	1.1	5.2	0.4
Semelle	3.9	1.0	0.9	1.0
Raidisseur	7.9	1.5	0.2	0.3
Âme	-1.7	1.2	0.9	0.1

SCHAFER et PEKÖZ [S1-1998] ont recommandé de modéliser les contraintes résiduelles flexionnelles dans tous les éléments avec une hypothèse de variation linéaire à travers l'épaisseur des parois. Ils ont rassemblé leur mesure dans le tableau 1.7 et sur la figure 1.10.

Tableau 1.7. Contraintes résiduelles flexionnelles en % $f_y$ .

Élément de la section droite	Profilage		Pliage	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
Arrondis	26.8	5	32.7	3.3
Semelle	23.5	1.0	8.0	2.5
Raidisseur	6.7	6.4	56.0	11.6
Âme	38.9	6.2	16.9	4.5

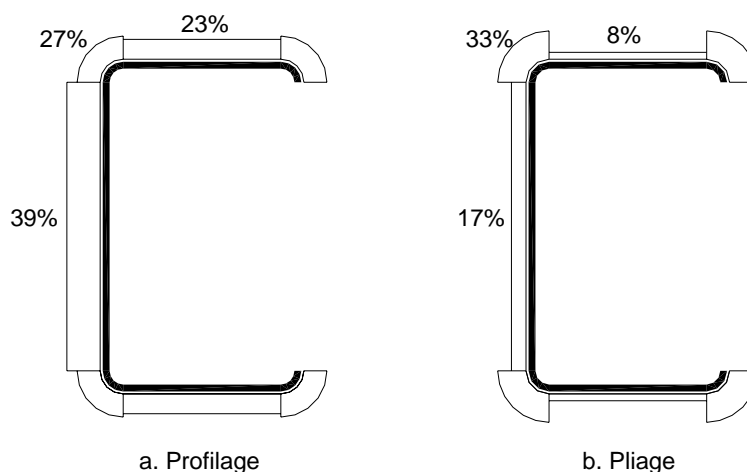


Figure 1.10. Contraintes résiduelles flexionnelles moyennes en % $f_y$ .

Concernant également la section en C formée à froid par profilage, ABDEL-RAHMAN et SIVAKUMARAN [A4-1997, S7-1998] ont proposé de la diviser en deux zones: zone arrondie et zone plane, la zone arrondie est étendue à  $0.5\pi r$  en dehors de la portion courbe (Fig. 1.11). Les limites élastiques des zones planes sont considérées uniformes et prises égales à la limite élastique caractéristique  $f_y$  de la nuance d'acier de la section. Les limites élastiques des zones arrondie  $f_{yc}$  a

une plus grande valeur et l'accroissement de la limite élastique dans les zones arrondie est pris comme suit:

$$\Delta f_y = 0.60 \left[ \frac{B_c}{(r/t)^m} - 1.0 \right] f_y \quad (1.12)$$

où  $B_c = 3.69 \left( \frac{f_u}{f_y} \right) - 0.819 \left( \frac{f_u}{f_y} \right)^2 - 1.79$

$$m = 0.192 \left( \frac{f_u}{f_y} \right) - 0.068$$

et  $f_u$  est la limite ultime de l'acier de base;  $r$  est le rayon interne de l'arrondi considéré.

En acceptant ces limites élastiques, à chaque zone est désignée une relation multilinéaire idéalisée contrainte-déformation comme l'indique la figure 1.11.

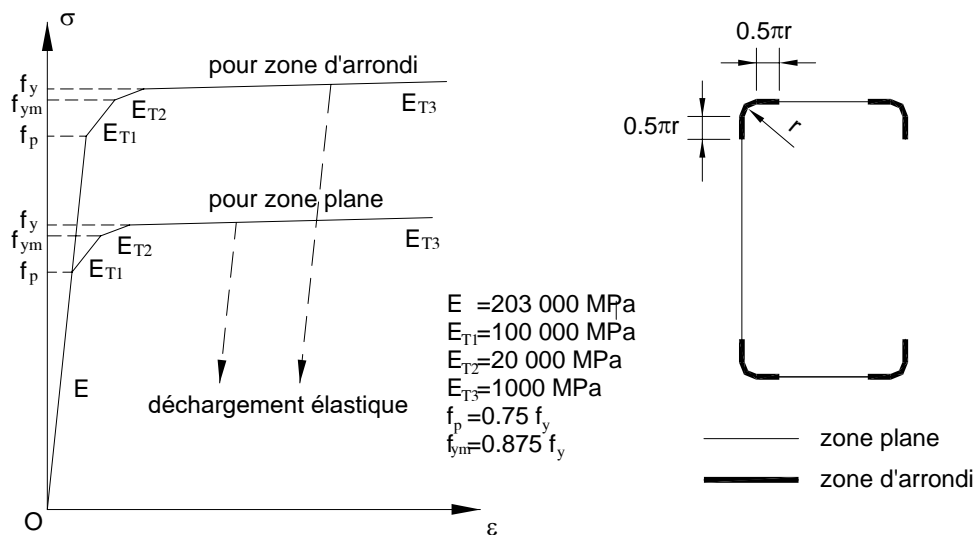


Figure 1.11. Modèle matériel d'analyse et définition des zones planes et des zones arrondies.

Les résultats expérimentaux de mesure des contraintes résiduelles des sections en C profilées à froid [A4-1997] ont indiqué que la plupart des contraintes résiduelles longitudinales de traction résident sur les faces extérieures des parois et les contraintes équivalentes de compression résident sur les faces intérieures de la section. ABDEL-RAHMAN et SIVAKUMARAN n'ont proposé de ne modéliser que des contraintes résiduelles flexionnelles variant linéairement variées à travers l'épaisseur des parois avec l'intensité de  $0.40f_y$  pour les zones d'arrondi et de  $(0.24-0.0006w)f_y$  pour les zones planes,  $w$  étant la largeur de la zone plane considérée. Ils ont négligé le type membranaire de contraintes résiduelles.

Pour des sections en Z formées à froid, Pi, Y-L. *et al.* [P2-1999] ont proposé le diagramme tri-linéaire pour les zones planes et la courbe de type RAMBERG-OSGOOD pour les arrondis (Fig. 1.12). Ces relations contrainte-déformation avaient été proposées par KEY et HANCOCK [K2-1993] pour les sections carrées creuses formées à froid. Dans le modèle de PI, Y-L *et al.*, les zones dites arrondies ne sont que les portions circulaires.

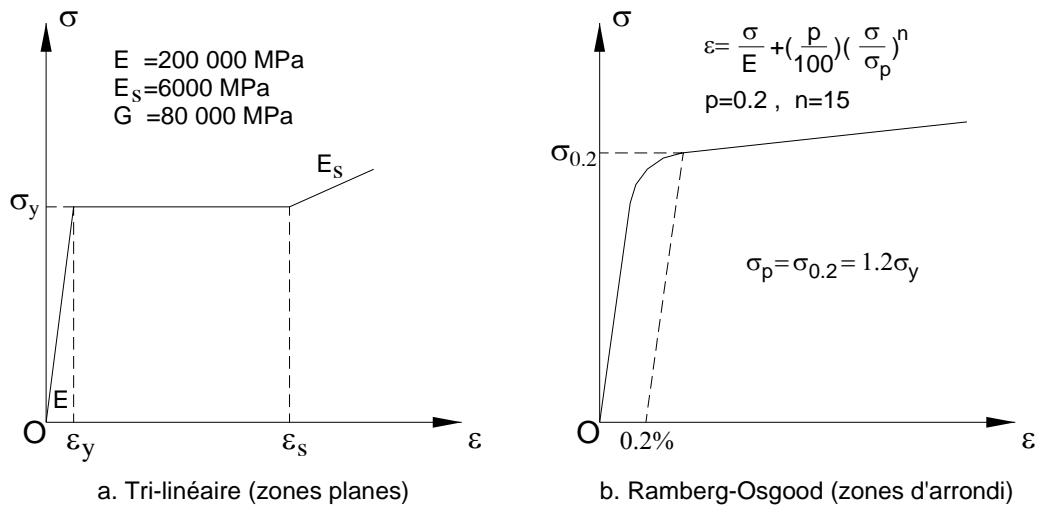


Figure 1.12. Modèles matériels d'analyse.

A cause du manque de mesure des contraintes résiduelles pour la section en Z. Pi, Y-L. *et al.* [P2-1999], ont modifié le modèle des contraintes résiduelles recommandé par WENG et PEKÖZ [W1-1990] pour la section en C parce que la méthode de formage à froid d'une section en Z est similaire à celle d'une section en C. Ils n'ont tenu compte que des contraintes résiduelles flexionnelles. Ces dernières, positives, sont distribuées sur les faces désignées sur la figure 1.13a. Il est noté que pour les raidisseurs et les zones planes, les absolus des contraintes maximales de traction et de compression sont égaux, tandis que pour les arrondis, ils sont pris inégaux afin de tenir compte de la courbure (Fig. 1.13a et b). Ces contraintes résiduelles satisfont aux conditions d'équilibre de moments et de forces axiales.

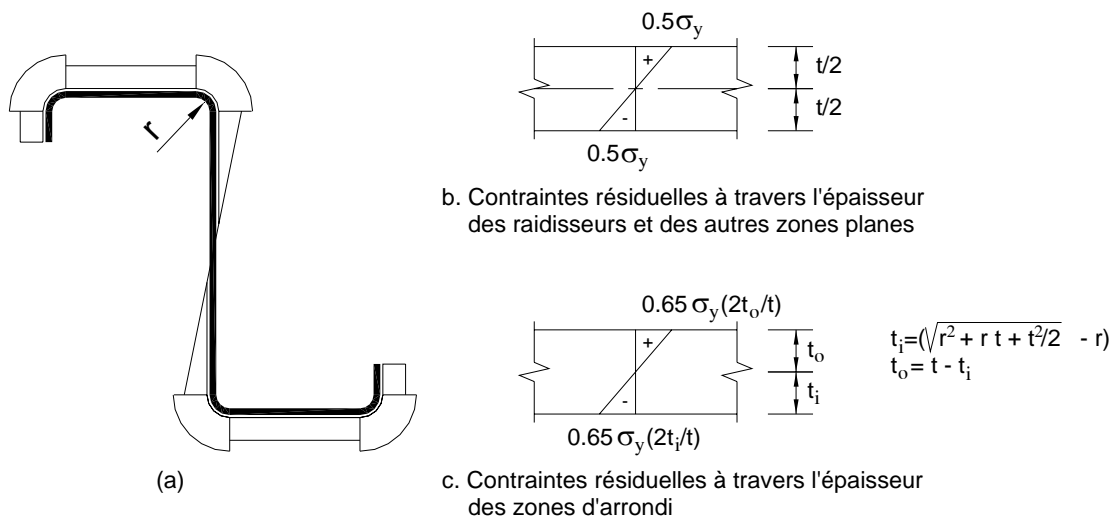


Figure 1.13. Distribution des contraintes résiduelles pour section en Z.

L'influence des méthodes de formage à froid (profilage ou pliage) et la présence des contraintes résiduelles variables sur l'épaisseur sont mises en évidence dans les essais de cornières de COSTA FERREIRA et RONDAL [C1-1985, C2-1986]. Le profilage aux galets montre des contraintes membranaires faibles mais cause des contraintes résiduelles flexionnelles élevées. Par contre, le pliage à la presse cause des contraintes moyennes pour les deux types (Fig. 1.14).



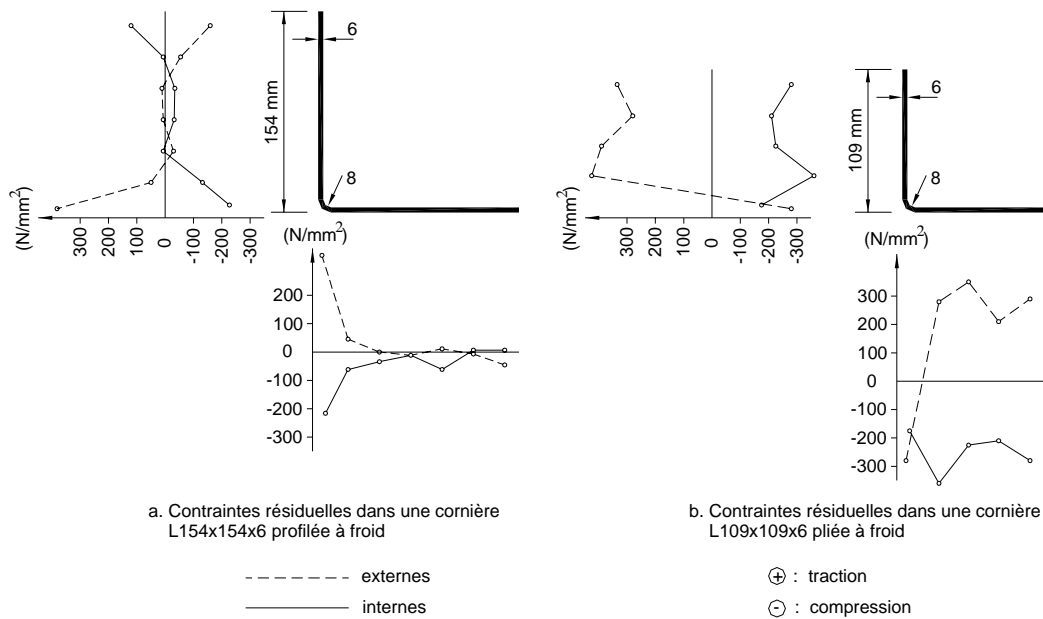


Figure 1.14. Contraintes résiduelles dans cornières dues au profilage et au pliage.

KEY et HANCOCK [K2-1993] se sont intéressés à modéliser l'état initial des sections creuses carrées profilées à froid (SHS- 76x76x2.0, 152x152x4.9, 203x203x6.3, 254x254x6.3). Ils ont recommandé le diagramme tri-linéaire (Fig. 1.12a) pour le matériau des zones planes et la courbe de type RAMBERG-OSGOOD pour les arrondis (Fig. 1.12b). Ils ont mesuré non seulement des contraintes résiduelles longitudinales mais encore des contraintes résiduelles transversales et d'étagement (Figs. 1.15 et 1.16); ces deux derniers sont généralement ignorés dans les sections ouvertes. Ils ont mis en évidence la distribution complexe, à travers l'épaisseur, des contraintes résiduelles qui ne sont plus simplifiées par la somme des types membranaire et flexionnel, la figure 1.16 présente la variation des types de contraintes résiduelles sur l'épaisseur d'une section creuse carrée avec la limite élastique de l'acier de base de 350 MPa. L'existence des contraintes résiduelles transversales est aussi affirmée par les modèles analytiques [R3-1987] qui sont toutefois plus significatives par leur aspect qualitatif que quantitatif.

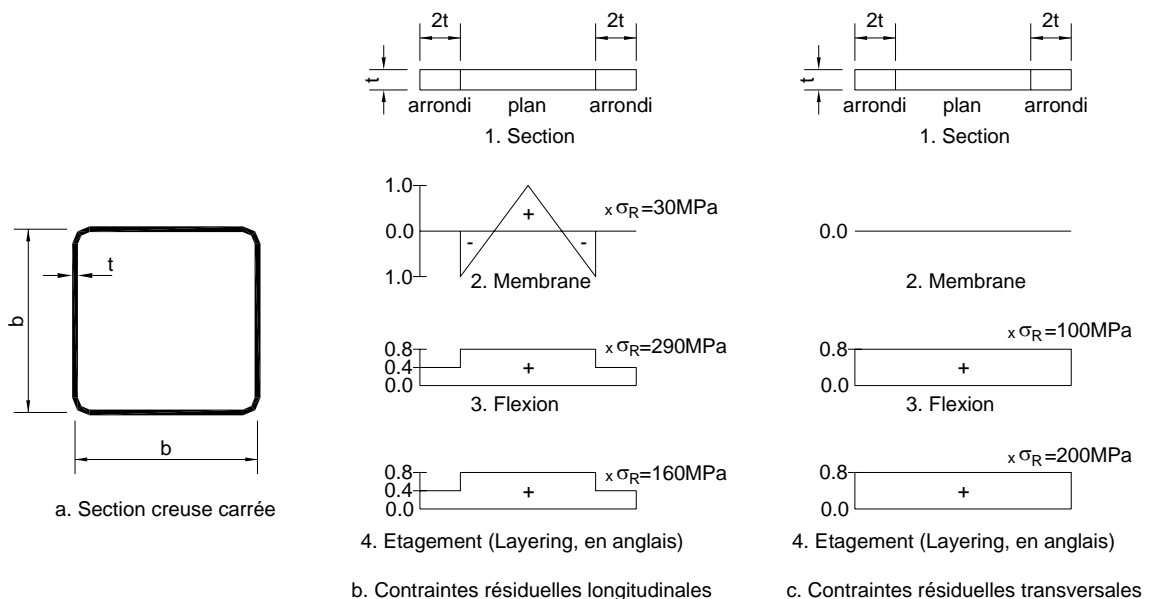


Figure 1.15. Facteurs de contraintes résiduelles pour section creuse carrée formée à froid.

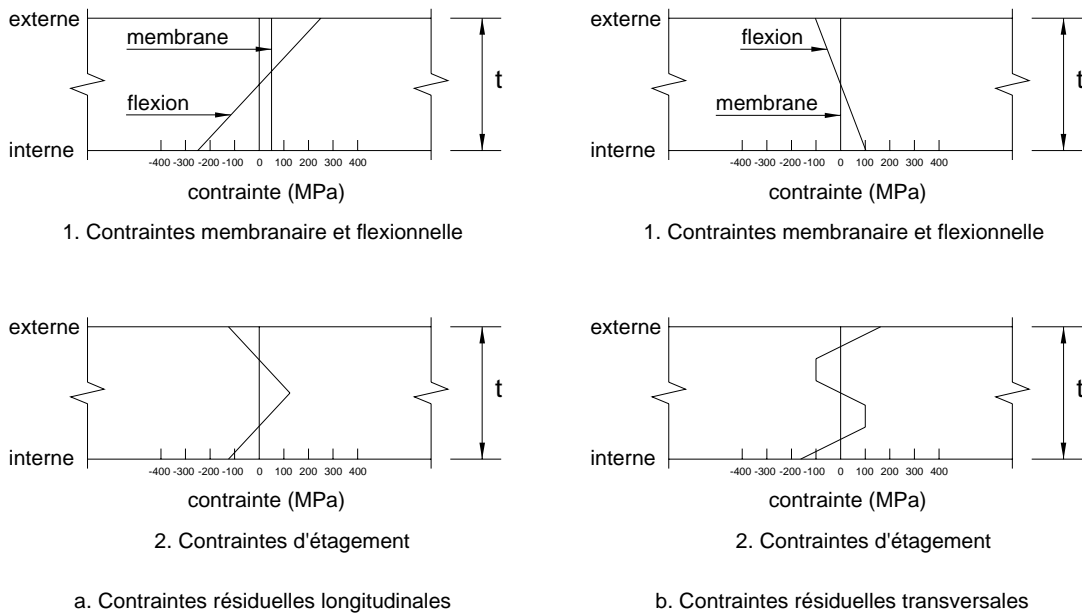


Figure 1.16. Contraintes résiduelles à travers l'épaisseur d'une section creuse carrée formée à froid.

PI et TRAHAIR [P1-1995] ont adopté le modèle de KEY et HANCOCK [K2-1993] dans leur étude de l'instabilité latérale des sections creuses rectangulaires formées à froid mais ils n'ont idéalisé que des contraintes résiduelles longitudinales en les augmentant de 25% afin de tenir compte de l'influence des contraintes résiduelles transversales. Pour avoir une certaine comparaison avec le modèle précédent, on représente ci-dessous la distribution des contraintes résiduelles longitudinales sur une section creuse carrée 200x200x8, issue d'une recherche expérimentale [R1-2000]. Il est clair que dans ce cas, les contraintes résiduelles aux arrondis sont moins importantes que dans les zones planes, cela est similaire à la prédiction de la figure 1.15b.

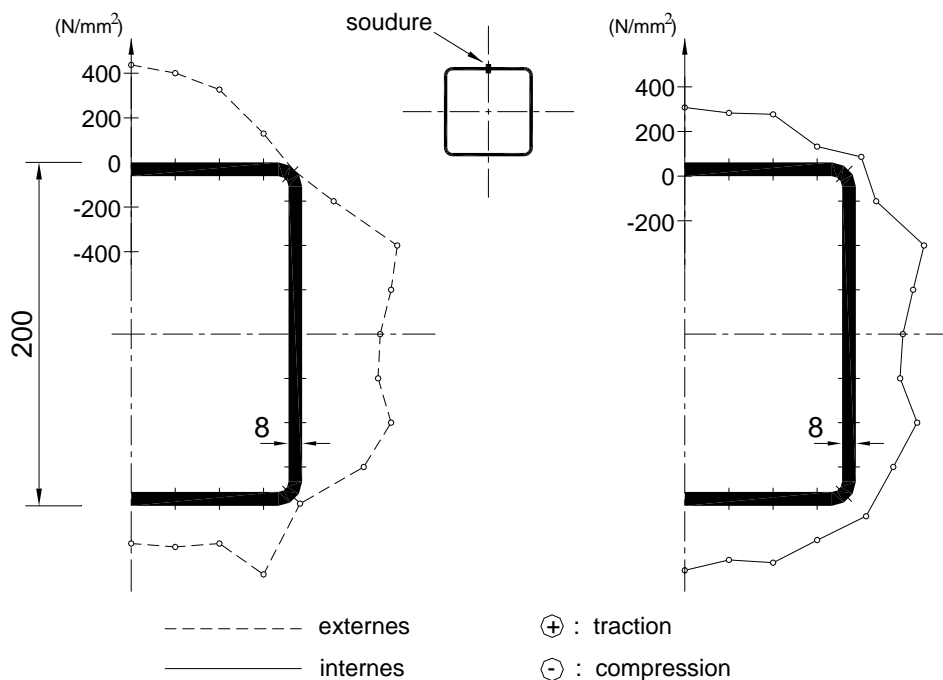


Figure 1.17. Contraintes résiduelles dans un profil creux carré profilé aux galets.

Les interprétations précédentes ne concernent que des sections formées à froid. Il est hors de doute que des produits laminés à chaud et produits reconstitués par soudage ou boulonnage sont apparus longtemps avant les produits formés à froid. Ils ont été profondément étudiés et le calcul de ces produits est incorporé dans plusieurs codes, recommandations et spécifications. En ce qui concerne la mesure des contraintes résiduelles et le modèle matériel, les résultats sont plus généralement acceptés par tous.

Pour les profils laminés à chaud: le refroidissement des profils laminés à chaud entraîne la naissance des contraintes résiduelles, de directions essentiellement longitudinales, dont les pointes peuvent atteindre la limite élastique. La figure 1.18a donne, à titre d'exemple, les contraintes mesurées dans un profilé en acier dont la limite élastique est égale à 235 N/mm<sup>2</sup> [D2-1974]. Dans l'analyse, on ignore souvent le type flexionnel des contraintes résiduelles et le schéma du type membranaire adopté pour les sections en I ou en H est bi-triangulaire avec comme valeur maximum 0.3f<sub>y</sub> si h/b ≤ 1.2 [D3-1989, W1-1990] et 0.5f<sub>y</sub> si h/b > 1.2 (Fig. 1.18), il correspond à la répartition préconisée par la C.E.C.M [E4-1984].

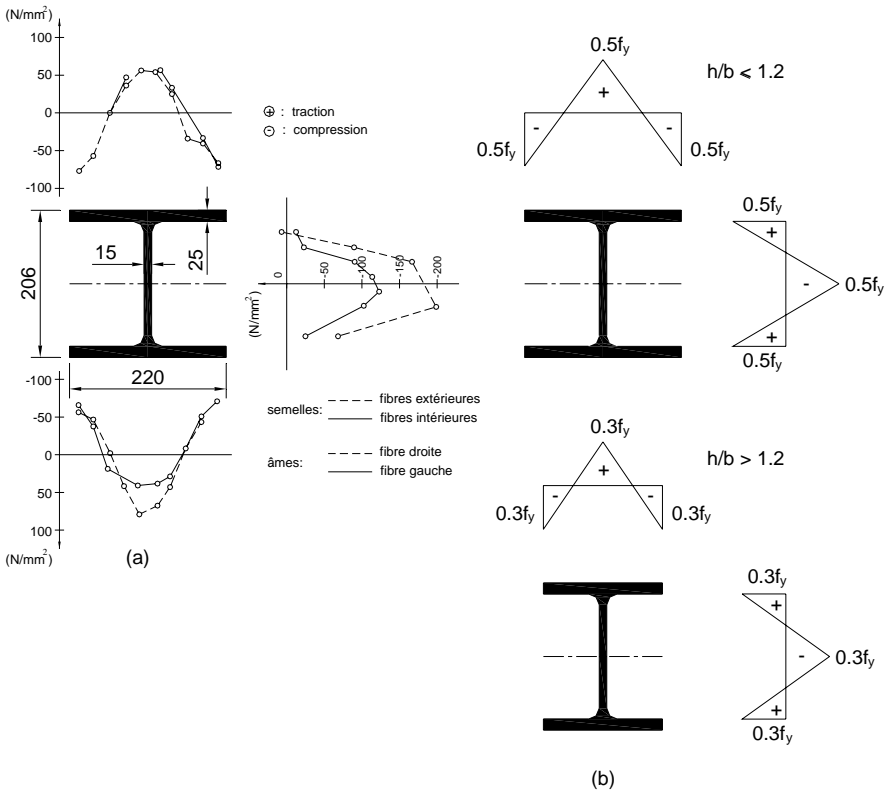


Figure 1.18. Contraintes résiduelles dans un profil laminé à chaud.

Concernant les cornières laminées à chaud, DE VILLE DE GOYET [D3-1989], après examen de la littérature, choisit un schéma de répartition des contraintes résiduelles membranaires qui est en équilibre. Le schéma est bi-triangulaire sur chaque aile de la cornière.

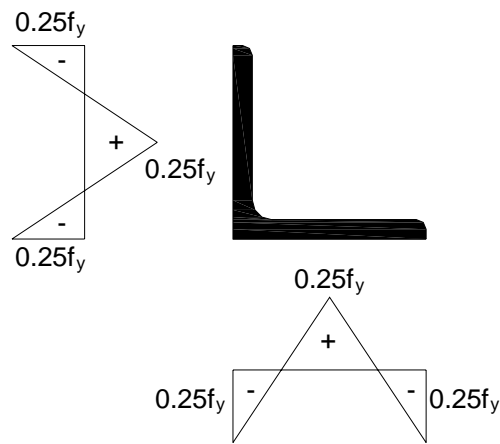


Figure 1.19. Répartition des contraintes résiduelles membranaires pour cornières laminées à chaud.

Pour les profils reconstitués soudés: après le soudage, le cordon et les zones voisines échauffées se refroidissent inégalement et se contractent tant dans le sens du cordon que dans le sens transversal. Si les plaques assemblées sont libres à leurs extrémités, les contraintes résiduelles sont importantes au voisinage du cordon. La figure 1.20 présente, à titre d'exemple, les contraintes résiduelles mesurées dans un profil en H reconstitué de plaques en acier de limite élastique égale à  $270 \text{ N/mm}^2$  [T1-1974].

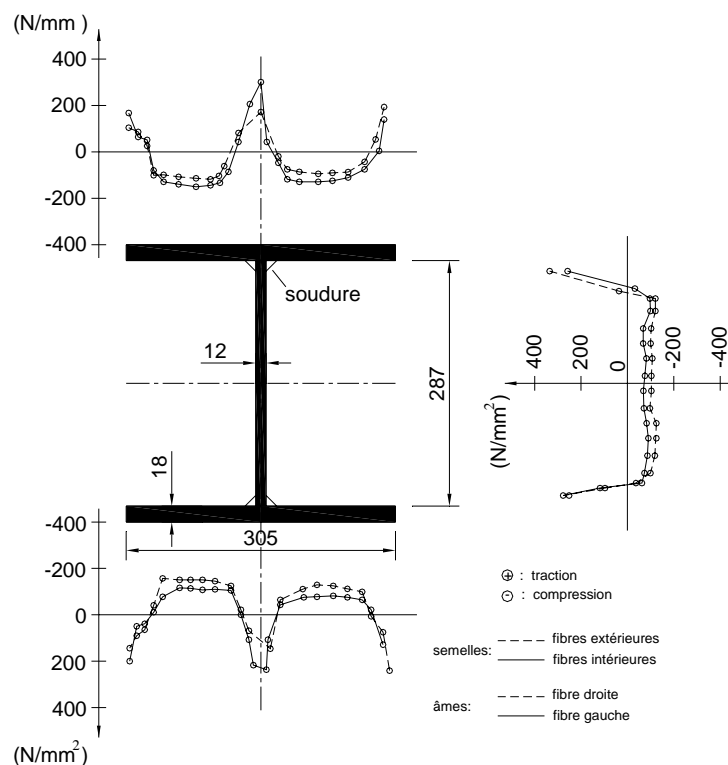


Figure 1.20. Contraintes résiduelles dans un profil reconstitué soudé.

Deux schémas de contraintes résiduelles pour les sections en I sont à distinguer pour les deux méthodes de fabrication des semelles. Premièrement, les plaques de semelles sont découpées au chalumeau, le schéma sur la figure 1.21a idéalise les contraintes membranaires longitudinales, comme proposé par la C.E.C.M [E4-1984]. Deuxièmement, les plaques de semelles sont laminées, les

contraintes résiduelles membranaires des zones loin de cordons sont plus importantes que dans le premier cas (Fig. 1.21b).

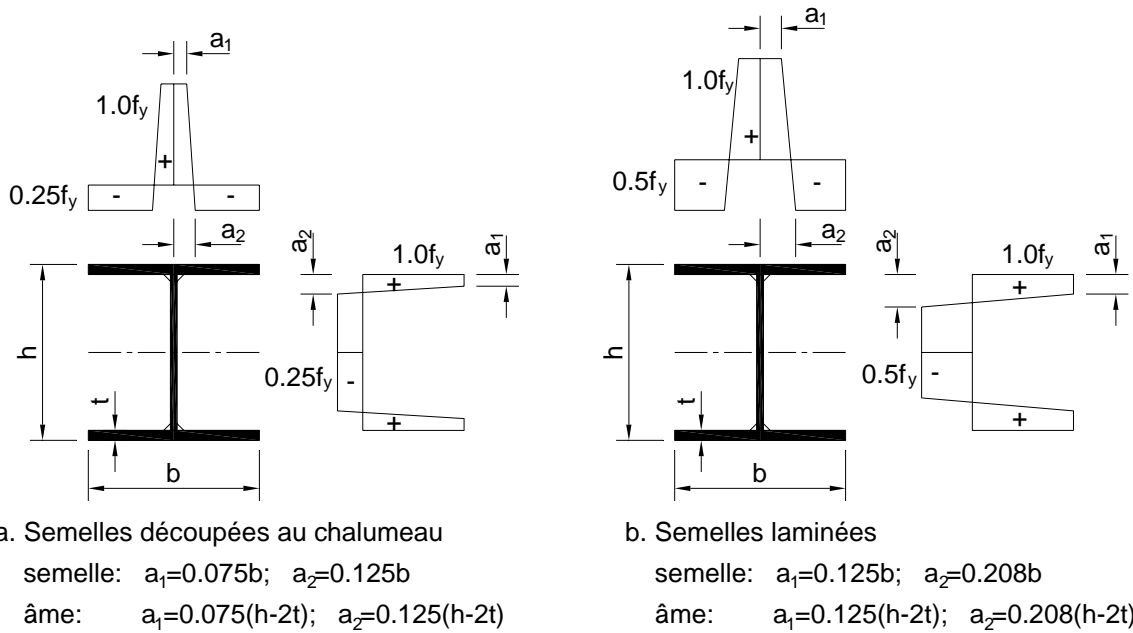


Figure 1.21. Répartition des contraintes résiduelles pour des sections en I ou en H reconstituées soudées

### 1.1.3.2.2. Profils fabriqués à partir de l'acier inoxydable

Les aciers inoxydables ont une relation contrainte-déformation typique différente des aciers au carbone (Fig. 1.4). Le palier de plasticité des aciers au carbone est inexistant dans ce cas. Les aciers inoxydables ont un diagramme contrainte-déformation non-linéaire dès les basses contraintes et une réponse visible à l'écroutissage. Le modèle matériel de RAMBERG-OSGOOD paraît le plus approprié pour exprimer la relation contrainte-déformation des aciers inoxydables:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_o} + \varepsilon_p \left( \frac{\sigma}{\sigma_p} \right)^n \quad (1.13)$$

où  $\sigma_p$  est la contrainte correspondante à la déformation plastique  $\varepsilon_p$ ; n est un paramètre exponentiel à déterminer.

Dans l'équation (1.13), la déformation totale est la somme des portions élastique et plastique. La contrainte  $\sigma_p$  prise correspondante à la déformation plastique de 0.2% est la forme la plus commune de l'expression de RAMBERG-OSGOOD comme donné par l'équation (1.14):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_o} + 0.002 \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} \right)^n \quad (1.14)$$

Afin de déterminer le paramètre n, préconisé par l'Annexe C de l'EUROCODE 3, partie 1-4 [E3-2004], on utilise souvent les contraintes respectivement correspondantes aux déformations plastiques de 0.01% et 0.2%:

$$n = \frac{\ln(20)}{\ln(\sigma_{0.2} / \sigma_{0.01})} \quad (1.15)$$

L'équation (1.14) donne une prévision très précise du comportement contrainte-déformation de l'acier inoxydable jusqu'à la contrainte  $\sigma_{0.2}$  correspondante à la déformation plastique de 0.2%. Cependant, lorsque la contrainte dépasse ce niveau, cette équation surestime la contrainte. Ces observations sont confrontées par les expériences de plusieurs auteurs [M1-2000, R7-2003, A2-2006].

MIRAMBELL et REAL [M1-2000] ont adopté la formule de RAMBERG-OSGOOD pour les contraintes jusqu'à la contrainte  $\sigma_{0.2}$ , mais le paramètre exponentiel  $n$  est calculé à partir des contraintes correspondantes aux déformations plastiques de 0.05% et 0.2%. Pour les contraintes en dehors de  $\sigma_{0.2}$ , ils conservent la forme de l'équation (1.13) en déplaçant l'origine des coordonnées de (0,0) à  $(\varepsilon_{t0.2}, \sigma_{0.2})$  où  $\varepsilon_{t0.2}$  est la totale déformation correspondante à  $\sigma_{0.2}$ . Ce-ci est expliqué par l'expression (1.16) et la figure 1.22:

$$\varepsilon_{t0.2} = \frac{\sigma_{0.2}}{E} + 0.002 \quad (1.16)$$

La relation proposée est donnée par l'équation (1.17) dans laquelle les symboles sont indiqués sur la figure 1.22:

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{E_{0.2}} + \varepsilon_{pu}^* \left( \frac{\sigma^*}{\sigma_u^*} \right)^m \quad (1.17)$$

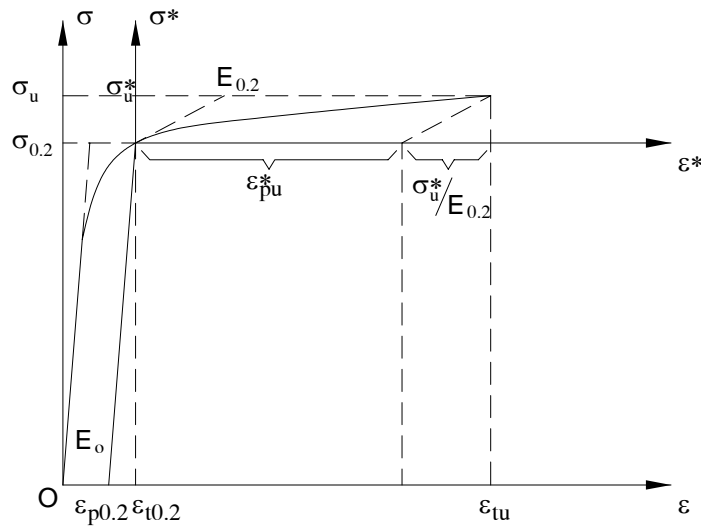


Figure 1.22. Courbe contrainte-déformation pour acier inoxydable.

Par conséquent:

$$\varepsilon = \frac{\sigma - \sigma_{0.2}}{E_{0.2}} + \varepsilon_{pu}^* \left( \frac{\sigma - \sigma_{0.2}}{\sigma_u - \sigma_{0.2}} \right)^m + \varepsilon_{0.2} \quad \text{pour } \sigma > \sigma_{0.2} \quad (1.18)$$

$$\text{où: } \varepsilon_{pu}^* = \varepsilon_{tu} - \varepsilon_{t0.2} - \frac{\sigma_u - \sigma_{0.2}}{E_{0.2}} \quad (1.19)$$

et  $\varepsilon_p$  signifie la déformation plastique,  $\varepsilon_t$  signifie la déformation totale;  $m$  est un paramètre exponentiel additionnel qui peut être déterminé en supposant que la courbe de RAMBERG-OSGOOD modifiée coupe la courbe contrainte-déformation mesurée à la contrainte ultime et à une

contrainte intermédiaire.  $E_{0,2}$ , le module tangent à  $\sigma_{0,2}$ , peut être obtenu par calcul de l'équation (1.14):

$$E_{0,2} = \frac{E_o}{1 + 0.002n \frac{E_o}{\sigma_{0,2}}} \quad (1.20)$$

La relation proposée est en bonne corrélation avec les résultats expérimentaux.

RASMUSSEN [R7-2003], indépendamment de MIRAMBELL et REAL, a avancé la même proposition. Il a adopté l'expression d'origine de RAMBERG-OSGOOD jusqu'à  $\sigma_{0,2}$  et en dehors de cette valeur, l'équation (1.18) est appliquée en remarquant que l'acier inoxydable est généralement ductile et que l'erreur peut être négligée si l'on remplace la déformation plastique ultime transformée  $\varepsilon_{pu}^*$  par la déformation totale ultime  $\varepsilon_{tu}$ . Par conséquent:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_o} + 0.002 \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^n \quad \text{pour } \sigma \leq \sigma_{0,2} \quad (1.21)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma - \sigma_{0,2}}{E_{0,2}} + \varepsilon_{tu} \left( \frac{\sigma - \sigma_{0,2}}{\sigma_u - \sigma_{0,2}} \right)^m + \varepsilon_{0,2} \quad \text{pour } \sigma > \sigma_{0,2} \quad (1.22)$$

En se basant sur les résultats expérimentaux de la littérature et ceux réalisés par lui-même, RASMUSSEN a proposé la formule (1.23) afin de déterminer le paramètre additionnel m:

$$m = 1 + 3.5 \frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_u} \quad (1.23)$$

En plus, la formule (1.24) a été fournie pour déterminer la déformation totale ultime  $\varepsilon_{tu}$ :

$$\varepsilon_{tu} = 1 - \frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_u} \quad (1.24)$$

Le modèle de RASMUSSEN peut décrire la relation complète contrainte-déformation des aciers inoxydables et il a été inclut dans l'Annexe C de prEN 1993-1-4 [E3-2004].

ASHRAF *et al.* [A2-2006] ont admis le modèle à deux stages de MIRAMBELL et REAL [M1-2000], mais ils ont noté que l'application de ce modèle limite à l'état de traction car l'équation (1.18) dépend de la contrainte ultime  $\sigma_u$  et de la déformation ultime correspondante  $\varepsilon_{tu}$ . Tandis que, ces paramètres ne sont pas existants en compression. Ils ont alors remplacé les paramètres ultimes par la contrainte  $\sigma_{1,0}$  correspondante à la déformation plastique de 1.0% et la déformation totale  $\varepsilon_{t1,0}$ . L'expression (1.25) est utilisée pour les contraintes plus grandes que  $\sigma_{0,2}$ :

$$\varepsilon = \frac{\sigma - \sigma_{0,2}}{E_{0,2}} + \left( \varepsilon_{t1,0} - \varepsilon_{t0,2} - \frac{\sigma_{1,0} - \sigma_{0,2}}{E_{0,2}} \right) \left( \frac{\sigma - \sigma_{0,2}}{\sigma_{1,0} - \sigma_{0,2}} \right)^{n'_{0,2,1,0}} + \varepsilon_{0,2} \quad \text{pour } \sigma > \sigma_{0,2} \quad (1.25)$$

où  $n'_{0,2,1,0}$  est le paramètre exponentiel additionnel qui est donné au tableau 1.8 avec un autre rapport nécessaire pour le calcul,  $\sigma_{1,0}/\sigma_{0,2}$ .

Tableau 1.8. Paramètres pour l'équation RAMBERG-OSGOOD modifiée.

Type	Nuance	Processus de formage	Traction/Compression	n	n' <sub>0.2,1.0</sub>	σ <sub>1.0</sub> /σ <sub>0.2</sub>
Austénique	1.4301	Pliage	Traction	5.8	2.7	1.20
			Compression	5.3	2.5	1.20
		Profilage	Traction	5.4	3.4	1.14
			Compression	4.3	2.7	1.25
Ferritique	1.4306, 1.4318	-	-	4.4	3.1	1.17
	1.4016	-	-	6.4	3.2	1.16
	1.4003, 1.4512	-	-	7.3	3.3	1.14
Austénique-Ferritique	1.4462	-	-	5.0	3.4	1.15

Le tableau 1.8 révèle la différence de comportement contrainte-déformation en traction et en compression des aciers inoxydables. Cette différence est également justifiée par les expériences [R9-1993, B4-1995, R8-2003, G2-2004]. Les expériences [B4-1995, R8-2003] mettent en évidence également les propriétés différentes dans les directions longitudinale et transversale.

Les aciers inoxydables écrouissent considérablement durant le formage à froid. En effet, la contrainte  $\sigma_{0.2,c}$  correspondante à la déformation plastique de 0.2% dans les arrondis d'une section formée à froid est beaucoup plus grande que celle du matériau de base. ASHRAF *et al.* [A3-2005] l'ont montré par l'étude de la littérature et leurs résultats d'expériences. Ils ont proposé les formules (1.26), (1.27) donnant la contrainte  $\sigma_{0.2,c}$  et la contrainte ultime  $\sigma_{u,c}$  qui sont reliées aux  $\sigma_{0.2,v}$  et  $\sigma_{u,v}$  de l'acier de base. Ces formules ne sont valables que pour le cas de l'angle de 90° des arrondis, c'est aussi le cas le plus commun dans la pratique:

$$\sigma_{0.2,c} = \frac{1.881\sigma_{0.2,v}}{\left(\frac{r_i}{t}\right)^{0.194}} \quad (1.26)$$

$$\sigma_{u,c} = 0.75\sigma_{0.2,c} \left( \frac{\sigma_{u,v}}{\sigma_{0.2,v}} \right) \quad (1.27)$$

Dans un autre article, les mêmes auteurs, ASHRAF *et al.* [A2-2006], ont recommandé d'étendre les propriétés des arrondis jusqu'à 2t en dehors de la portion courbe pour les sections en acier inoxydable profilées à froid et jusqu'à t pour les sections pliées.

Afin de mieux comprendre la réponse structurelle des profils fabriqués en acier inoxydable sous chargement en utilisant l'analyse numérique, il faut adéquatement inclure l'effet de l'écrouissage dans les modèles de calcul. Cela permet d'éviter au maximum la déviation entre les prévisions numériques et les observations par tests.

En ce qui concernent les contraintes résiduelles dans les sections en acier inoxydable, à cause du manque des données expérimentales, le modèle pour chaque type de section est pris comme pour une section identique fabriquée à partir de l'acier au carbone en remplaçant la contrainte de



plasticité  $\sigma_y$  par la contrainte conventionnelle  $\sigma_{0,2}$ . La figure 1.23 montre, par exemple, la distribution idéalisée des contraintes résiduelles sur une section en I reconstituée soudée avec les semelles découpées au chalumeau, elle provient de la figure 1.21a.

Toutefois, RASMUSSEN et HANCOCK [R9-1993, R10-1993] ont observé que les éprouvettes coupées dans les sections finies sont longitudinalement courbées, dû aux contraintes résiduelles de type flexionnel réparties à travers l'épaisseur. Durant des tests, les éprouvettes sont rectifiées, cela réintroduit effectivement les contraintes résiduelles flexionnelles dans les éprouvettes. Ainsi, les propriétés matérielles déterminées à partir des éprouvettes coupées dans les sections finies tiennent implicitement en compte les effets des contraintes résiduelles flexionnelles. Ainsi, elles ne doivent plus être définies dans les modèles numériques lors de l'analyse de sections entières. Ce n'est que les contraintes résiduelles membranaires qu'il faut explicitement introduire dans les modèles de calcul.

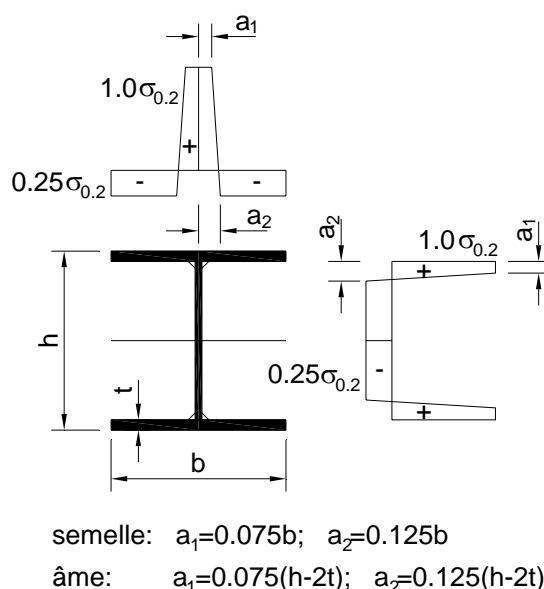
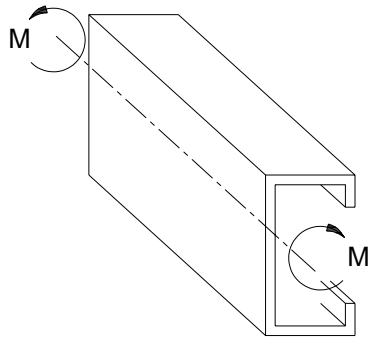


Figure 1.23. Distribution supposée des contraintes résiduelles pour une section en I, en acier inoxydable, reconstituée soudée.

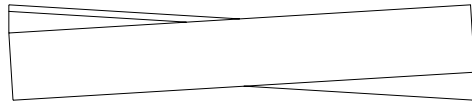
## 1.2. Généralités sur le comportement des barres à parois minces

### 1.2.1. Gauchissement des sections à paroi minces

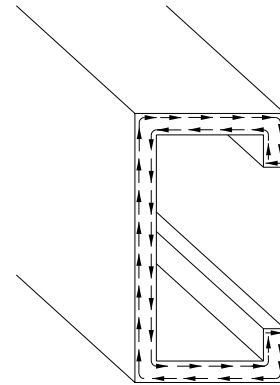
Les structures à parois minces préservent des particularités qui doivent être prises en compte dans leur analyse. L'hypothèse classique, dite de BERNOULLI, n'est en effet plus applicable. Comme le montre la figure 1.24, quand une certaine poutre à parois mince est tordue, la distorsion hors du plan de la section transversale de la poutre dans la direction de l'axe axial se produit et l'hypothèse de BERNOULLI n'y est plus valable. Cette distorsion hors du plan est communément nommée *gauchissement*. Si la torsion est uniforme, toutes les sections transversales se gauchissent de la même valeur, c'est la torsion de SAINT-VENANT, le gauchissement dans ce cas ne cause que des contraintes tangentielles; il n'apparaît pas de contraintes normales. Tandis que si le gauchissement est empêché, la torsion non-uniforme dans ce cas amène des contraintes normales et tangentielles.



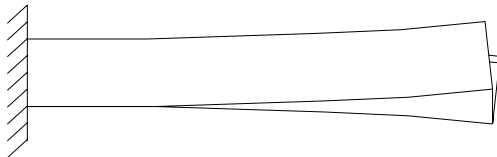
a. Poutre de section en C soumise à torsion



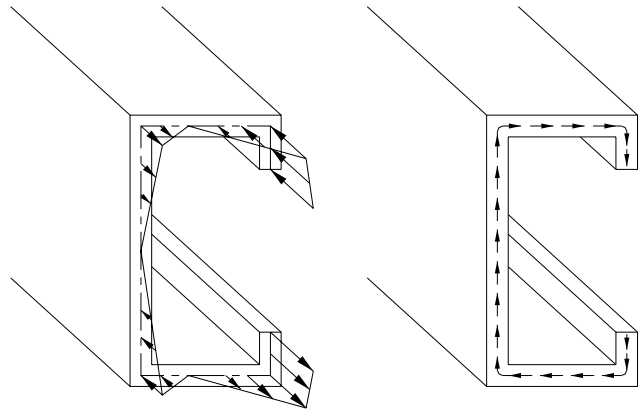
b. La torsion uniforme de Saint-Venant ne cause que des contraintes tangentiels. Les contraintes normales de gauchissement sont égales à zéro car toutes les sections droites se gauchissent de la même valeur.



Contraintes tangentiels de Saint-Venant sur la section (vue de droite à gauche).



c. L'empêchement de gauchissement amène des contraintes normales et tangentiels de gauchissement



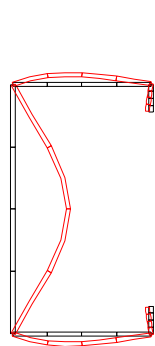
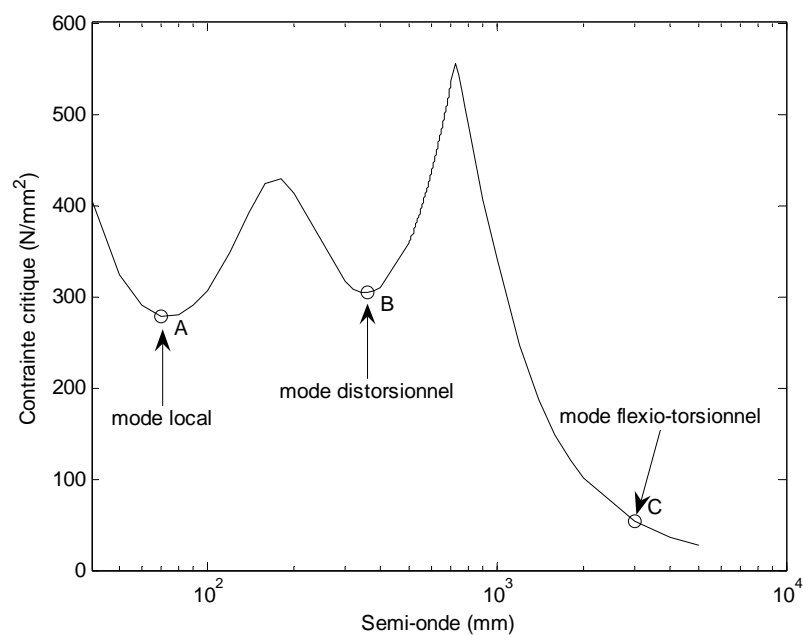
Contraintes normales et tangentiels de gauchissement sur la section (vue de droite à gauche)

Figure 1.24. Exemples de la torsion de Saint-Venant et de gauchissement.

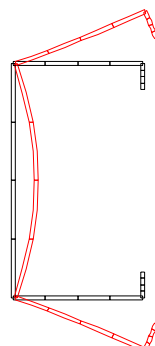
Les poutres à section ouverte et à parois minces sont souvent soumises à la torsion non-uniforme, à cause de leur faible rigidité torsionnelle. En plus, ces sections sont souvent chargées excentriquement de leurs centres de cisaillement et donc soumises à une torsion substantielle.

### 1.2.2. Modes de flambement

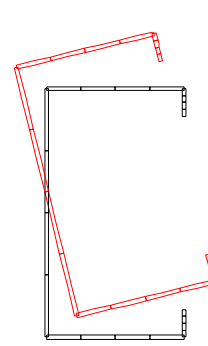
En abordant les *structures à parois minces*, on doit immédiatement considérer les phénomènes de flambement qui y sont inhérents. Les structures à parois minces peuvent être soumises aux flambements local, distorsionnel et global. Le flambement local est un mode impliquant seulement la flexion hors-plan de plaque sans déformation des lignes à la jonction des plaques et il est caractérisé par l'onde de flambement relativement courte des plaques individuelles. Le flambement distorsionnel, comme suggère le terme, est un mode de flambement impliquant le changement de forme de la section transversale; les lignes d'intersection des plaques se déplacent relativement. L'onde du flambement distorsionnelle est de valeur moyenne. Le flambement global comprend les phénomènes de flambement d'Euler et flexio-torsionnel du poteau et latéral de la poutre; les sections dans le flambement global se déplacent comme des corps rigides sans aucune distorsion et l'onde de flambement global est la plus longue par rapport aux deux autres modes de flambement précédents. Les figures 1.25 et 1.26 présentent les courbes contrainte de flambement – demi-onde et les modes de flambement d'une barre de section en C soumise à compression uniforme et en flexion uniforme, respectivement. Ces figures sont réalisées à partir des post-processeurs d'un programme utilisant la méthode des bandes finies déformables en cisaillement qui sera mis au point au chapitre 3 de la thèse.



Point A: flambement local

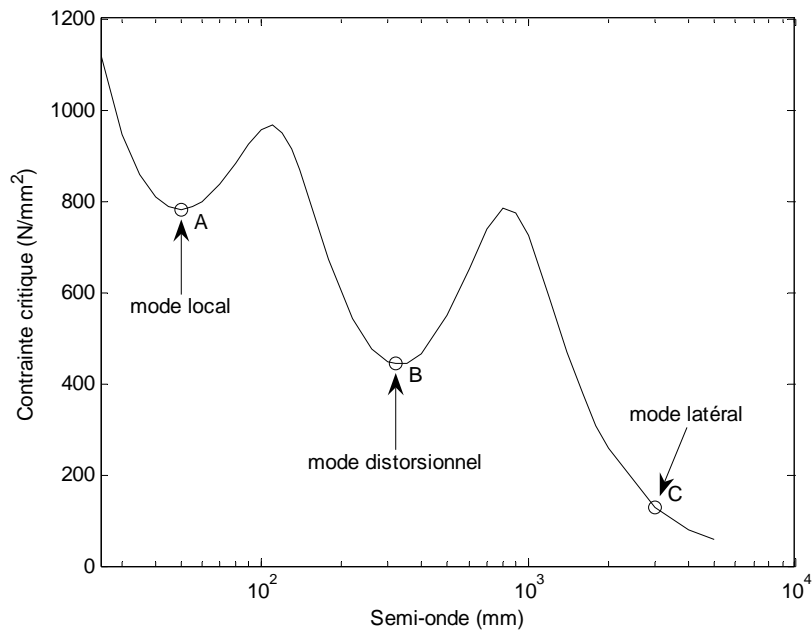


Point B: flambement distorsionnel

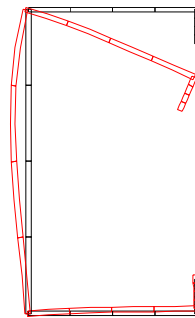


Point C: flambement flexio-torsionnel

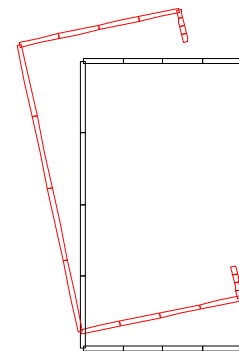
Figure 1.25. Modes de flambement de la barre de section en C à compression uniforme.



Point A: flambement local



Point B: flambement distorsionnel



Point C: flambement latéral

Figure 1.26. Modes de flambement de la barre de section en C en flexion uniforme.

L'interaction entre les modes de flambement peut se produire. Pour le calcul, on examine souvent les interactions entre les flambements local et distorsionnel, local et global ou distorsionnel et global.

### 1.2.3. Comportement non-linéaire

Le comportement non-linéaire des structures à parois minces peut être considéré par des essais en laboratoire, par l'analyse non-linéaire analytique ou par l'analyse non-linéaire numérique. La première méthode, essais en laboratoire, est coûteuse et dépend totalement à la précision des instruments de mesures. La deuxième méthode n'est réalisable que dans certains cas très simples, mais presque irréalisable à cause des difficultés mathématiques dans des cas plus complexes. La troisième méthode, analyse non-linéaire numérique, est maintenant la plus utilisée, elle permet de résoudre la plupart des problèmes rencontrés et permet des recherches paramétriques. On la coordonne souvent avec une série d'essais en laboratoire pour vérifier la précision et corriger les résultats des simulations. C'est le chemin le plus favorable pour élaborer les codes de calcul modernes.

Le comportement non-linéaire des structures à parois minces s'exprime par les non-linéarités géométrique, matérielle et mixte, géométrique et matérielle. Résultant des parois minces et de la longueur, les contraintes de flambement local, distorsionnel et global peuvent être beaucoup plus petites que la limite d'élasticité. Dans certains cas, l'analyse non-linéaire élastique géométrique seule peut décrire la réponse jusqu'à la ruine. En plus, l'analyse non-linéaire élastique géométrique est encore un supplément et une vérification du calcul de flambement linéaire. En régime élastique, après le flambement, les structures à parois minces peuvent avoir une réserve de résistance; cela est dû au comportement membranaire des parois minces. Lorsque la déformation géométrique ne joue pas un rôle important comme pour les structures à parois relativement épaisses, on peut exécuter l'analyse non-linéaire matérielle seule sans tenir compte des déplacements des éléments composants. Cependant, dans la plupart de cas des barres à parois minces, on doit faire l'analyse non-linéaire mixte, géométrique et matérielle. Les objectifs finaux de l'analyse mixte sont de déterminer la charge maximale ou la charge de ruine que la structure est capable de supporter et d'imiter le plus exactement possible le comportement réel de la structure. Alors, dans les modèles de calcul, on s'efforce d'y introduire toutes les imperfections inévitables telles que les imperfections géométriques de types local et global, les contraintes résiduelles, le changement de la limite élastique et de la limite ultime. Parmi eux, les deux premières sont les plus influentes et souvent modélisées. Toutefois, la détermination des imperfections est difficile; elle dépend du processus de fabrication et des types de produits et les mesures peuvent être différentes de l'un à l'autre investigateur. Il faut souligner que l'on cherche souvent à modéliser la distribution la plus défavorable des imperfections.

La figure 1.27 présente des analyses non-linéaires différentes d'un poteau de section en U qui est simplement appuyé et soumis à compression uniforme. La figure 1.27 donne aussi la contrainte de flambement linéaire d'Euler du poteau parfait. Dans cet exemple, on choisit la section pour que la contrainte de flambement local soit beaucoup plus grande que la contrainte de flambement d'Euler. On voit que l'analyse non-linéaire géométrique élastique avec imperfection globale tend asymptotiquement vers la droite du flambement d'Euler. Tandis que l'analyse non-linéaire géométrique élastique avec toutes les imperfections locale et globale montre une réponse légèrement plus souple et a une charge maximale correspondant à une grande déformation. Les analyses non-linéaires mixtes, avec imperfection globale ou avec imperfections locale et globale, coïncident d'abord en régime élastique avec celles géométriques seules, puis après la première plastification elles deviennent rapidement plus souples et dans ce cas de calcul, la charge maximale de ruine coïncide à la charge de la première plastification. La charge de ruine calculée avec les deux imperfections locale et globale est un peu plus faible que la charge de ruine calculée avec imperfection globale seule. Par conséquent, il est clair que l'interaction entre des modes de flambement qui sont modélisés dans l'analyse non-linéaire par la combinaison des imperfections géométriques est plus défavorable pour le comportement de la structure à parois minces. La figure 1.28 donne la déformée et les zones plastifiées de la moitié du poteau qui sont obtenues à partir d'un programme non-linéaire qui utilise la méthode des éléments finis de plaque et de coque surbaissée déformables en cisaillement et est mis au point dans les chapitres 3, 4 et 5 de la thèse.

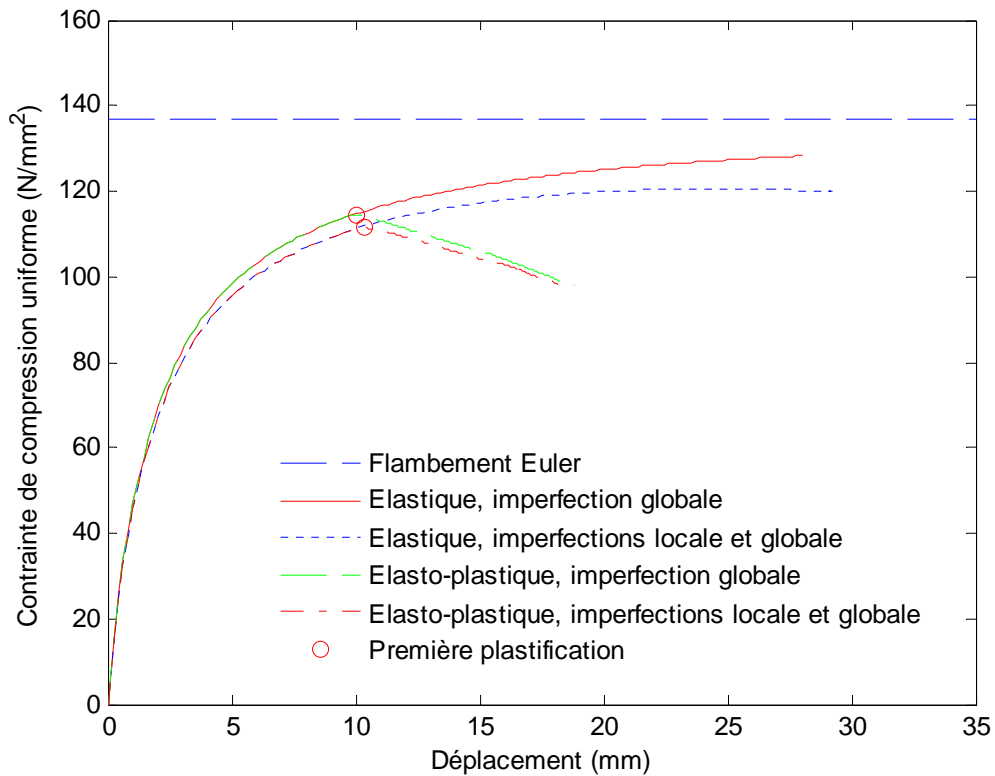


Figure 1.27. Réponses non-linéaires d'une barre de section en U sous compression uniforme.

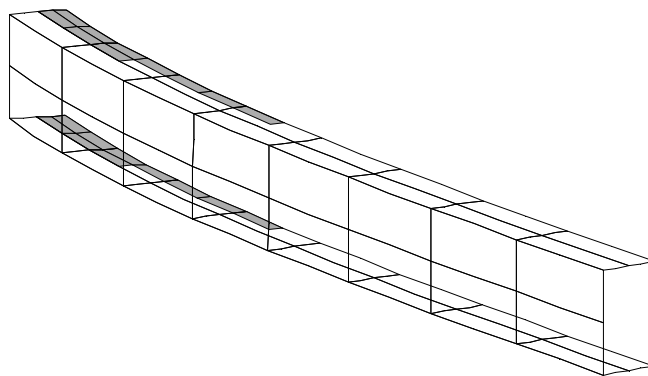


Figure 1.28. Analyse non-linéaire élasto-plastique avec imperfection globale de la moitié de la barre de section en U.

La figure 1.27 donne une vue du comportement d'une barre longue dont la contrainte de flambement local ou distorsionnel ( $\sigma_1$ ) est beaucoup plus grande que la contrainte de flambement global ( $\sigma_{cr}$ ). On peut mettre en évidence trois catégories de barres en fonction de la corrélation entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_{cr}$ :

- (i) barres courtes, pour lesquelles  $\sigma_1$  est beaucoup plus petit que  $\sigma_{cr}$ ;
- (ii) barres moyennes, pour lesquelles  $\sigma_1$  et  $\sigma_{cr}$  sont du même ordre de grandeur;
- (iii) barres longues, pour lesquelles  $\sigma_1$  est beaucoup plus grand que  $\sigma_{cr}$ .

L'interaction entre les modes de flambement n'est pas très significative pour les barres courtes et longues. Tandis qu'elle a une influence considérable pour les barres moyennes. Toutefois, il n'est pas facile d'établir les limites des intervalles entre ces trois types de comportement.

## CHAPITRE 2. ETAT DE LA QUESTION

### 2.1. Introduction

Dans la littérature au sujet des structures à parois minces, on trouve une grande quantité de recherches. Ce domaine a attiré les chercheurs depuis longtemps. On peut classer les méthodes d'analyse des structures à parois minces en quatre catégories principales suivantes:

- + Méthodes expérimentales
- + Méthodes analytiques
- + Méthodes semi-empiriques
- + Méthodes numériques

Historiquement, la conception par expériences est largement utilisée pour les sections à parois minces. CHOU et RHODES [C6-1997] ont fait une synthèse des travaux expérimentaux sur les plaques, poutres et poteaux. Les expériences donnent évidemment des résultats sûrs, mais elles ne sont en général appliquées que pour les cas simples et même dans ces cas, les couts sont élevés. Depuis que les méthodes numériques ont fait des progrès, les essais au laboratoire sont moins fréquents. Cependant, ils sont encore nécessaires pour la vérification des modèles d'analyse et pour les cas particuliers tels que les pannes attachées aux tôles, les barres avec trous dans leurs parois, les planchers composites, etc.

La méthode analytique avec la notion de torsion non-uniforme et les coordonnées sectorielles a été développée par VLASOV [V1-1961] depuis 1940. Il a établi les équations différentielles qui gouvernent le comportement global des barres à parois minces avec section ouverte. Sa théorie a été basée sur les hypothèses des déformations petites et de l'indéformabilité de la section transversale dans son plan. L'indéformabilité de la section transversale peut être assurée par les plaques de raidisseur qui sont soudées transversalement le long de la barre. La section transversale peut être gauchie au sens longitudinal de la barre et le gauchissement est proportionnel aux coordonnées sectorielles de la section, les contraintes de cisaillement de torsion non-uniforme sont prises annulées aux lignes moyennes des parois de la section. Après lui, plusieurs auteurs ont présenté et développé la théorie des barres à parois minces. TIMOSHENKO et GERE [T3-1961] ont exposé clairement et ont appliqué la théorie des barres à parois minces dans les problèmes de flambement linéaire dans plusieurs cas concrets. BENSCOTER a supposé que les contraintes de cisaillement de torsion non-uniforme ne sont pas annulées aux lignes moyennes des parois pour les sections fermées à parois minces et sont prises égales aux contraintes de cisaillement de torsion uniforme de SAINT-VENANT. Les théories de VLASOV et de BENSCOTER sont reprises dans le livre de MURRAY [M4-1984] qui a donné des formules générales afin de déterminer les propriétés géométriques d'une section quelconque et a contribué au développement du calcul des barres à parois minces par sa théorie des mécanismes spatiaux. TRAHAIR s'est occupé exclusivement des phénomènes de flambement global. Dans son livre [T4-1993], le déversement de certaines poutres peut être dérivé dans leurs états déformés et ceux-ci augmentent considérablement la capacité de stabilité des poutres surtout si les moments d'inertie dans les deux sens principaux de la section sont presque égaux.

Les méthodes analytiques ci-dessus considèrent toujours l'hypothèse de l'indéformabilité de la section transversale dans son plan et elles ne peuvent décrire que le comportement au niveau global



des structures à parois minces. Deux autres phénomènes fondamentaux au niveau local que l'on a présenté au sous-paragraphe 1.2.2 du chapitre 1 sont le flambement local et le flambement distorsionnel dans lesquels la section est distordue dans son plan et l'interaction entre les plaques composantes de la barre joue un rôle important. Ces modes locaux peuvent être résolus approximativement par la théorie des plaques de VON KARMAN pour le flambement local et par la coordination de la théorie de VLASOV et la théorie des plaques pour le flambement distorsionnel. Pour le cas du flambement local, la plaque composante est isolée et ses appuis sont idéalisés [T3-1961]; l'effet des plaques adjacentes peut être approximativement pris en compte dans les cas simples [B6-1952], par exemple: sections creuses rectangulaires. Pour le cas du flambement distorsionnel, une portion de la section transversale est isolée et elle est considérée comme reposer sur des supports élastiques qui remplacent l'influence des plaques adjacentes. LAU et HANCOCK [L3-1987] et HANCOCK [H6-1997] ont établi des formules explicites pour calculer la contrainte de flambement distorsionnel des barres de sections en C dans les deux cas simples de compression uniforme et de flexion uniforme.

Les méthodes analytiques classiques ne peuvent pas tenir compte de la déformabilité de la section dans son plan et de l'interaction entre les modes de flambements. Une méthode alternative intitulée 'Generalised Beam Theory' (GBT), développée par SCHARDT avec ses collègues en Allemagne [S9-1994] et puis par DAVIES et LEACH [D7-1994, D8-1994], peut tenir compte de ces phénomènes en ajoutant des nœuds intermédiaires à l'intervalle des plaques composantes de la section. La méthode GBT peut être classée dans la catégorie 'méthodes analytiques'. Elle est présentée au paragraphe 2.2.1 de ce chapitre.

Les méthodes semi-empiriques qui sont basées sur le concept de largeurs effectives ou de sections effectives sont communes depuis plusieurs années. Elles permettent de considérer l'interaction entre les modes de flambement (modes local et global, modes distorsionnel et global, et modes local et distorsionnel). Elles sont simples pour calculer à la main et appropriées aux ingénieurs. C'est pourquoi, les méthodes semi-empiriques sont généralement acceptées par la plupart des codes et spécifications de calcul des structures à parois minces dans le monde. Ces méthodes seront abordées en plus en détail au paragraphe 2.2.2.

La méthode des éléments finis (FEM) est la plus générale des méthodes numériques qui fournissent les solutions des équations différentielles. Elle devient depuis longtemps dominante pour l'analyse des structures. FEM n'a pas de limitation concernant les conditions de bords, formes de structures, types d'actions et discontinuités locales. En principe, tous les phénomènes inhérents aux structures à parois minces peuvent être modélés en utilisant les éléments finis. Les éléments finis de type poutre-poteau, basés sur la théorie des barres où l'hypothèse de section indéformable est fondamentale, n'ont pas la possibilité d'incorporer les modes locaux. On ne présente pas ces types d'éléments dans ce travail, mais quelqu'un qui est intéressé peut consulter la thèse de DE VILLE DE GOYET [D3-1989]. Récemment, DEGEE [D10-2000] et DEGEE *et al.* [D11-2007] ont développé un élément de poutre-poteau spécial qui peut tenir compte de la déformation de la section droite. Pour cela, la théorie classique des barres est appliquée pour le comportement global de la barre et la théorie classique des plaques est appliquée pour le comportement local. Dans cette approche, on doit définir préalablement des modes de déformation dans le plan de la section. Cette définition dépend de types de sections et de types de chargement. L'approche proposée par DEGEE

ne traite pas encore la déformation de distorsion de la section droite, dans laquelle les arêtes de la section présentent des déplacements relatifs.

Les programmes de calcul numérique pour l'analyse des structures à parois minces emploient souvent les éléments de type coque de deuxième ordre qui peuvent décrire les formes différentes de la section transversale et les phénomènes de flambement. Si la relation non-linéaire contrainte-déformation est incorporée dans l'analyse, de tels éléments peuvent encore prendre en compte la plastification et la réponse non-linéaire élasto-plastique des structures sous des actions extérieures variées. Il faut souligner que les méthodes analytiques rencontrent beaucoup de difficultés pour entrer dans le domaine non-linéaire matériel des barres à parois minces; on ne peut traiter que les cas les plus simples. L'inconvénient principal de FEM est la consommation considérable du temps pour la préparation des données et la résolution, surtout pour les problèmes non-linéaires.

La méthode des bandes finies (FSM) tombe dans la catégorie des méthodes numériques et elle est une variante de FEM. FSM est spécialement désignée pour les structures prismatiques. Les barres à parois minces sont généralement prismatiques et FSM a quelques avantages devant FEM car elle requiert moins de temps de calcul, moins de mémoire pour l'ordinateur et moins de données de préparation. Au point de vue pratique, les bandes finies du deuxième ordre sont particulièrement efficaces car les contraintes de flambement peuvent être assez facilement obtenues en utilisant une fonction sinusoïdale simple de déplacement longitudinal. Ceci octroie les solutions de toute la section pour les phénomènes de flambement et mène à une nouvelle méthode de conception des barres à parois minces, intitulée 'Direct Strength Method' (DSM) qui est classée parmi les méthodes semi-empiriques et va être considérée plus loin. Toutefois, FSM n'est applicable qu'aux appuis simples et essentiellement aux sollicitations symétriques. La méthode des bandes finies splines est une variante de FSM; elle n'utilise plus les fonctions harmoniques comme FSM mais elle interpole ses déplacements longitudinaux par les fonctions splines et les fonctions splines peuvent décrire des conditions aux appuis autres que les appuis simples.

Les méthodes numériques sont revues dans le paragraphe 2.2.3.

## **2.2. Etat du sujet étudié**

### **2.2.1. Generalised Beam Theory (GBT)**

Le développement de GBT a débuté avec SCHARDT [S9-1994] et amélioré par DAVIES et LEACH [D7-1994, D8-1994]. GBT recherche à unifier et à élargir les théories classiques des barres prismatiques à parois minces. Le concept essentiel de GBT est la séparation du comportement d'une barre prismatique à parois minces en série de modes de déformations axiales de la section transversale; ces modes de déformations sont orthogonaux. Les quatre modes fondamentaux de déformation qui sont l'extension, les flexions autour de deux axes principaux et la torsion ont été traités par les théories classiques. Ces quatre modes peuvent être considérés comme les modes de corps rigide car ils n'impliquent aucune distorsion de la section transversale dans son plan. GBT inclut des modes de déformation de plus haut ordre qui permet d'impliquer la distorsion de la section transversale. Le nombre des modes est égal au nombre des nœuds sur la section. Les modes de distorsion de plus haut degré peuvent être introduits en insérant des nœuds intermédiaires entre les nœuds existants. GBT utilise une équation différentielle avec les notations unifiées pour tous les

modes y compris les modes classiques. GBT constitue une transition de la théorie des barres à la théorie des plaques composées.

Les modes de plus haut degré de déformation axiale de la section transversale peuvent être calculés à partir des modes rigides de base grâce à l'orthogonalité entre les modes [D7-1994]. Chaque mode a sa propre fonction de gauchissement représentant la distorsion normalisée de la section au sens axial. Les déplacements des nœuds et des parois composantes de la section sont dérivées des déplacements de gauchissement. Les propriétés géométriques de la section correspondantes à chaque mode peuvent être obtenues par des fonctions de ces déplacements, puis elles sont substituées dans l'équation différentielle. Dans l'analyse linéaire avec l'hypothèse de déformation infinitésimale, les modes sont indépendants et leurs effets peuvent être combinés par la superposition. DAVIES et LEACH [D7-1994] ont constaté l'identification entre l'équation différentielle de GBT et celle d'une poutre chargée axialement reposant sur une base élastique. Quelques solutions analytiques explicites sont disponibles pour plusieurs cas. La méthode des différences finies et la méthode des éléments finis sont très efficaces dans la résolution de l'équation différentielle de GBT pour les cas généraux. DAVIES et LEACH [D7-1994] ont fourni les formules de base pour les deux méthodes.

GBT est particulièrement avantageux dans les problèmes de flambement. Il est possible d'isoler les modes individuels de flambement et de les combiner; cela mène immédiatement à apercevoir ce qui est le plus critique. Les termes associés avec l'interaction entre les contraintes dans le plan et les déformations hors du plan des parois sont ajoutés dans l'équation différentielle de l'analyse linéaire; l'équation différentielle finale autorise de traiter les problèmes de bifurcation et de non-linéarité géométrique. L'analyse de bifurcation conduit à un système d'équations du problème aux valeurs propres. En tenant compte de la distorsion de la section, tous les modes de flambement peuvent être traités. L'équation différentielle peut être analytiquement résolue dans les cas simples comme une barre simplement appuyée à compression uniforme ou en flexion uniforme, en prenant la racine en forme sinusoïdale qui satisfait préalablement les conditions d'appui. L'analyse non-linéaire géométrique se réfère à une procédure itérative où la méthode des différences finies se montre appropriée. DAVIES et LEACH [D8-1994] ont mis en évidence la capacité de GBT dans l'analyse de deuxième ordre par les exemples des sections en  $\Omega$ , en C et en U. On peut voir facilement à partir les diagrammes de ces exemples quels modes de flambement sont les plus importants et, de là la combinaison des modes est décidée pour l'analyse ultérieure. SCHARDT [S9-1994] a utilisé GBT dans une étude paramétrique des sections en C et en  $\Omega$ , il a établi les formules déterminant l'élanement limite de la barre à partir duquel l'effet du mode de flambement distorsionnel est négligeable et la considération de l'interaction entre les modes distorsionnel et global n'est pas nécessaire. C'est une tâche impossible pour la méthode des éléments finis et la méthode des bandes finies car toutes les dimensions de la section et de la longueur sont changées alors que les méthodes numériques ne traitent que les cas isolés avec des dimensions concrètes.

LEACH et DAVIES [L4-1996] ont réalisé des essais sur les sections en C et en U soumises aux moments autour de l'axe fort afin de justifier la puissance de GBT dans la solution des problèmes de l'interaction des modes de flambement. En qualité, GBT donne les diagrammes moment critique-longueur de mêmes formes que ceux obtenus par les tests, surtout si la longueur est grande. Pourtant, les écarts sont de plus en plus élevés lorsque la longueur diminue, la raison est que GBT

ne considère pas le comportement des poutres en régime inélastique. Ensuite, LEACH et DAVIES ont proposé de déterminer le moment ultime théorique en substituant le moment de déversement calculé par GBT dans les formules de EUROCODE 3, partie 1.3 [E2-2004]. La procédure proposée n'a plus recours à la formule des largeurs effectives car le flambement local est déjà calculé par les équations interactives de GBT. KESTI et DAVIES [K7-1999] ont comparé les contraintes de flambement distorsionnel des poteaux courts de section en C entre GBT, la formule analytique de LAU et HANCOCK [L3-1987] et EUROCODE 3. LAU et HANCOCK ont examiné le flambement flexio-torsionnel d'une partie rigide composée de la semelle et le raidisseur de la section; la partie rigide est élastiquement encastrée à la position de la jonction entre la semelle et l'âme, les coefficients élastique représentent l'effet de l'âme. Dans EUROCODE 3, une partie rigide composée de la partie effective de la semelle adjacente au raidisseur et le raidisseur se comporte comme une barre longue sur une fondation élastique dans le calcul du mode distorsionnel. GBT donne des résultats plus proches de la méthode de LAU et HANCOCK que d'EUROCODE 3. En plus, GBT peut considérer les types différents de conditions d'appui pour les poteaux courts. Ce n'est pas le cas pour les deux autres méthodes car elles ne sont appropriées que pour les poteaux longs où quelques demi-ondes de flambement distorsionnel apparaissent. L'inexactitude dans le calcul des contraintes de flambement distorsionnel amène à l'inexactitude dans la détermination de la section effective du poteau. KESTI et DAVIES ont proposé de remplacer la formule de la contrainte de flambement distorsionnel dans EUROCODE 3 par celle dérivée de GBT. La procédure modifiée a fourni les meilleurs résultats en comparaison avec les tests.

SILVESTRE et CAMOTIM [S10-2002, S11-2002] ont utilisé le principe du travail virtuel pour obtenir, dans le cadre de premier et seconde ordre de GBT, les équations d'équilibre générale de la barre à section ouverte à parois planes minces qui est faite de matériaux orthotropes quelconques y compris bien-sur les matériaux isotropes. Ils ont mis en évidence les hypothèses de la théorie de GBT où les parois planes minces obéissent à la théorie des plaques de KIRCHOFF; la fonction de gauchissement au sein d'une paroi est linéaire et l'hypothèse principale est la même que la théorie classique de VLASOV. Donc, les contraintes de cisaillement de la torsion non-uniforme dans le plan sont prises égales à zéro aux lignes moyennes des parois. Ils ont mis en évidence également la signification physique des matrices de coefficients et le couplage naturel entre les propriétés mécaniques et géométriques dans les équations d'équilibre différentielles. L'interaction entre les modes de flambement a été aussi expliquée; l'ajout d'un nœud intermédiaire à l'intervalle d'une paroi pour tenir compte du mode local a été traité. La procédure de détermination des matrices de coefficients a été introduite. La résolution des équations différentielles a été réalisée par la méthode des éléments finis. Quelques exemples ont été effectués afin de montrer les comportements différents d'une barre si elle est constituée de matériaux orthotropes différents. Les auteurs ont distingué clairement le problème de bifurcation et le problème de charge limite élastique.

SILVESTRE et CAMOTIM [S12-2004, S13-2004] ont appliqué la théorie GBT pour dériver les formules de calcul de la contrainte de flambement distorsionnel des profils formés à froid de sections en C et en Z. Grâce à la nature universelle de GBT, ils ont pu considérer (i) plusieurs cas de charges telles la compression uniforme, la flexion autour d'un axe neutre quelconque et la combinaison de la compression et la flexion (ii) une pente quelconque des raidisseurs à l'extrémité des semelles (iii) plusieurs types d'appuis. Leurs formules sont plus générales que celles

développées par LAU et HANCOCK [L3-1987], HANCOCK [H6-1997] et TENG *et al.* [T5-2003] qui ont dérivé toutes leurs formules avec des appuis simples. SILVESTRE et CAMOTIM [S13-2004] ont développé un programme de calcul des contraintes de flambement distorsionnel écrit en langage FORTRAN.

Récemment, GONÇALVES et CAMOTIM ont élargi GBT au régime élasto-plastique par l'analyse de bifurcation plastique des poteaux à parois minces avec sections ouvertes ou fermées [G5-2004]. Concernant les sections fermées, l'hypothèse classique pour les sections ouvertes de VLASOV n'est plus valable; les contraintes de cisaillement membranaires aux lignes moyennes des parois doivent être prises en compte. Les équations différentielles d'équilibre de GBT sont présentées sous la forme incrémentielle. Les auteurs ont utilisé la théorie plastique incrémentielle et la théorie des déformations plastiques pour construire les relations constructives. Les déplacements de pré-flambement sont négligeables; cela mène à une analyse considérablement plus simple. Ils ont donné des exemples de l'analyse de bifurcation des plaques, poteaux de section en C et de section rectangulaire creuse qui sont produits en acier inoxydable ou en aluminium allié; ces matériaux respectent les lois de type RAMBERG-OSGOOD ou de type RAMBERG-OSGOOD modifié par RASMUSSEN [R7-2003]. Les résultats d'analyse donnent une vue générale du comportement de bifurcation des structures considérées; l'interaction entre tous les modes de flambement et la participation de chaque mode dans l'ensemble sont bien visualisées. Les contraintes critiques calculées suivant la théorie des déformations plastiques sont plus petites que celles calculées par la théorie plastique incrémentielle; ce phénomène est bien connu dans la littérature. GONÇALVES et CAMOTIM étendent encore la formulation précédente au chargement général [G6-2007] et les équations d'équilibre différentielles sont numériquement résolues par les éléments finis de type poutre.

Après l'étude de la méthode Generalised Beam Theory dans la littérature, nous trouvons que c'est une méthode excellente qui permet de visualiser le comportement d'ensemble des structures à parois minces. L'hypothèse de section indéformable n'est plus nécessaire dans GBT. Tandis que les modes de déformation de la section peuvent être considérés. L'une des applications importantes de GBT est l'analyse de bifurcation élastique ou plastique où tous les modes de flambement peuvent être séparément traités ou entrés en interaction. Dans certains cas simples, on peut avoir des résultats analytiques; pour les cas plus complexes, on a recours à la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis pour résoudre les équations différentielles d'équilibre. GBT devient ainsi de plus en plus l'une des méthodes universelles et elle est encore en train d'être perfectionnée. Cependant, la détermination des propriétés géométriques correspondant aux modes de déformations de la section est très compliquée. GBT n'est utilisable que pour les structures prismatiques. Jusqu'à maintenant, GBT n'entre pas encore dans l'analyse pas-à-pas non-linéaire matérielle ou mixte géométrique et matérielle. GBT n'aborde pas encore les imperfections des structures à parois minces, comme les imperfections géométriques et les contraintes résiduelles.

### **2.2.2. Méthodes semi-empiriques**

Les méthodes semi-empiriques utilisées dans les codes et spécifications qui tiennent compte des phénomènes de flambements local et distorsionnel des structures à parois minces sont basées sur le concept de largeurs effectives des parois raidies ou non-raïdiées qui sont totalement ou partiellement

en compression. La méthode des largeurs effectives considère isolément les plaques composant la section transversale. Elle a été originalement proposée par VON KARMAN pour les plaques isolées et modifiée pour les sections formées à froid en se basant sur les expériences par WINTER. Les imperfections sont implicitement incorporées dans l'expression semi-empirique de WINTER. Cette expression est adoptée dans les codes de conception de plusieurs pays. EUROCODE 3, partie 1.3 [E2-2004] fournit les règles pour la détermination des largeurs effectives sous différentes distributions des contraintes. Les largeurs effectives des plaques isolées sont combinées pour former une section effective et la conception d'une barre à parois minces est ensuite complétée par les techniques conventionnelles où l'équation de type AYRTON-PERRY est largement utilisée [R5-1979, R2-1984]. La méthode des largeurs effectives permet d'incorporer approximativement l'interaction des modes de flambements et l'interaction entre le flambement et la plastification est introduite à l'état limite ultime par le remplacement de la limite élastique dans l'expression des largeurs effectives. Elle tient compte également du comportement post-flambement par la réduction des largeurs correspondant au niveau des contraintes de service, dans une solution pas-à-pas.

Comme les sections deviennent de plus en plus complexes, avec l'addition de raidisseurs au bout ou intermédiaires, la détermination des largeurs effectives et les propriétés effectives de la section sont plus compliquées. La considération de parois isolées est moins exacte car chaque paroi ne voile pas isolément mais est en interaction avec les autres. Pour résoudre ces problèmes, une nouvelle méthode intitulée 'Direct Strength Method' (DSM) a été développée par SCHAFFER et PEKÖZ [S5-1998, S6-2002] qui ont proposé une procédure de conception basée sur les solutions de flambement élastique pour la section complète; par exemple: à l'aide des programmes disponibles utilisant la méthode des bandes finies [S3-2003] ou la méthode 'Generalised Beam Theory' présentée ci-dessus. DSM prend les expressions conventionnelles pour les largeurs effectives et les applique pour la section complète. Toutefois, RUSCH et LINDNER [R13-2001] ont remarqué que DSM peut surestimer les charges ultimes pour les éléments soumis simultanément à une charge axiale et à un moment flexionnel si un déplacement du centre de gravité cause un moment additionnel. Ils ont suggéré que plus d'études sont nécessaires avant que DSM soit généralement applicable.

### **2.2.3. Méthodes numériques**

Il est évident que les méthodes numériques sont basées sur une base analytique. On établit analytiquement les équations d'équilibre et on les applique aux éléments simples de forme connue. L'assemblage des éléments simples formera la structure complète dont la géométrie peut être quelconque.

#### **2.2.3.1. Méthodes des éléments finis**

Les barres à parois minces sont assemblées de plaques planes et de petites coques de forte courbure aux raccords des plaques. Lors du calcul, la courbure des petites parties de coque peut être négligée lorsque le rapport entre le rayon de courbure et l'épaisseur des parois est moindre ou égal à une certaine grandeur (égale à 5 selon EUROCODE 3, partie 1.3 [E2-2004]). Donc, il reste les parties planes. Toutefois en réalité et dans l'analyse non-linéaire, les imperfections locales et globales y sont toujours introduites. Les plaques possèdent au début de très faibles courbures. Il est raisonnable de réviser le développement des éléments finis de type plaque et coque qui sont

capables de décrire, à la fois, les modes locaux et globaux des structures à parois minces. Mais il est inutile de tout revoir car les théories des plaques et des coques et les problèmes inhérents aux éléments de plaque et de coque sont vastes et compliqués.

Le comportement d'une plaque peut être basé sur l'une des deux théories: théorie des plaques de KIRCHHOFF (on l'appelle également théorie classique des plaques) et théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER (théorie des plaques déformables en cisaillement). La théorie de KIRCHHOFF considère les hypothèses suivantes:

- + les normales qui sont perpendiculaires à la surface moyenne de la plaque avant la déformation restent perpendiculaires à celle-ci après la déformation et ne changent pas de longueur;
- + les contraintes normales sur les plans parallèles à la surface moyenne peuvent être négligées en comparaison avec les autres contraintes.

La théorie de MINDLIN-REISSNER utilise des hypothèses alternatives:

- + les normales de la plaque conservent leur rectitude mais ne restent plus perpendiculaire à la surface moyenne après la déformation, elles ne changent pas également de longueur;
- + elle est identique à la 2<sup>e</sup> hypothèse de la théorie de KIRCHHOFF; les contraintes normales sur les plans parallèles à la surface moyenne peuvent être négligées.

La théorie de KIRCHHOFF est appropriée aux plaques minces, tandis que la théorie de MINDLIN-REISSNER, qui tient compte de la déformation de cisaillement transversale, est applicable aux plaques avec épaisseur modérée. Les contraintes de cisaillement transversales dans la théorie de MINDLIN-REISSNER sont constantes à travers l'épaisseur, ce qui ne correspond pas à la distribution réelle parabolique où les contraintes de cisaillement aux fibres extrêmes sont nulles et elles sont maximales à la mi-hauteur de l'épaisseur. Ainsi, il faut considérer que la distribution des contraintes de cisaillement dans la théorie de MINDLIN-REISSNER est approximative et a une signification moyenne.

Parmi les structures, les coques sont réellement malaisées à traiter. Plusieurs théories ont été proposées et chacune a ses domaines d'application et ses limitations. En général, il y a deux groupes d'hypothèses fondamentales sur lesquelles les théories des coques sont basées. Le premier groupe comprend les hypothèses pour les théories des coques minces telles que les théories de LOVE [L5-1944], de KOITER [K8-1960] et de NOVOZHILOV [N3-1959]. A part les hypothèses ressemblant à la théorie des plaques de KIRCHHOFF, il reste encore une hypothèse de faible épaisseur:

- + l'épaisseur de la coque est faible vis-à-vis du rayon de courbure minimal de la surface moyenne.
- Toutes les hypothèses précédentes appliquées pour les coques minces sont communément nommées les hypothèses de KIRCHHOFF-LOVE.

Le deuxième groupe concerne les théories des coques d'épaisseur modérée. Il contient toutes les hypothèses de la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER.

La construction d'un élément fini peut être basée sur les approches soit de déplacement soit de contrainte ou d'hybride dans lesquelles l'approche de déplacements est prédominante et plus facile pour la formulation. Ainsi, l'approche de déplacement est utilisée dans notre travail. Il y a trois problèmes qui concernent la définition des fonctions de déplacements:

- + la conformité des déplacements entre les éléments adjacents;
- + la représentation des modes à déformation constante;

+ l'assurance de la présence des modes de contraintes nulles aux mouvements de corps rigide. Si ces trois demandes sont satisfaites, la convergence d'un modèle d'élément fini est toujours assurée. Si un modèle d'élément fini ne peut pas satisfaire simultanément tous les trois demandes, les tests numériques sont requis. Ces tests sont dus à IRONS [I2-1983] et il les a nommés 'patch test' (en anglais). Le patch test n'est pas seulement pour un élément simple mais aussi pour un groupe d'éléments. En appliquant la déformation (ou contrainte) constante, l'état constant des contraintes doit être reproduit dans les éléments. Ces critères peuvent être algébriquement testés mais grâce aux tests numériques, les effets des techniques spéciales appliquées aux éléments finis telle que l'intégration réduite, peuvent être vérifiés.

Il peut apparaître des phénomènes de verrouillage (*locking* en anglais) pour un modèle d'élément fini, ce sont les phénomènes de sur-rigidité artificielle qui apparaissent lorsque plusieurs composantes du déplacement interagissent de manière déséquilibrée dans l'expression d'une composante de la déformation. Les phénomènes de verrouillage ont été discutés en détails par BELYTSCHKO *et al.* [B8-1985]. Il y a deux types de verrouillage identifiés dans la littérature:

+ verrouillage de cisaillement (*shear locking*, en anglais) qui est propre aux éléments d'épaisseur modérée basés sur les hypothèses de MINDLIN-REISSNER. Ce phénomène est attaché à la surestimation de l'énergie de déformation en cisaillement;

+ verrouillage de membrane (*membrane locking*, en anglais) qui est propre aux éléments courbes. Il apparaît un effort membranaire non voulu sous une sollicitation purement flexionnelle.

L'analyse non-linéaire est étudiée soit par la description lagrangienne totale (D.L.T) soit par la description lagrangienne actualisée (D.L.A) ou par la description corotationnelle. Les formulations de ces trois descriptions sont clairement présentées dans les références [F3-1978, D3-1989, D4-2007]. A l'université de Liège, FREY [F3-1978], JETTEUR [J2-1984] et DE VILLE DE GOYET [D3-1989] ont développé un programme intitulé FINELG dans lequel ils ont abordé plusieurs types d'éléments finis. Ce programme convient bien pour les constructions civiles où les déplacements peuvent être grands mais les déformations restent petites. Les imperfections géométriques et les contraintes résiduelles peuvent être introduites. L'écrouissage est isotrope, l'effet de BAUSCHINGER n'est pas considéré et le critère de plastification est de VON MISES. Les lois constitutives typiques pour acier, aluminium et béton peuvent être utilisées. Les charges sont considérées statiques.

Si les éléments finis dans lesquels les fonctions d'interpolation sont toujours des polynômes, sont basés sur les théories générales des coques minces [L5-1944, K8-1960, N3-1959] qui sont attachées aux coordonnées curvilignes, la condition des contraintes nulles aux mouvements de corps rigide est difficile à satisfaire. MORRIS [M7-1976] et MORLEY et MERRIFIELD [M8-1976] ont montré que pour une coque cylindrique, les déplacements doivent être interpolés par les fonctions trigonométriques des coordonnées curvilignes de la surface afin de satisfaire tous les mouvements de corps rigide. Malheureusement, la construction de la matrice de rigidité linéaire de l'élément à partir des fonctions trigonométriques n'est pas réalisable.

Probablement, la majorité des travaux dans l'analyse non-linéaire par éléments de coque a suivi le travail linéaire de AHMAD *et al.* [A6-1970] qui ont utilisé l'approche des milieux continus dégénérés. Dans le travail de AHMAD *et al.* [A6-1970], l'idée de base est de considérer les éléments finis solides tridimensionnels pour que les derniers soient utiles à l'analyse par plaques et coques. Les déplacements indépendants des nœuds supérieur et inférieur sont remplacés par les translations



et rotations des nœuds situés dans une surface de référence. Les hypothèses de MINDLIN-REISSNER sont utilisées. Cependant, les verrouillages n'ont pas encore été abordés. Les éléments de AHMAD ne travaillent bien que pour les structures de coque qui ont une épaisseur modérée. En appliquant la théorie de AHMAD dans l'analyse non-linéaire, on utilise soit la description totale ou actualisée lagrangienne [B12-1980, S14-1983, M6-1986, H10-1986] soit la description corotationnelle [H11-1981, B9-1984, S16-1986]. Comme dans l'analyse linéaire, les verrouillages de cisaillement et de membrane apparaissent et ces phénomènes peuvent être améliorés par les techniques d'intégration réduite (sélectionnée) [Z2-1971, H11-1981, B9-1984, S16-1986]. L'intégration réduite peut mener aux problèmes de mécanisme. Ces derniers peuvent être surmontés par les techniques de stabilisation [B11-1983, B10-1989]. Les phénomènes de verrouillage peuvent être également traités par la technique 'projection de contrainte' [B8-1985] ou par l'ajout de parties supplémentaires artificielles de déformation dans la relation standard déformation – déplacement (*enhanced assumed strain*, en anglais) [S17-1990, S18-1992]. Les parties de déformation ajoutées doivent être choisies de manière qu'elles peuvent éliminer les déformations parasites qui causent les verrouillages. Les techniques d'intégration réduite (sélectionnée) sont simples et efficaces. Nous les emploierons dans notre travail de thèse.

On peut approcher la géométrie de la coque par polygonisation et utiliser des éléments plans qui sont communément nommés coques facettes. Ces éléments sont obtenus par superposition d'un élément de plaque flexionnelle et d'un élément de membrane. Les hypothèses utilisées dans la théorie des plaques sont encore valables. Toutefois, le chemin par lequel la coque supporte les charges extérieures est assez différent de celui d'une plaque plane. Les efforts sur la surface moyenne de la coque ont maintenant tout les composants normal et tangentiel qui résistent à la charge. Ce fait explique l'économie des coques comme structures portantes. Il est énoncé par plusieurs experts que quand on compare la solution 'exacte' d'une coque approchée par coques facettes avec la solution exacte d'une vraie coque courbe, les différences apparaissent dans la distribution des moments flexionnels. Alors, un grand nombre d'éléments doit être utilisé et lorsque le maillage est raffiné, la géométrie s'approche de la coque originale et la solution exacte peut être obtenue. Cette approche est simple et elle a été employée depuis les années 1960 [C10-1968].

Dans une coque, l'élément général sera soumis aux moments flexionnels et aux efforts dans le plan. Pour un élément plan, ceux-ci causent des déformations indépendantes avec la condition que les déformations locales soient petites. Ainsi, les éléments plans sont appropriés pour l'analyse des barres à parois minces dans lesquelles les déformations locales même au régime non-linéaire sont petites.

Avec l'utilisation des éléments plans, la satisfaction des deux demandes de modes à déformation constante et de modes rigides est évidente. Mais la conformité entre les éléments n'est pas atteinte par une manière simple avec la théorie des plaques de KIRCHHOFF car la continuité C1 est requise le long des bords communs. Par exemple: un élément triangulaire requiert la fonction d'interpolation de polynôme de 5<sup>e</sup> ordre pour le déplacement hors du plan en étendant 21 degrés de liberté pour satisfaire la condition de continuité de translation et de rotation [G7-1975]. Si la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER est utilisée, la continuité des déplacements entre les éléments adjacents est simple car seulement la continuité C0 est demandée. En plus, si les éléments de plaque se réfèrent à la théorie de KIRCHHOFF, il y a le problème de conformité entre les déplacements

des deux éléments adjacents non-coplanaires car le champ membranaire est souvent linéairement interpolé tandis que le champ flexionnel est cubique. Si les éléments sont basés sur la théorie de MINDLIN-REISSNER, ce problème n'existe plus car tous les champs, déplacements et rotations, sont indépendamment décrits et les fonctions de même ordre sont employées.

Un chemin très simple et effectif pour construire un élément de coque courbée est l'utilisation de la théorie des coques surbaissées [S15-1982, J1-1986]. La théorie des coques surbaissées de MARGUERRE [M5-1950] est un type spécial et applicable pour toutes les coques minces et les coques modérées en supposant que les pentes de la surface sont faibles (moins ou égales à 5 degrés [C7-1986]). Dans cette théorie, un point de la surface courbe est représenté par sa projection sur un plan de référence et par la hauteur  $h$  entre le point original et le point de projection. Les expressions de la théorie de MARGUERRE peuvent être physiquement interprétées en considérant la hauteur  $h$  comme l'imperfection de la plaque de référence [D9-1978]. Les mêmes fonctions de forme peuvent être utilisées comme dans les éléments plans et toutes les intégrations sont réalisées dans le plan de référence. Les éléments de coque surbaissée, par le couplage des effets de déformations membranaire et flexionnelle, sont un peu plus efficaces que les éléments plans. Pour les éléments petits et simples, le profit est marginal, mais avec les éléments larges et de plus haut ordre, les avantages apparaissent.

IDELSOHN [I5-1974, I6-1981] a résumé les différentes théories des coques et a examiné les hypothèses sur lesquelles chaque théorie est basée. Il a démontré que avec quelques simplifications la théorie générale des coques profondes peut être ramenée aux théories des coques surbaissées. La théorie des coques surbaissées peut être présentée dans les coordonnées curvilignes ou dans les coordonnées cartésiennes. La première, appliquée à la méthode des éléments finis, ne converge pas aux résultats de la théorie des coques profondes; tandis que la deuxième converge aux résultats exacts parce que les termes négligés s'orientent vers zéros lorsque le maillage est raffiné. IDELSOHN [I5-1974, I6-1981] a également démontré que la théorie des plaques est un cas particulier de la théorie des coques surbaissées dans les coordonnées cartésiennes. Evidemment, les éléments finis basés sur la théorie des plaques peuvent donner des solutions exactes.

Pour la plupart des éléments de coque y compris les coques facettes et les coques surbaissées, la rotation autour de la normale n'est pas alimentée en rigidité, il n'y a que 5 degrés de liberté effectifs. Mais, les structures étudiées sont spatiales, alors les transformations spatiales requièrent les trois rotations autour des trois axes. La difficulté est associée à la rotation autour de la normale et on l'appelle 'problème du 6<sup>e</sup> de degré de liberté'. Cette difficulté ne s'applique pas aux jonctions spatiales des plaques car les transformations introduisent une rigidité de rotation  $\theta_{zg}$  dans le plan au système d'axes globaux même si les rangs et les colonnes qui correspondent avec  $\theta_{z1}$  dans le système local ne sont pas alimentés. Toutefois, si la même technique est appliquée pour deux éléments coplanaires, la matrice de rigidité globale sera singulière. CRISFIELD [C7-1986] donne quelques techniques afin de surmonter ces difficultés. Ici, nous mentionnons les techniques que nous avons trouvées dans la littérature:

- i) définir une 'normale' moyenne aux jonctions des plaques; la 'normale' nouvelle est dans la direction moyenne des normales des éléments adjacentes;
- ii) utiliser les éléments spéciaux qui ne contiennent plus les rotations hors le plan  $\theta_{x1}$  et  $\theta_{y1}$  aux coins mais possèdent la rotation normale  $\theta_n$  à certains points spéciaux le long des arêtes communes;

- iii) utiliser des éléments membranes spéciaux qui incorporent la rotation  $\theta_{z1}$ ;
- iv) ajouter une rigidité artificielle de rotation dans le plan;
- v) adopter des coordonnées au système d'axes locaux pour tous les nœuds coplanaires et transformer seulement au système d'axes globaux les jonctions spatiales des plaques.

La 1<sup>ère</sup> technique n'est applicable qu'aux structures de coque avec surface lisse. Une procédure a été décrite par HORRIGMOE et BERGAN [H9-1978] pour l'analyse non-linéaire des coques en utilisant la description corotationnelle.

La 2<sup>e</sup> technique a été appliquée par IRONS [I3-1976] pour ses éléments de coque 'semi-Loof' (en anglais), cette technique peut être utilisée pour les structures à parois minces. Toutefois, les éléments finis avec des nœuds différents des sommets demandent plus de données d'introduction, augmentent le nombre des équations d'équilibre et ne peuvent pas simplement s'accorder avec les autres types d'éléments pour modéliser les structures complexes.

La 3<sup>e</sup> technique a été exploitée par plusieurs investigateurs. ALLMAN [A7-1984] a proposé un élément compatible triangulaire à 9 degrés de liberté avec champ quadratique de déplacements. Cet élément triangulaire a un mode de zéro énergie, en addition aux mouvements de corps rigide. Les variables de rotation des sommets du triangle ne sont pas des 'rotations vraies' dans le sens de l'élasticité plane. Ensuite, le même auteur [A8-1988] a proposé un autre élément triangulaire avec déplacements cubiques; ce nouvel élément est libre des déficiences de l'élément précédent. BERGAN et FELIPPA [B7-1986] ont utilisé une approche alternative nommée 'free formulation' (en anglais) dans laquelle la rotation dans le plan  $\theta_{z1}$  est 'vraie' et introduite à partir de la définition de rotation dans l'élasticité plane. Cependant, leur élément triangulaire demande des paramètres libres à déterminer.

La 4<sup>e</sup> technique est plus usuelle et applicable aux éléments standards. Cette technique a été présentée par ZIENKIEWICZ [Z1-1977] qui a ajouté une rigidité fictive pour la rotation  $\theta_{z1}$ ; cette rigidité dépend d'un coefficient arbitraire. Pour l'analyse linéaire, la technique de ZIENKIEWICZ [Z1-1977] fonctionne bien, les résultats ne dépendent que légèrement de la valeur du coefficient arbitraire. Tandis que pour l'analyse avec la non-linéarité matérielle, CRISFIELD [C9-1991] a montré que l'utilisation de la rigidité fictive de rotation est plus délicate. La rigidité de l'élément peut varier significativement. Récemment, ZIENKIEWICZ [Z3-2000] a proposé une nouvelle version de sa technique dans laquelle la rigidité fictive de rotation est dérivée de l'énergie supplémentaire concernant la rotation dans le plan. Selon lui, la nouvelle formulation de la rigidité fictive de rotation mène à des résultats moins sensibles dans le choix du coefficient arbitraire. Nous aborderons plus en détails la 4<sup>e</sup> technique dans le chapitre 3 de la thèse. PROVIDAS et KATTIS [P5-2000] ont présenté une autre version de la rigidité fictive. Ils ont utilisé la rotation 'vraie' pour calculer la moyenne des rotations dans le plan d'un élément triangulaire. L'objectif est de surmonter le problème de singularité de la matrice de rigidité globale de la structure et de ne pas changer la performance de l'élément original. Un très petit paramètre doit être multiplié à la rigidité fictive de rotation.

La 5<sup>e</sup> technique demande de regrouper tous les éléments coplanaires pour construire un super-élément; les super-éléments ne se relient qu'aux jonctions spatiales. Toutefois, l'attention doit encore être mise sur la singularité de la matrice de rigidité globale lorsque deux éléments finis sont

quasi-coplanaires. Cette technique ne convient pas pour l'analyse non-linéaire des structures à parois minces car les éléments, qui sont au début coplanaires, deviennent pas à pas non-coplanaires.

### **2.2.3.2. Méthode des bandes finies**

#### **2.2.3.2.1. Méthode des bandes finies semi-analytiques**

La méthode semi-analytique des bandes finies fut originalement développée par CHEUNG [C3-1976]. Dans la direction transversale, les déplacements sont interpolés par les fonctions polynomiales et dans la direction longitudinale les déplacements sont interpolés par les fonctions harmoniques qui sont déduites des formes longitudinales sinusoïdales de déplacements à partir du problème de vibration de la barre. Les fonctions harmoniques doivent satisfaire les conditions aux limites. Cette méthode peut être considérée comme l'application des séries de FOURRIER à l'analyse numérique des structures et elle est aussi appelée la méthode des bandes finies semi-analytiques. Elle a quelques avantages par rapport à la méthode des éléments finis générale lors de l'analyse des éléments à parois minces. Ce sont la grande réduction de nombres de degrés de liberté pour une structure donnée, et une simple conformabilité de déplacements membranaires et flexionnels à la jonction des plaques assemblées. Toutefois, il est difficile de l'utiliser pour d'autres conditions de support que l'appui simple et il n'est utilisable que pour les éléments à section constante.

L'utilisation de la méthode des bandes finies pour comprendre et prévoir le comportement des profils laminés à chaud et profils formés à froid a été étendue par HANCOCK [H2-1978, H3-1985]. Son travail dans le champ de poutres de section en I [H2-1978] comprend le calcul, par la méthode des bandes finies, des flambements élastiques d'un profil à parois mince et permet de mieux comprendre le mode de flambement distorsionnel. Il a utilisé des fonctions d'interpolation dérivées du travail de CHEUNG [C3-1976] dans lequel les harmoniques impairs décrivent le changement longitudinal des déplacements.

PLANK et WITTRICK [P3-1974] emploient les bandes finies pour étudier le flambement de structures à parois minces et planes. Ils présentent des graphiques de charges de flambement des poutres de section en C fléchies autour de l'axe fort. L'instabilité des plaques raidies est également étudiée sous combinaison de compression avec cisaillement et de flexion avec cisaillement.

La méthode des bandes finies semi-analytique a été développée afin d'examiner le comportement, après le flambement local des plaques assemblées, par GRAVES-SMITH et SRIDHARAN [G4-1978, S8-1982] et la réponse non-linéaire des plaques assemblées soumises en compression uniforme et localement flambées par HANCOCK [H1-1981]. SRIDHARAN [S8-1982] a employé une technique de perturbation afin de résoudre les équations non-linéaires de VON KARMAN et il a obtenu les fonctions exprimant le champ de déplacements dont les fonctions trigonométriques longitudinales sont définies.

BRADFORD et HANCOCK [B5-1984] ont étudié approximativement l'interaction entre les flambements local et latéral de poutres. Le déplacement flexionnel est décrit par les harmoniques impairs et tandis que les harmoniques pairs sont requis afin de définir les déplacements membranaires non-linéaires. La demi-onde d'instabilité locale est obtenue en analysant préalablement le flambement linéarisé. L'analyse non-linéaire du segment de poutre dont la longueur est égale à la demi-onde est réalisée en introduisant l'imperfection locale initiale; puis la

section effective peut être déterminée; enfin le moment critique de la poutre est calculé par la formule analytique en utilisant la section effective. Développant les recherches précédentes, KEY et HANCOCK [K3-1993] ont décrit le champ de déplacements par la somme des déplacements précritiques, critiques et postcritiques qui avaient été dérivés par SRIDHARAN [S8-1982]. Ceci permet de réaliser les analyses de bifurcation, de non-linéarités géométriques locale et globale en tenant compte des effets des imperfections géométriques. La non-linéarité matérielle et les contraintes résiduelles sont aussi incorporées. Cependant, les bandes finies ne résolvent que le cas des barres simplement appuyées et symétriquement déformées par rapport à la mi-portée et ils acceptent l'incompatibilité des fonctions de déplacements lorsque les bandes finies se rencontrent à un angle. Cette acceptation n'est appropriée qu'aux problèmes post localement flambés dans lesquels les jonctions des plaques sont supposées avec faibles déplacements. HANCOCK a résumé les travaux de son école [H4-1998], dans lequel il a rassemblé les résultats obtenus associés aux bandes finies et aux éléments de poutre-poteau. Une poutre est divisée en plusieurs segments dont la longueur est égale à la demi-onde de flambement local qui est déterminée à partir de l'analyse de bifurcation par bandes finies. Les bandes finies incluent les effets des contraintes résiduelles et d'imperfections géométriques locales. Les éléments de poutre-poteau incluent les effets d'imperfections géométriques globales, de conditions générales aux extrémités et de chargement général. Plusieurs tests d'éléments à parois minces sont comparés avec les résultats des analyses non-linéaires numériques et montrent l'efficacité de la méthode.

SCHAFER [S4-1997] s'est basé sur le travail de CHEUNG [C3-1976] pour créer CUFISM [S3-2003] - un programme destiné à la solution des problèmes de flambement élastique des éléments à parois minces. Le mode de flambement et la valeur des contraintes critiques sont fonction de la demi-onde et visualisés par figures et diagrammes contrainte de flambement – demi-onde. Les instabilités locale et distorsionnelle sont facilement déterminées sur le diagramme par les points minimums. Toutefois, les bandes finies se limitent aux structures soumises soit en compression uniforme soit en flexion uniforme ou en combinaison de ces deux cas de charges. CHU *et al.* [C5-2005] a examiné un cas particulier où les contraintes de compression varient le long de l'axe longitudinal de la barre de section en C sous l'action de charges latérales uniformément réparties. Dans l'expression déterminant la matrice de rigidité géométrique, ils ont remplacé la contrainte axiale constante par la fonction décrivant la variation longitudinale des contraintes axiales. Ils ont aussi pu résoudre les problèmes de flambements local, distorsionnel et latéral de la poutre sous des charges latérales. Cette approche nécessite de préalablement connaître la distribution analytique des contraintes axiales. En plus, la matrice de rigidité géométrique est différente en forme explicite de symboles, de l'un à l'autre cas de charge.

Les modèles des bandes finies semi-analytiques précédemment mentionnés sont tous basés sur la théorie classique des plaques dites de KIRCHOFF. Ils sont évidemment valables pour les structures à parois minces pour lesquelles le cisaillement à travers l'épaisseur des parois est négligeable. Cependant, pour les structures à parois modérées ou hautement raidies, il faut tenir compte du cisaillement. Alors, on doit avoir recours à la théorie des plaques déformables en cisaillement de MINDLIN-REISSNER. Un autre avantage de cette dernière théorie est de pouvoir interpoler indépendamment les déplacements et les rotations, mais on doit faire attention au phénomène de verrouillage de cisaillement. HINTON [H7-1978] en appliquant la théorie de MINDLIN-REISSNER

dans la méthode des bandes finies a mis en évidence la diminution de la contrainte de flambement en fonction de l'épaisseur relative de la plaque. Si l'on considère que la théorie de MINDLIN-REISSNER est le premier ordre de la bande finie déformable en cisaillement lorsque les transitions dans le plan de la plaque est linéairement reliée aux rotations, LAM et ZOU [L1-2001] ont relié les transitions aux plus hauts ordres des rotations afin d'analyser linéairement les plaques composites. HINTON et RAO [H8-1993] se sont intéressé plus tard à l'optimisation de la section des structures de coques et de plaques. L'épaisseur et la forme qui définissent la section transversale sont considérées comme variables. L'objectif est de minimiser l'énergie de déformation avec la contrainte que le volume matériel total de la structure reste constant. Le problème du 6<sup>e</sup> degré de liberté est surmonté par la fermeture de toutes les rotations nodales dans le plan d'une bande finie aux axes locaux.

DAWE et PESHKAM [D6-1989] ont étudié le flambement et la vibration de structures prismatiques composées de plaques en utilisant des bandes finies basées sur la théorie de MINDLIN-REISSNER. Ils ont regroupé les bandes finies coplanaires pour construire une super-bande et ils n'ont transformé que les lignes nodales reliant les super-bandes des axes locaux aux axes globaux. Donc, le problème du 6<sup>e</sup> degré de liberté est ainsi traité. Plus tard, DAWE *et al.* [D5-1993] ont développé les bandes finies en se basant sur toute la théorie classique et la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER. Leur méthode est utilisée pour analyser le post-flambement local de sections composées de plaques. Ils ont supposé que les actions dans le plan et hors du plan, aux jonctions spatiales, sont découplées. Les lignes de jonctions ne se déplacent pas et cette supposition est incluse aux conditions aux bords. WANG et DAWE [W2-1996] ont étendu l'étude précédente afin de rechercher la non-linéarité géométrique élastique des structures en plaques. Les structures peuvent avoir des imperfections globales. Une différence majeure entre cette étude et l'étude citée ci-dessus [D5-1993] est que le mouvement des jonctions entre les plaques composantes est à considérer dans cette étude, alors la condition de compatibilité aux jonctions est satisfaite. Cependant, l'interaction des comportements local et global n'est pas incorporée.

Tous les travaux sur la méthode des bandes finies semi-analytiques dont nous avons fait la revue sont basés soit sur la théorie des plaques de KIRCHHOF, soit sur la théorie des plaques déformables en cisaillement de MINDLIN-REISSNER. Il n'y a pas encore de résultats pour le flambement des structures à parois minces calculés par les bandes finies basées sur la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER. En plus, aucun travail n'est basé sur la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE. Nous exploiterons ces directions de recherche dans la thèse.

#### **2.2.3.2.2. Méthode des bandes finies de type spline**

La méthode des bandes finies de type spline est une variante de la méthode des bandes finies semi-analytique. Elle est née ultérieurement et elle peut surmonter la plupart des restrictions de la dernière en conservant la réduction du nombre de degrés de liberté par rapport à la méthode des éléments finis. La méthode des bandes finies splines a été développée par FAN et CHEUNG [F1-1983]. Ils ont remplacé les séries longitudinales trigonométriques par une combinaison linéaire de fonctions locales B3-splines en retenant les interpolations transversales polynomiales. Il y a d'autres fonctions splines valables pour les applications différentes. YANG et CHONG [Y1-1984] ont appliqué une fonction X-spline cubique en analysant les plaques en flexion avec des conditions irrégulières aux bords. MIZUSAWA *et al.* [M3-1980] ont étudié le flambement des plaques obliques

en appliquant les fonctions B-splines dans les sens longitudinal et transversal. LAU et HANCOCK [L2-1986] ont adopté les fonctions B3-splines cubiques, utilisées par FAN et CHEUNG [F1-1983], afin d'étudier le flambement des plaques et des sections à parois minces. Des conditions différentes aux bords tels que l'appui simple, l'appui encastré, l'appui encastré glissé et le bord libre, peuvent être spécifiées par la modification de quelques splines locaux adjacents aux bords. En plus, un appui intermédiaire le long d'un élément à parois minces peut être incorporé. Cependant, les appuis autres que ceux dits idéaux ne peuvent pas être décrits et la méthode des bandes finies splines n'est pas applicable aux structures avec appuis élastiques et aux structures composées d'éléments qui ne sont pas rectilignes entre eux comme les portiques. THAM [T2-1990] a étendu les bandes finies B3-splines pour linéairement analyser les structures non-prismatiques spatiales assemblées de plaques planes. Contrairement aux auteurs précédents, qui ont utilisé la théorie classique, THAM a utilisé la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER, mais il n'a pas expliqué comment il incorpore la rotation dans le plan de la plaque pour assurer la conformité des rotations aux jonctions spatiales des plaques.

A partir de 1990, des formulations non-linéaires pour les bandes finies splines sont apparues [H5-1990]. KWON et HANCOCK [K4-1991, K5-1993] sont parmi de premiers auteurs qui ont examiné le comportement non-linéaire élastique des sections à parois minces par la méthode des bandes finies splines. Tous les termes flexionnels et membranaires sont inclus dans la formulation non-linéaire afin de permettre les modes local, distorsionnel et global, à étudier dans le stage post-flambé. Les imperfections géométriques initiales sont considérées dans les relations non-linéaires déformation-déplacement, les contraintes résiduelles sont également introduites. Leur exemple de l'analyse de sections en C soumise en compression uniforme donne des résultats meilleurs au stade de post-flambement distorsionnel que ceux donnés par la méthode des bandes finies semi-analytiques car cette dernière ne peut pas tenir compte de l'interaction entre les modes de flambements local et distorsionnel. Récemment, ECCHER *et al.* [E5-2007] ont étudié le flambement des structures à parois minces perforées pour lesquelles la bande finie spline iso-paramétrique de CHEUNG et AU [A5-1993, C4-1995] est utilisée. Cette bande finie spline permet de décrire la courbure suivant l'axe longitudinal des coques. Le problème du 6<sup>e</sup> degré de liberté y a été aussi abordé. ECCHER *et al.* [E5-2007] utilisent la même technique que HINTON et RAO [H8-1993] ont utilisée pour la méthode des bandes finies semi-analytiques. Ainsi, toutes les rotations nodales dans le plan d'une bande finie aux axes locaux sont bloquées.

La théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER accepte les distributions constantes de déformations de cisaillement à travers l'épaisseur ce qui demande un facteur correctif de cisaillement [C11-1966, V2-1992]. Cependant, le comportement non-linéaire de la plaque peut être obtenu sans avoir besoin de facteur correctif de cisaillement; cela est réalisé par la théorie des plaques du troisième ordre [R12-1984] qui est capable de modéliser le gauchissement de la section et les distributions paraboliques de déformations de cisaillement à travers l'épaisseur. KONG et CHEUNG [K6-1995] ont combiné les bandes finies splines originales, qui sont basées sur la théorie classique avec la théorie des plaques de troisième ordre de REDDY [R12-1984] en modifiant légèrement cette dernière. Les bandes finies splines sont applicables à l'analyse non-linéaire élastique tant de plaques minces que de plaques épaisses. La plaque peut être constituée de matériaux isotropes ou composites avec imperfections géométriques initiales.

Toutefois, il est surprenant que, jusqu'à présent, aucun travail n'est publié dans le domaine de l'analyse non-linéaire élasto-plastique pas à pas des structures à parois minces, par la méthode des bandes finies splines. On ne peut trouver que LIU *et al.* [L6-1996] et HAN, Z-W *et al.* [H12-2001, H13-2005] ont utilisé la méthode des bandes finies de type B-spline pour simuler le processus de mise en forme d'une tôle longue par le profilage.

### 2.3. Objectifs de la thèse

Après la revue bibliographique de l'état de l'analyse du comportement des structures à parois minces dans la littérature, nous décidons de choisir les méthodes des éléments finis et des bandes finies semi-analytiques basées sur la théorie des plaques déformables en cisaillement de MINDLIN-REISSNER et sur la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE afin d'étudier numériquement le comportement linéaire, non-linéaire et de flambement des structures à parois minces. Dans notre thèse, la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE utilise les hypothèses de MINDLIN-REISSNER. Les objectifs du travail peuvent être récapitulés comme suit:

+ mettre au point, à partir des théories des plaques de MINDLIN-REISSNER et des coques surbaissées de MARGUERRE, un programme utilisant les bandes finies semi-analytiques pour le calcul du flambement élastique des structures à parois minces.

+ mettre au point, à partir des théories des plaques de MINDLIN-REISSNER et des coques surbaissées de MARGUERRE, un programme utilisant les éléments finis pour le calcul linéaire, non-linéaire et de flambement des structures à parois minces dans lesquelles les barres à parois minces seront essentiellement examinées en tenant compte de leurs caractéristiques spécifiques inhérentes à l'état initial tels que les imperfections locales et globales, les contraintes résiduelles, l'écroutissage et le changement de la limite élastique sur les zones différentes de la section transversales par rapport à la tôle de base. Les charges appliquées sont considérées statiques. L'effet BAUSCHINGER n'est pas pris en compte dans les modèles matériels. Les déplacements peuvent être grands mais les déformations sont considérées petites.

Le programme de bandes finies est complémentaire du programme d'éléments finis dans le calcul du flambement, en comparant les contraintes et les modes de flambement obtenus par ce dernier avec ceux obtenus par le précédent.

Une technique simple est originalement proposée pour surmonter le problème du sixième degré de liberté, la technique est appliquée à tous nos bandes finies et éléments finis. Enfin, on montrera l'intérêt pratique en comparant les résultats analytiques, numériques et expérimentaux que nous avons trouvés dans la littérature avec ceux obtenus par nos programmes.



## **CHAPITRE 3. ANALYSE LINEAIRE ET FLAMBEMENT DES STRUCTURES A PAROIS MINCES**

### **3.1. Introduction**

Le but final de la thèse est l'analyse non-linéaire des structures à parois minces par éléments finis de plaques ou de coques surbaissées. Mais avant d'aborder l'aspect non-linéaire, nous préférons présenter les théories linéaires des plaques et des coques surbaissées et les appliquer au calcul linéaire des structures spatiales à parois minces en y ajoutant fictivement la rotation dans le plan qui est connue dans la littérature de la méthode des éléments finis sous le nom 'problème du sixième degré de liberté'. Nous y abordons les théories linéaires pour trois raisons: (i) la justification de l'ajout de la rotation fictive dans le plan est applicable dans le domaine linéaire, (ii) les développements sont plus simples et (iii) un élément fini qui se comporte médiocrement dans le domaine linéaire ne peut pas être efficace dans le domaine non-linéaire parce que la méthode incrémentielle utilisée dans l'analyse non-linéaire n'est qu'une séquence linéarisée.

Nous choisissons de présenter la théorie des plaques et la théorie des coques surbaissées dans un même chapitre avec la raison que ces deux théories ont des points semblables. La théorie des coques surbaissées se réduit à un plan de référence attaché et les calculs sont réalisés dans le système d'axes cartésiens de ce plan. On peut considérer que la théorie des plaques est un cas particulier de la théorie des coques surbaissées lorsque la hauteur entre la coque et son plan de référence s'annule. Les deux théories sont applicables aux méthodes des bandes finies et des éléments finis.

Nous introduisons également l'analyse de flambement linéarisé qu'il est souvent nécessaire d'exécuter préalablement avant toute autre analyse non-linéaire pour obtenir la forme et la distribution des imperfections géométriques et pour avoir une certaine estimation de la grandeur de la charge de ruine de la structure.

L'interprétation explicite et les symboles matriciels sont utilisés dans ce chapitre. Cela est utile pour l'interprétation indiciaire implicite dans les chapitres suivants.

### **3.2. Théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER**

Les hypothèses de base de la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER ont été mentionnées au chapitre 2 'Etat de la question', nous les rappelons ici pour la commodité:

- + les vecteurs normaux conservent leur rectitude mais ne restent plus perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque après la déformation; ces vecteurs ne changent pas de longueur;
- + les contraintes normales sur les plans parallèles à la surface moyenne peuvent être négligées.

La théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER inclut l'effet du cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque et on l'appelle aussi la théorie des plaques déformables en cisaillement. Il y a cinq variables (degrés de liberté) indépendants dans le modèle de MINDLIN-REISSNER comme l'indique la figure 3.1.

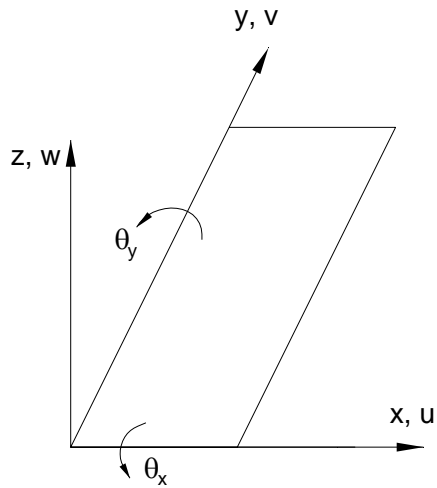


Figure 3.1. Coordonnées et variables pour une plaque.

Pour déduire les relations entre les déformations et les déplacements dans le modèle de MINDLIN-REISSNER, nous considérons d'abord la déformation de la plaque dans le plan xz.

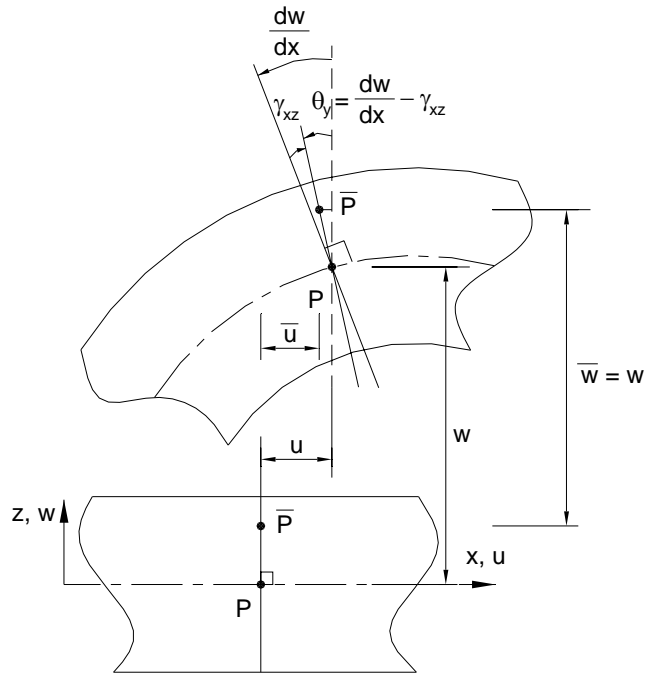


Figure 3.2. Déformation de la plaque dans le plan xz.

La figure 3.2 présente les états avant et après la déformation de la plaque dans le plan xz. Les déplacements du point P peuvent être exprimés par:

$$\bar{u}(x, y, z) = u(x, y) - z\theta_y(x, y) \quad (3.1)$$

$$\bar{w}(x, y, z) = w(x, y) \quad (3.2)$$

où  $u$ ,  $w$  sont les translations dans le plan et hors du plan du point P qui est la projection de  $\bar{P}$  sur la surface moyenne de la plaque suivant les directions  $x$ ,  $z$ , respectivement et  $\theta_y$  est la rotation autour de l'axe  $y$  (Fig. 3.1).

Identiquement, pour les déplacements dans le plan  $yz$ , enfin, nous avons les déplacements d'un point  $\bar{P}$  quelconque situé dans l'environnement de la plaque:

$$\bar{u}(x, y, z) = u(x, y) - z\theta_y(x, y) \quad (3.3)$$

$$\bar{v}(x, y, z) = v(x, y) - z\theta_x(x, y) \quad (3.4)$$

$$\bar{w}(x, y, z) = w(x, y) \quad (3.5)$$

où le sens positif de  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  est montré sur la figure 3.1.

Les relations entre les composantes de déformation et de déplacement sont exprimées par le système des équations différentielles en régime linéaire:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad (3.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \quad (3.8)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_y \quad (3.9)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \quad (3.10)$$

De l'équation (3.6) à l'équation (3.10), ce sont les équations de la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER. Car les barres à parois minces sont des structures composées de plaques qui sont spatialement assemblées. Il existe des jonctions spatiales entre les plaques où apparaissent les trois rotations  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ . Les expressions (3.6) à (3.10) de la théorie de MINDLIN-REISSNER n'incorporent pas la rotation dans le plan  $\theta_z$ . La rotation  $\theta_z$  ne contribue en rien au comportement des plaques isolées parfaitement planes qui sont calculées par éléments finis en régime linéaire. Mais pour les plaques imparfaites ou calculées en régime non-linéaire et aussi pour les barres à parois minces, le manque de  $\theta_z$  donne le 'problème de sixième degré de liberté' que nous avons abordé au chapitre 2. Le traitement du problème sera présenté au paragraphe 3.4.

### 3.3. Théorie des coques surbaissées de MARGUERRE

Il y a une autre théorie qui est utilisable dans l'analyse des sections creuses circulaires à parois minces et des sections à parois minces planes incluant les imperfections géométriques ou des sections à parois planes calculées en domaine non-linéaire, c'est la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE [M5-1950].

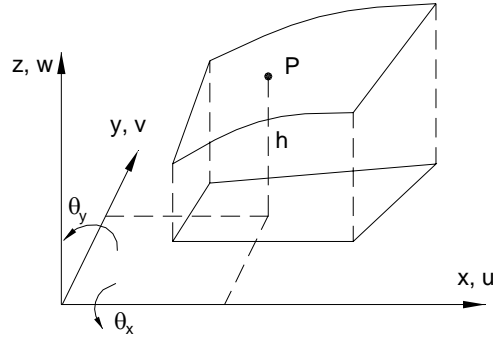


Figure 3.3. Coordonnées et variables pour une coque surbaissée.

Dans la théorie de MARGUERRE, un point P quelconque de la surface moyenne de la coque est représenté par sa projection sur le plan de référence qui est très proche de la coque et la hauteur h entre le point P et sa projection. Les expressions de la théorie peuvent être déduites en considérant la hauteur h comme imperfections géométriques affectant la plaque [D9-1978] ou à partir des déformations exactes de la théorie générale des coques minces par une règle de simplification consistant à négliger les pentes de la coque par rapport à l'unité [I5-1974, I6-1981]. Les relations entre les composantes de déformation et de déplacement de la théorie des coques surbaissées sont alors écrites en collaboration avec les hypothèses de MINDLIN-REISSNER:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.12)$$

$$\gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.13)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_y \quad (3.14)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \quad (3.15)$$

où les translations u, v, w et les rotations  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  sont les déplacements définis dans le système cartésien du plan de référence (Fig. 3.3).

Nous constatons que les expressions de la théorie de MARGUERRE ne diffèrent des expressions de la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER que par les termes concernant le produit entre les pentes de la surface de la coque et les premières dérivées du déplacement w. Alors, lorsqu'on analyse linéairement des structures composées de plaques planes, c'est-à-dire  $h = \text{const} = 0$ , les expressions (3.11)-(3.15) coïncident avec les expressions (3.6)-(3.10). Le problème du sixième degré de liberté est également apparu pour la théorie des coques surbaissées dans les structures spatiales à parois minces. La théorie des coques surbaissées permet de réaliser les calculs mathématiques sur le plan de référence de la coque; cela simplifie beaucoup l'analyse et rend cette théorie très proche de la théorie des plaques. C'est pourquoi nous préférons de présenter les lesdites théories dans le même chapitre.

### 3.4. Rotation dans le plan

Nous trouvons que les traitements du sixième degré de liberté pour la théorie des plaques et la théorie des coques surbaissées peuvent être les mêmes car le calcul d'une coque surbaissée est mené sur son plan de référence très proche. Comme nous l'avons cité au chapitre 2, il y a quelques techniques pour surmonter le problème du sixième degré de liberté. Ici, nous choisissons de présenter la technique de ZIENKIEWICZ [Z1-1977, Z3-2000] qui introduit une rigidité fictive de rotation dans le plan de la plaque. Cette technique peut être appliquée aux éléments standards. La rotation fictive est définie de façon que dans les coordonnées locales, l'équilibre global de l'élément n'est pas perturbé. Cela peut être accompli par l'addition dans l'énergie potentielle de chaque élément le terme:

$$\Pi^* = \Pi + \int_{A_e} \alpha_n E t^n \left( \theta_z - \bar{\theta}_z \right)^2 d(\text{aire}) \quad (3.16)$$

où E est le module d'élasticité;  $A_e$  est l'aire de l'élément;  $\alpha_n$  est un paramètre arbitraire à choisir et  $\bar{\theta}_z$  est une rotation moyenne de chaque élément qui permet de satisfaire l'équilibre local de l'élément dans un sens faible. L'équation (3.16) est la généralisation de la proposition de la référence [Z1-1977] dans laquelle la valeur de n est égale à l'unité. ZIENKIEWICZ [Z3-2000] a observé par expériences numériques que quand la valeur de n est égale à 3, c'est-à-dire que l'énergie fictive additionnelle dans l'équation (3.16) est proportionnelle au cube de l'épaisseur t, les résultats sont moins sensibles au choix de  $\alpha_n$ . Pour un élément triangulaire dans lequel l'interpolation linéaire est utilisée pour  $\theta_z$ , la minimisation par rapport à  $\theta_z$  mène à la forme:

$$\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = K_{\theta_z} \{ \theta_{zi} \}_l = \frac{1}{36} \alpha_n E t^n A_e \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix}_l \quad (3.17)$$

Pour un élément, car  $\theta_{zi}$  n'affecte pas les contraintes, l'ajout de la matrice  $K_{\theta_z}$  n'influence pas les résultats. En plus, il est noté que la somme de tous les termes dans un rang de la matrice de rigidité fictive (3.17) est égale à zéro. Alors, la condition de rotation rigide correspondant à la rotation dans le plan est assurée. Pour une structure spatiale, la matrice des coefficients fictifs de rigidité  $K_{\theta_z}$  est utilisée pour tous les éléments coplanaires ou non-coplanaires de la structure et cette rigidité additionnelle affecte les résultats et la technique est une approximation dans ce cas. Pour la pratique, une valeur extrêmement petite de  $\alpha_n$  est possible afin de réduire au maximum l'influence de la rigidité fictive.

Nous pouvons présenter d'une autre manière la technique de rigidité fictive de ZIENKIEWICZ [Z3-2000]. Pour cela, nous définissons une déformation fictive de cisaillement dans le plan:

$$\gamma_{xy}^* = \alpha \left( \theta_z - \bar{\theta}_z \right) \quad (3.18)$$

où  $\bar{\theta}_z$  est également la valeur moyenne de  $\theta_z$  et  $\alpha$  est un paramètre arbitraire à choisir.

Si nous calculons l'énergie additionnelle associée à la déformation de cisaillement fictive, nous obtiendrons une formule d'énergie semblable au 2<sup>e</sup> terme du second membre de l'équation (3.16):

$$\int_{A_e} G \frac{t}{2} (\gamma_{xy}^*)^2 d(\text{aire}) = \int_{A_e} G \frac{t}{2} \alpha^2 \left( \theta_z - \bar{\theta}_z \right)^2 d(\text{aire}) \quad (3.19)$$

où  $G$  est le module d'élasticité de cisaillement.

BUI et RONDAL [B13-2008] ont appliqué l'équation (3.18) à la méthode des bandes finies basées sur la théorie des plaques déformables en cisaillement de MINDLIN-REISSNER afin d'analyser le flambement élastique des barres à parois minces. Pour l'analyse linéaire par la méthode des éléments finis, la technique de rigidité fictive marche bien. Les résultats ne dépendent que légèrement de la valeur du paramètre arbitraire  $\alpha$ . Tandis que pour l'analyse avec non-linéarité matérielle, CRISFIELD [C9-1991] a montré que l'utilisation de la rigidité fictive de rotation est délicate car la rigidité de l'élément peut varier significativement. Nos expériences numériques confirment la remarque de CRISFIELD.

C'est pour quoi, nous allons proposer une technique alternative de déformation fictive de cisaillement pour laquelle:

$$\gamma_{xy}^* = \alpha \theta_z \quad (3.20)$$

L'équation (3.20) est maintenant ajoutée aux équations (3.6)-(3.10) de la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER et aux équations (3.11)-(3.15) de la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE. Nous obtenons les équations exprimant les relations entre les déformations et les déplacements avec six degrés de liberté pour chaque point dont trois translations  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et trois rotations  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ . On peut trouver que la rotation  $\theta_z$  dans l'équation (3.20) ne se couple pas avec les autres déplacements; cependant elle ne satisfait pas la condition de rotation rigide autour de la normale de l'élément. Ainsi que le paramètre  $\alpha$  peut être choisi très petit pour réduire au maximum l'influence de la déformation de cisaillement fictive. L'objectif ici n'est que de surmonter le problème de singularité de la matrice de rigidité globale de la structure et de ne pas changer la performance de l'élément original. Il est noté que plusieurs auteurs [A7-1984, A8-1988, B7-1986, P5-2000] ont traité le problème du 6<sup>e</sup> degré de liberté par la définition de la rotation 'vraie' dans

l'élasticité plane  $\theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ . Il est évident que la rotation  $\theta_z$  maintenant est couplé avec les

déplacements membranaires et la matrice de rigidité de l'élément est en conséquence influencée par ce couplage. Ainsi, la technique proposée (Eq. 3.20) est plus simple et moins chère que la technique de rigidité fictive (Eq. 3.16) et les autres techniques utilisant la rotation 'vraie'.

A partir des paragraphes et chapitres successifs, nous justifierons la validité de la proposition (3.20) dans l'analyse des structures à parois minces en utilisant la méthode des bandes finies et la méthode des éléments finis et en appliquant les expressions (3.6)-(3.10) pour les plaques et les expressions (3.11)-(3.15) pour les coques surbaissées.

### 3.5. Formulation des modèles de bandes finies et d'éléments finis

Pour la formulation des modèles d'éléments finis et de bandes finies, nous allons utiliser le principe d'énergie potentielle minimum qui est bien connu dans la mécanique des structures. L'énergie potentielle d'un corps déformable est la somme de l'énergie interne et du travail externe:

$$\Pi = U - W \quad (3.21)$$

où  $\Pi$  est l'énergie potentielle,  $U$  est l'énergie interne retenue dans le corps déformable et  $W$  est le travail externe engendré par les actions (charges) extérieures.

Après la discrétisation de l'environnement du corps, il reste un nombre fini de variables indépendantes  $\{p\}$  qui définit approximativement le comportement du corps. La dérivation de l'énergie potentielle par rapport à ces variables est contrainte égale à zéro. Cela détermine l'état d'énergie potentielle minimum du corps:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{p\}} = \frac{\partial U}{\partial \{p\}} - \frac{\partial W}{\partial \{p\}} = 0 \quad (3.22)$$

Le corps peut être une structure qui subit d'abord une discrétisation physique en plusieurs petites parties de forme géométrique simple qui est appelée 'élément fini' et puis chaque élément fini à son tour subit une 'discrétisation' mathématique en interpolant son champ de déplacements par certaines fonctions mathématiques. Ces fonctions sont définies si les déplacements de quelques points dans l'élément sont connus. Chaque type d'élément fini a un nombre déterminé de points qui sont appelés 'nœuds' et qui peuvent jouer aussi le rôle de relation entre les éléments. Chaque nœud a des déplacements indépendants à connaître et ces déplacements sont appelés 'variables' ou 'degrés de liberté'.

L'énergie interne  $U$  de la structure est la somme des énergies internes des éléments finis:

$$U = \sum U_e \quad (3.23)$$

Le terme  $\frac{\partial U}{\partial \{p\}}$  dans l'équation (3.22) est réécrit:

$$\frac{\partial U}{\partial \{p\}} = \sum \frac{\partial U_e}{\partial \{p\}} \quad (3.24)$$

Chaque terme  $\frac{\partial U_e}{\partial \{p\}}$  donne la matrice de rigidité de l'élément considéré. Après calculer des matrices de rigidité de tous les éléments, un processus de l'assemblage de ces matrices donne la matrice de rigidité globale de la structure. Cependant, avant l'assemblage, toutes les matrices de rigidité élémentaires doivent être géométriquement transformées à un système d'axes globaux commun.

De même manière, le terme  $\frac{\partial W}{\partial \{p\}}$  dans l'équation (3.22) peut être déterminé au niveau de

l'élément. Le travail externe de la structure est la somme des travaux externes des éléments:

$$W = \sum W_e \quad (3.25)$$

La dérivation du travail externe global par rapport aux variables indépendantes est prise:

$$\frac{\partial W}{\partial \{p\}} = \sum \frac{\partial W_e}{\partial \{p\}} \quad (3.26)$$

Chaque terme  $\frac{\partial W_e}{\partial \{p\}}$  donne le vecteur de charge élémentaire, le vecteur de charge global est obtenu

après un processus d'assemblage. En pratique, le vecteur de charge global peut être directement déterminé au système d'axes commun.

Après avoir obtenu la matrice de rigidité de la structure et le vecteur de charge global, l'équation (3.22) peut être résolue en appliquant les conditions de bords de la structure. Les résultats de la résolution sont les valeurs des variables indépendantes exprimées au système d'axes commun.

### 3.5.1. Expression de l'énergie interne

L'expression de l'énergie interne d'un élément de plaque ou de coque surbaissée déformable en cisaillement peut être exprimée par:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} \int_{A_e} \{\sigma_{pb}\}^T \{\varepsilon_{pb}\} d(\text{aire}) dz + \frac{\kappa}{2} t \int_{A_e} \{\sigma_s\}^T \{\varepsilon_s\} d(\text{aire}) \quad (3.27)$$

où  $A_e$  et  $t$  sont l'aire et l'épaisseur de l'élément;

$$\{\sigma_{pb}\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\} \quad (3.28)$$

$$\{\varepsilon_{pb}\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T \quad (3.29)$$

sont les contraintes et les déformations dans le plan, tandis que:

$$\{\sigma_s\}^T = \{\tau_{xy}^* \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\} \quad (3.30)$$

$$\{\varepsilon_s\} = \{\gamma_{xy}^* \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T \quad (3.31)$$

sont les composantes de cisaillements dont  $\gamma_{xy}^*$  et  $\tau_{xy}^*$  sont la déformation de cisaillement fictive ajoutée et la contrainte de cisaillement fictive correspondante.

$\kappa$  dans l'expression (3.27) est le facteur correctif de cisaillement, pris égal à 5/6 (ou  $\pi^2/12$ ) [C11-1966, V2-1992].

Les équations constitutives suivant la loi de HOOKE pour un matériau isotrope sont séparément prises pour les deux groupes de composantes:

$$\{\sigma_{pb}\} = [D_{pb}] \{\varepsilon_{pb}\} \quad (3.32)$$

$$\{\sigma_s\} = [D_s] \{\varepsilon_s\} \quad (3.33)$$

dans lesquels  $[D_{pb}]$ ,  $[D_s]$  sont les matrices de rigidité matérielle:

$$[D_{pb}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$[D_s] = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.35)$$

$E$  est le module d'élasticité,  $G$  est le module d'élasticité de cisaillement et  $\nu$  est le coefficient de POISSON.

En substituant les équations (3.32) et (3.33) dans l'expression de l'énergie interne (3.27), nous obtenons:



$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} \int_{A_e} \{\varepsilon_{pb}\}^T [D_{pb}] \{\varepsilon_{pb}\} d(\text{aire}) dz + \frac{K}{2} t \int_{A_e} \{\varepsilon_s\}^T [D_s] \{\varepsilon_s\} d(\text{aire}) \quad (3.36)$$

Afin de construire la matrice de rigidité d'un élément, on a besoin d'exprimer la relation entre les déformations et le champ des déplacements dont les variables nodales sont inconnues. Les théories utilisant les hypothèses de MINDLIN-REISSNER permettent d'interpoler séparément les translations et les rotations. La continuité de translation et de rotation aux lignes de bords entre les éléments adjacents est toujours assurée au niveau C0.

La méthode des bandes finies n'est appliquée que pour les structures prismatiques dont les bandes finies composantes ont les largeurs constantes et les fonctions d'interpolation le long d'une bande finie sont en forme sinusoïdale; l'intégration analytique explicite est utilisée pour les fonctions sinusoïdales longitudinales et l'intégration numérique avec la quadrature de GAUSS est utilisée pour les fonctions polynomiales transversales. Tandis que la méthode des éléments finis est beaucoup plus largement utilisée avec des éléments finis de formes différentes, même dans le cas où les éléments finis sont, au début, en forme rectangulaire mais après quelques pas de l'analyse non-linéaire ils ne sont plus rectangulaires. Alors, l'intégration numérique avec la quadrature de GAUSS est le meilleur choix pour la méthode des éléments finis.

### 3.5.2. Méthode des bandes finies

La méthode des bandes finies n'est appliquée que pour les barres à parois minces prismatiques dans l'analyse de flambement linéarisé dans cette thèse. Nous allons employer la théorie des plaques déformables en cisaillement de MINDLIN-REISSNER et la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE complétées par la rotation dans le plan proposée (3.20).

#### 3.5.2.1. Fonctions de forme d'une bande finie

Nous considérons une bande finie simplement supportée à ses deux extrémités (Fig. 3.4), nous allons construire les modèles de bandes finies avec deux, trois ou quatre lignes nodales (Fig. 3.5).

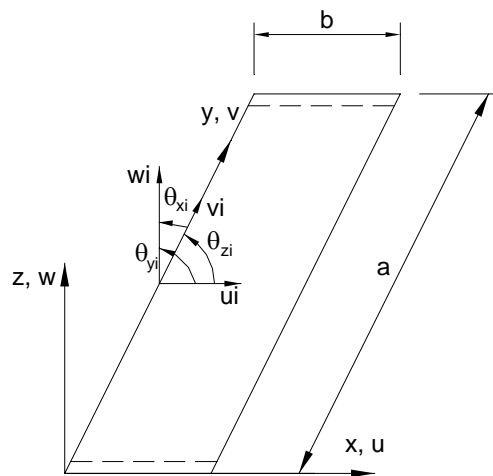


Figure 3.4. Bande finie: a est la longueur, b est la largeur.

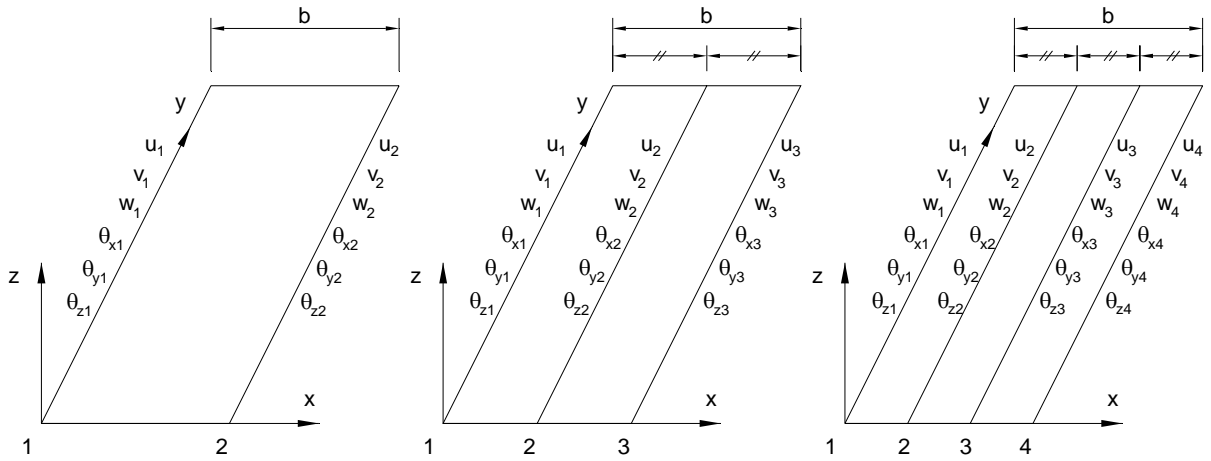


Figure 3.5. Différents modèles de bandes finies avec deux, trois et quatre lignes nodales.

Le champ de déplacements d'une bande finie peut être communément exprimé comme suit:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{m=1}^r \sum_{i=1}^n H_i u_{im} \sin \frac{m\pi y}{a} \\
 v &= \sum_{m=1}^r \sum_{i=1}^n H_i v_{im} \cos \frac{m\pi y}{a} \\
 w &= \sum_{m=1}^r \sum_{i=1}^n H_i w_{im} \sin \frac{m\pi y}{a}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_x &= \sum_{m=1}^r \sum_{i=1}^n H_i \theta_{xim} \cos \frac{m\pi y}{a} \\
 \theta_y &= \sum_{m=1}^r \sum_{i=1}^n H_i \theta_{yim} \sin \frac{m\pi y}{a} \\
 \theta_z &= \sum_{m=1}^r \sum_{i=1}^n H_i \theta_{zim} \cos \frac{m\pi y}{a}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

où les fonctions harmoniques choisies sont classiques; ces fonctions satisfont les conditions des appuis simples; r est le nombre des harmoniques considérés et n est le nombre de fonctions de forme de Hermite.

Pour une bande finie avec deux lignes nodales (Fig. 3.5):

$$H_1(x) = 1 - \frac{x}{b} \quad H_2(x) = \frac{x}{b} \tag{3.39}$$

Pour trois lignes nodales:

$$H_1(x) = 1 - \frac{3x}{b} + \frac{2x^2}{b^2} \quad H_2(x) = \frac{4x}{b} - \frac{4x^2}{b^2} \quad H_3(x) = \frac{-x}{b} + \frac{2x^2}{b^2} \tag{3.40}$$

Pour quatre lignes nodales:

$$\begin{aligned}
 H_1(x) &= 1 - \frac{11x}{2b} + \frac{9x^2}{b^2} - \frac{9x^3}{2b^3} & H_2(x) &= \frac{9x}{b} - \frac{45x^2}{2b^2} + \frac{27x^3}{2b^3} \\
 H_3(x) &= \frac{-9x}{2b} + \frac{18x^2}{b^2} - \frac{27x^3}{2b^3} & H_4(x) &= \frac{x}{b} - \frac{9x^2}{2b^2} + \frac{9x^3}{2b^3}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Particulièrement, pour la méthode des bandes finies basée sur la théorie des coques surbaissées, la hauteur  $h$  entre un point sur la surface curviligne et son point de projection sur le plan de référence (Fig. 3.6) peut être changée suivant le sens transversal et inchangée suivant le sens longitudinal. Cette hauteur peut être interpolée comme suit:

$$h = \sum_i H_i(x) h_i \quad (3.42)$$

où  $h_i$  est la hauteur de la ligne nodale  $i$ ,  $H_i(x)$  sont les fonctions de forme pour la bande finie à trois lignes nodales ou pour la bande finie à quatre lignes nodales. Les fonctions linéaires pour la bande finie à deux lignes nodales ne peuvent pas décrire la surface curviligne et ne sont pas utilisées.

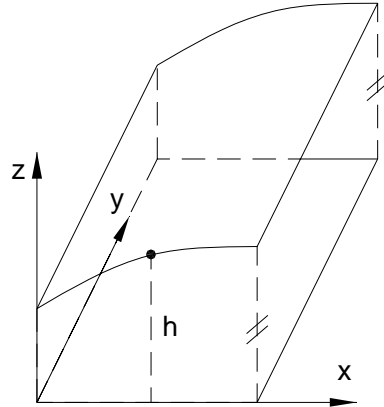


Figure 3.6. Bande finie basée sur la théorie des coques surbaissées.

Les fonctions de forme pour l'interpolation longitudinale des composantes de déplacement  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$  ont été originalement proposées par CHEUNG [C3-1976]. Nous y ajoutons la rotation  $\theta_z$  et nous proposons d'utiliser pour  $\theta_z$  la même fonction de cosinus que pour la rotation  $\theta_x$ . Ceci pour assurer la conformité des rotations en jonction spatiale de deux bandes finies adjacentes comme l'indique la figure 3.7 sur laquelle les rotations sont représentées par une double flèche.

Les fonctions  $H(x)$  pour l'interpolation transversale sont bien connues dans la littérature avec le nom 'les fonctions de HERMITE'. Une fonction  $H_i(x)$  donne une valeur égale à 1 en ligne nodale  $i$  et égale à 0 ailleurs. La somme des fonctions  $H_i(x)$  est toujours égale à 1:

$$\sum_i H_i(x) = 1 \quad (3.43)$$

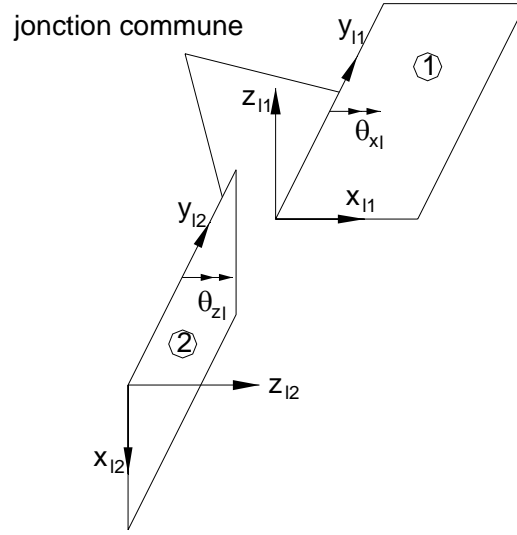


Figure 3.7. Conformité des rotations en jonction spatiale.

### 3.5.2.2. Matrice de rigidité d'une bande finie

La matrice de rigidité d'une bande finie avec 6 variables basée sur la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER peut être obtenue en substituant les fonctions interpolant le champ de déplacement (3.37) et (3.38) dans les équations (3.6)-(3.10) et (3.20). La matrice de rigidité d'une bande finie avec 6 variables basée sur la théorie des coques surbaissées est obtenue en substituant les fonctions (3.37), (3.38) et (3.42) dans les équations (3.11)-(3.15) et (3.20). Nous obtenons:

$$\{\varepsilon_{pb}\} = \sum_m [B_{pb}]_m \{p\}_m \quad \text{avec} \quad m=1,2,\dots,r \quad (3.44)$$

$$\{\varepsilon_s\} = \sum_m [B_s]_m \{p\}_m \quad \text{avec} \quad m=1,2,\dots,r \quad (3.45)$$

où  $[B_{pb}]_m$  et  $[B_s]_m$  sont appelés 'matrices de déformation-déplacement' et  $\{p\}_m$  est le vecteur des variables nodaux.

$[B_{pb}]_m$  et  $[B_s]_m$  pour ligne nodale  $i$  et  $m^e$  harmonique sont décrits selon la théorie des plaques:

$$[B_{pbi}]_m = \begin{bmatrix} H_{i,x} s_m & 0 & 0 & 0 & -z H_{i,x} s_m & 0 \\ 0 & -H_i k_m s_m & 0 & z H_i k_m s_m & 0 & 0 \\ H_i k_m c_m & H_{i,x} c_m & 0 & -z H_{i,x} c_m & -z H_i k_m c_m & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$[B_{si}]_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha H_i c_m \\ 0 & 0 & H_{i,x} s_m & 0 & -H_i s_m & 0 \\ 0 & 0 & H_i k_m c_m & -H_i c_m & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Selon la théorie des coques surbaissées en considérant (3.42) et  $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dh}{dx} = h_{,x}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$ :

$$[B_{pbi}]_m = \begin{bmatrix} H_{i,x} s_m & 0 & h_{,x} H_{i,x} s_m & 0 & -z H_{i,x} s_m & 0 \\ 0 & -H_i k_m s_m & 0 & z H_i k_m s_m & 0 & 0 \\ H_i k_m c_m & H_{i,x} c_m & h_{,x} H_i k_m c_m & -z H_{i,x} c_m & -z H_i k_m c_m & 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$[B_{si}]_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha H_i c_m \\ 0 & 0 & H_{i,x} s_m & 0 & -H_i s_m & 0 \\ 0 & 0 & H_i k_m c_m & -H_i c_m & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

où  $H_i = H_i(x)$  ;  $H_{i,x} = \frac{dH_i(x)}{dx}$  ;  $s_m = \sin(k_m y)$  ;  $c_m = \cos(k_m y)$  ;  $k_m = \frac{m\pi}{a}$  ;  $h_{i,x} = \sum_i H_{i,x} h_i$

(3.50)

et  $\alpha$  est le paramètre dans l'équation (3.20).

$\{p_i\}_m$  pour la ligne nodale  $i$  est alors:

$$\{p_i\}_m^T = \{u_{im} \quad v_{im} \quad w_{im} \quad \theta_{xim} \quad \theta_{yim} \quad \theta_{zim}\} \quad (3.51)$$

En remplaçant les équations (3.44) et (3.45) dans l'expression de l'énergie interne (3.36):

$$U_e = \sum_m \frac{1}{2} \{p\}_m^T \int_{-t/2}^{t/2} \int_{A_e} [B_{pb}]_m^T [D_{pb}] [B_{pb}]_m d(\text{aire}) dz \{p\}_m + \sum_m \frac{\kappa}{2} t \{p\}_m^T \int_{A_e} [B_s]_m^T [D_s] [B_s]_m d(\text{aire}) \{p\}_m \quad (3.52)$$

En dérivant  $U_e$  par rapport aux variables nodales, nous obtenons:

$$\frac{\partial U_e}{\partial \{p\}} = \sum_m \int_{-t/2}^{t/2} \int_{A_e} [B_{pb}]_m^T [D_{pb}] [B_{pb}]_m d(\text{aire}) dz \{p\}_m + \sum_m \kappa t \int_{A_e} [B_s]_m^T [D_s] [B_s]_m d(\text{aire}) \{p\}_m \quad (3.53)$$

La matrice de rigidité d'une bande finie peut ainsi être obtenue. Il est à noter que pour la bande finie simplement appuyée, les harmoniques sont découplés et ainsi la matrice de rigidité contient  $r$  sous-matrices qui se situent en position diagonale.

$$[K]_e = \begin{bmatrix} [K]_{1e} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [K]_{2e} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [K]_{re} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

dans laquelle la  $m^e$  sous-matrice peut être obtenue par:

$$[K]_{me} = \int_{-t/2}^{t/2} \int_{A_e} [B_{pb}]_m^T [D_{pb}] [B_{pb}]_m d(\text{aire}) dz + \kappa t \int_{A_e} [B_s]_m^T [D_s] [B_s]_m d(\text{aire}) \quad (3.55)$$

Nous posons:

$$[K_{pb}]_{me} = \int_{-t/2}^{t/2} \int_{A_e} [B_{pb}]_m^T [D_{pb}] [B_{pb}]_m d(\text{aire}) dz \quad (3.56)$$

$$[K_s]_{me} = \kappa t \int_{A_e} [B_s]_m^T [D_s] [B_s]_m d(\text{aire}) \quad (3.57)$$

Donc:

$$[K]_{me} = [K_{pb}]_{me} + [K_s]_{me} \quad (3.58)$$

### 3.5.2.3. Matrice géométrique

Dans l'analyse de flambement, on doit tenir compte de l'énergie potentielle additionnelle due aux contraintes initiales. Nous considérons une bande finie soumise à des contraintes linéairement réparties à travers la largeur et uniformes le long de la bande (Fig. 3.8). L'énergie potentielle due aux contraintes initiales dans le plan de la bande est obtenue par:

$$\frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} \int_A \left[ \sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{x}{b} \right] \left[ \left( \frac{\partial(u - z\theta_y)}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial(v - z\theta_x)}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] d(\text{area}) dz \quad (3.59)$$

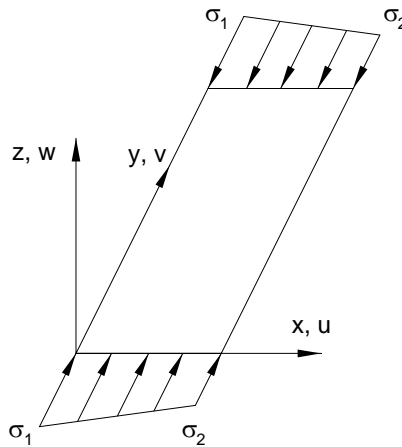


Figure 3.8. Contraintes initiales.

Le second terme de l'expression (3.60) peut être réécrit:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(u - z\theta_y) & \frac{\partial}{\partial y}(v - z\theta_x) & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(u - z\theta_y) \\ \frac{\partial}{\partial y}(v - z\theta_x) \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

En notant que les pentes sont reliées aux variables nodales, nous posons:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(u - z\theta_y) \\ \frac{\partial}{\partial y}(v - z\theta_x) \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = [G] \{p\} \quad (3.61)$$

L'analyse de flambement n'est réalisée que pour chaque mode de déformation et le premier mode  $m=1$  est toujours critique et à examiner le plus. L'énergie potentielle additionnelle (3.59) devient:

$$\frac{1}{2} \{p\}^T \int_{-t/2}^{t/2} \int_A \left[ \sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{x}{b} \right] [G]^T [G] d(\text{aire}) dz \{p\} \quad (3.62)$$

Maintenant, en dérivant (3.62) par rapport aux variables nodales  $\{p\}$ , nous obtenons la matrice géométrique qui a la forme:

$$[K_G]_e = \begin{bmatrix} [K_G]_{1e} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [K_G]_{2e} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [K_G]_{re} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

dans laquelle la  $m^e$  sous-matrice géométrique peut être obtenue par:

$$[K_G]_{me} = \int_{-t/2}^{t/2} \int_{A_e} \left[ \sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{x}{b} \right] [G]_m^T [G]_m d(\text{aire}) dz \quad (3.64)$$

$[K_G]_e$  est nommé 'matrice géométrique' ou 'matrice des contraintes initiales' d'une bande finie.

### 3.5.2.4. Matrice de transformation géométrique

Toutes les formulations de la matrice de rigidité et de la matrice géométrique précédentes sont réalisées dans le système d'axes local de la bande finie considérée. Une structure prismatique à parois minces peut être constituée de plusieurs bandes finies dont les systèmes locaux sont différents l'un à l'autre (Fig. 3.7). Nous devons amener toutes les quantités de chaque bande finie à un système d'axes commun de la structure. Nous choisissons toujours l'axe  $y_g$  global parallèle à l'axe  $y_l$  local (Fig. 3.9) et la transformation géométrique ne doit être exécutée que dans le plan  $xz$ .

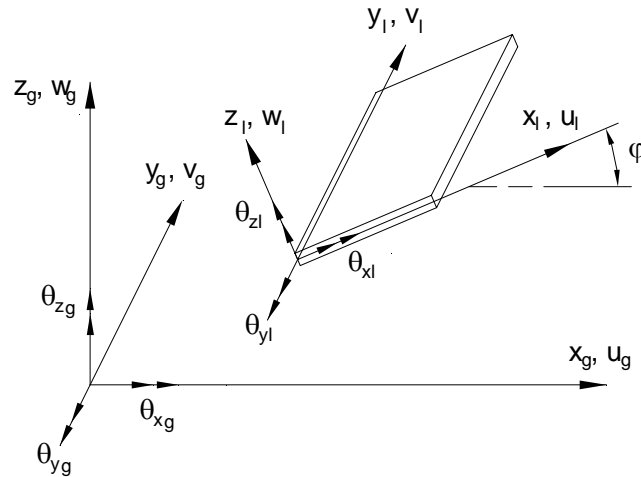


Figure 3.9. Systèmes d'axes global et local.

Nous avons des relations géométriques suivantes:

$$\begin{aligned} u_g &= u_l \cos \varphi - w_l \sin \varphi \\ v_g &= v_l \\ w_g &= u_l \sin \varphi + w_l \cos \varphi \\ \theta_{xg} &= \theta_{xl} \cos \varphi - \theta_{zl} \sin \varphi \\ \theta_{yg} &= \theta_{yl} \\ \theta_{zg} &= \theta_{xl} \sin \varphi + \theta_{zl} \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.65)$$

où  $\varphi$  est l'angle entre l'axe local  $x_l$  et l'axe global  $x_g$ .

En forme matricielle pour la ligne nodale i :

$$\{p\}_{ig} = [T]\{p\}_{il} \quad (3.66)$$

avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Pour une bande finie à deux lignes nodales, la matrice de transformation géométrique est alors construite :

$$[L] = \begin{bmatrix} T & O \\ O & T \end{bmatrix} \quad \text{où } O \text{ est une matrice zéro de dimension } 6 \times 6 \quad (3.68)$$

Pour trois lignes nodales :

$$[L] = \begin{bmatrix} T & O & O \\ O & T & O \\ O & O & T \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Pour quatre lignes nodales :

$$[L] = \begin{bmatrix} T & O & O & O \\ O & T & O & O \\ O & O & T & O \\ O & O & O & T \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Par conséquent, la transformation des déplacements correspondants au mode m d'un système d'axe local au système d'axes global est réalisée grâce à la matrice  $[L]$  :

$$\{p\}_{mg} = [L]\{p\}_{ml} \quad (3.71)$$

En substituant (3.71) aux expressions de l'énergie interne et de l'énergie potentielle additionnelle, nous obtenons la matrice de rigidité et la matrice géométrique de la bande finie considérée exprimée dans le système d'axes global.

$$[K]_{mge} = [L]^T [K]_{mle} [L] = [L]^T [K_p]_{mle} [L] + [L]^T [K_s]_{mle} [L] \quad (3.72)$$

$$[K_G]_{mge} = [L]^T [K_G]_{mle} [L] \quad (3.73)$$

### 3.5.2.5. Résolution et phénomènes de verrouillage

La matrice de rigidité globale et la matrice géométrique globale de la structure sont construites à partir des matrices de rigidité et des matrices géométriques élémentaires grâce à un processus d'assemblage. Pour la simplicité, nous utilisons un symbole de somme pour représenter ce processus :

$$[K]_{mg} = \sum [K]_{mge} \quad (3.74)$$



$$[K_G]_{mg} = \sum [K_G]_{mge} \quad (3.75)$$

Les expressions (3.74) et (3.75) ne concernent que le mode de déformation  $m$  correspondant à la  $m^e$  harmonique. CHEUNG [C3-1976] a montré que pour une structure prismatique simplement appuyée à ses deux extrémités, les modes de déformation sont découplés; chaque mode peut être séparément analysé. L'analyse de flambement mène au problème des valeurs propres d'un système d'équations:

$$[K]_{mg} + \lambda [K_G]_{mge} = 0 \quad (3.76)$$

où  $\lambda$  est la valeur propre concernant la contrainte de flambement.

L'apparition des équations de valeurs propres (3.76) peut être expliquée par la théorie de l'analyse non-linéaire [F3-1978, D3-1989, D4-2007, F2-2007]. La procédure, pour le problème de flambement présenté ci-dessus, néglige la déformation géométrique de la structure et le matériau reste toujours en régime élastique. On l'appelle 'flambement linéarisé'. On remarque que l'analyse de flambement de la méthode des bandes finies dans ce travail n'est valable que sous sollicitations uniformes telles que la compression uniforme, la flexion uniforme, le bi-moment uniforme ou une combinaison quelconque des sollicitations uniformes.

Toutefois, dans le sens transversal, un phénomène bien connu dans la littérature appelé 'verrouillage de cisaillement' apparaît lorsque les hypothèses de MINDLIN-REISSNER sont appliquées. Le verrouillage de cisaillement rend les résultats inexacts; les contraintes de flambement deviennent beaucoup plus grandes que les valeurs exactes quand l'épaisseur relative des parois est de plus en plus petite. Ceci est dû à la surestimation de l'énergie de cisaillement; le second terme dans l'expression de l'énergie interne (3.53). BELYTSCHKO *et al.* [B8-1985] ont bien expliqué ce phénomène pour la méthode des éléments finis. Nous considérons l'expression de la

déformation de cisaillement (3.9):  $\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_y$ , dans la théorie des plaques de MINDLIN-

REISSNER, la translation  $w$  et la rotation  $\theta_y$  sont interpolées transversalement par les fonctions de polynôme de même ordre de  $x$ , alors  $\frac{\partial w}{\partial x}$  a une fonction de polynôme d'un ordre moins que  $\theta_y$ .  $\frac{\partial w}{\partial x}$

ne peut pas éliminer  $\theta_y$  et l'énergie parasite de cisaillement apparaît. Nous appliquerons la technique d'intégration réduite [Z2-1971] afin de résoudre ce phénomène. L'intégration réduite n'est appliquée que pour le second terme de l'équation (3.55) concernant les composantes de cisaillement  $\gamma_{xy}^*$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ .

Pour la méthode des coques surbaissées, en dehors du verrouillage de cisaillement qui se produit similairement à la théorie des plaques, il y a un autre problème de verrouillage appelé 'verrouillage de membrane' dans lequel il apparaît des efforts membranaires parasites sous une sollicitation purement flexionnelle. La cause peut être expliquée [B8-1985] par la considération de l'expression de

la déformation membranaire (3.30):  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}$  où  $u$ ,  $\theta_y$ ,  $w$  et  $h$  sont interpolés par les

mêmes fonctions de polynôme de  $x$ . Alors,  $\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}$  est en ordre plus élevé que  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \theta_y}{\partial x}$ . Par

conséquent, il existe des contraintes membranaires parasites. L'intégration réduite [Z2-1971] utilisée pour toutes les composantes de la matrice de rigidité (3.55) peut corriger les deux phénomènes de

verrouillage pour la coque et de bons résultats peuvent être obtenus. Les schémas de l'intégration numérique, dans le sens transversal de la bande finie déformable en cisaillement, sont donnés dans le tableau 3.1.

Table 3.1. Points de GAUSS pour l'intégration numérique dans le sens transversal de la bande finie.

Schémas d'intégration	2 lignes nodales	3 lignes nodales	4 lignes nodales
Intégration totale	2	3	4
Intégration réduite	1	2	3

Dans le sens longitudinal, l'intégration analytique est toujours utilisée pour l'équation (3.55).

### 3.5.3. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est dominante dans l'analyse des structures. Les structures peuvent être de formes quelconques avec n'importe quelles conditions de charges et de bords. Néanmoins, la méthode des éléments finis est beaucoup plus lourde que sa variante, la méthode des bandes finies bien que la dernière limite sa validité aux conditions définies. Nous utiliserons respectivement la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER et la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE pour l'analyse des structures à parois minces. Ces deux théories sont complétées par la rotation dans le plan  $\theta_z$  (Eq. 3.20).

#### 3.5.3.1. Fonctions de forme d'un élément fini

Nous employons, dans notre travail, les éléments finis iso-paramétriques de 8-nœuds et 9-nœuds (Fig. 3.10). Nous n'abordons pas les éléments linéaires de 4-nœuds et de 3-nœuds parce que ces types d'éléments sont plus difficiles à maîtriser que les précédents [B11-1983, P4-1985].

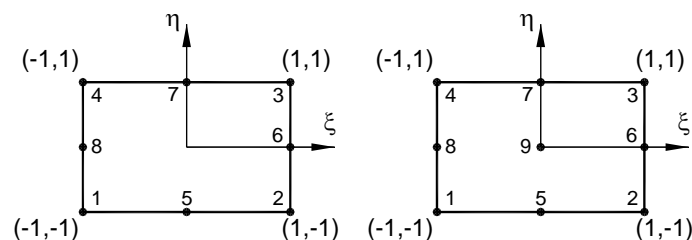


Figure 3.10. Eléments iso-paramétriques de 8-nœuds et 9-nœuds dans le système des coordonnées naturelles.

Les éléments iso-paramétriques interpolent les coordonnées et les déplacements par les mêmes fonctions de forme.

$$\begin{aligned}
x &= \sum_i H_i(\xi, \eta) x_i \\
y &= \sum_i H_i(\xi, \eta) y_i
\end{aligned} \tag{3.77}$$

dans lesquels  $x_i$  et  $y_i$  sont les valeurs des coordonnées du nœud  $i$ . Similairement, un déplacement quelconque peut être interpolé:

$$p = \sum_i H_i(\xi, \eta) p_i \tag{3.78}$$

où  $p$  peut être  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  ou  $\theta_z$  et  $p_i$  est la variable nodale correspondant au nœud  $i$ .

Pour la théorie des coques surbaissées, la hauteur  $h$  entre un point sur la surface curviligne et son point de projection sur le plan de référence (Fig. 3.3) est également interpolée:

$$h = \sum_i H_i(\xi, \eta) h_i \tag{3.79}$$

Pour un élément de 8-nœuds, les fonctions de forme sont données par:

$$\begin{aligned}
H_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-1 - \xi - \eta) \\
H_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(-1 + \xi - \eta) \\
H_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(-1 + \xi + \eta) \\
H_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-1 - \xi + \eta) \\
H_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\
H_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\
H_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\
H_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Pour un élément de 9-nœuds:

$$\begin{aligned}
H_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta) \\
H_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta) \\
H_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta) \\
H_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta) \\
H_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 - \eta) \\
H_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(1 - \eta^2) \\
H_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta^2 + \eta)
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$$H_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(1 - \eta^2)$$

$$H_9(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

Les fonctions de forme  $H_i(\xi, \eta)$  sont définies aux limites du domaine naturel normalisé (Fig. 3.10) avec  $-1 \leq \xi \leq 1$  et  $-1 \leq \eta \leq 1$ . La forme de l'élément est carrée dans le système des coordonnées naturelles  $(\xi, \eta)$ ; elle peut représenter une forme quadrilatérale générale avec distorsion dans le système des coordonnées physiques  $(x, y)$  (Fig. 3.11).

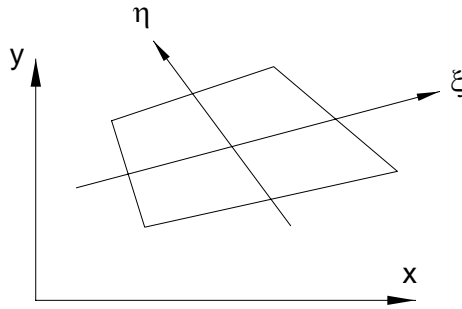


Figure 3.11. Élément quadrilatéral dans le système des coordonnées physiques.

Nous avons besoins de calculer les dérivées  $\frac{\partial H_i(\xi, \eta)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial H_i(\xi, \eta)}{\partial y}$ , respectivement. Pour calculer ces dérivées, nous utilisons les règles:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.83)$$

Soit en forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.84)$$

Ici, la dérivation dans le vecteur de colonne de gauche est appelée 'dérivée locale', tandis que la dérivation dans le vecteur de colonne à droite est appelé 'dérivée globale'. La matrice carrée, dans l'équation (3.84), est nommée 'matrice jacobéenne' pour le domaine bidimensionnel et désignée par:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

dans laquelle:

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_i \frac{\partial H_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i \\
J_{12} &= \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_i \frac{\partial H_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i \\
J_{21} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_i \frac{\partial H_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i \\
J_{22} &= \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_i \frac{\partial H_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i
\end{aligned} \tag{3.86}$$

L'inverse de la matrice jacobéenne est désignée par:

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \tag{3.87}$$

Alors, l'équation (3.84) peut être réécrite comme:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

Les dérivations d'une fonction de forme par rapport à x et y peuvent être obtenues à partir de l'équation (3.88) précédente:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial x} \\ \frac{\partial H_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial H_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

### 3.5.3.2. Matrice de rigidité d'un élément fini

Après avoir obtenu les dérivations globales des fonctions de forme selon l'équation (3.89), nous allons établir les matrices de rigidité d'un élément fini suivant la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER et la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE, respectivement.

Les déformations peuvent être exprimées par:

$$\{\varepsilon_{pb}\} = [B_{pb}] \{p\} \tag{3.90}$$

$$\{\varepsilon_s\} = [B_s] \{p\} \tag{3.91}$$

$[B_{pb}]$  et  $[B_s]$  pour le nœud i sont écrits selon la théorie des plaques:

$$[B_{pbi}] = \begin{bmatrix} H_{i,x} & 0 & 0 & 0 & -zH_{i,x} & 0 \\ 0 & H_{i,y} & 0 & -zH_{i,y} & 0 & 0 \\ H_{i,y} & H_{i,x} & 0 & -zH_{i,x} & -zH_{i,y} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.92}$$

$$[B_{si}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha H_i \\ 0 & 0 & H_{i,x} & 0 & -H_i & 0 \\ 0 & 0 & H_{i,y} & -H_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.93}$$

Selon la théorie des coques surbaissées en considérant (3.79) et  $\frac{\partial h}{\partial x} = h_{,x}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial y} = h_{,y}$

$$[B_{pbi}] = \begin{bmatrix} H_{i,x} & 0 & h_{,x}H_{i,x} & 0 & -zH_{i,x} & 0 \\ 0 & H_{i,y} & h_{,y}H_{i,y} & -zH_{i,y} & 0 & 0 \\ H_{i,y} & H_{i,x} & (h_{,x}H_{i,y} + h_{,y}H_{i,x}) & -zH_{i,x} & -zH_{i,y} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$[B_{si}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha H_i \\ 0 & 0 & H_{i,x} & 0 & -H_i & 0 \\ 0 & 0 & H_{i,y} & -H_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

où:

$$H_i = H_i(\xi, \eta) ; H_{i,x} = \frac{\partial H_i}{\partial x} ; H_{i,y} = \frac{\partial H_i}{\partial y} \quad (3.96)$$

$$h_{,x} = \sum_i \frac{\partial H_i}{\partial x} h_i ; h_{,y} = \sum_i \frac{\partial H_i}{\partial y} h_i \quad (3.97)$$

et  $\alpha$  est le paramètre dans l'équation (3.20).

$\{p\}$  pour le nœud  $i$  est:

$$\{p_i\}^T = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}\} \quad (3.98)$$

Nous allons remplacer les équations (3.90) et (3.91) dans l'expression de l'énergie interne (3.36), mais d'abord nous devons exprimer  $d(\text{aire})=dx dy$  en termes de  $\xi$  et  $\eta$ :

$$d(\text{aire}) = |J| d\xi d\eta \quad (3.99)$$

où  $|J|$  est le déterminant de la matrice jacobéenne (3.85).

Alors:

$$U_e = \frac{1}{2} \{p\}^T \int_{-t/2}^{t/2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{pb}]^T [D_{pb}] [B_{pb}] |J| d\xi d\eta dz \{p\} + \frac{\kappa}{2} \{p\}^T \int_{A_e} [B_s]^T [D_s] [B_s] |J| d\xi d\eta \{p\} \quad (3.100)$$

En dérivant  $U_e$  par rapport aux variables nodales, nous obtenons:

$$\frac{\partial U_e}{\partial \{p\}} = \int_{-t/2}^{t/2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{pb}]^T [D_{pb}] [B_{pb}] |J| d\xi d\eta dz \{p\} + \kappa t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_s]^T [D_s] [B_s] |J| d\xi d\eta \{p\} \quad (3.101)$$

Enfin, la matrice de rigidité d'un élément fini peut être obtenue par:

$$[K]_e = \int_{-t/2}^{t/2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{pb}]^T [D_{pb}] [B_{pb}] |J| d\xi d\eta dz + \kappa t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_s]^T [D_s] [B_s] |J| d\xi d\eta \quad (3.102)$$

Nous posons:

$$[K_{pb}]_e = \int_{-t/2}^{t/2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{pb}]^T [D_{pb}] [B_{pb}] |J| d\xi d\eta dz \quad (3.103)$$

$$[K_s]_e = \kappa t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_s]^T [D_s] [B_s] |J| d\xi d\eta \quad (3.104)$$

Donc:

$$[K]_e = [K_{pb}]_e + [K_s]_e \quad (3.105)$$

### 3.5.3.3. Vecteur de charges

Nous supposons qu'il y a des charges réparties superficielles suivant les trois directions locales comme l'indique la figure 3.12.

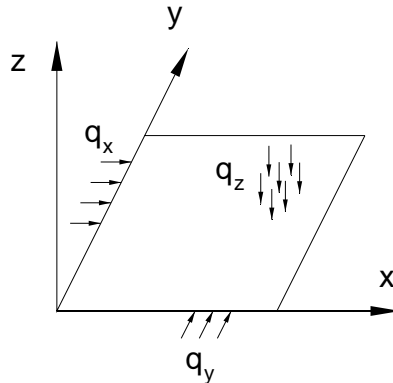


Figure 3.12. Charges réparties superficielles.

Le travail externe (3.25) réalisé par les charges réparties sur les déplacements au sein de l'élément est alors :

$$W_e = \int_{A_e} \{p\}^T \{q\} d(\text{aire}) \quad (3.106)$$

où  $A_e$  est l'aire de l'élément fini considéré,

$$\text{et } \{q\}^T = \{q_x \quad q_y \quad q_z \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad (3.107)$$

$$\{p\}^T = \{u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z\} \quad (3.108)$$

et les composantes de  $\{p\}$  sont exprimées par les expressions (3.78).

On a :

$$W_e = \int_{A_e} \{p\}^T [N]^T \{q\} d(\text{aire}) \quad (3.109)$$

$[N]$  pour la ligne nodale  $i$  s'écrit :

$$[N]_i = \begin{bmatrix} H_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

En dérivant  $W_e$  par rapport aux variables nodales, nous avons :

$$\frac{\partial W_e}{\partial \{p\}} = \int_{A_e} [N]^T \{q\} d(\text{aire}) \quad (3.111)$$

Enfin, le vecteur de charge d'un élément fini peut être obtenu par :

$$\{F\}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \{q\} |J| d\xi d\eta \quad (3.112)$$

### 3.5.3.4. Matrice de transformation géométrique

L'élément peut se situer en une position quelconque dans l'espace avec ses axes locaux attachés (Fig. 3.13).

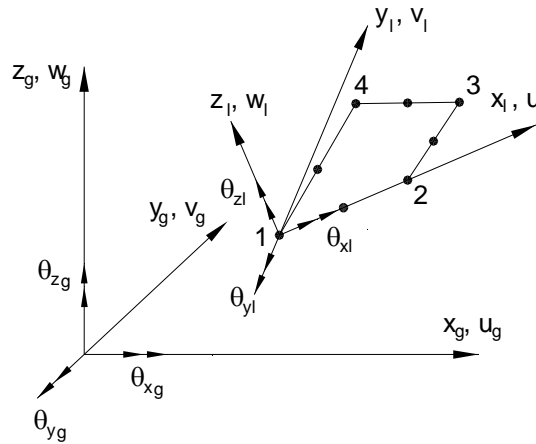


Figure 3.13. Plan de surface moyenne pour une plaque ou plan de référence pour une coque surbaissée dans l'espace.

CRISFIELD [C7-1986] a montré comment obtenir la matrice de transformation spatiale. L'axe local  $x_l$  est choisi pour coïncider avec la ligne reliant les nœuds 1 et 2. Le vecteur  $e_1$  des cosinus de l'axe local  $x_l$  est déterminé par:

$$\{e_1\}^T = \frac{1}{l_1} \{x_{21} \quad y_{21} \quad z_{21}\}_g \quad (3.113)$$

où:  $x_{21}=x_{2g}-x_{1g}$ ;  $y_{21}=y_{2g}-y_{1g}$ ;  $z_{21}=z_{2g}-z_{1g}$

$$l_1 = \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2 + z_{21}^2} \quad (3.114)$$

Le vecteur reliant le nœud 1 et le nœud 3 peut être défini par:

$$\{e'_2\}^T = \{x_{31} \quad y_{31} \quad z_{31}\}_g \quad (3.115)$$

Le vecteur de base  $e_2$ , qui est perpendiculaire au vecteur  $e_1$  et se situe dans le plan de  $e_1$  et  $e'_2$  peut ainsi être trouvé:

$$\beta \{e_2\} = \{e'_2\} - (\{e_1\}^T \{e'_2\}) \{e_1\} \quad (3.116)$$

dans lequel le coefficient scalaire  $\beta$  peut être éliminé par normalisation. Finalement, la règle du produit en croix peut être utilisée pour calculer le vecteur de base  $e_3$  qui est normal au plan des  $e_1$  et  $e_2$ .

$$\begin{aligned} e_3(1) &= e_1(2)e_2(3) - e_1(3)e_2(2) \\ e_3(2) &= -e_1(1)e_2(3) + e_1(3)e_2(1) \\ e_3(3) &= e_1(1)e_2(2) - e_1(2)e_2(1) \end{aligned} \quad (3.117)$$

Les relations géométriques entre les déplacements dans le système local et le système global sont alors:



$$\{p\}_l = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_l = \begin{bmatrix} e_1(1) & e_1(2) & e_1(3) & 0 & 0 & 0 \\ e_2(1) & e_2(2) & e_2(3) & 0 & 0 & 0 \\ e_3(1) & e_3(2) & e_3(3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1(1) & e_1(2) & e_1(3) \\ 0 & 0 & 0 & e_2(1) & e_2(2) & e_2(3) \\ 0 & 0 & 0 & e_3(1) & e_3(2) & e_3(3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_g = [T]\{p\}_g \quad (3.118)$$

Pour un élément de 8-nœuds, la matrice de transformation géométrique est la suivante:

$$[L] = \begin{bmatrix} T & O & O & O & O & O & O & O \\ O & T & O & O & O & O & O & O \\ O & O & T & O & O & O & O & O \\ O & O & O & T & O & O & O & O \\ O & O & O & O & T & O & O & O \\ O & O & O & O & O & T & O & O \\ O & O & O & O & O & O & T & O \\ O & O & O & O & O & O & O & T \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

dans lequel O est la matrice de dimensions 6x6 où tous ses composants sont zéros. La détermination de  $[L]$  est similaire pour le cas des éléments à 9-nœuds.

Par conséquent, la transformation des déplacements, de la matrice de rigidité et du vecteur de charge d'un système d'axe local au système d'axes global est réalisée grâce à la matrice  $[L]$  :

$$\{p\}_g = [L]\{p\}_l \quad (3.120)$$

$$[K]_{eg} = [L]^T [K]_{el} [L] = [L]^T [K_p]_{el} [L] + [L]^T [K_s]_{el} [L] \quad (3.121)$$

$$\{F\}_g = [L]^T \{F\}_l \quad (3.122)$$

### 3.5.3.5. Résolution et phénomènes de verrouillage

La matrice de rigidité globale et le vecteur de charge global de la structure sont construits à partir des matrices de rigidité et vecteurs de charge élémentaires grâce à un processus d'assemblage:

$$[K]_g = \sum [K]_{eg} \quad (3.123)$$

$$\{F\}_g = \sum \{F\}_{eg} \quad (3.124)$$

Les expressions (3.123) et (3.124) sont substituées dans l'expression stationnaire de l'énergie potentielle (3.22) et nous obtenons un système d'équations linéaires:

$$[K]_g \{p\}_g = \{F\}_g \quad (3.125)$$

La résolution du système (3.125) fournit les valeurs numériques des variables nodales. Les phénomènes de verrouillage se produisent pour la méthode des éléments finis comme expliqué par BELYTSCHKO *et al.* [B8-1985]. Le verrouillage de cisaillement apparaît pour la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER. Tandis que les verrouillages de cisaillement et de membrane sont dus à la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE. La cause de ces phénomènes est l'interaction entre des composantes de déplacement de manière déséquilibrée dans l'expression d'une

composante de déformation. Nous appliquerons les techniques de l'intégration réduite sélectionnée pour la théorie des plaques, donc l'intégration totale est utilisée pour le premier terme de l'expression de la matrice de rigidité (3.102) et l'intégration réduite est appliquée pour le second terme. Pour la théorie des coques surbaissées, l'intégration réduite est employée pour les deux termes de (3.102). Les schémas de l'intégration numérique de l'élément fini déformable en cisaillement sont donnés dans le tableau 3.2.

Table 3.2. Points de GAUSS pour l'intégration numérique de l'élément fini.

Schémas d'intégration	8-noeuds	9-noeuds
Intégration totale	3x3	3x3
Intégration réduite	2x2	2x2

### 3.5.3.6. Matrice géométrique

Nous savons que l'énergie potentielle additionnelle dans l'analyse de flambement est due aux contraintes initiales sur les composantes de déformation de deuxième ordre [C12-1993]. Les composantes de déformation de deuxième ordre ou non-linéaires sont définies dans les déformations totales de GREEN. Pour la théorie des plaques, les déformations de GREEN sont directement obtenues; ici nous ignorons les composantes non-linéaires dans  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  puisque leur contribution à l'énergie potentielle additionnelle est très petite par rapport aux autres:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.126)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.127)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right] \quad (3.128)$$

$$\gamma_{xy}^* = \alpha \theta_z \quad (3.129)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \theta_y \quad (3.130)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \theta_x \quad (3.131)$$

où:

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= u - z\theta_y \\
\bar{v} &= v - z\theta_x \\
\bar{w} &= w
\end{aligned} \tag{3.132}$$

En comparaison avec les composantes de déformation linéaires (3.6)-(3.8), les composantes non-linéaires dans les expressions (3.126)-(3.128) sont:

$$\epsilon_{xNL} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \tag{3.133}$$

$$\epsilon_{yNL} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \tag{3.134}$$

$$\gamma_{xyNL} = \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right] \tag{3.135}$$

Pour la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE, les composantes de déformation non-linéaires ne sont pas directement obtenues puisqu'elles viennent de certaines approximations [M5-1950, D9-1978, I5-1974, I6-1981]. Nous choisissons ici l'interprétation de DEBONGNIE [D9-1978] pour obtenir les expressions des déformations totales de la théorie des coques surbaissées. La hauteur  $h$  (Fig. 3.3) est considérée comme une imperfection de la plaque. Soit A la plaque de référence (coïncidant avec le plan de référence) et soit B la coque qui est proche de A. On peut imaginer que la coque B est obtenue à partir d'une déformation relativement petite appropriée de la plaque A; le seul déplacement fictif correspondant est dans le sens de l'axe  $z$  et désigné  $h$ . Si la coque B est soumise à une déformation subséquente jusqu'à la position C, le déplacement total à partir de A suivant le sens de l'axe  $z$  sera  $(w+h)$ . Les déformations totales, de la plaque de référence au corps actuel C, peuvent être mesurées par les déformations totales de GREEN, pour la composante  $\epsilon_x$ , par exemple:

$$\epsilon_{xt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial (\bar{w}+h)}{\partial x} \right)^2 \right] \tag{3.136}$$

La déformation fictive initiale est alors:

$$\epsilon_{xo} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \tag{3.137}$$

car B est la structure physique réelle. La déformation effective entre B et C est donnée par l'expression suivante:

$$\epsilon_x = \epsilon_{xt} - \epsilon_{xo} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \tag{3.138}$$

De la même manière, nous pouvons déterminer les déformations totales pour  $\varepsilon_y$  et  $\gamma_{xy}$ . Enfin, nous avons:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.139)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.140)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right] \quad (3.141)$$

$$\gamma_{xy}^* = \alpha \theta_z \quad (3.142)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \theta_y \quad (3.143)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \theta_x \quad (3.144)$$

où u, v et w sont donnés par les équations (3.132).

En comparant (3.139)-(3.141) avec les composantes de déformation linéaires de la coque surbaissée (3.11)-(3.13), les composantes non-linéaires sont les mêmes que les expressions (3.133)-(3.135).

Ainsi, l'énergie potentielle additionnelle due aux contraintes initiales [C12-1993] peut être communément présentée par la théorie des plaques et la théorie des coques surbaissées:

$$\frac{1}{2} \int_{V_e} 2 \{ \sigma_{pb} \}^T \{ e_{pb}^* \} dv = \int_{-t/2}^{t/2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{ \sigma_{pb} \}^T \{ e_{pb}^* \} |J| d\xi d\eta dz \quad (3.145)$$

dans lequel  $\{ \sigma_{pb} \}^T = \{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \}$  et  $\{ e_{pb}^* \}^T = \{ \varepsilon_{xNL} \quad \varepsilon_{yNL} \quad \gamma_{xyNL} \}$ , où les composantes de contrainte peuvent être obtenues à partir d'une analyse linéaire préalable et les relations entre les composantes de déformation non-linéaires et les déplacements sont données par (3.133)-(3.135). Similairement à la méthode des bandes finies au sous-paragraphe 3.6.2.3, l'énergie potentielle additionnelle (3.145) mène à la matrice géométrique d'un élément fini  $\{ K_G \}_e$  et puis à la matrice géométrique de la structure au système d'axes global commun  $\{ K_G \}_g$  est obtenue après un processus d'assemblage. Enfin, l'analyse de flambement demande la résolution d'un système d'équations de valeurs propres:

$$[K]_g + \lambda [K_G]_g = 0 \quad (3.146)$$

### 3.6. Applications numériques

Nous avons développé deux programmes avec le langage MATLAB pour analyser le comportement linéaire et de flambement élastique des structures à parois minces. Le premier programme intitulé FLAMBANDE emploie la méthode des bandes finies et ne calcule que le flambement. Le deuxième nommé FENALYSE utilise la méthode des éléments finis et peut réaliser

les deux tâches citées ci-dessus. Selon nos expériences numériques, si la valeur du paramètre  $\alpha$  dans l'équation (3.20) est prise dans l'intervalle  $0.01 \div 0.001$ , on peut obtenir de bons résultats pour tous les types d'analyses linéaire, de flambement et non-linéaire.

### 3.6.1. Plaques planes isolées

#### 3.6.1.1. Comportement linéaire des plaques

##### 3.6.1.1.1. Patch test

Le 'patch test' [I4-1980] a pour objectif la vérification des modes à contraintes constantes et donc de l'assurance de la convergence d'un type d'élément lorsque le maillage est raffiné. Si le domaine est suffisamment petit, les contraintes doivent être sensiblement constantes.

Il est bien connu que la performance de la plupart des éléments iso-paramétriques est considérablement améliorée lorsque les matrices de rigidité sont calculées en utilisant la règle de l'intégration réduite. Mais, l'intégration réduite mène inévitablement à la non-conformité [R14-1986]. Cependant, la convergence est assurée pour ces éléments quand ils passent le patch test. On peut dire que le patch test rend légale l'utilisation de l'intégration réduite. Nous considérons maintenant un exemple à la figure 3.14; ces patches d'éléments sont apparus dans la référence [R14-1986], nous complétons par un patch de 9 éléments proposé par IRONS [I4-1980]. Ce patch test est numériquement exécuté par notre programme de calcul FENALYSE en utilisant la partie d'analyse linéaire. D'après IRONS, le test doit être réussi à 6 décimales ou plus.

$a=10''$   
 $t=1''$   
 $E=10 \times 10^6 \text{ psi}$   
 $\nu=0.3$   
 $p=100 \text{ psi}$   
 $q=50 \text{ psi}$

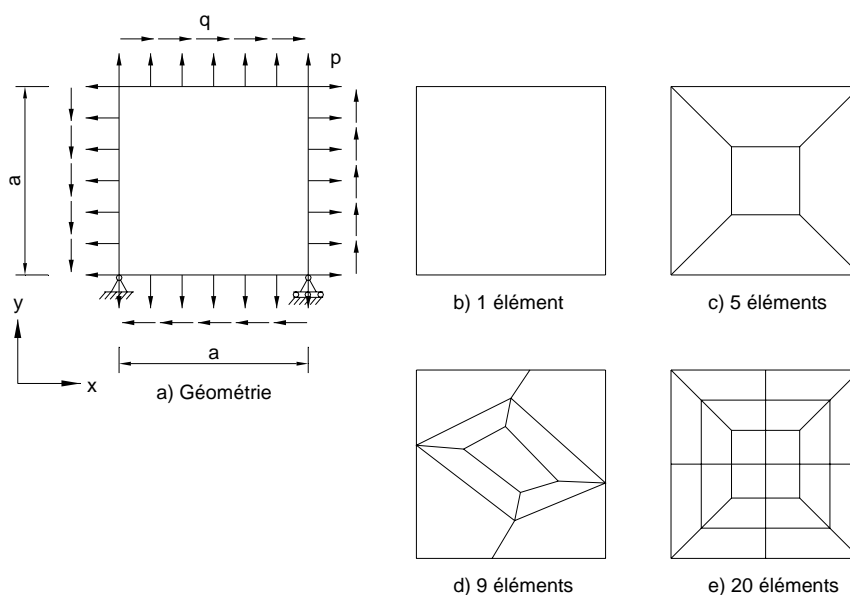


Figure 3.14. Patch test.

C'est un problème de contraintes planes. Nous allons le résoudre avec les éléments 8-nœuds et 9-nœuds, respectivement. Tous les variables nodales superflues tels que  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  et  $w$  sont bloqués pour éviter la singularité des matrices de rigidité. La technique de l'intégration réduite sélectionnée (SRI) est utilisée pour l'élément à 9-nœuds, tandis que l'intégration réduite (RI) et l'intégration réduite sélectionnée (SRI) sont utilisées pour l'élément de 8-nœuds. Le tableau 3.3 donne les contraintes constantes suivant les deux directions  $x$  et  $y$ .

Tableau 3.3. Patch test.

Maillage	8-nœuds (RI)			8-nœuds (SRI)			9-nœuds (SRI)		
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
1 élém.	100.0	100.0	50.0	100.0	100.0	50.0	100.0	100.0	50.0
5 élém.	100.0	100.0	50.0	100.0	100.0	50.0	100.0	100.0	50.0
9 élém.	100.0	100.0	50.0	100.0	100.0	50.0	100.0	100.0	50.0
20 élém.	100.0	100.0	50.0	100.0	100.0	50.0	100.0	100.0	50.0

Tous les éléments iso-paramétriques à 8-nœuds et 9-nœuds peuvent reproduire l'état de contrainte constante avec les maillages et les formes d'élément différents. Alors, nous pouvons dire que ces éléments passent ce patch test.

### 3.6.1.1.2. Plaque soumise à des charges uniformément réparties

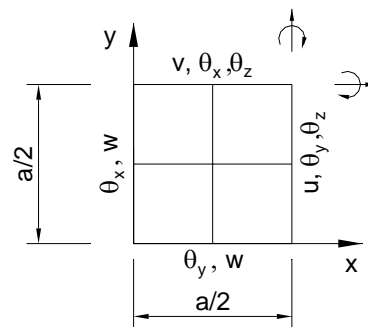
$a=100$  mm

$t$  est l'épaisseur de la plaque,

$E=2.05e+05$  N/mm<sup>2</sup>

$\nu=0.3$

$q=0.1$  N/mm<sup>2</sup>



Méthode des éléments finis  
(2x2 éléments)

Figure 3.15. Plaque soumise aux charges uniformément réparties.

Ici, on analyse une plaque carrée simplement supportée sur ses quatre côtés, soumise aux charges uniformément réparties normales à la surface de la plaque. Grâce à la symétrie, nous calculons sur un quart de la plaque pour la méthode des éléments finis et on compare les résultats obtenus avec ceux de la théorie classique. Les conditions d'appui sont indiquées sur les côtés du modèle. L'étude de convergence pour la méthode des éléments finis est donnée sur la figure 3.16; le rapport largeur/épaisseur égal à 100 est considéré petit. La technique SRI est appliquée pour l'élément de 9-nœuds et les techniques SRI et RI sont appliquées pour l'élément de 8-nœuds.

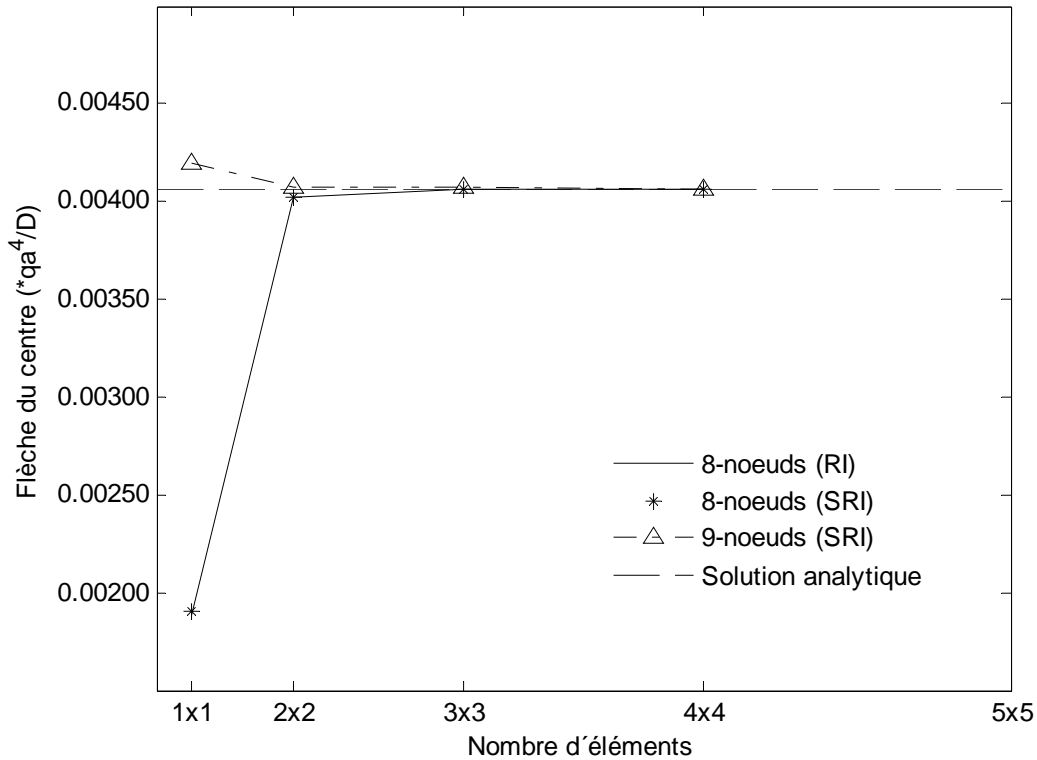


Figure 3.16. Etude de convergence pour la méthode des éléments finis ( $a/t=100$ ).

Nous constatons que tous les éléments convergent vers le résultat analytique:

$$w = 0.00406 \frac{qa^4}{D} \quad \text{avec} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.147)$$

Nous ne voyons aucun écart entre RI et SRI appliqués pour les éléments de 8-nœuds. On remarque en plus que RI est meilleur que SRI et RI peut être appliqué pour les éléments de 8-nœuds malgré qu'il existe un mode de mécanisme pour un élément isolé, mais il ne peut pas se propager dans un groupe d'éléments [C7-1986]. Les éléments à 8-nœuds sont évidemment moins chers que l'élément de 9-nœuds car avec le même maillage pour la convergence, les premiers contiennent moins de nœuds que le dernier.

Les flèches qui dépendent de l'épaisseur relative de la plaque sont données dans le tableau 3.4.

Nous trouvons que:

- + lorsque le rapport largeur/épaisseur est grand, l'influence du cisaillement sur la flèche est négligeable. La solution analytique est considérée exacte et la méthode des éléments finis déformables en cisaillement donne de très bons résultats;

- + l'influence du cisaillement sur la flèche de la plaque intervient lorsque le rapport  $a/t$  diminue et la méthode des éléments finis diverge de la solution analytique. La divergence est de 20.7% pour  $a/t=5$ .

Tableau 3.4: Flèche d'une plaque carrée simplement supportée soumise aux charges uniformément réparties.

Rapport a/t	Théorie des plaques déformables en cisaillement			Solution analytique
	8-nœuds (RI)	8-nœuds (SRI)	9-nœuds (SRI)	-
	$W_{max}$			
200	0.00406	0.00405	0.00406	0.00406
100	0.00406	0.00406	0.00407	
50	0.00407	0.00407	0.00407	
25	0.00410	0.00410	0.00410	
20	0.00411	0.00411	0.00412	
10	0.00427	0.00427	0.00427	
5	0.00490	0.00490	0.00490	
Multiplicateur	$qa^4/D$			
Nombre d'éléments	3x3 (40 nœuds)	3x3 (40 nœuds)	3x3 (49 nœuds)	-

### 3.6.1.2. Flambement linéarisé des plaques

#### 3.6.1.2.1. Plaque soumise à des contraintes uniformes de compression

On considère une plaque carrée simplement supportée soumise aux charges constantes dans son plan. Grâce à la symétrie, on calcule sur la moitié de la plaque pour la méthode des bandes finies et un quart de la plaque pour la méthode des éléments finis.

$a=100$  mm

$t$  est l'épaisseur de la plaque,

$E=2.05e+05$  N/mm<sup>2</sup>

$\nu=0.3$

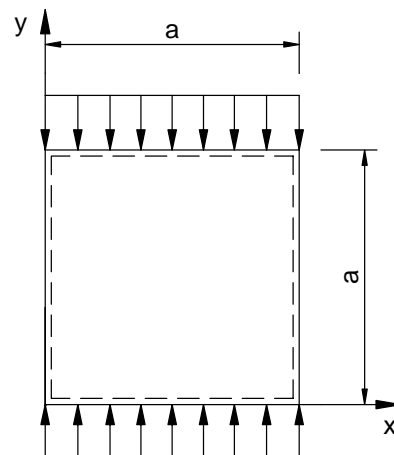


Figure 3.17. Plaque en compression uniforme.



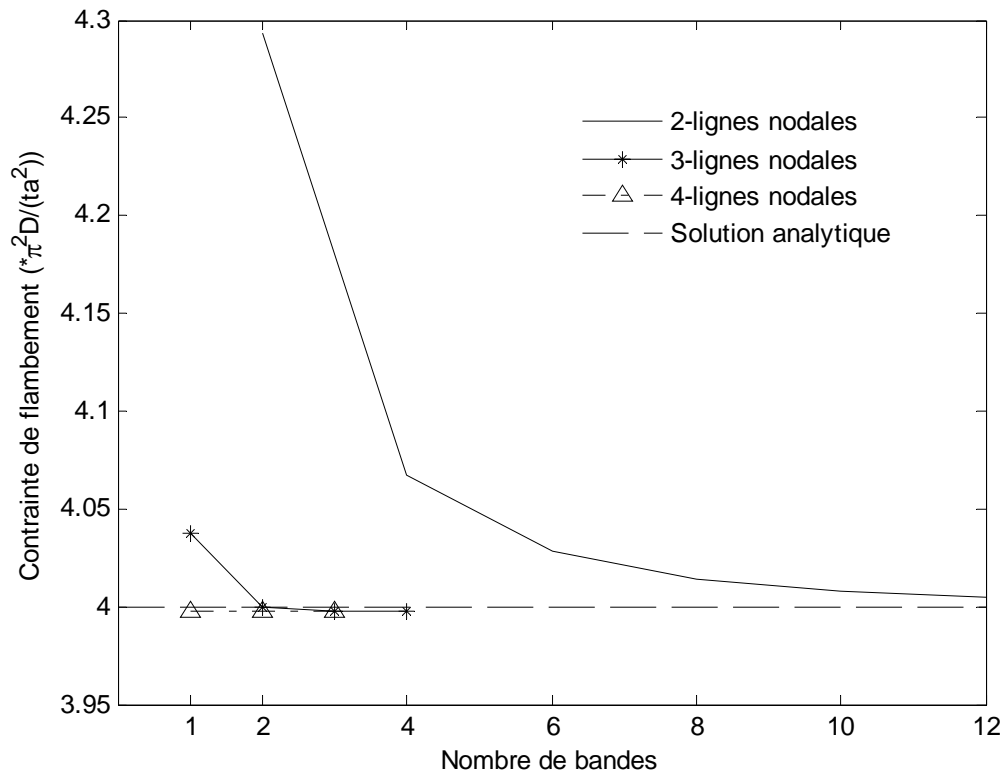


Figure 3.18. Etude de convergence pour la méthode des bandes finies ( $a/t=100$ ).

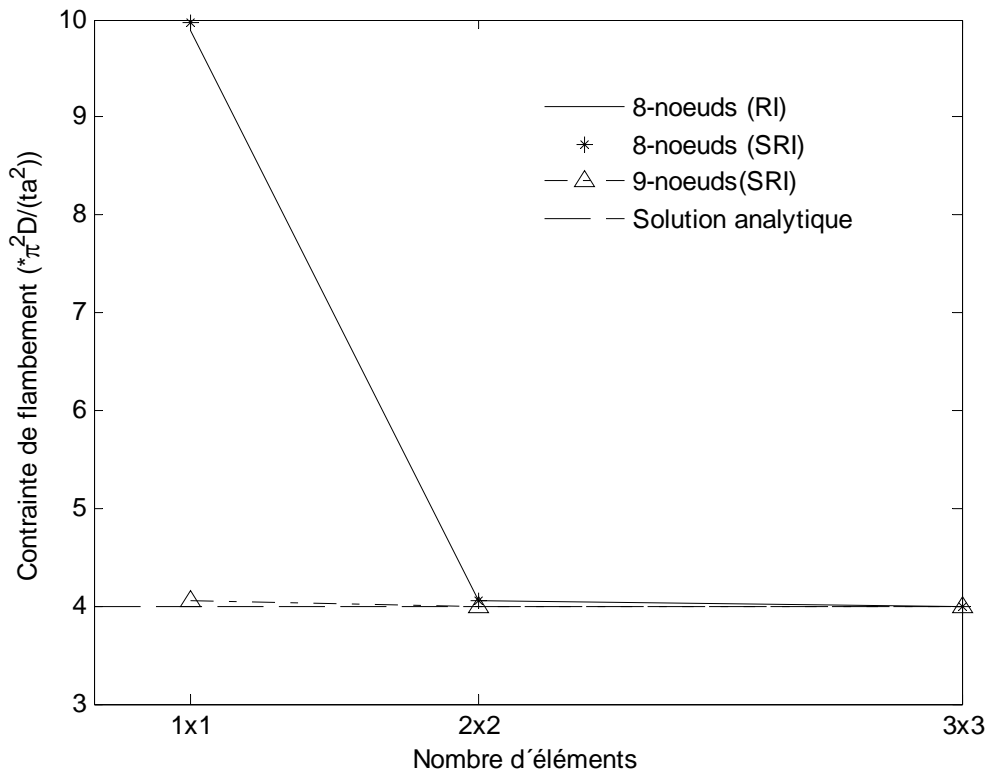


Figure 3.19. Etude de convergence pour la méthode des éléments finis ( $a/t=100$ ).

L'étude de convergence pour la méthode des bandes finies et la méthode des éléments finis avec  $a/t=100$  est présentée sur les figures 3.18 et 3.19. Tous les modèles de bandes finies et d'éléments finis convergent vers la solution exacte:

$$\sigma = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad \text{avec} \quad k = 4.0 \quad (3.148)$$

En changeant l'épaisseur, nous pouvons examiner l'influence du cisaillement transversal sur la valeur de la contrainte de flambement dans le tableau 3.5 où la solution analytique [T3-1961] et les résultats numériques de HINTON [H7-1978] sont également introduits. HINTON a utilisé également une bande finie quadratique de 3-lignes nodales basée sur la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER.

Tableau 3.5: Contrainte critique de la plaque carrée simplement supportée soumise aux charges uniformes de compression dans son plan.

Rapport a/t	Théorie des plaques déformables en cisaillement							Solution analytique
	Méthode des bandes finies (FLAMBANDE)			Méthode des éléments finis (FENALYSE)			Méthode des bandes finies (HINTON)	
	2-lignes nodales (SRI)	3-lignes nodales (SRI)	4-lignes nodales (SRI)	8-nœuds (RI)	8-nœuds (SRI)	9-nœuds (SRI)	3-lignes nodales	-
	$\sigma_{cr}$							
200	4.0023	3.9998	4.0000	4.0003	4.0003	4.0000	3.929	4.0000
100	4.0001	3.9976	3.9978	3.9975	3.9975	3.9978	-	
50	3.9914	3.9889	3.9891	3.9887	3.9887	3.9891	-	
25	3.9570	3.9545	3.9547	3.9543	3.9542	3.9547	-	
20	3.9316	3.9292	3.9294	3.9289	3.9289	3.9293	-	
10	3.7341	3.7319	3.7320	3.7316	3.7316	3.7320	3.737	
5	3.1274	3.1259	3.1260	3.1257	3.1256	<u>1.8546</u>	3.126	
Multiplicateur	$\pi^2 D / (ta^2)$							
Nombre de bandes ou d'éléments	19 (20 lignes)	3 (7 lignes)	1 (4 lignes)	4x4 (65 nœuds)	4x4 (65 nœuds)	3x3 (49 nœuds)	5 (11 lignes)	-

Nous voyons que la contrainte critique de la plaque en compression est influencée par le cisaillement. La théorie des plaques déformables en cisaillement peut le prédire. Les bandes finies quadratique et cubique demandent peu de lignes nodales pour converger. La bande finie linéaire donne également la solution exacte mais demande beaucoup de lignes nodales. La contrainte

critique de HINTON [H7-1978] est un peu plus petite que les nôtres quand le rapport  $a/t$  est grand, la raison peut être que HINTON n'a considéré que la composante non-linéaire de déformation concernant le déplacement hors-plan  $w$  en déterminant la matrice géométrique et il n'a pas dit dans son article comment le verrouillage de cisaillement est éliminé. L'élément de 9-nœuds avec SRI marche bien lorsque l'épaisseur est petite et modérée, mais cet élément donne un résultat mauvais quand l'épaisseur est épaisse ( $a/t=5$ ). Les éléments à 8-nœuds avec RI et SRI marchent bien tant pour l'épaisseur petite que pour l'épaisseur grande et ils donnent des résultats identiques, tandis que l'élément de 8-nœuds avec RI est meilleur marché que celui avec SRI.

### 3.6.1.2.2. Plaque soumise à des charges linéaires de compression

$a=66.7$  mm

$b=100$  mm

$t$  est l'épaisseur de la plaque,

$E=2.05e+05$  N/mm<sup>2</sup>

$\nu=0.3$

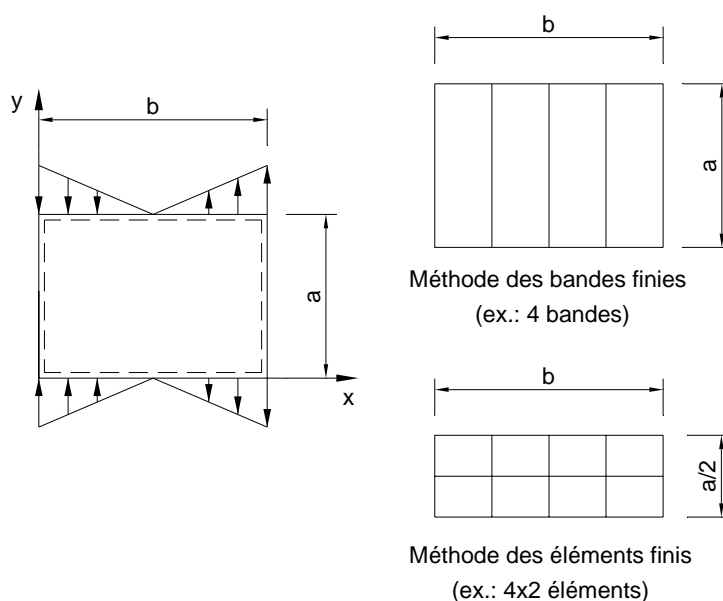


Figure 3.20. Plaque aux charges linéaires dans son plan.

On considère une plaque rectangulaire simplement supportée soumise aux charges linéairement réparties dans son plan. Le rapport longueur/largeur de la plaque est de 0.667. La totalité de la plaque est analysée par la méthode des bandes finies tandis que nous ne considérons qu'une moitié de la plaque pour la méthode des éléments finis. A cause de la variation des charges à travers la largeur de la plaque, la convergence (Figs. 3.21 et 3.22) est satisfaisante mais beaucoup plus lente que pour l'exemple avec les charges uniformes dans le sous-paragraphe 3.7.1.2.1 précédent et les résultats convergés analysés par les éléments finis sont un peu plus élevés que la solution analytique qui peut être prise de la référence [T3-1961]:

$$\sigma = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad \text{avec} \quad k = 23.9 \quad (3.149)$$

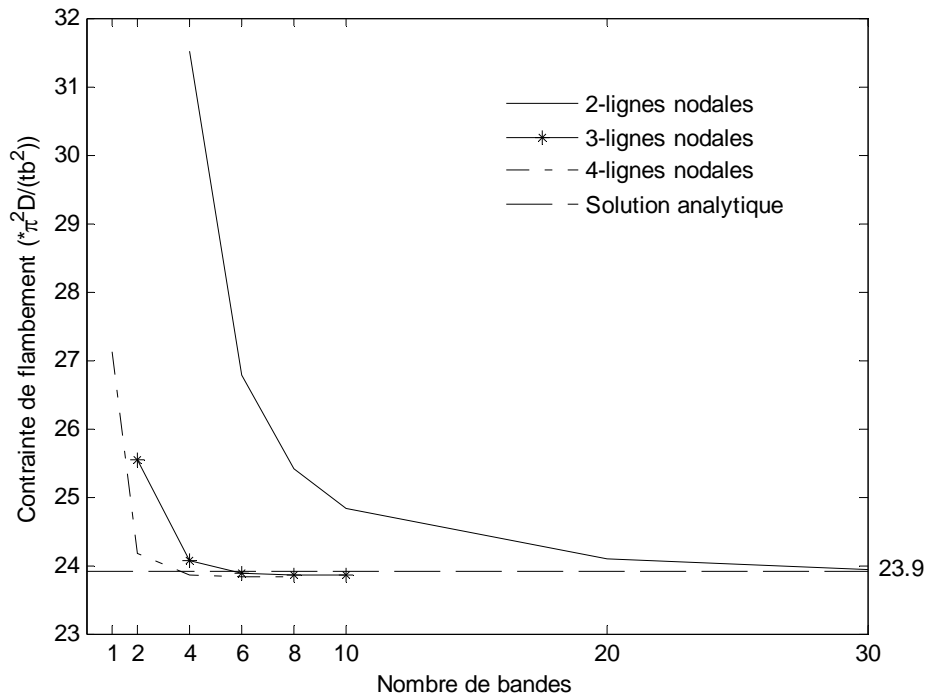


Figure 3.21. Etude de convergence pour la méthode des bandes finies ( $a/t=100$ ).

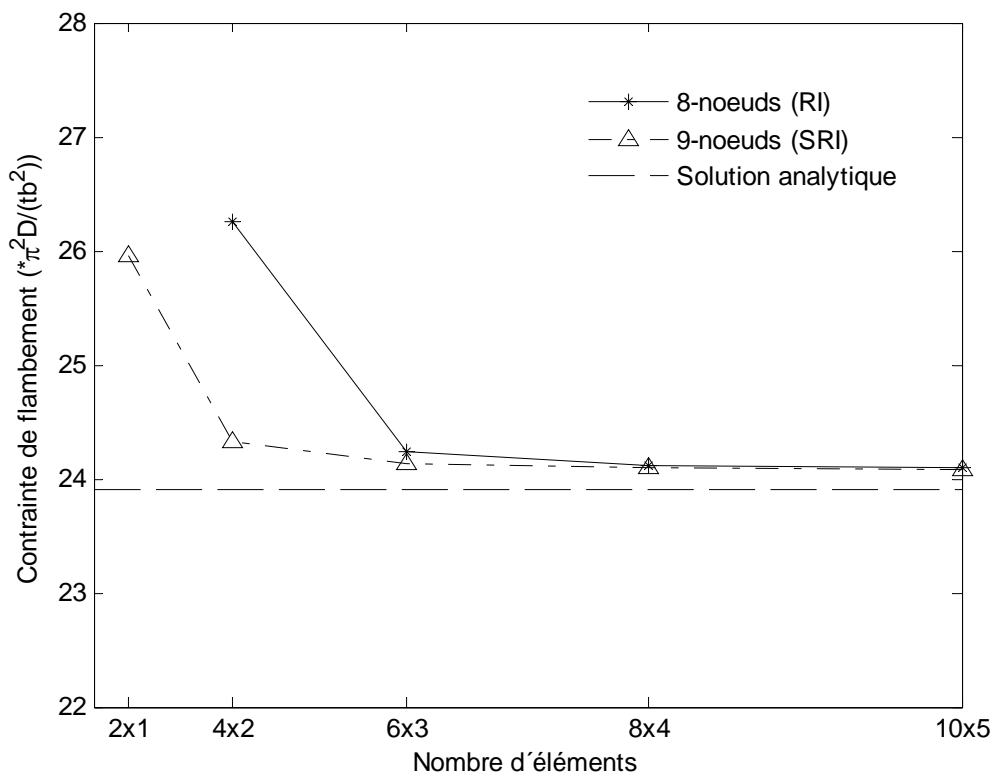


Figure 3.22. Etude de convergence pour la méthode des éléments finis ( $a/t=100$ ).

### 3.6.2. Structures à parois minces

#### 3.6.2.1. Comportement linéaire des structures à parois minces

##### 3.6.2.1.1. Poutre de section en I soumise à des charges latérales uniformément réparties

$a=2000$  mm  
 $t$  est l'épaisseur des semelles et de l'âme,  
 $E=2.05e+05$  N/mm<sup>2</sup>  
 $\nu=0.3$   
 $q=5.0$  N/mm.

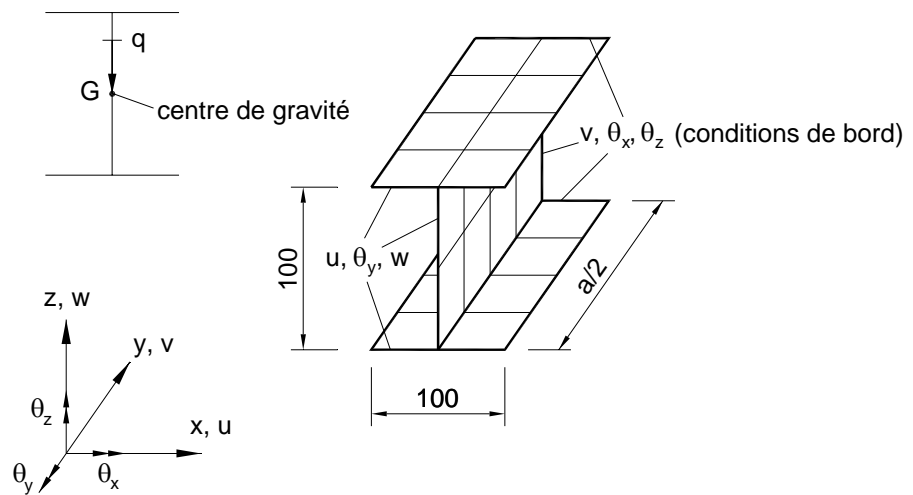


Figure 3.23. Poutre de section en I soumise aux charges latérales réparties.

Nous analysons une poutre de section en I simplement supportée à ses deux extrémités soumise à des charges latérales uniformément réparties le long de la poutre. Grâce à la symétrie, on calcule sur une moitié de la poutre dans laquelle les conditions de bord à l'extrémité et au centre sont indiquées sur la figure 3.23. Auparavant, nous n'avons analysé que les plaques planes isolées où la rotation dans le plan  $\theta_z$  n'est pas nécessaire. Mais, pour les structures à parois minces spatiales, nous devons utiliser la déformation de cisaillement fictive proposée (Eq. 3.20) pour introduire la rotation  $\theta_z$  afin d'éviter la singularité de la matrice de rigidité globale de la structure. Nous examinons l'influence de cette déformation fictive (à travers le coefficient  $\alpha$  dans l'équation (3.20)) sur le comportement de la poutre (Fig. 3.23). Nous prenons l'épaisseur des parois égale à 1mm (tableau 3.6). La technique de la rigidité fictive de ZIENKIEWICZ [Z3-2000] que nous avons présentée d'une autre manière (Eqs. 3.18 et 3.19) au sous-paragraphe 3.4 est aussi examinée pour la comparaison. Les rigidités fictives correspondant à la rotation  $\theta_z$  de cette technique pour les éléments rectangulaires de 8-nœuds et 9-nœuds peuvent être trouvées dans l'annexe. La poutre est modélisée par le maillage de 6x5 éléments de 8-nœuds (6 éléments sur la section et 5 éléments pour le sens longitudinal).

Tableau 3.6: Influence du coefficient  $\alpha$  sur le comportement de la poutre avec  $t=1$ .

8-nœuds (RI)	Théorie des plaques déformables en cisaillement				Théorie classique des poutres	
	Technique de ZIENKIEWICZ	Présent travail				
$\alpha$	$W_{max}$	$W_{max}$	$\sigma_{ymax}$	$\tau_{xy_{max}}$	$W_{max}$	$\sigma_{ymax}$
1.0	1.0377	1.0377	214.22	50.88	1.0	215.19
$10^{-1}$	1.0377	1.0377	214.22	50.88		
$10^{-3}$	1.0377	1.0377	214.22	50.88		
$10^{-5}$	1.0377	1.0377	214.22	50.88		
Multiplicateur	$(5/384)qa^4/(EI)$		-	-	$(5/384)qa^4/(EI)$	-

Nous trouvons qu'un changement très large du coefficient  $\alpha$  n'influence pas la flèche et les contraintes principales de la poutre. Nous constatons également que la technique de ZIENKIEWICZ donne les mêmes flèches que notre solution. Les contraintes dans le tableau 3.6 sont prises à la mi-épaisseur des parois et aux points de GAUSS; c'est pourquoi les contraintes numériques sont un peu différentes de la contrainte analytique.

La relation entre l'épaisseur et la flèche de la poutre est donnée dans le tableau 3.7. Plus l'épaisseur est mince, plus la flèche normalisée augmente puisque la section de la poutre est plus déformée. Lorsque l'épaisseur est plus grande, l'indéformabilité de la section est plus respectée et nos résultats se rapprochent de la solution analytique de la théorie des poutres. Cependant, il reste évidemment les effets du cisaillement et la flèche numérique est très légèrement supérieure à la flèche analytique. Ici, la poutre est toujours divisée en 6x5 éléments.

Tableau 3.7: Flèche d'une poutre simplement supportée soumise aux charges uniformément réparties le long de la poutre.

t	Théorie des plaques déformables en cisaillement			Solution analytique
	Méthode des éléments finis			
	8-nœuds (RI)	8-nœuds (SRI)	9-nœuds (SRI)	-
	$W_{max}$			
1	1.0377	1.0373	1.0374	1.0
2	1.0333	1.0330	1.0330	
3	1.0291	1.0288	1.0288	
4	1.0249	1.0246	1.0246	
5	1.0208	1.0205	1.0205	
10	1.0018	1.0014	1.0014	
Multiplicateur	$(5/384)qa^4/(EI)$			

### 3.6.2.1.2. Coque SCORDELIS-LO

Auparavant, nous n'avons étudié que la performance des éléments finis plans. Dans cet exemple, nous examinons les éléments finis développés sur la base de la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE. Une coque structurale, dite SCORDELIS-LO, est considérée (Fig. 3.24). La coque est montée sur deux diaphragmes rigides et chargée par son poids propre. Les diaphragmes empêchent les translations dans leurs plans mais libèrent les rotations et la translation perpendiculaire à ces plans. La flèche du point A au milieu d'un bord libre est calculée.

$R=25$   
 $L=50$   
 $t=0.25$   
 $\theta=40^\circ$   
 $E=4.32 \times 10^8$   
 $\nu=0.0$   
 $g=90.$

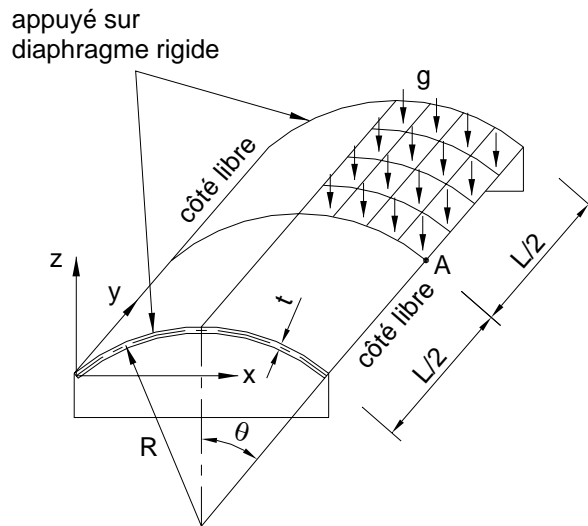


Figure 3.24. Coque SCORDELIS-LO.

L'élément fini à 9-nœuds avec SRI basé sur la théorie des coques surbaissées n'est pas utilisé en raison du verrouillage de membrane. Le verrouillage de membrane peut être éliminé si l'on applique la technique d'intégration réduite totale (RI) pour cet élément. Malheureusement, RI avec 2x2 points de GAUSS appliqué aux éléments de 9-nœuds fait apparaître des mécanismes qui causent la singularité de la matrice de rigidité de la structure.

L'étude de convergence pour les éléments finis de 8-nœuds (RI) et 9-nœuds (SRI) qui se basent sur la théorie des plaques et l'élément fini de 8-nœuds (RI) qui se base sur la théorie des coques surbaissées est donnée à la figure 3.25. L'élément de coque de 8-nœuds converge le plus rapidement même si le maillage est grossier. La flèche de comparaison peut être obtenue dans le livre de COOK [C14-1995]  $w_A=0.3024$ . La flèche du point A quand le maillage est 6x6 et 8x8 est donnée dans le tableau 3.8.

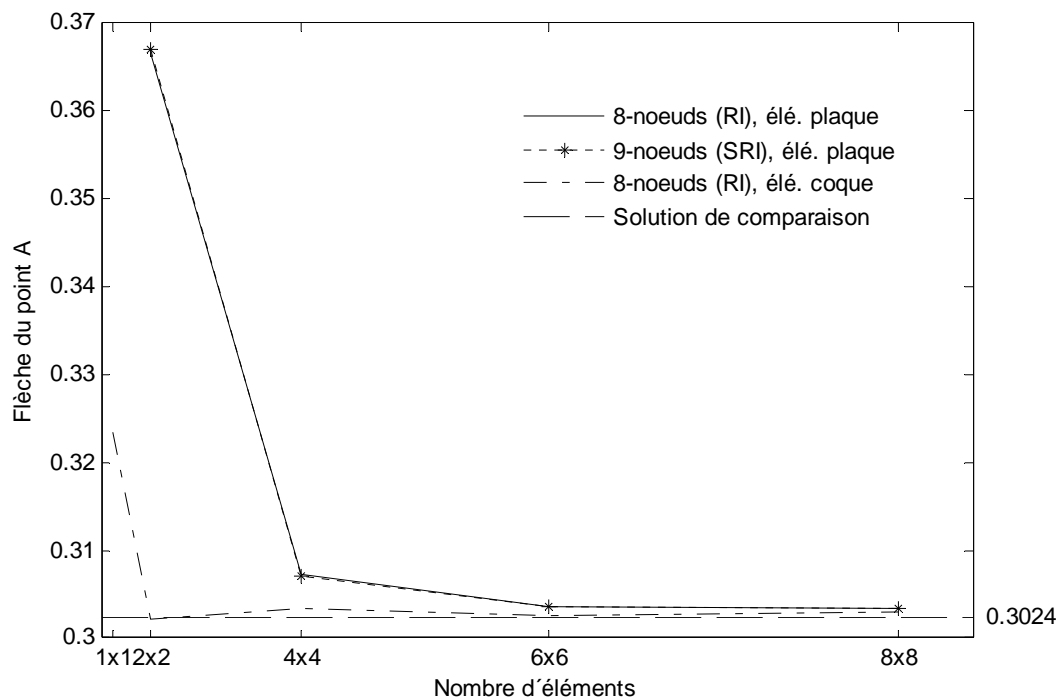


Figure 3.25. Etude de convergence pour la coque SCORDELIS-LO.

Tableau 3.8. Flèche du point A au milieu du bord libre.

Maillage	Théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER		Théorie des coques de MARGUERRE	Flèche de comparaison
	8-nœuds (RI)	9-nœuds (SRI)	8-nœuds (RI)	-
6x6	0.3035	0.3035	0.3026	0.3024
8x8	0.3033	0.3033	0.3029	

### 3.6.2.1.3. Cylindre avec diaphragmes rigides soumis à des forces concentrées

$R=300$   
 $L=600$   
 $t=3.0$   
 $E=3.0 \times 10^6$   
 $\nu=0.3$   
 $P=1.0$

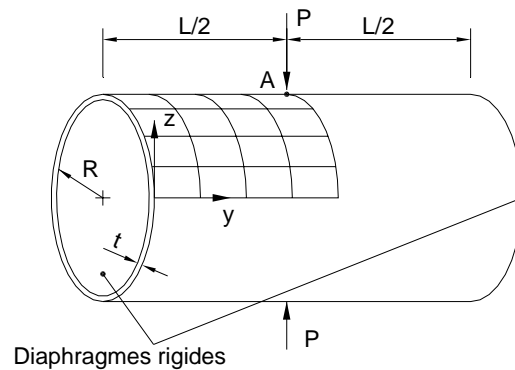


Figure 3.26. Cylindre avec diaphragmes rigides soumis à des forces concentrées.

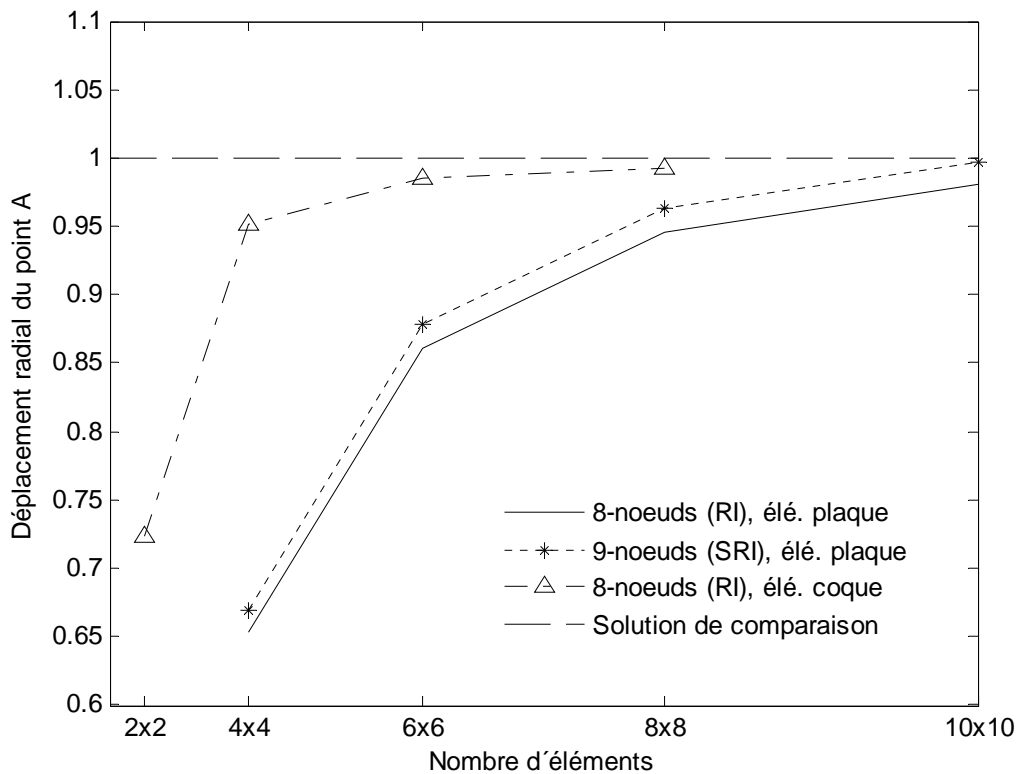


Figure 3.27. Etude de convergence pour le cylindre.



Les bouts du cylindre sont des diaphragmes d'appui ( $u=v=\theta_z=0$ ). Les forces concentrées sont indiquées sur la figure 3.26. Grâce à la symétrie, seul un huitième du cylindre est analysé avec maillages uniformes. La solution de référence du déplacement radial du point A (Fig. 3.26) est donnée par BELYTCHKO *et al.* [B8-1985] et COOK [C14-1995]. Le déplacement radial du point A est normalisé par la solution de référence  $w_A=0.18248 \times 10^{-4}$ . La convergence est satisfaisante pour les deux types éléments de plaque et très bonne pour l'élément de coque surbaissée. Ainsi, à travers ces deux exemples, l'élément de coque surbaissée a montré une performance supérieure par rapport aux deux types éléments de plaque dans l'analyse des coques vraies qui ont les surfaces courbes.

### 3.6.2.2. Flambement linéarisé des structures à parois minces

#### 3.6.2.2.1. Profil court de section en C avec raidisseur tombé, soumis à des contraintes de compression uniformes

$t$  est l'épaisseur des semelles et de l'âme,  
 $E=2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$   
 $\nu=0.3$ .

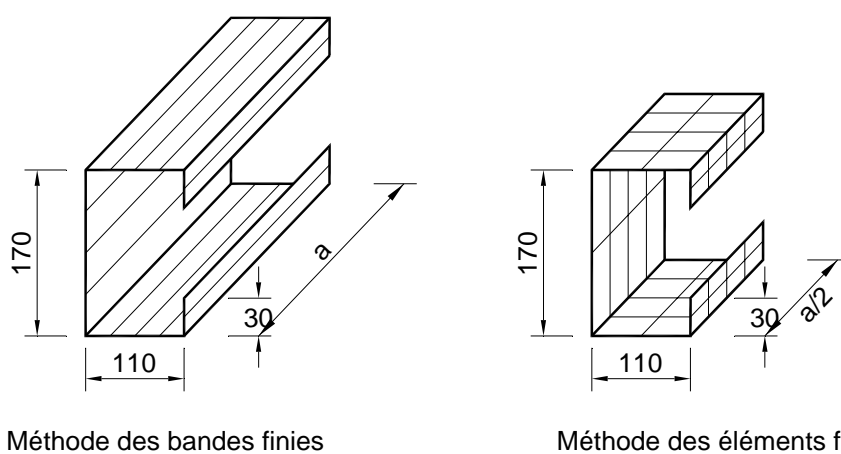


Figure 3.28. Poteau de section en C soumise à compression uniforme.

Nous calculons la contrainte critique d'un profil de section en C avec raidisseurs tombés, simplement supporté à ses deux extrémités, soumis à compression uniforme. Grâce à la symétrie, on calcule sur une moitié du profil pour la méthode des éléments finis (Fig. 3.28). Le tableau 3.9 montre la prédiction précise de la contrainte de voilement d'un profil à parois minces par la théorie des plaques déformables en cisaillement par rapport au programme CUFSM v.2.6 [S3-2003] qui utilise la méthode des bandes finies basées sur la théorie classique des plaques. La bande finie, dans CUFSM, n'a que 4 degrés de liberté par ligne nodale et donc est plus économique. Toutefois, CUFSM ne tient pas compte de l'influence du cisaillement à travers l'épaisseur des parois. Nos résultats divergent de ceux calculés par CUFSM lorsque l'épaisseur des parois augmente. Parmi les méthodes, la modélisation par les éléments finis dans le calcul de flambement est beaucoup plus compliquée et chère avec 16 éléments pour la section et 4 éléments pour le sens longitudinal. Dans les exemples qui suivent, nous n'utilisons que notre programme FLAMBANDE, qui est rédigé en langage MATLAB, en employant les bandes finies déformables en cisaillement.

Tableau 3.9: Contrainte critique de voilement d'un profil de section en C simplement supporté soumise à compression uniforme avec a=100mm.

Section	Théorie des plaques déformables en cisaillement				Théorie classique des plaques
h=170, b=110, d=30, a=100	Méthode des bandes finies		Méthode des éléments finis		Méthode des bandes finies (CUFSM2.6)
	3-lignes nodales (SRI)	4-lignes nodales (SRI)	8-nœuds (RI)	9-nœuds (SRI)	2-lignes nodales
t	$\sigma_{cr}$				
1	37.7363	37.5495	38.2045	37.7388	37.9857
2	150.5035	149.7896	151.0598	150.5199	151.8482
3	337.0323	335.5285	337.6292	337.0715	341.3011
4	595.2998	592.8461	595.9227	595.3633	605.8625
5	922.6098	919.1503	923.2405	922.6944	944.8451
Dimension du problème	20 bandes, 246 d.d.l	10 bandes, 186 d.d.l	16x4 éléments, 1398 d.d.l	16x4 éléments, 1782 d.d.l	20 bandes, 84 d.d.l

### 3.6.2.2.3. Barre de section en C en compression uniforme et en flexion uniforme

Nous calculons la contrainte critique d'une barre à parois minces de section en C (Fig. 3.28), simplement supportée à ses deux extrémités, respectivement soumise à compression axiale et à flexion uniforme. L'épaisseur des parois est égale à 1 mm. Nous changeons la longueur de la barre et nous obtenons, respectivement, les contraintes critiques locale, distorsionnelle et globale en considérant que le poteau flambe en demi-onde. Le cas de la compression uniforme est calculé par 20 bandes finies de 3-lignes nodales, pendant que 10 bandes finies de 4-lignes nodales sont utilisées pour le cas de flexion uniforme. CUFSM [S3-2003] modélise la barre par 20 bandes dans les deux cas de charge. Nous pouvons voir que c'est une lourde tâche pour la méthode des éléments finis alors que la méthode des bandes finies montre ici son efficacité.

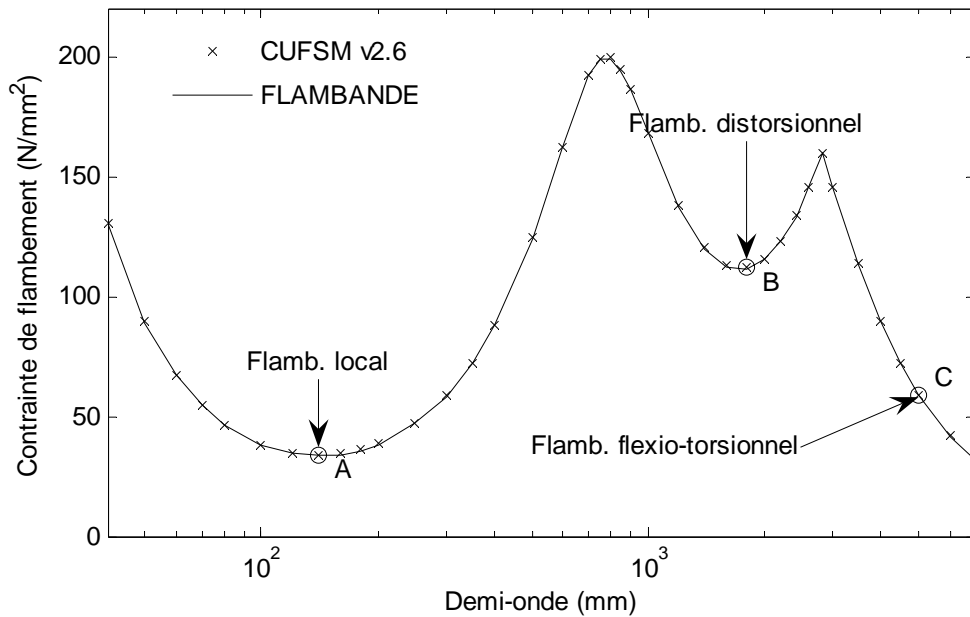


Figure 3.29. Courbe contrainte de flambement – demi-onde d’une section en C en compression uniforme.

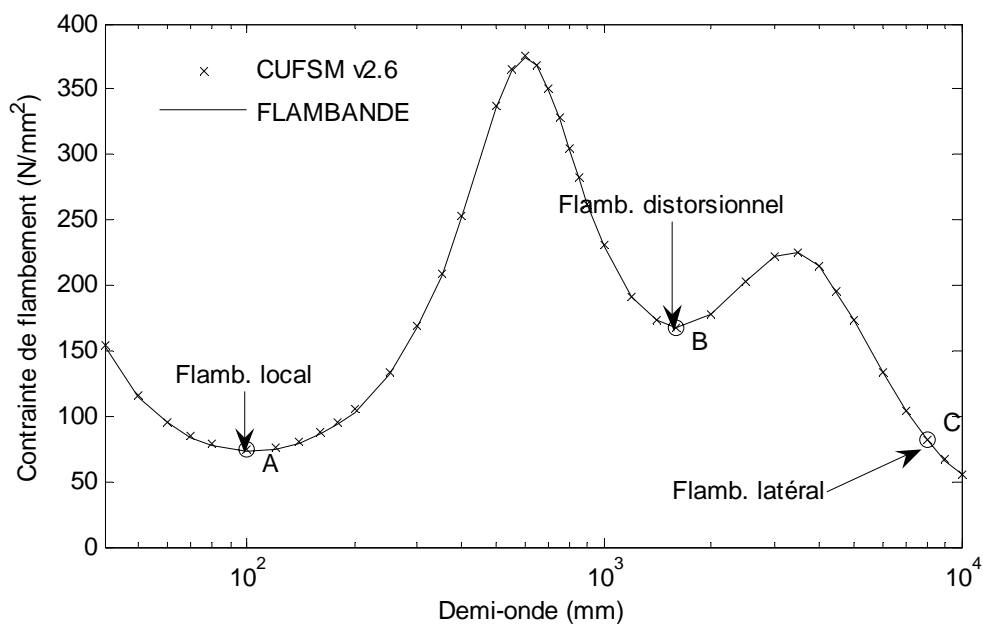


Figure 3.30. Courbe contrainte de flambement – demi-onde d’une section en C en flexion uniforme.

Nous voyons que lorsque l’épaisseur est petite ( $t=1\text{mm}$ ), le programme FLAMBANDE donne des résultats qui sont en accord excellent avec ceux du programme CUFSM v2.6. Nous pouvons détecter les minima locaux sur la courbe contrainte de flambement – demi-onde; ces minima correspondent aux contraintes minimales modales qui sont utilisées dans la conception des barres à parois minces. BUI et RONDAL [B13-2008] ont obtenu des résultats du flambement de la section en C soumise en compression uniforme et en flexion uniforme qui sont identiques à ceux de cet exemple. Ils ont utilisé la définition de la déformation de cisaillement fictive dans l’équation (3.18). La matrice de rigidité concernant les rotations nodales dans le plan est réécrite dans l’annexe de la thèse.

Les formes modales flambées de la section peuvent être vues sur les figures 1.25 et 1.26 du chapitre 1. Le post-processeur de FLAMBANDE permet également de dessiner les formes modales tridimensionnelles de toute la barre. La figure 3.31 est un exemple.

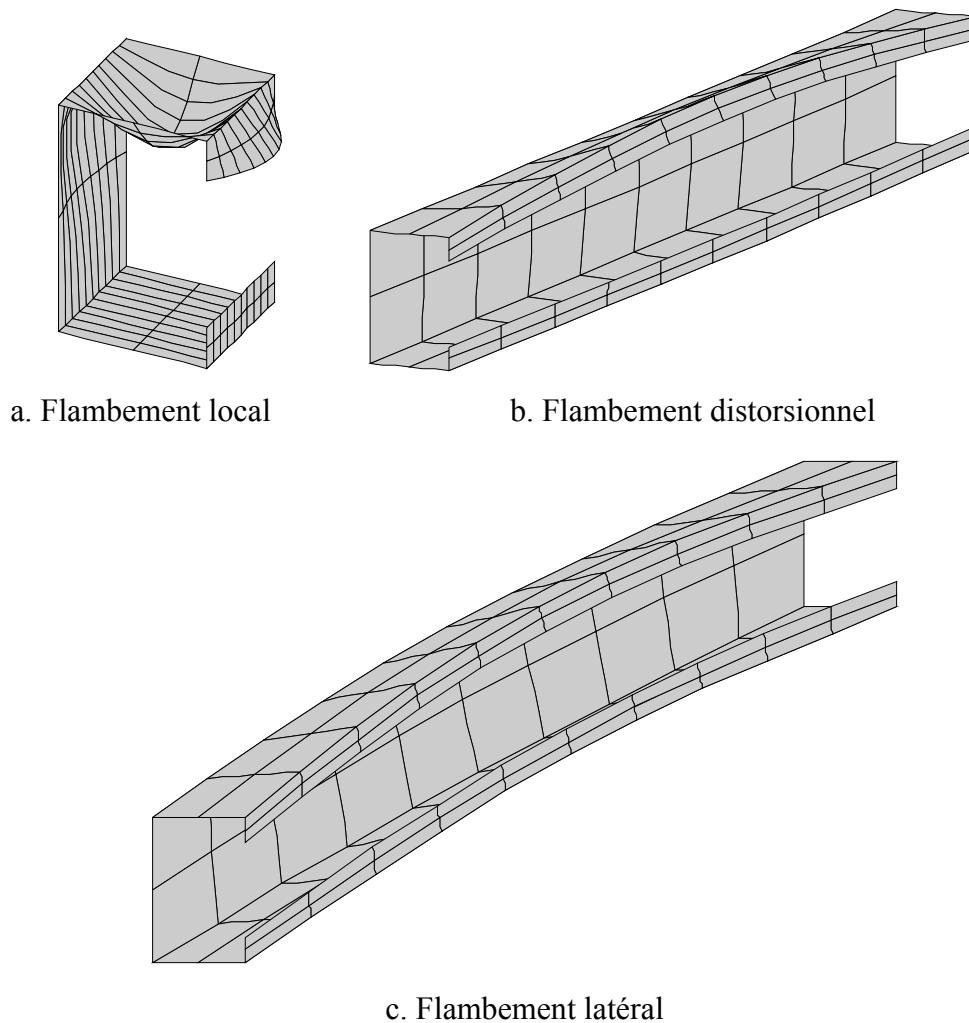


Figure 3.31. Modes de flambement d'une section en C en flexion uniforme.

#### 3.6.2.2.4. Panne de section en C avec raidisseurs intermédiaires et en flexion uniforme

$t=2.0$  est l'épaisseur des parois,  
 $E=2.05e+05 \text{ N/mm}^2$   
 $\nu=0.3$ ,  
 $k=0.5 \text{ (N/mm)/mm}$  est la raideur  
 du ressort sur une unité de  
 longueur le long de la barre.

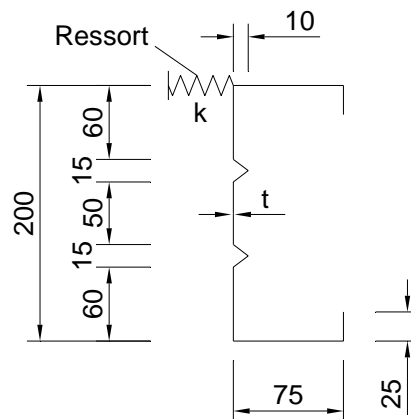


Figure 3.32. Panne de section en C avec raidisseurs intermédiaires.

Les pannes utilisées ici sont des profils de section en C avec des raidisseurs intermédiaires sur les âmes. La semelle supérieure d'une panne est reliée à la tôle de recouvrement. La tôle a pour effets de limiter les déplacements de la semelle supérieure et donc contribue à augmenter la capacité de stabilité de la panne. On peut remplacer ces effets par des ressorts de translation et de rotation qui sont uniformément répartis le long de la panne. Ici, nous donnons un exemple avec ressorts de translation. Nous constatons que par la présence des raidisseurs, le rapport  $b_p/t$  de l'âme est réduit et que la demi-onde n'est pas grande, mais la déformation de l'âme est considérable (Fig. 3.34). Les résultats de FLAMBANDE avec 22 bandes de 4-lignes nodales, à cause de la déformabilité en cisaillement, sont légèrement inférieurs à ceux de CUFSM avec 44 bandes de 2-lignes nodales (Fig. 3.33). Grâce aux ressorts, le flambement latéral n'est pas apparu, il reste seulement les flambements local et distorsionnel. Dans ce cas, la valeur de la contrainte critique distorsionnelle est plus petite que celle de la contrainte critique locale. Pendant les dernières années, les investigateurs ont porté beaucoup d'attention au flambement distorsionnel [L3-1987, H6-1987, S6-2002]. La conception des barres à parois minces en tenant compte de ce phénomène d'instabilité est maintenant introduite dans les codes de calcul de nombreux pays.

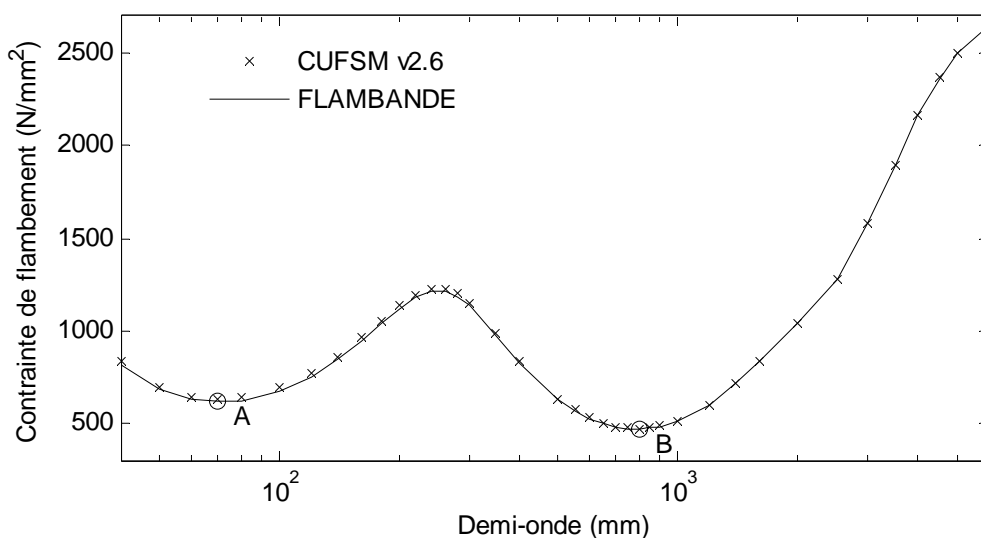


Figure 3.33. Courbe contrainte de flambement – demi-onde d'une section en C avec raidisseurs intermédiaires et ressort, en flexion uniforme.

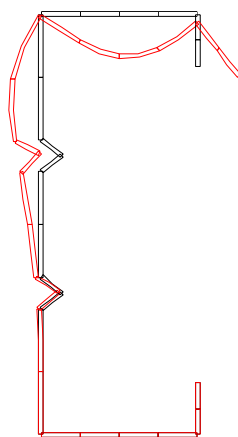


Figure 3.34. Forme flambée de la section en C lorsque la demi-onde est égale à 200mm.

### 3.6.2.2.5. Tube de section circulaire en compression axiale uniforme

$R=303 \text{ mm}$   
 $t= 1 \text{ mm}$   
 $E=210000 \text{ N/mm}^2$   
 $\nu=0.3$

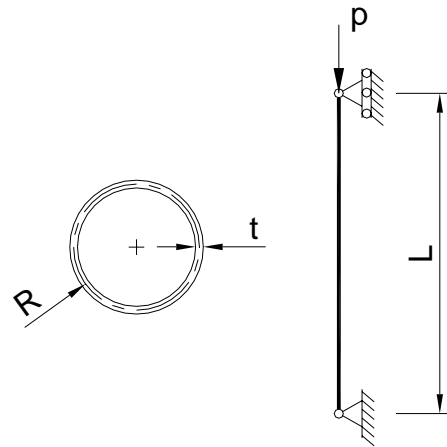


Figure 3.35. Tube de section creuse circulaire en compression axiale uniforme.

Il est évident que la stabilité des cylindres ronds de section creuse, est très difficile à maîtriser. La méthode des bandes finies donne un outil très efficace et très bon-marché pour calculer la contrainte critique. Une tube de section creuse circulaire avec un rayon moyen égal à 303 mm et l'épaisseur égale à 1 mm sous compression axiale uniforme est considéré. La solution analytique basée sur la théorie classique des coques est bien connue [T3-1961]. La contrainte critique est donnée par la formule:

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{R} \quad (3.150)$$

Cette contrainte critique correspond à la longueur critique donnée par:

$$L_{cr} = \pi \sqrt[4]{\frac{a^2 t^2}{12(1-\nu^2)}} \quad (3.151)$$

En substituant les données du problème dans les formules précédentes, nous obtenons les valeurs  $\sigma_{cr}=419.5 \text{ N/mm}^2$ ,  $L_{cr}=30.08 \text{ mm}$ . Maintenant, nous examinons ce problème avec nos bandes finies de plaque et de coque surbaissée. L'étude de convergence est présentée sur la figure 3.36 en fixant  $L=L_{cr}$ . Les bandes de coque surbaissée demandent moins de bandes pour une convergence beaucoup plus rapide vers la solution analytique. En changeant la longueur du tube, la courbe contrainte de flambement – demi-onde est obtenue sur la figure 3.37 et elle donne une vue plus globale de la stabilité du tube.

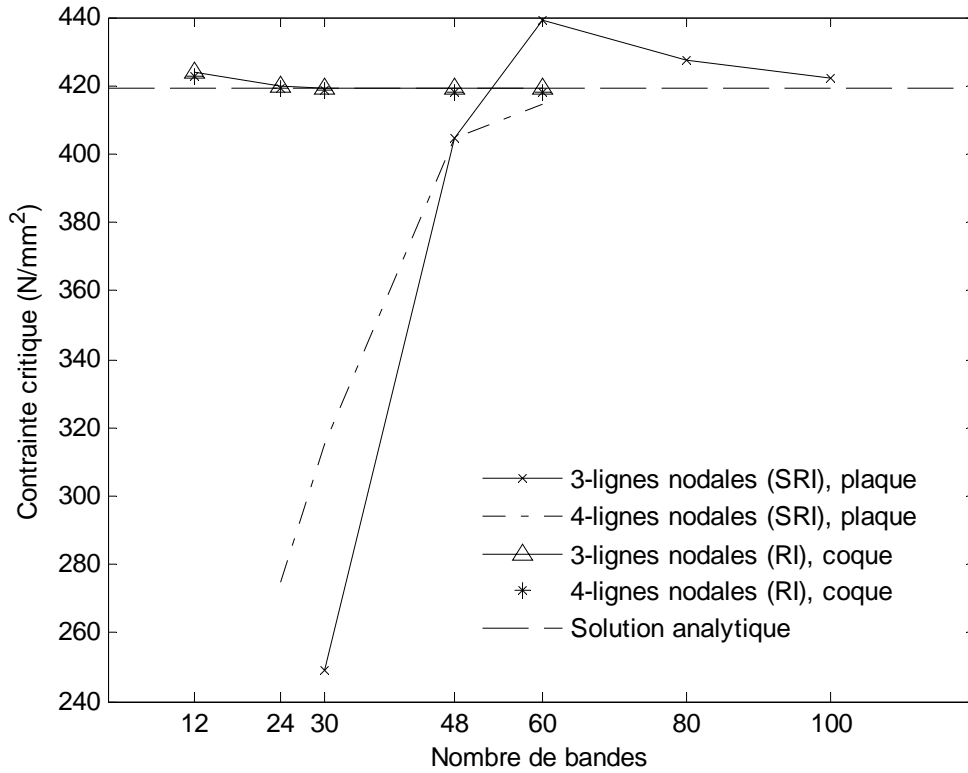


Figure 3.36. Etude de convergence.

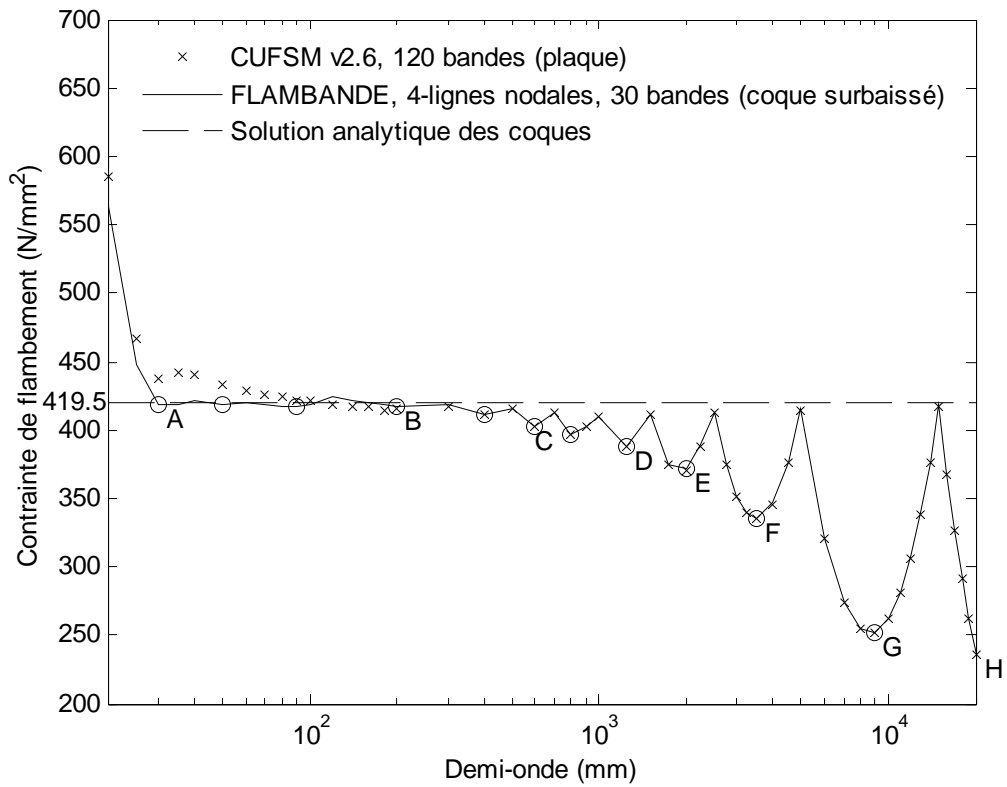


Figure 3.37. Courbe contrainte de flambement – demi-onde d'un tube en compression axiale uniforme.

Ce n'est pas comme le cas des sections en C. Ici, il se produit plusieurs minima locaux y compris la valeur classique (point A). Particulièrement, lorsque les demi-ondes sont petites, les contraintes de flambement sont presque constantes et égales à la contrainte critique classique, mais lorsque les demi-ondes sont plus grandes les valeurs minimales diminuent et celles-ci ne sont pas faciles à calculer analytiquement. CUFSM v2.6 ne peut pas prédire exactement la contrainte critique classique malgré la modélisation par beaucoup de bandes finies (120 bandes). Il donne les résultats supérieurs à notre programme FLAMBANDE qui utilise 30 bandes finies de 4-lignes nodales lorsque les demi-ondes sont petites. Pour les plus grandes valeurs des demi-ondes, CUFSM v2.6 coïncide avec FLAMBANDE. Si les bandes finies de 3-lignes nodales dans FLAMBANDE sont utilisées, il faut 60 bandes pour obtenir une courbe contrainte de flambement – demi-onde correcte. Afin de mieux comprendre la stabilité du tube, nous indiquons sur la figure 3.38 les formes modales de la section correspondantes aux lettres majuscules attachées sur la courbe de la figure 3.37.

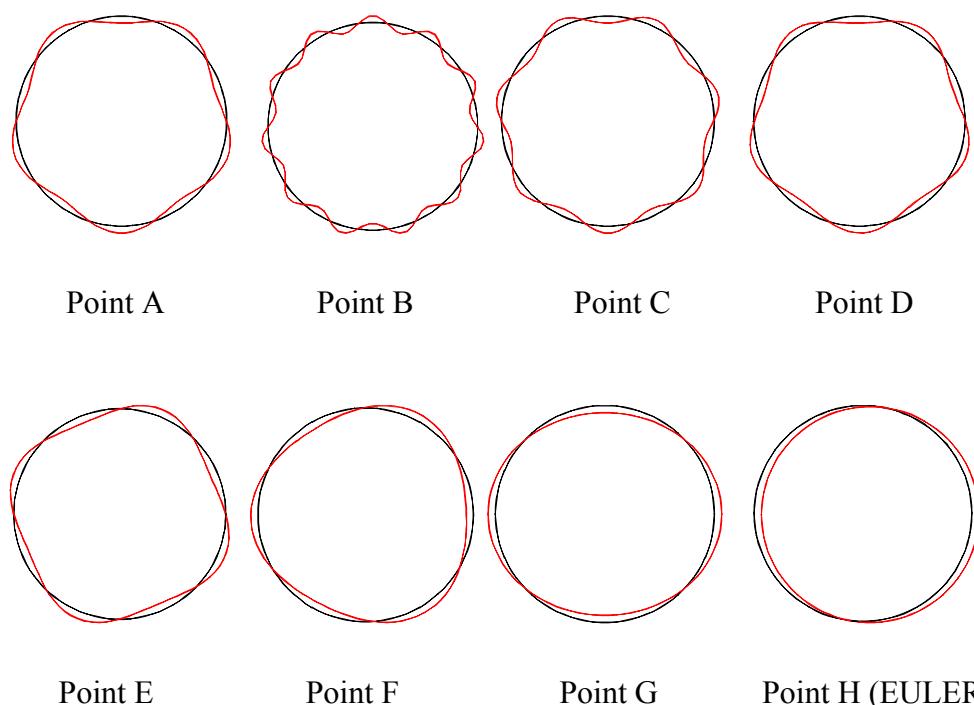


Figure 3.38. Formes modales de flambement d'une tube de section creuse circulaire.

### 3.7. Conclusions

Nous avons ajouté la déformation fictive de cisaillement et donc la rotation dans le plan à la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER et la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE. Ainsi, nous pouvons tenir compte complètement de six variables nodales d'un point quelconque. L'accord entre les résultats pour plusieurs exemples, avec ceux des théories classiques lorsque l'épaisseur est petite, montre la qualité de la nouvelle proposition de déformation ajoutée dans les théories des plaques et des coques surbaissées déformables en cisaillement. Nous avons appliqué avec succès cette proposition en utilisant la méthode des bandes finies et des éléments finis dans plusieurs cas. L'efficacité des théories avec déformation de cisaillement est montrée quand le rapport entre la largeur de la plaque et l'épaisseur diminue. Nous trouvons que:



+ toutes les bandes finies de plaque et de coque surbaissée sont convergentes et marchent bien dans l'analyse de flambement des structures prismatiques à parois minces. Parmi les bandes finies de plaque, la bande finie de 2-lignes nodales demande beaucoup plus de lignes nodales pour la convergence. Dans l'analyse de flambement des tubes creux circulaires, les bandes finies de coque surbaissée avec RI travaillent mieux que les bandes finies de plaque avec SRI.

+ les éléments à 8-nœuds de plaque avec SRI et RI ont donné les mêmes résultats, mais l'élément avec RI est meilleur marché que celui avec SRI. Avec un même maillage, l'élément de 9-nœuds de plaque marche un peu mieux que l'élément de 8-nœuds de plaque parce que le premier demande plus de nœuds afin de modéliser la structure. Parmi les éléments finis utilisés dans ce chapitre, l'élément de 8-nœuds de coque surbaissée avec RI est le meilleur lorsqu'on analyse des structures qui ont des surfaces curvilignes. Cet élément converge pour un maillage plus grossier que les autres.

Ceci justifie la performance de notre proposition pour la méthode des éléments finis de plaque et de coque surbaissée. Cette proposition sera utilisée pour l'analyse non-linéaire géométrique et matérielle des structures à parois minces dans les chapitres qui suivent.

## **CHAPITRE 4. ANALYSE NON-LINEAIRE GEOMETRIQUE ELASTIQUE DES STRUCTURES A PAROIS MINCES**

### **4.1. Introduction**

Les modèles d'éléments finis de plaque et de coque surbaissée déformable en cisaillement avec la rotation dans le plan ont été appliqués avec succès à l'analyse linéaire des structures à parois minces. On peut déterminer la contrainte de flambement élastique en considérant l'influence du cisaillement à travers l'épaisseur des parois. Les résultats s'accordent bien avec la théorie classique des plaques lorsque le rapport largeur-épaisseur est grand. Malgré que l'analyse linéarisée du flambement soit suffisante dans la plupart des cas pratiques et utile pour la conception des barres à parois minces, quelques structures qui sont très sensibles à l'imperfection, ne sont pas proprement traitées par celle-ci. Dans ces cas, il faut recourir à l'analyse non-linéaire. La modélisation des structures à parois minces par éléments de plaque et de coque permet de tenir compte de la distorsion de la section transversale et de l'interaction entre les modes de flambement.

Pour le calcul numérique, les méthodes des bandes finies semi-analytiques et splines ont été utilisées dans l'analyse non-linéaire des structures à parois minces [G8-1984, K4-1991]. Cependant, la méthode des bandes finies semi-analytiques nécessite une largeur constante le long de la bande et cela n'est pas très bon pour l'analyse non-linéaire. En plus, la méthode des bandes finies semi-analytiques a rencontré des obstacles majeurs dans l'analyse non-linéaire que nous avons mentionnés au chapitre 2. Les bandes finies ne conviennent que pour des appuis simples et elles ne peuvent pas tenir compte de l'interaction entre les modes de flambement des barres à parois minces. Ainsi, nous ne développerons plus les bandes finies semi-analytiques en non-linéaire.

La méthode des éléments finis est depuis longtemps connue comme une méthode puissante pour l'analyse structurelle. De nombreux types de coques sont utilisés pour l'analyse non-linéaire des structures composées de plaques; ce qui permet la simulation de la distorsion de la section transversale et des phénomènes de flambement de la structure. Les éléments de coque à facettes sont efficacement utilisés pour la modélisation des parties de la structure à parois minces grâce à leur simplicité dans la formulation et la description géométrique. Toutefois, dans le domaine non-linéaire, les parois initiales planes de la structure peuvent être légèrement courbées. Il est plus adéquat de modéliser la structure par des éléments de coque surbaissée. Ce chapitre a pour le but d'appliquer les nouveaux modèles d'éléments finis de plaque et de coque surbaissée avec 6 degrés de liberté à l'analyse non-linéaire géométrique élastique.

### **4.2. Formulation**

Comme indiqué au paragraphe 3.5.3.6, la différence entre les déformations totales de GREEN dans la théorie des plaques et la théorie des coques surbaissées ne concerne que le produit entre les pentes de la surface moyenne de la coque et les premières dérivées du déplacement  $w$ . Ce produit est une partie des composantes de déformation linéaires dans la théorie des coques surbaissées. Pour simplifier la présentation et éviter la répétition, nous n'utilisons que la théorie des plaques dans le

domaine non-linéaire et pour la théorie des coques surbaissées, on n'y ajoute les termes nécessaires. Nous utilisons alternativement les interprétations indicielles et matricielles pour les expressions des formulations.

#### 4.2.1. Hypothèses de base et axes de référence de l'élément

Les hypothèses suivantes sont appliquées pour l'élément de plaque ou de coque surbaissée utilisé dans cette recherche:

- (i) la supposition de MINDLIN-REISSNER est valide et complétée par la rotation dans le plan de la plaque pour la théorie des plaques et dans le plan de référence pour la théorie des coques surbaissées;
- (ii) le matériau est élastique, homogène et isotrope;
- (iii) les déplacements peuvent être grands mais les déformations sont petites;
- (iv) le chargement est statique et conservatif.

La figure 4.1 montre des éléments ayant 8-nœuds et 9-nœuds. Le système de coordonnées de DESCARTES  $x_1, y_1, z_1$  est choisi et les axes  $x_1$  et  $y_1$  passent à travers la mi-surface; de plus, l'axe  $x_1$  passe toujours par les points 1 et 2 au cours du mouvement de l'élément. Chaque nœud contient 6 degrés de liberté ( $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ ) correspondant avec 6 efforts internes ( $N_x, N_y, N_z, M_x, M_y, M_z$ ).

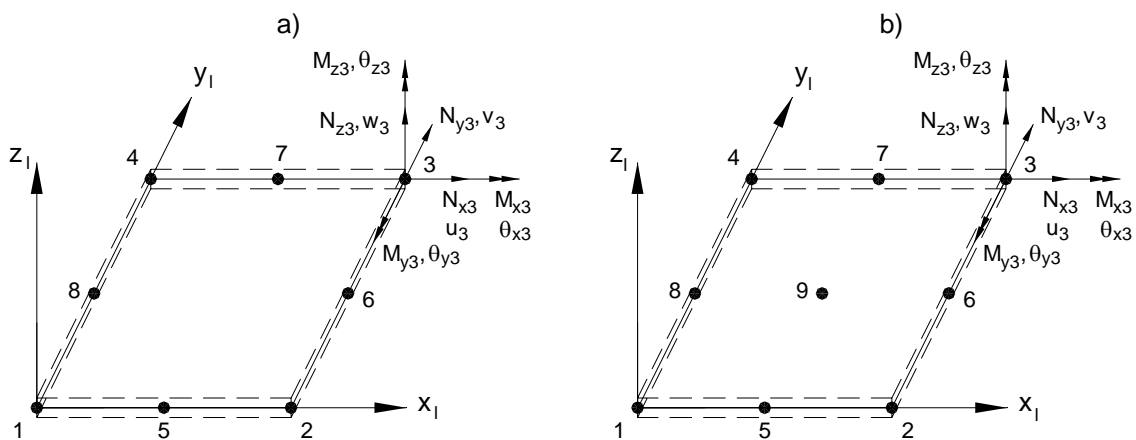


Figure 4.1. a) Élément de 8-nœuds; b) Élément de 9-nœuds.

#### 4.2.2. Principe incrémentiel de la description lagrangienne actualisée

##### 4.2.2.1. Principe incrémentiel

Le principe incrémentiel des déplacements virtuels dans la description lagrangienne actualisée a été présenté dans les références [F3-1978, B12-1980, D3-1989, C13-1994]. Nous faisons ici la présentation correspondant à la théorie des plaques:

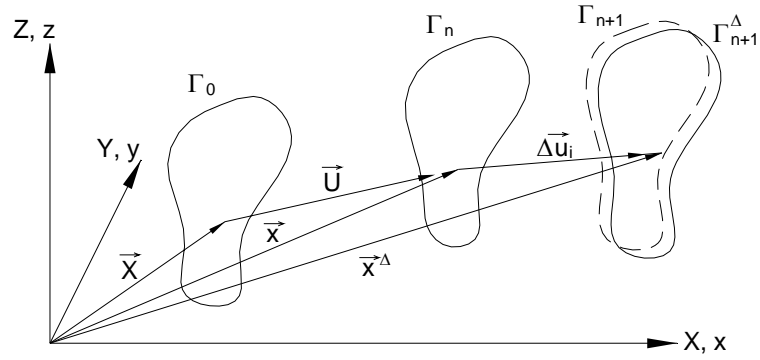


Figure 4.2. Description lagrangienne actualisée.

$\Gamma_0$ : configuration initiale;  $\Gamma_n$ : dernière configuration connue en équilibre;  $\Gamma_{n+1}^\Delta$ : nouvelle configuration en équilibre;  $\Gamma_{n+1}$ : configuration approchée de  $\Gamma_{n+1}^\Delta$ .

1) Travaux virtuels dans  $\Gamma_n$ : T.V.<sub>n</sub>

$$\int_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_v f_i \delta u_i dv \quad (4.1)$$

dans lequel les indices  $i, j$  sont des  $x, y, z$ ;  $f_i$  est la force volumique extérieure;  $\sigma_{ij}$  est la contrainte (vraie) de Cauchy dans  $\Gamma_n$ ;  $\delta \varepsilon_{ij}$  est la variation de la déformation infiniment petite calculée à partir du champ des déplacements cinématiquement admissibles  $\delta u_i$  mesurés à partir de  $\Gamma_n$ . On adopte les déplacements  $\Delta u_i$  que l'on recherche entre  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_{n+1}^\Delta$  comme champ des déplacements.

Par conséquent:

$$\int_v \sigma_{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij} dv = \int_v f_i \delta \Delta u_i dv \quad (4.2)$$

2) Travaux virtuels dans  $\Gamma_{n+1}^\Delta$ : T.V.<sub>(n+1)</sub>

$$\int_v s_{ij}^\Delta \delta \Delta \varepsilon_{ij}^\Delta dv = \int_v f_i^\Delta \delta \Delta u_i dv \quad (4.3)$$

Cette expression représente les travaux virtuels dans  $\Gamma_{n+1}^\Delta$  exprimés par rapport à  $\Gamma_n$  avec  $\Delta u_i$  comme champ des déplacements.

$v$ : volume de  $\Gamma_n$ ;  $s_{ij}^\Delta$ : contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF N°2,  $s_{ij}^\Delta = \sigma_{ij} + \Delta s_{ij}$ ;  $f_i^\Delta = f_i + \Delta f_i$ ;

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.4)$$

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} \right) = \Delta \varepsilon_{ij} + \Delta e_{ij}^* \quad (4.5)$$

$$\Delta u_i = x_i^\Delta - x_i \quad (4.6)$$

dans lequel  $e_{ij}$  est le tenseur de déformation de GREEN.

On doit noter que pour les plaques, on peut ignorer l'influence très petite des composantes non-linéaires  $\Delta e_{xz}^*$  et  $\Delta e_{yz}^*$  des déformations de cisaillement  $e_{xz} (= \frac{1}{2} \gamma_{xz})$  et  $e_{yz} (= \frac{1}{2} \gamma_{yz})$ .

En substituant les équations (4.4)-(4.6) dans l'équation (4.3), nous obtenons:

$$\int_{\nu} s_{ij}^{\Delta} \delta \Delta e_{ij}^{\Delta} dv = \int_{\nu} (\sigma_{ij} + \Delta s_{ij}) (\delta \Delta \varepsilon_{ij} + \delta \Delta e_{ij}^*) dv = \int_{\nu} (\sigma_{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \Delta e_{ij}^* + \Delta s_{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij} + \Delta s_{ij} \delta \Delta e_{ij}^*) dv \quad (4.7)$$

$$\int_{\nu} f_i^{\Delta} \delta \Delta u_i dv = \int_{\nu} (f_i + \Delta f_i) \delta \Delta u_i dv = \int_{\nu} (f_i \delta \Delta u_i + \Delta f_i \delta \Delta u_i) dv \quad (4.8)$$

3) Réaliser la soustraction: T.V.<sub>(n+1)</sub>-T.V.<sub>n</sub>

$$\begin{aligned} \int_{\nu} s_{ij}^{\Delta} \delta \Delta e_{ij}^{\Delta} dv - \int_{\nu} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv &= \int_{\nu} f_i^{\Delta} \delta \Delta u_i dv - \int_{\nu} f_i \delta u_i dv \\ \int_{\nu} (\Delta s_{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij} + \Delta s_{ij} \delta \Delta e_{ij}^* + \sigma_{ij} \delta \Delta e_{ij}^*) dv &= \int_{\nu} \Delta f_i \delta \Delta u_i dv \end{aligned}$$

A l'aide de l'équation (4.5), on obtient:

$$\int_{\nu} (\Delta s_{ij} \delta \Delta e_{ij} + \sigma_{ij} \delta \Delta e_{ij}^*) dv = \int_{\nu} \Delta f_i \delta \Delta u_i dv \quad (4.9)$$

Cette équation non-linéaire permet de trouver les accroissements  $\Delta u_i$  entre  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_{n+1}^{\Delta}$ .

4) Linéariser l'équation (4.9)

On fait l'approximation des accroissements 'Δ' par les incréments 'd':

$$\int_{\nu} (ds_{ij} \delta de_{ij} + \sigma_{ij} \delta de_{ij}^*) dv = \int_{\nu} df_i \delta du_i dv \quad (4.10)$$

En utilisant l'hypothèse des déformations petites, l'équation (4.10) peut être linéarisée en remplaçant 'de<sub>ij</sub>' par 'dε<sub>ij</sub>':

$$de_{ij} = d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial du_i}{\partial x_j} + \frac{\partial du_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.11)$$

La loi constitutive incrémentielle est prise comme:

$$ds_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (4.12)$$

En substituant les équations (4.11) et (4.12) dans l'équation (4.10), on obtient le principe incrémentiel de la description lagrangienne actualisée:

$$\int_{\nu} (D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \delta d\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta de_{ij}^*) dv = \int_{\nu} df_i \delta du_i dv \quad (4.13)$$

L'équation linéaire en du<sub>i</sub> (4.13) permet de trouver les incréments de déplacements du<sub>i</sub> entre  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_{n+1}$  ( $\Gamma_{n+1} \neq \Gamma_{n+1}^{\Delta}$ ).

L'équation (4.13) est réécrite sous forme matricielle:

$$\int_v \left( \{\delta d\varepsilon\}^T [D] \{d\varepsilon\} + \{\delta d\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} \right) dv = \int_v \{\delta du\}^T \{df\} dv \quad (4.14)$$

où  $[D]$  est la matrice de la loi constitutive incrémentielle.

#### 4.2.2.2. Matrice linéaire incrémentielle des déplacements

Pour le premier terme, dans le membre à gauche de l'équation (4.14), on pose:

$$\{d\varepsilon\} = [B] \{dp\} \quad (4.15a)$$

$$\{\delta d\varepsilon\} = [B] \{\delta dp\} \quad (4.15b)$$

où

$[B]$ : la matrice de déformation- déplacement;

$\{dp\}$ : le vecteur des déplacements nodaux incrémentiels.

$$\int_v \{\delta d\varepsilon\}^T [D] \{d\varepsilon\} dv = \{\delta dp\}^T \left( \int_v [B]^T [D] [B] dv \right) \{dp\} = \{\delta dp\}^T [K_L] \{dp\} \quad (4.16)$$

$$[K_L] = \int_v [B]^T [D] [B] dv \quad (4.17)$$

$[K_L]$ : la matrice linéaire incrémentielle des déplacements.

#### 4.2.2.3. Matrice géométrique

Pour le second terme, dans le membre à gauche de l'équation (4.14), on obtient l'expression suivante:

$$\int_v \{\delta d\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dv = \{\delta dp\}^T \left( \int_v [G]^T [Z] [G] dv \right) \{dp\} = \{\delta dp\}^T [K_G] \{dp\} \quad (4.18)$$

$$[K_G] = \int_v [G]^T [Z] [G] dv \quad (4.19)$$

où  $[K_G]$ : la matrice géométrique (ou matrice des contraintes initiales).

$$[Z] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} I & \tau_{xy} I & \tau_{xz} I \\ \tau_{yx} I & \sigma_{yy} I & \tau_{yz} I \\ \tau_{zx} I & \tau_{zy} I & \sigma_{zz} I \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

avec  $I$  la matrice d'unité de dimension 3x3.

Pour les plaques,  $\sigma_{zz}$  est considéré nul; en plus on peut ignorer l'influence très petite des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  dans la matrice  $K_G$ .

#### 4.2.2.4. Second membre de l'équation du principe incrémentiel

Pour le second membre de l'équation (4.14), on pose:

$$\{\delta du\} = [N]\{\delta dp\} \quad (4.21)$$

$$\int_v \{\delta du\}^T \{df\} dv = \{\delta dp\}^T \int_v [N]^T df dv = \{\delta dp\}^T \{dF\} \quad (4.22)$$

avec  $\{dF\}$  : le vecteur incrémentiel de charge;

et  $[N]$ : la matrice des fonctions de forme.

#### 4.2.2.5. Matrice tangente

La matrice tangente est la somme de la matrice linéaire des déplacements et de la matrice géométrique:

$$\{\delta dp\}^T ([K_L] + [K_G])\{dp\} = \{\delta dp\}^T \{dF\} \quad (4.23)$$

L'équation (4.23) est valable quelque soit  $\{\delta dp\}$ ; par conséquent:

$$([K_L] + [K_G])\{dp\} = \{dF\} \quad (4.24a)$$

On pose alors:

$$[K_T] = [K_L] + [K_G] \quad (4.24b)$$

où  $[K_T]$ : la matrice tangente.

Notons que toutes les quantités sont définies dans le système local des coordonnées.

Dans ce travail, les matrices dans l'état déformé sont approximativement évaluées lors de l'utilisation des éléments à 8-nœuds et 9-nœuds de plaque car leurs formes ne sont pas planes dans l'état déformé.

### 4.3. Méthode de solution

L'approche générale pour l'analyse non-linéaire en utilisant la technique de solution incrémentielle itérative et la description lagrangienne, comprend trois étapes principales. Ce sont:

- (i) évaluer la rigidité globale de la structure et résoudre l'équation (4.24a) afin de trouver les déplacements incrémentiels (stage de prédiction);
- (ii) déterminer les forces nodales exactes de chaque nœud (stage de correction);

(iii) comparer les forces nodales avec les forces appliquées pour trouver les forces résiduelles dans la configuration déformée  $\Gamma_{n+1}$  et vérifier la condition d'équilibre pour voir si l'on a encore besoin d'itérations (stage de détection).

#### 4.3.1. Stage de prédiction

Au commencement de chaque incrément de chargement, la matrice linéaire et la matrice géométrique,  $[K_L]_{el}$  et  $[K_G]_{el}$ , sont formées pour chaque élément. La matrice tangente,  $[K_T]_{el}$ , est obtenue pour chaque élément par la somme de  $[K_L]_{el}$  et  $[K_G]_{el}$ . Cette matrice est alors transformée du système local des coordonnées au système global des coordonnées pour obtenir  $[K_T]_{eg}$ , et assemblée pour former la matrice globale de la structure,  $[K_T]_g$ . La matrice globale de la structure,  $[K_T]_g$ , est factorisée et résolue pour trouver les déplacements nodaux incrémentiels,  $\{dp\}_g$ , dans le système global des coordonnées. Si la méthode de NEWTON-RAPHSON conventionnelle est utilisée, l'assemblage et la factorisation sont répétés à toutes les itérations durant l'incrément de chargement.

Mathématiquement, la procédure décrite peut être résumée comme suit:

$$[K_T]_{el} = [K_L]_{el} + [K_G]_{el} \quad (4.25)$$

$$[K_T]_{eg} = [L]^T [K_T]_{el} [L] \quad (4.26)$$

$$[K_T]_g = \sum [K_T]_{eg} \quad (4.27)$$

$$[K_T]_g \{dp\}_g = \{dF\}_g \quad (4.28)$$

dans lesquels,  $\{dF\}_g$  est le vecteur des charges appliquées incrémentielles et  $[L]$  est la matrice de transformation entre les axes locaux de  $\Gamma_n$  de chaque élément et les axes globaux. Dans la description lagrangienne actualisée, la matrice de transformation est continûment actualisée pour chaque nouvelle configuration de chaque élément. Elle a été exprimée par les expressions du paragraphe 3.5.3.4 du chapitre 3. Le mouvement d'un élément dans l'espace peut être vu sur la figure 4.3 ci-dessous.



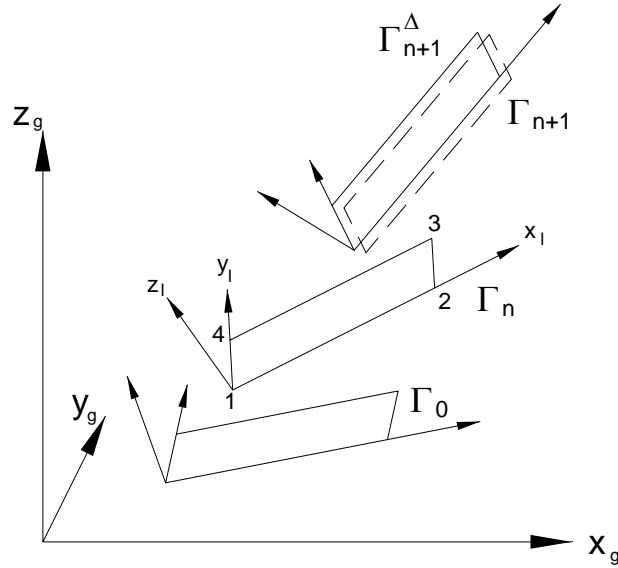


Figure 4.3. Mouvement d'un élément quadrilatéral dans l'espace.

Comme les grandes rotations dans l'espace tridimensionnel n'obéissent pas à la règle d'addition des vecteurs, les formulations non-linéaires dans ce travail sont limitées aux rotations petites entre deux incréments de charge successifs. Cette limite est imposée parce que le champ de déplacements des éléments est linéarisé par rapport aux rotations nodales (Eq. (3.132)). Ainsi, ces formulations demandent des incréments de charge petits et les rotations nodales totales sont restreintes en grandeur (on dit rotations modérées).

#### 4.3.2. Stage de correction

Les déplacements nodaux incrémentiels,  $\{dp\}_{eg}$ , pour chaque élément retirés du vecteur  $\{dp\}_g$  sont retransformés au système local des coordonnées afin d'obtenir  $dp_{el}$  comme suit:

$$\{dp\}_{el} = [L]\{dp\}_{eg} \quad (4.29)$$

Dans le stage de correction, la détermination des forces nodales pour chaque élément doit être exacte. Dans ce travail, l'algorithme suivant est utilisé.

On a le champ de déplacement  $\{du\}$  de  $\{dp\}_{el}$  et on peut déduire  $\{d\varepsilon\}$  et  $\{de^*\}$  de  $\{du\}$ ; les contraintes de PIOLA-KIRCHHOF N°2 sont déterminées par:

$$\{s_{n+1}\} = \{\sigma_n\} + \{ds\} \quad (4.30)$$

Ce sont les contraintes de  $\Gamma_{n+1}$  rapportées à  $\Gamma_n$  dans le système local des coordonnées de  $\Gamma_n$ , avec:

$$\{ds\} = [D]\{de\} = [D](\{d\varepsilon\} + \{de^*\}) \quad (4.31)$$

##### 4.3.2.1. Relation entre $\{\sigma_{n+1}\}$ et $\{s_{n+1}\}$

$\{\sigma_{n+1}\}$  sont les contraintes vraies de CAUCHY de  $\Gamma_{n+1}$  dans les axes locaux de  $\Gamma_n$ ;  $\{s_{n+1}\}$  sont les contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF N°2 de  $\Gamma_{n+1}$  rapportées à  $\Gamma_n$  dans les axes locaux de  $\Gamma_n$ .

$$\{\sigma_{n+1}\} = \frac{1}{|J|} [J] \{s_{n+1}\} [J]^T \quad (4.32)$$

$J$  est le jacobéen et  $|J|$  est son déterminant.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial z} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial z} \\ \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x} & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial y} & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{\partial \{x_{n+1}\}}{\partial \{x\}} \quad (4.33)$$

Si l'on utilise l'hypothèse des petites déformations, cela mènera aux formules plus simples données ci-dessous [D4-2007].

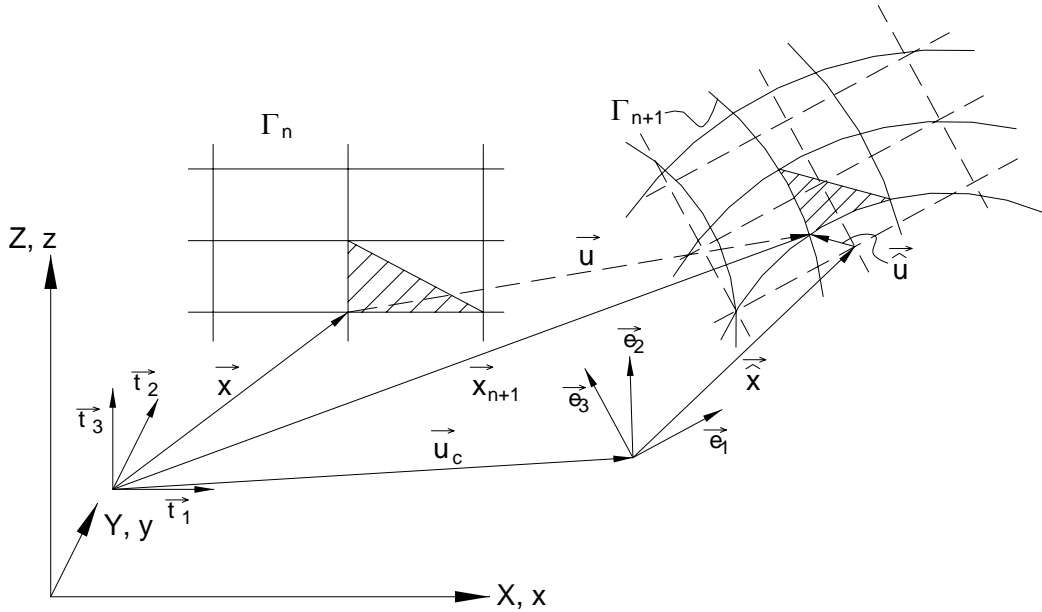


Figure 4.4. Décomposition polaire.

$\vec{t}$  sont les vecteurs unitaires du système local des coordonnées de  $\Gamma_n$ ;  $\vec{e}$  sont les vecteurs unitaires du système local des coordonnées de  $\Gamma_{n+1}$  qui s'attachent rigidement à l'élément au cours de son mouvement.

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x} + \vec{u} = (\{x\} + \{u\})_{\vec{t}} \quad (4.34)$$

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{u}_c + \vec{\hat{x}} + \vec{\hat{u}} = (\{u_c\})_{\vec{t}} + \left( \left\{ \begin{matrix} \hat{x} \\ \hat{u} \end{matrix} \right\} \right)_{\vec{e}} \quad (4.35)$$

où :  $\{x\} = \{x, y, z\}^T$ ;  $\{x_{n+1}\} = \{x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}\}^T$  (4.36)

$(\ )_{\vec{t}}$  signifie la présentation dans le système local des vecteurs  $\vec{t}$ .

$$\left( \left\{ \hat{x} \right\} + \left\{ \hat{u} \right\} \right)_{\vec{e}} = \left( [T]^T \left( \left\{ \hat{x} \right\} + \left\{ \hat{u} \right\} \right) \right)_{\vec{t}} \quad (4.37)$$

$$\text{Alors: } \vec{x}_{n+1} = (\{u_c\})_{\vec{t}} + \left( [T]^T \left( \hat{x} + \hat{u} \right) \right)_{\vec{t}} \quad (4.38)$$

La matrice de transformation du vecteur est déterminée par:

$$[T] = \begin{bmatrix} e_1(1) & e_1(2) & e_1(3) \\ e_2(1) & e_2(2) & e_2(3) \\ e_3(1) & e_3(2) & e_3(3) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

car le mouvement rigide du corps,  $\vec{u}_c$ , est indépendant de x, y, z et on a:

$$\vec{\hat{x}} = x\vec{t}_1 + y\vec{t}_2 + z\vec{t}_3 \quad (4.40)$$

Les équations (4.38) et (4.40) sont substituées dans l'équation (4.33) pour obtenir:

$$[J] = [T]^T \left( [I] + \frac{\partial \left\{ \hat{u} \right\}}{\partial \left\{ x \right\}} \right) \quad (4.41)$$

On pose alors:

$$[D] = [I] + \frac{\partial \left\{ \hat{u} \right\}}{\partial \left\{ x \right\}} \quad (4.42)$$

Ainsi, on a le théorème de décomposition polaire:

$$[J] = [T]^T [D] \quad (4.43)$$

dans lequel  $[T]$  est la rotation rigide et  $[D]$  est la déformation pure du corps (Fig. 4.4).

Avec l'hypothèse des petites déformations:  $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \ll 1$

$$[J] = [T]^T \left( [I] + \frac{\partial \left\{ \hat{u} \right\}}{\partial \left\{ x \right\}} \right) \approx [T]^T [I] = [T]^T \quad (4.44)$$

$$|J| = \frac{dv_{n+1}}{dv} \approx 1 \quad (4.45)$$

$$\text{et } \{\sigma_{n+1}\} = [T]^T \{s_{n+1}\} [T] \quad (4.46)$$

le caractère de la matrice de transformation est:  $[T][T]^T = [I]$ , donc:

$$[T]\{\sigma_{n+1}\}[T]^T = \{s_{n+1}\} \quad (4.47)$$

Cependant, nous avons besoin d'évaluer les contraintes vraies  $\{\hat{\sigma}_{n+1}\}$  dans les axes locaux  $\vec{e}$  de  $\Gamma_{n+1}$  pour calculer les forces nodales et les forces résiduelles et nous trouvons que  $[T]\{\sigma_{n+1}\}[T]^T$  est la formule de transformation qui fournit les contraintes vraies de  $\Gamma_{n+1}$  dans les axes locaux  $\vec{e}$  de  $\Gamma_{n+1}$  à partir des contraintes vraies de  $\Gamma_{n+1}$  dans les axes locaux  $\vec{t}$  de  $\Gamma_n$ . Cela est identique à la formule de transformation des contraintes entre les axes locaux et globaux dans la théorie des coques d'AHMAD *et al.* [A6-1970]. Alors, les contraintes vraies  $\{\hat{\sigma}_{n+1}\}$  sont égales aux contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF N°2  $\{s_{n+1}\}$ :

$$\{\hat{\sigma}_{n+1}\} = [T]\{\sigma_{n+1}\}[T]^T = \{s_{n+1}\} \quad (4.48)$$

#### 4.3.2.2. Forces nodales Q

Les forces nodales internes peuvent être calculées par:

$$\begin{aligned} \{\delta dp\}_l^T \{Q\}_l &= \int_{v_{n+1}} \{\delta d\varepsilon\}^T \{\hat{\sigma}_{n+1}\} dv \\ \{\delta dp\}_l^T \{Q\}_l &= \{\delta dp\}_l^T \int_{v_{n+1}} [B]^T \{\hat{\sigma}_{n+1}\} dv \\ \{Q\}_l &= \int_{v_{n+1}} \{B\}^T \{\hat{\sigma}_{n+1}\} dv \end{aligned} \quad (4.49)$$

#### 4.3.3. Stage de détection

Les forces nodales  $\{Q\}_l$  sont calculées sur le volume  $v_{n+1}$  de  $\Gamma_{n+1}$  et dans les axes locaux de  $\Gamma_{n+1}$ . Les  $\{Q\}_l$  sont alors transformés dans les axes globaux de la structure:

$$\{Q\}_g = [L]^T \{Q\}_l \quad (4.50)$$

Les forces hors-équilibres (ou résiduelles),  $\{R\}_g$ , peuvent être trouvées à partir de la différence entre les forces appliquées totales,  $\{F\}_g$ , et les forces nodales,  $\{Q\}_g$ :

$$\{R\}_g = \{F\}_g - \{Q\}_g = \{F\}_g - [L]^T \int_{v_{n+1}} [B]^T \{\hat{\sigma}_{n+1}\} dv \quad (4.51)$$

Afin de satisfaire la condition d'équilibre, les forces hors équilibres doivent être éliminées à travers une procédure itérative. Si  $\|R\|$  est plus petit qu'une certaine norme, le processus d'itérations s'arrête et la résolution continue avec un autre chargement incrémentiel. On peut utiliser, soit la norme de déplacements, soit la norme de forces.

Norme de déplacements:

$$\sqrt{\frac{\sum \{dp\}_g^T \{dp\}_g}{\sum \{p\}_g^T \{p\}_g}} \leq TOLER \quad (4.52)$$

Norme de forces résiduelles:

$$\sqrt{\frac{\sum \{R\}_g^T \{R\}_g}{\sum \{F\}_g^T \{F\}_g}} \leq TOLER \quad (4.53)$$

Nous n'utilisons que la norme de déplacements dans notre travail. La valeur de TOLER est toujours prise égale à 0.001 dans ce travail.

#### 4.4. STRATEGIE DE SOLUTION A L'INTERIEUR D'UN PAS

La stratégie de la méthode de RIKS (*arc-length control*, en anglais), modifiée par RAMM [R15-1981], est employée. Nous la rappelons ici pour la commodité.

##### 4.4.1. Point de départ et notation

Le problème de non-linéarité est pas à pas linéarisé et l'erreur commise par la linéarisation est corrigée par les itérations d'équilibre additionnelles. Pour le chargement proportionnel, les charges appliquées peuvent être exprimées par un facteur de charge  $\lambda$ .

$$\{F_n\} = \lambda_n \{F\} \quad (4.54)$$

où  $\{F\}$  est le vecteur des charges de référence. Dans un incrément de la configuration  $\Gamma_n$  à la configuration  $\Gamma_{n+1}^\Delta$  les positions  $i$  et  $j=i+1$ , avant et après une itération quelconque, sont distinguées (Fig. 4.5). Désormais, on appelle la configuration  $i$  ou  $j$  au lieu de  $\Gamma_{n+1}$  qui est approchée de  $\Gamma_{n+1}^\Delta$  et la formulation est présentée dans le système d'axes bidimensionnels pour la simplicité.

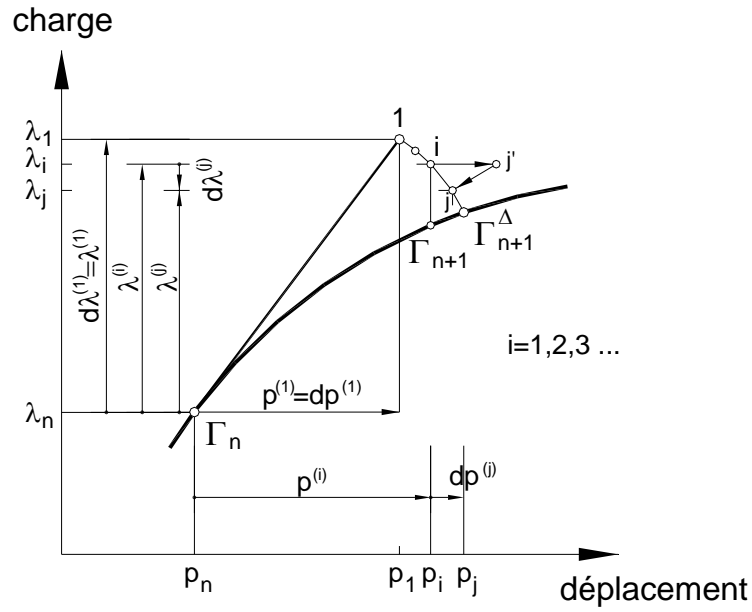


Figure 4.5. Notation.

Les incréments totaux entre les positions  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_{n+1}^{\Delta}$  sont indiqués par  $\{p^{(i)}\}$ ,  $\{F^{(i)}\}$  et  $\lambda^{(i)}$  tandis que les changements incrémentiels de  $i$  à  $j$  sont respectivement indiqués par  $\{dp^{(j)}\}$ ,  $\{dF^{(j)}\}$  et  $d\lambda^{(i)}$ :

$$\{F_j\} = \{F_n\} + (\{F^{(i)}\} + \{dF^{(j)}\}) = \{F_n\} + \{F^{(j)}\} \quad (4.55)$$

$$\lambda_j = \lambda_n + (\lambda^{(i)} + d\lambda^{(j)}) = \lambda_n + \lambda^{(j)} \quad (4.56)$$

$$\{p_j\} = \{p_n\} + (\{p^{(i)}\} + \{dp^{(j)}\}) = \{p_n\} + \{p^{(j)}\} \quad (4.57)$$

Etant donné que l'itération se place dans l'espace des déplacements et charges, le degré de charge peut changer d'une itération à l'autre. Dans ce cas, une position intermédiaire  $j'$  du même degré de charge  $\lambda_{j'} = \lambda_i$  est introduite avant que l'état final  $j$  soit atteint (Fig. 4.5).

Supposons que la configuration  $i$  a déjà été déterminée; les équations d'équilibre incrémentiellles peuvent être exprimées par l'expression linéarisée:

$$[K_{Ti}]\{dp^{(j)}\} = \{dF^{(j)}\} + \{F_i\} - \{Q_i\} \quad (4.58)$$

Si les forces hors équilibre  $\{R_i\} = \{F_i\} - \{Q_i\}$  sont introduites:

$$[K_{Ti}]\{dp^{(j)}\} = d\lambda^{(j)}\{F\} + \{R_i\} \quad (4.59)$$

La matrice tangente  $[K_{Ti}]$  à la position  $i$  peut contenir tous les effets non-linéaires possibles. Les équations (4.58) et (4.59) sont la relation de base utilisée comme le point de début pour la technique incrémentielle itérative décrite plus loin.

#### 4.4.2. Méthode de RIKS

Cette technique itérative a été présentée par RIKS et puis modifiée par RAMM [R15-1981]. Ils ont limité le pas de charge  $d\lambda^{(1)}$  par l'équation supplémentaire:

$$\{dp^{(1)}\}^T \{dp^{(1)}\} + (d\lambda^{(1)})^2 = ds^2 \quad (4.60)$$

C'est la distance généralisée entre le point  $\Gamma_n$  et le 'plan normal' à la tangente à  $\Gamma_n$  qui est fixée à une valeur prescrite  $ds$ . Puis, l'itération suit ce plan; alors le produit scalaire de la tangente  $\vec{t}^{(1)}$  et le vecteur  $\vec{dp}^{(j)}$  contenant des charges et déplacements incrémentiels inconnus doivent s'annuler (Fig. 4.6):

$$\vec{t}^{(1)} \cdot \vec{dp}^{(j)} = 0 \quad (4.61)$$

ou en forme matricielle:

$$\{dp^{(1)}\}^T \cdot \{dp^{(j)}\} + d\lambda^{(1)} \cdot d\lambda^{(j)} = 0; \quad j=2, 3, \dots \quad (4.62)$$

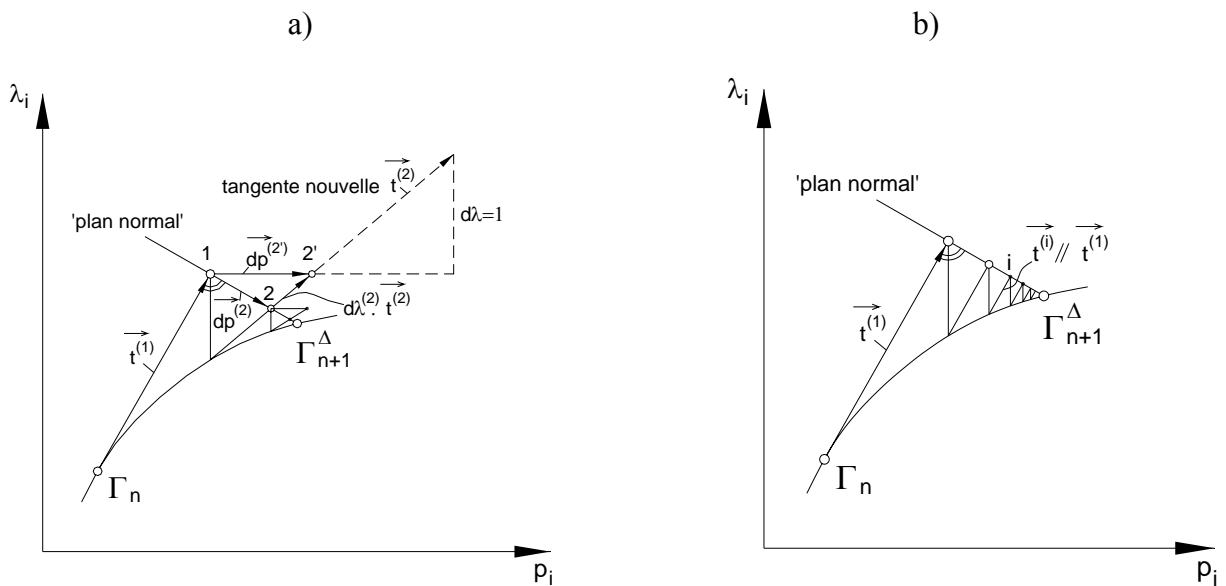


Figure 4.6. Méthode de RIKS:

- a) avec la résolution de NEWTON-RAPHSON conventionnelle;
- b) avec la résolution de NEWTON-RAPHSON modifiée.

Les équations supplémentaires, originellement ajoutées à l'expression incrémentielle (4.59), détruisent la symétrie de la matrice de rigidité tangente. Ce désavantage est surmonté en divisant le vecteur inconnu  $\vec{dp}^{(j)}$  en deux parties:

$$\vec{dp}^{(j)} = d\lambda^{(j)} \cdot \vec{t}^{(j)} + \vec{dp}^{(j)} \quad (4.63)$$

Ou en notation matricielle:

$$\{dp^{(j)}\} = d\lambda^{(j)} \cdot \{dp^{(j)I}\} + \{dp^{(j)II}\} \quad (4.64)$$

Ici,  $\{dp^{(i)I}\}$  et  $\{dp^{(i)II}\}$  sont obtenus par:

$$[K_{Ti}]\{dp^{(j)I}\} = \{F_i\} \quad (4.65)$$

$$[K_{Ti}]\{dp^{(j)II}\} = \{R_i\} \quad (4.66)$$

Puis, l'équation (4.64) est substituée à l'équation (4.62) et résolue pour obtenir la charge incrémentielle  $d\lambda^{(i)}$ :

$$d\lambda^{(j)} = -\frac{\{dp^{(1)}\}^T \cdot \{dp^{(j)II}\}}{\{dp^{(1)}\}^T \cdot \{dp^{(j)I}\} + d\lambda^{(1)}} \quad (4.67)$$

Géométriquement, c'est l'intersection  $j$  de la tangente nouvelle avec le 'plan normal' (Fig. 4.6). Dans le système à plusieurs degrés de liberté, la valeur de  $d\lambda^{(1)}$  dans l'équation (4.67) ne joue pas un rôle important et peut être supprimée. D'autre part, la charge incrémentielle  $d\lambda^{(1)}$  au dénominateur a évidemment une autre unité que le produit des déplacements. On peut éliminer cette différence d'unité par la normalisation des déplacements:

$$d\lambda^{(j)} = -\frac{\{dp^{(1)}\}^T [S^2] \{dp^{(j)II}\}}{\{dp^{(1)}\}^T [S^2] \{dp^{(j)I}\} + d\lambda^{(1)}} \quad (4.68)$$

où  $[S^2]$  est une matrice diagonale [F2-2007].

Si l'on utilise la résolution de NEWTON-RAPHSON modifiée (Fig. 4.6b) qui simplifie encore la méthode parce que l'équation (4.65) n'est résolue qu'une fois au commencement du pas, la charge incrémentielle  $d\lambda^{(i)}$  peut être calculée par:

$$\frac{d\lambda^{(j)}}{d\lambda^{(1)}} = -\frac{\{dp^{(1)}\}^T \{dp^{(j)II}\}}{\{dp^{(1)}\}^T \{dp^{(j)I}\} + (d\lambda^{(1)})^2} \quad (4.69)$$

Le 'plan normal' peut être actualisé à tous les cycles d'itération (Fig. 4.7). Dans ce cas,  $\{dp^{(1)}\}$  et  $d\lambda^{(1)}$  dans les équations (4.67) sont respectivement remplacés par les incréments totaux  $\{dp^{(i)}\}$  et  $d\lambda^{(i)}$ :

$$d\lambda^{(j)} = -\frac{p^{(i)T} \cdot dp^{(j)II}}{p^{(i)T} \cdot dp^{(j)I} + \lambda^{(i)}} \quad (4.70)$$



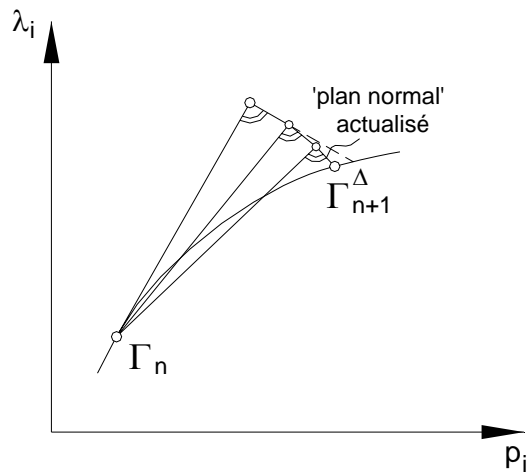


Figure 4.7. Méthode de RIKS modifiée.

#### 4.4.3. En suivant la réponse d'équilibre dans le sens positif

Il est évident que  $d\lambda^{(1)}$  dans l'équation (4.67) peut être positif ou négatif, cela dépend du comportement de la structure (Fig. 4.8). Il est nécessaire de choisir le signe de  $d\lambda^{(1)}$  correspondant au sens positif de la réponse d'équilibre. Deux règles pour choisir le signe sont décrites ci-dessous [F2-2007].

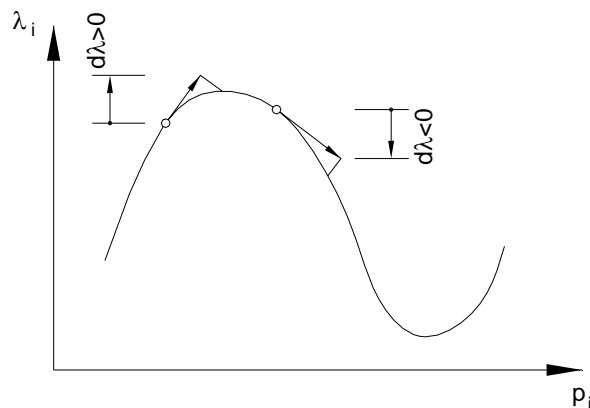


Figure 4.8. Signe de la charge incrémentielle.

##### 4.4.3.1. Travail extérieur positif

La règle la plus simple demande que le travail extérieur consommé dans le stage de prédiction soit positif:

$$dW = \{dF^{(1)}\}^T \{dp^{(1)}\} = d\lambda^{(1)} \{F\}^T \{dp^{(1)}\} > 0 \quad (4.71)$$

$d\lambda^{(1)}$  prend le signe de  $\{F\}^T \{dp^{(1)}\}$ .

##### 4.4.3.2. Règle d'angle

Il y a des problèmes dans lesquels la structure redevient soudainement rigide, par exemple au voisinage du 'point de retour' (*turning point* en anglais). Dans ce cas, la règle du travail positif est incorrecte parce que la structure a besoin de libérer le travail extérieur afin de continuer le long de la réponse d'équilibre. Pour surmonter cette difficulté, une condition sur l'angle du vecteur de prédiction est plus efficace. Soit  $\vec{t}_n^{(1)}$  la tangente de la première itération du pas précédent et  $\vec{t}_{n+1}^{(1)}$  la tangente de la première du pas courante. Puis, on choisit le sens positif pour que:

$$\vec{t}_n^{(1)} \cdot \vec{t}_{n+1}^{(1)} > 0 \quad (4.72)$$

## 4.5. Applications numériques

Nous utilisons essentiellement la méthode de RIKS modifiée pour réaliser l'analyse non-linéaire. Toutefois, nous pouvons réaliser l'analyse non-linéaire par l'augmentation pas-à-pas de la charge appliquée dans les cas où cette dernière est plus avantageuse.

### 4.5.1. Plaques isolées

#### 4.5.1.1. Plaque carrée soumise à des charges latérales uniformément réparties

$$a=0.4\text{m}$$

$$t=0.0025\text{m}$$

$$E=2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu=0.316$$

q=Charges latérales uniformément réparties

w=Flèche au centre

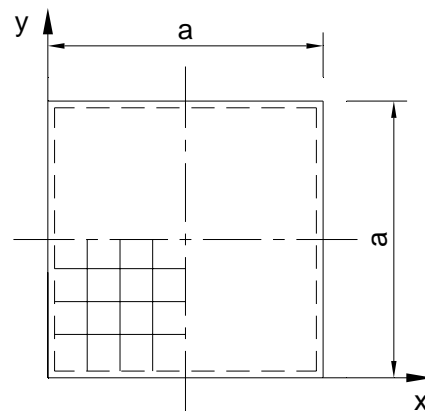


Figure 4.9. Plaque carrée soumise à des charges latérales uniformément réparties.

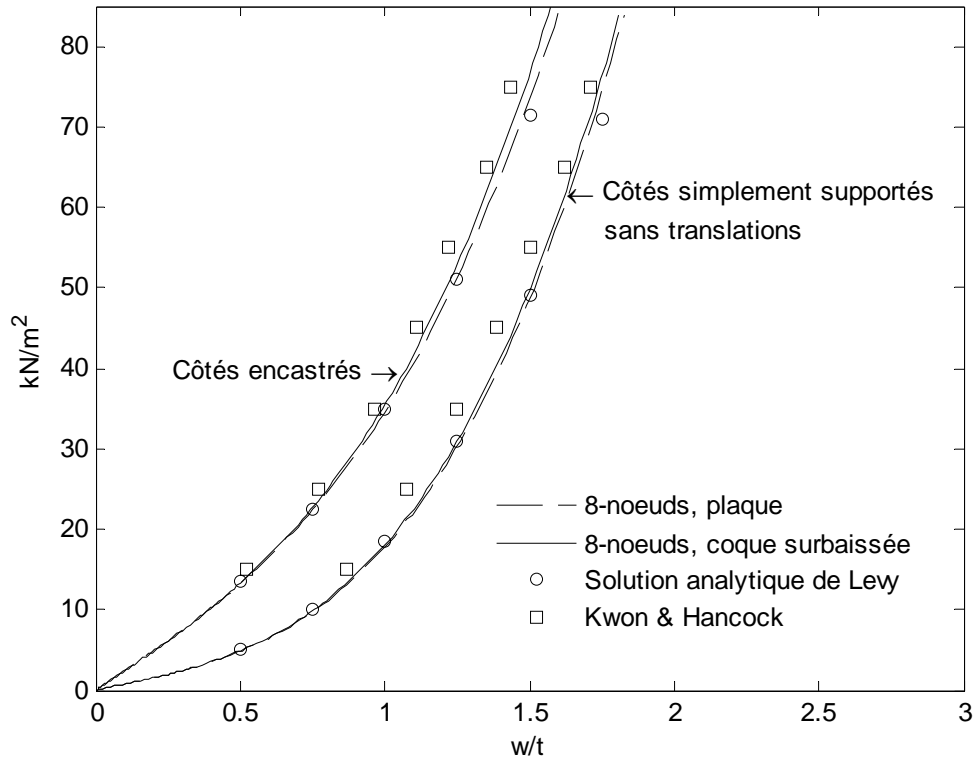


Figure 4.10. Courbes charge-flèche de la plaque soumise à des charges latérales uniformément réparties.

Une plaque carrée soumise à des charges latérales uniformément réparties est analysée pour son comportement avec grandes flèches (Fig. 4.9).  $4 \times 4$  éléments de 8-nœuds de plaque et de coque surbaissée sont respectivement utilisés pour modéliser un quart de la plaque. Comme le montre la figure 4.10, les solutions données par ce travail sont très proches de celles analytiquement données par LEVY [K4-1991] avec des conditions de bord différentes. Ce problème est également étudié par KWON et HANCOCK [K4-1991] en employant la méthode des bandes finies splines. Les résultats de KWON et HANCOCK montrent un comportement plus rigide que les nôtres. Nous trouvons aussi que le comportement de la plaque analysée par les éléments de coque surbaissée est légèrement plus exact que celui donné par les éléments de plaque.

La figure 4.11 présente l'influence de la déformation fictive de cisaillement pour les flèches de la plaque simplement supportée dont les côtés peuvent se déplacer librement. Cette influence est examinée pour quelques valeurs du paramètre  $\alpha$  dans l'équation 3.20. Aux très grandes flèches, le comportement de la plaque est fortement non-linéaire. Il est évident que la flèche dépend légèrement de la valeur de  $\alpha$ . Désormais, nous prenons la valeur de  $\alpha$  dans l'intervalle  $0.01 \div 0.001$  pour les exemples qui suivent.

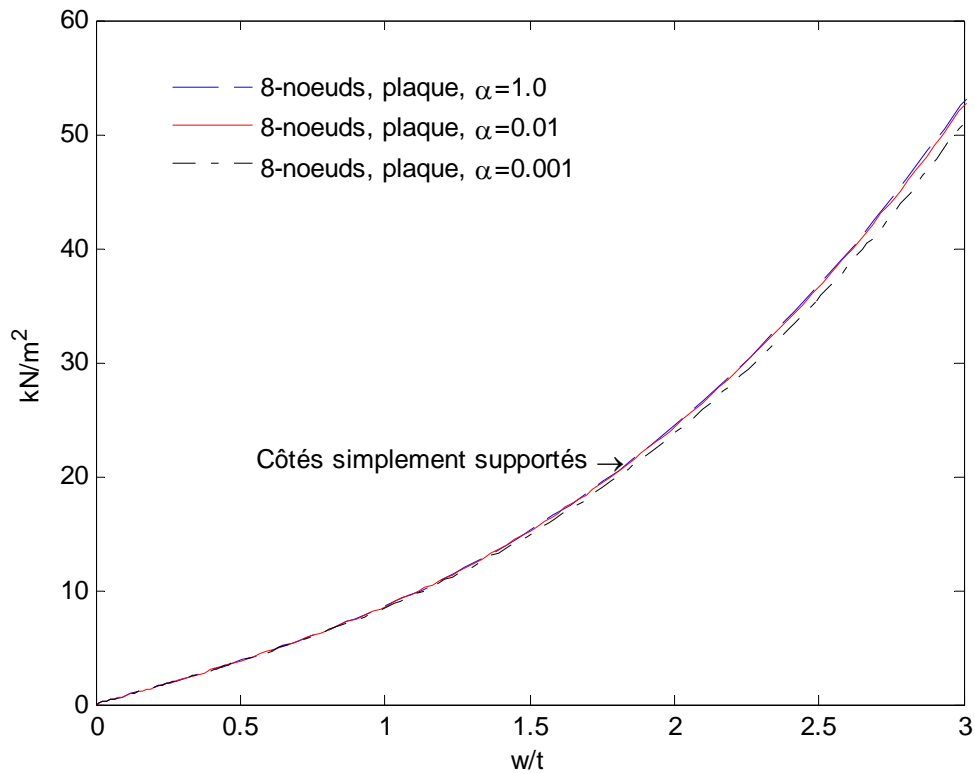


Figure 4.11. Examen de l'influence de la déformation fictive.

#### 4.5.1.2. Plaque carrée simplement supportée soumise à une charge de compression avec petite excentricité

$a=0.4\text{m}$

$t=0.0008\text{m}$

$E=2.1 \times 10^8 \text{kN/m}^2$

$\nu=0.316$

$p$ =Charge de compression

$e$ =Excentricité

$w$ =Flèche du centre

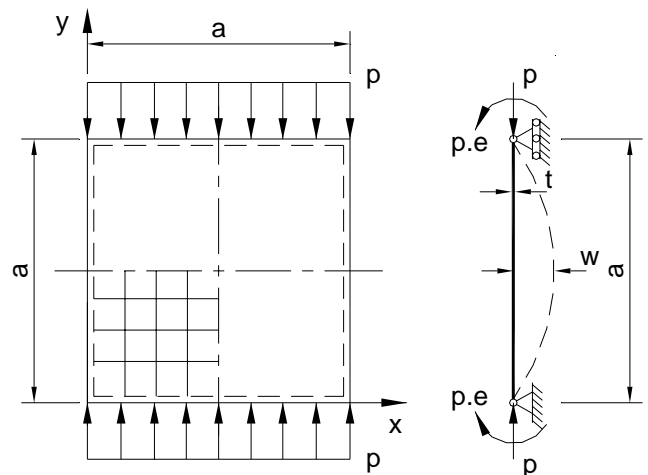


Figure 4.12. Plaque soumise à une charge de compression avec petite excentricité.

Une plaque carrée simplement supportée est soumise à des charges de compression sur ses deux côtés transversaux (Fig. 4.12). La charge de flambement,  $p_{cr}$ , peut être exprimée en termes de  $k$  [T3-1961]:

$$P_{cr} = \frac{k\pi^2 Et}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \quad \text{avec} \quad k=4.0 \quad (4.73)$$

Le comportement non-linéaire de la plaque peut être initié par l'introduction d'une petite excentricité de la charge. 4x4 éléments de 8-nœuds de plaque et de coque surbaissée sont utilisés pour modéliser un quart de la structure. Les courbes non-linéaires charge-flèche pour deux excentricités  $e=0.0025t$  et  $e=0.025t$  sont indiquées à la figure 4.13. Les résultats de l'élément de plaque et de l'élément de coque surbaissée s'accordent très bien lorsque la flèche du point au centre de la plaque est de l'ordre de l'épaisseur. Aux flèches plus grandes, la solution analysée par l'élément de coque surbaissée est légèrement plus souple que celle donnée par l'élément de plaque. Les phénomènes bien connus de souplesse et de redurcissement de la plaque avant et après la charge de flambement sont également montrés sur la figure 4.13.

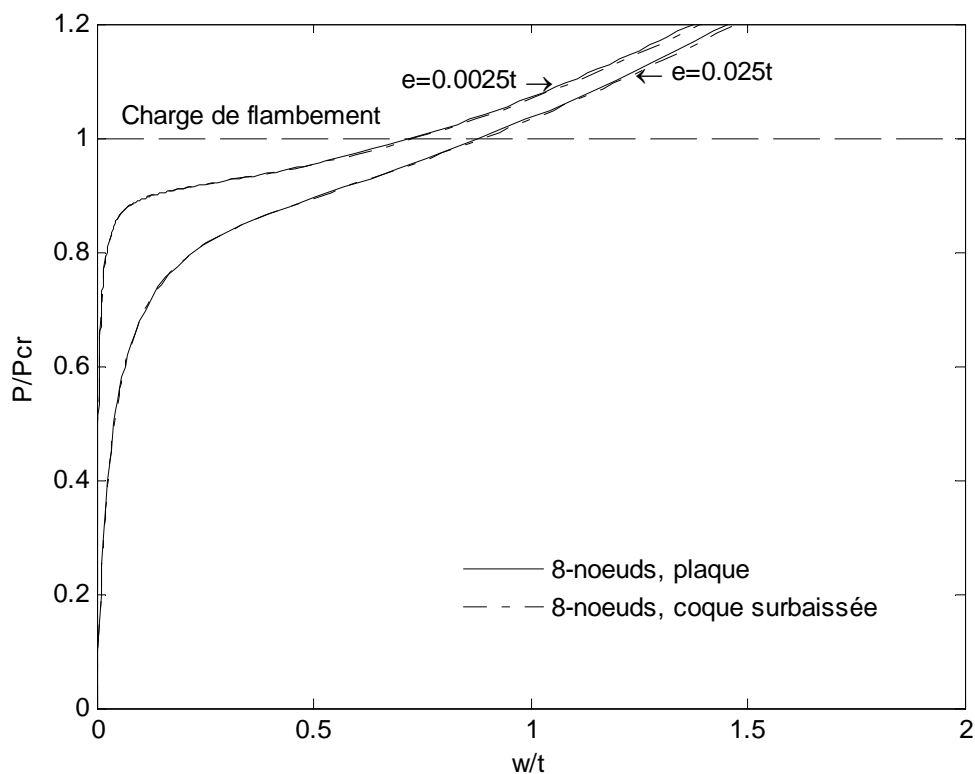


Figure 4.13. Courbes charge-flèche d'une plaque soumise à une charge de compression avec petite excentricité.

### 4.5.1.3. Flambement hors du plan d'un poteau avec petite imperfection

$L=300\text{mm}$

$b=30\text{mm}$

$t=10\text{mm}$

$E=2.06 \times 10^5 \text{N/mm}^2$

$\nu=0.3$

$f_y=235 \text{N/mm}^2$

$P$ =Charge de compression

$w_0$ =Imperfection géométrique initiale

$w$ =Flèche totale du centre

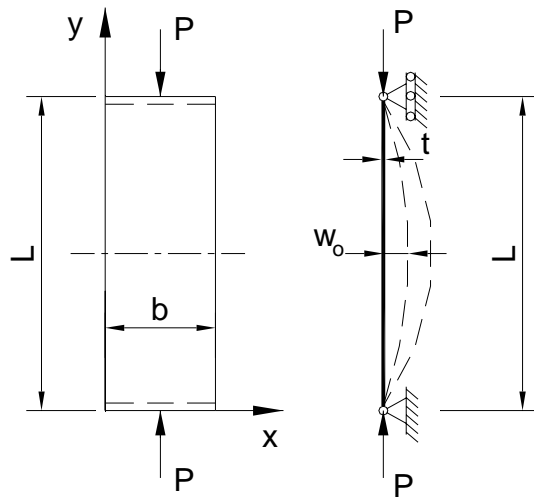


Figure 4.14. Poteau soumis à une charge de compression avec petite imperfection géométrique initiale.

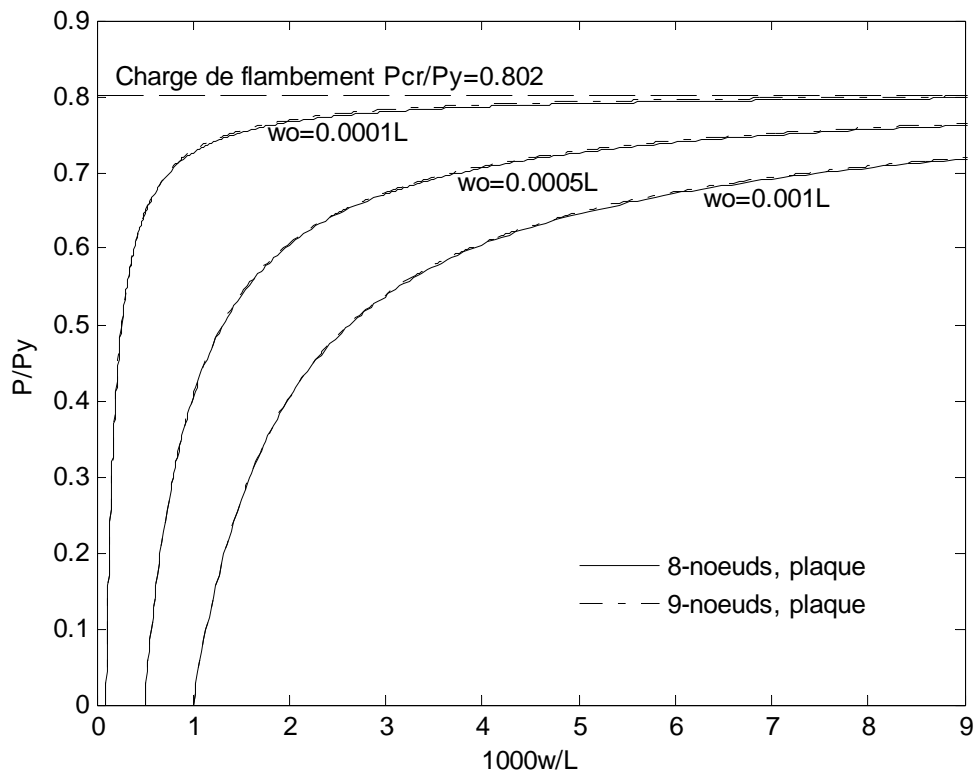


Figure 4.15. Courbes charge-flèche d'un poteau soumis à une charge axiale avec petite imperfection géométrique.

Un poteau simplement appuyé avec des imperfections géométriques initiales différentes et chargé par une charge axiale est choisi pour analyser la non-linéarité hors du plan (Fig. 4.14). Nous supposons que l'imperfection est sinusoïdale; trois valeurs de l'amplitude d'imperfection sont choisies, concrètement  $0.0001L$ ,  $0.0005L$  et  $0.001L$ .  $2 \times 5$  éléments de plaque de 8-nœuds (RI, 45 nœuds) et de 9-nœuds (SRI, 55 nœuds) sont utilisés pour modéliser une moitié de la structure. La figure 4.15 indique que le flambement élastique peut être obtenu par l'analyse non-linéaire géométrique élastique; les courbes charge-flèche sont évidemment asymptotique à la droite de flambement quand les flèches sont grandes. Nous trouvons aussi que les solutions de 8-nœuds et 9-nœuds sont coïncidentes.

#### 4.5.1.4. Console soumise à la flexion pure

$$L=150\text{mm}$$

$$b=30\text{mm}$$

$$t=2\text{mm}$$

$$E=2.06 \times 10^5 \text{N/mm}^2$$

$$v=0$$

$$I = \frac{bt^3}{12}$$

$M$ =Moment à l'extrémité libre

$v$ =Translation dans la direction des  $y$

$w$ =Translation dans la direction des  $z$

$\theta$ =Rotation de la section à l'extrémité libre

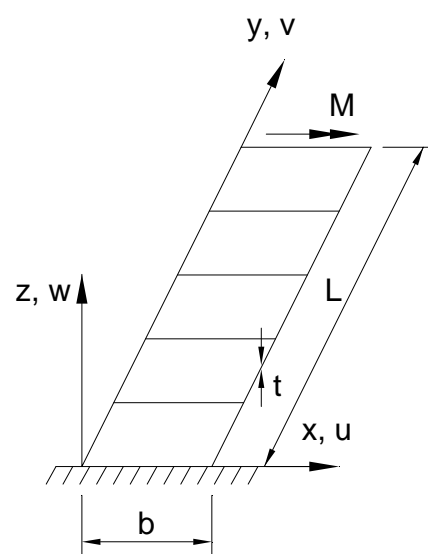


Figure 4.16. Console soumise à la flexion pure.

Nous utilisons  $1 \times 5$  éléments de plaque de 8-nœuds pour l'analyse d'une console soumise à la flexion pure (Fig. 4.16). Toutes les rotations superflues  $\theta_z$  et  $\theta_y$  sont bloquées. La commande par charge est employée dans cet exemple. Les résultats obtenus dans ce travail sont bien en accord avec ceux de CHIN, AL-BERMANI et KITIPORNCHAI [C13-1994] qui ont utilisé un élément de plaque basé sur la théorie classique de KIRCHHOF. Ce problème présente de très grands déplacements et rotations (Fig. 4.18). Les grandes rotations peuvent être obtenues dans le processus de calcul parce que les rotations  $\theta_z$  et  $\theta_y$  sont toujours bloquées, il ne reste que la rotation  $\theta_x$  autour de l'axe  $x$  et l'addition des rotations  $\theta_x$  dans l'espace est alors exacte.

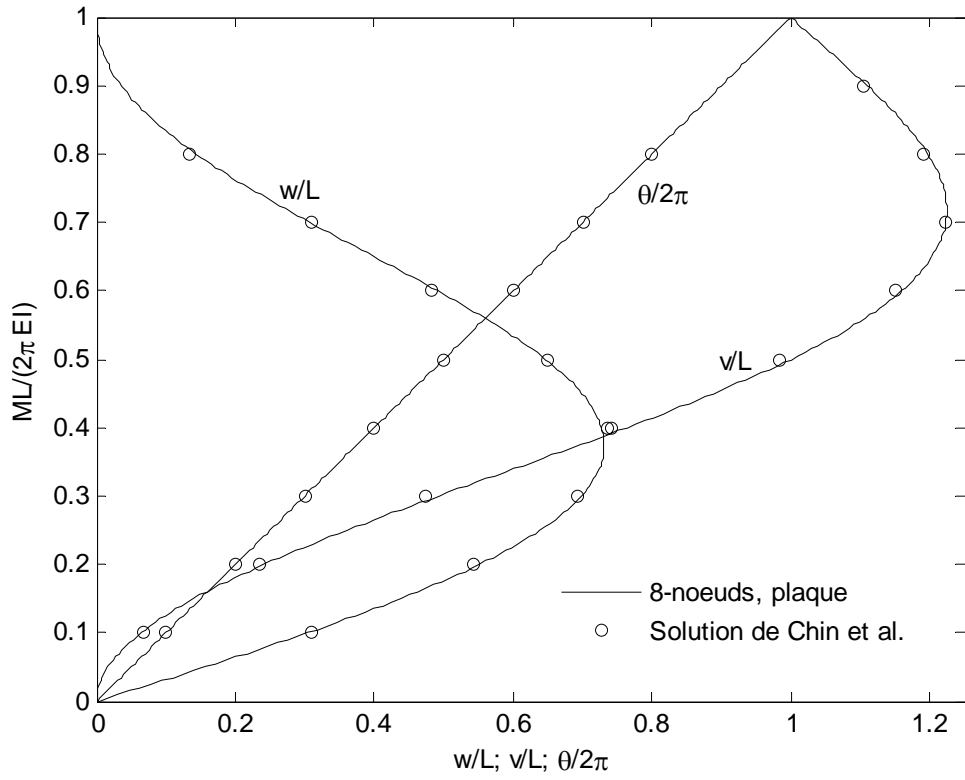


Figure 4.17. Courbes moment-déplacement d'une console soumise à la flexion pure.

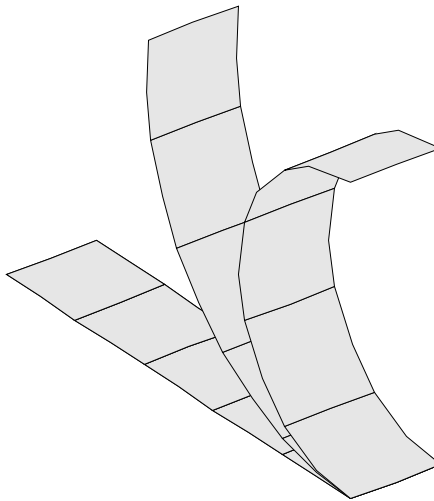


Figure 4.18. Déformation de la console aux valeurs de la charge normalisée égales à 0.0, 0.27 et 0.5, respectivement.

#### 4.5.2. Structures à parois minces



#### 4.5.2.1. Cornière en console soumise à une charge de compression au centre de cisaillement à l'extrémité libre

Une cornière en console soumise à une charge comprimée au centre de cisaillement à l'extrémité libre (Fig. 4.19) a été analysée non-linéairement par l'élément de poutre-poteau de CHAN et KITIPORNCHAI [C15-1987] et par l'élément de plaque de CHIN, AL-BERMANI et KITIPORNCHAI [C13-1994]. L'élément à 8-nœuds de plaque est utilisé. Deux éléments pour la section transversale et six éléments pour la longueur sont utilisés dans ce travail. L'analyse non-linéaire est commandée par l'augmentation pas-à-pas de la charge d'application. Cet exemple est réalisé pour examiner le comportement flexio-torsionnel de la cornière. Comme indiqué sur les figures 4.20, 4.21 et 4.22, les résultats ici sont semblables à ceux de CHIN, AL-BERMANI et KITIPORNCHAI [C13-1994] et presque semblables à ceux de CHAN et KITIPORNCHAI [C15-1987]. En régime largement non-linéaire, les solutions sont asymptotiques à la charge de flambement flexio-torsionnelle de la console.

$L=1400\text{mm}$

$b=47.75\text{mm}$

$h=72.75\text{mm}$

$t=6.22\text{mm}$

$\phi=65.86^\circ$

$E=1.933 \times 10^5 \text{N/mm}^2$

$\nu=0.3$

$P$ =Force comprimée au centre de cisaillement

$u$ =déplacement de  $S$  le long de l'axe axial

$w$ =déplacement de  $S$  le long de l'axe fort de la section

$v$ =déplacement de  $S$  le long de l'axe faible de la section

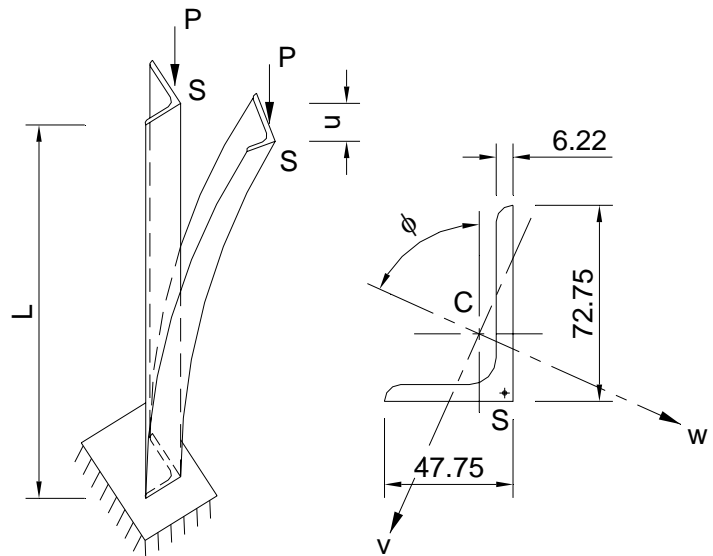


Figure 4.19. Cornière en console soumise à une force de compression au centre de cisaillement.

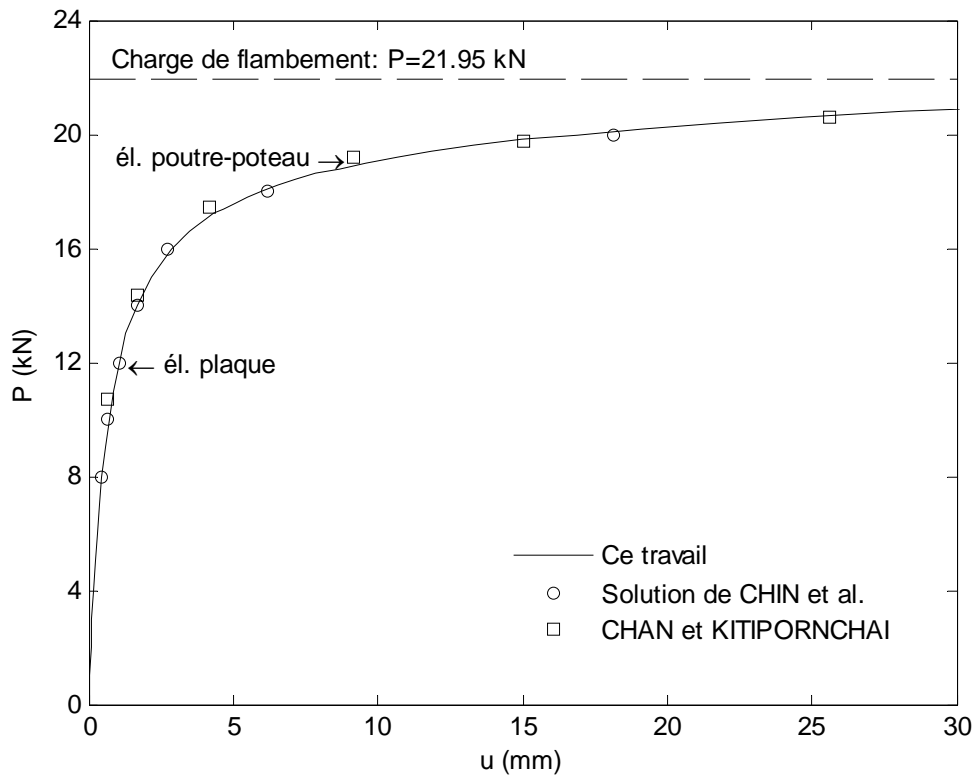


Figure 4.20. Courbes charge-déplacement de la cornière en console.

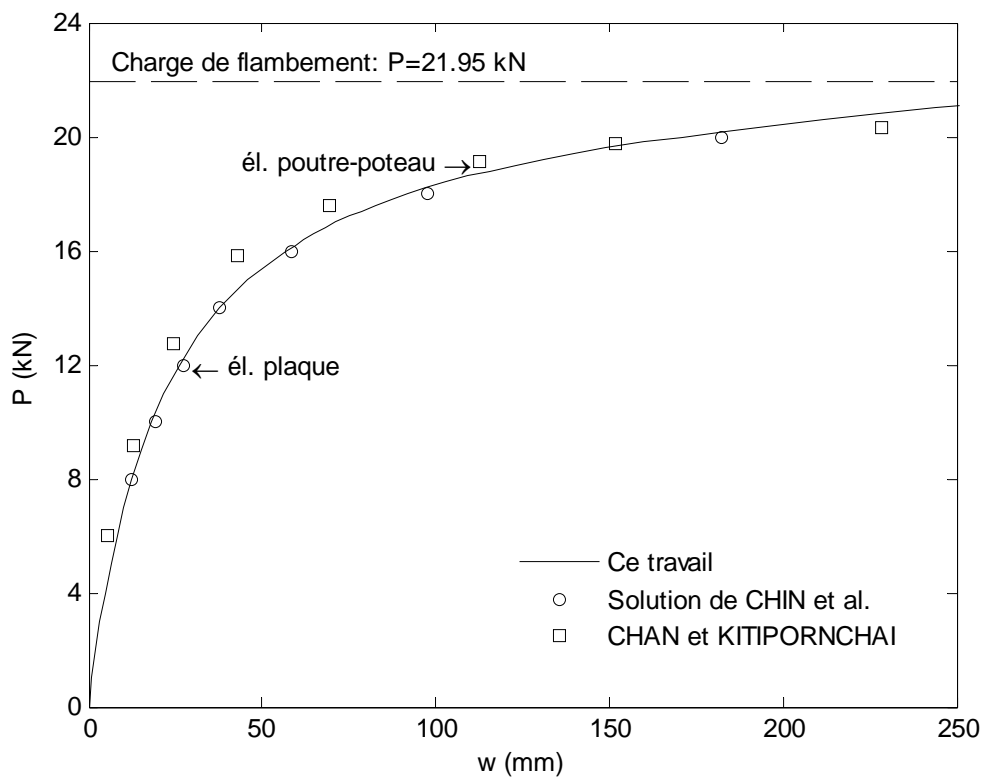


Figure 4.21. Courbes charge-déplacement de la cornière en console.

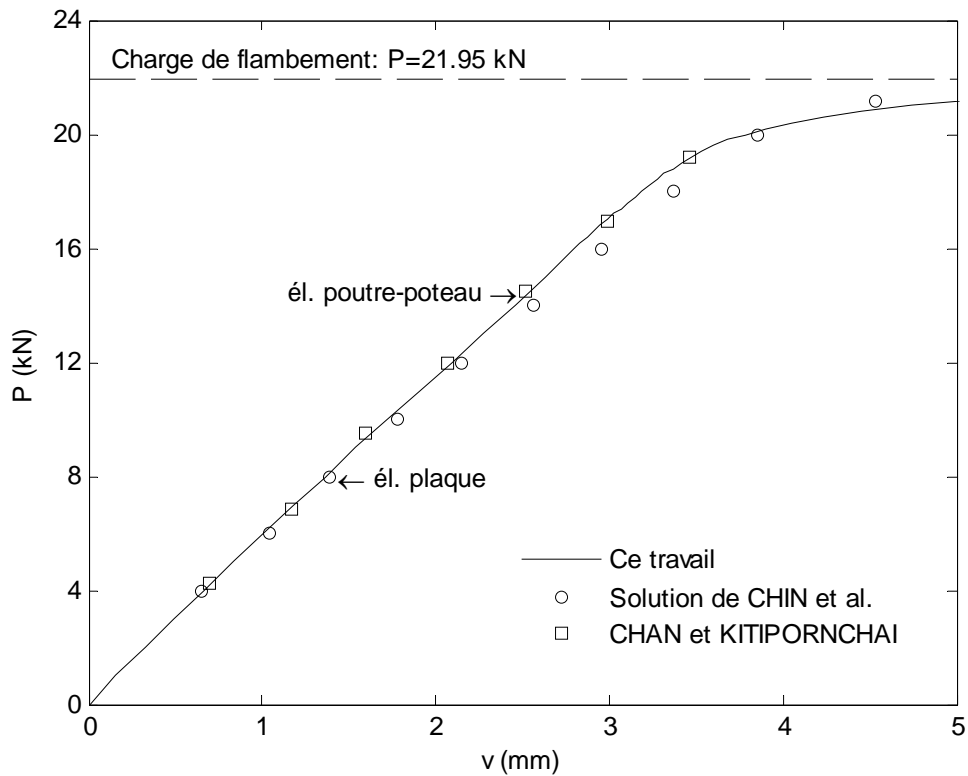


Figure 4.22. Courbes charge-déplacement de la cornière en console.

#### 4.5.2.2. Coque soumise à une charge au centre

$L=254\text{mm}$

$R=2540\text{mm}$

$t=12.7\text{mm}$

$\theta=0.1\text{rad}$

$E=3102.75\text{N/mm}^2$

$\nu=0.3$

$P$ =charge au centre A

$w_A$ =flèche du point A

$w_B$ =flèche du point B

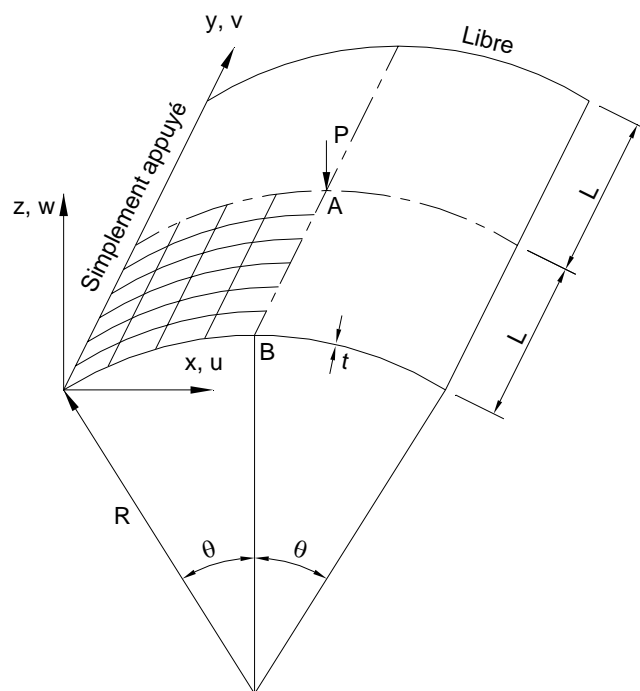


Figure 4.23. Coque soumise à une charge au centre.

La coque sur la figure 4.23 a été utilisée pour vérifier les grandes rotations dans l'espace de la formulation des éléments de coque et les algorithmes du passage des maxima et minima [K4-1991, C13-1994, B12-1980, C8-1981, S14-1983]. Les côtés rectilignes sont simplement appuyés et immobiles; les côtés curvilignes sont totalement libres. Dans ce travail, un quart de la coque est modélisé par 4x4 éléments de 8-nœuds de coque surbaissée. Les courbes charge-flèche pour la coque d'épaisseur de 12.7mm sont présentées sur la figure 4.24. La solution de référence est tirée du travail de SURANA [S14-1983]. Il a développé des éléments non-linéaires basés sur la théorie des coques vraies d'AHMAD *et al.*[A6-1970]. Ses éléments permettent de grandes rotations. Il a modélisé un quart de la coque (Fig. 4.23) par 2x2 éléments de 8-nœuds. On trouve que les résultats sont en accord satisfaisants. Notre maximum est à la charge de 2.37kN qui est plus élevée que le résultat de SURANA (2.25kN) et le minimum est à la charge de 0.43kN qui est plus bas que la valeur de référence (0.55kN). Si le maillage est raffiné (par exemple: 8x8), on obtient la valeur exacte du maximum mais ce n'est pas le cas pour le minimum. Le désaccord peut être dû au problème d'addition de grandes rotations dans l'espace. Ainsi, cet exemple donne l'occasion de révéler la limite d'application de la formulation non-linéaire des éléments finis dans ce chapitre. Néanmoins, le passage des maxima et minima par la méthode de RIKS modifiée est obtenu avec nos éléments.

BERGAN *et al.*[B14-1978] ont proposé une formule pour le calcul d'un paramètre qui exprime la rigidité globale d'une structure. Grâce à ce paramètre, on peut visualiser le changement de la rigidité de la structure au cours du chargement. Nous dessinons la relation entre la charge et le paramètre de rigidité globale de la coque sur la figure 4.25. Le maximum et le minimum sur la figure 4.24 correspondent au paramètre de rigidité globale égal à zéro (Fig. 4.25).

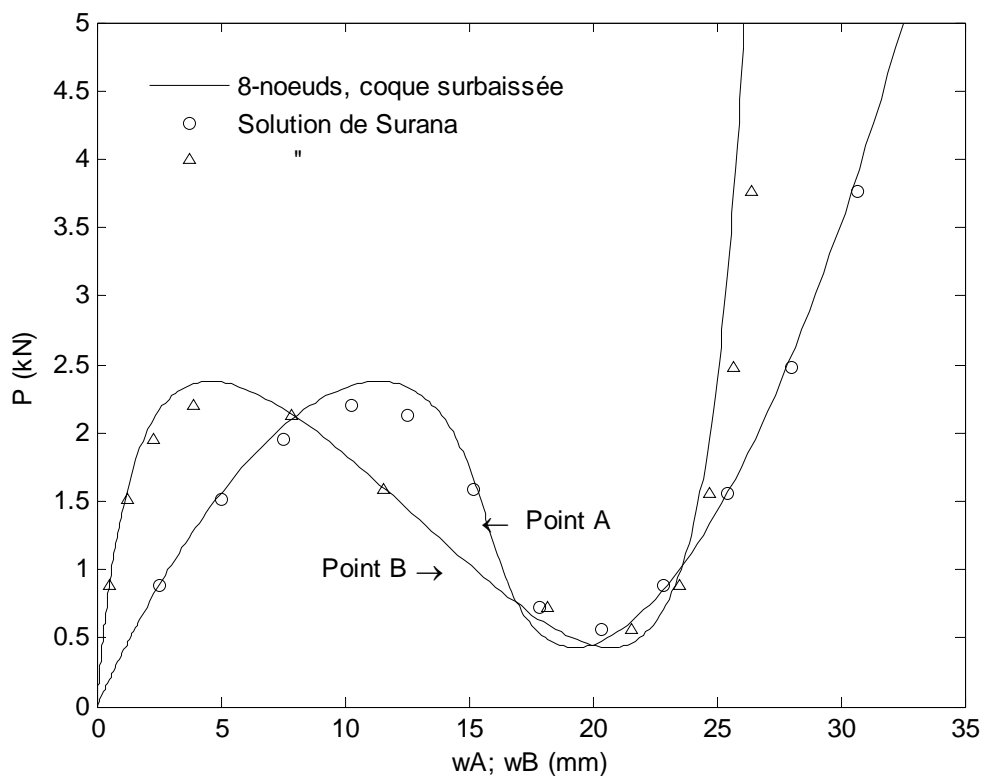


Figure 4.24. Courbes charge-flèche d'une coque soumise à une charge au centre.

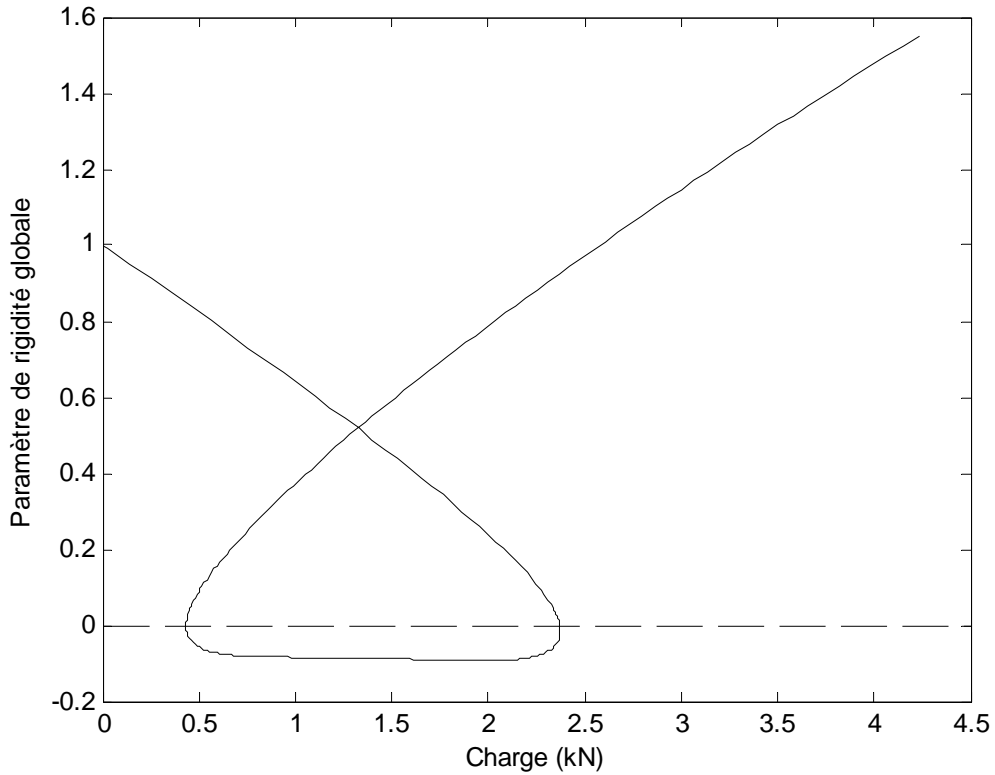


Figure 4.25. Paramètre de rigidité globale.

### 4.5.2.3. Cornière chargée sur son aile

$L=105.0$  inch

$b=5.0$  inch

$t=0.3125$  inch

$b/t=16$

$E=29000$  ksi

$\nu=0.3$

$P$ =Force de compression au milieu d'une aile

$w_A, v_A$ =déplacements du point A

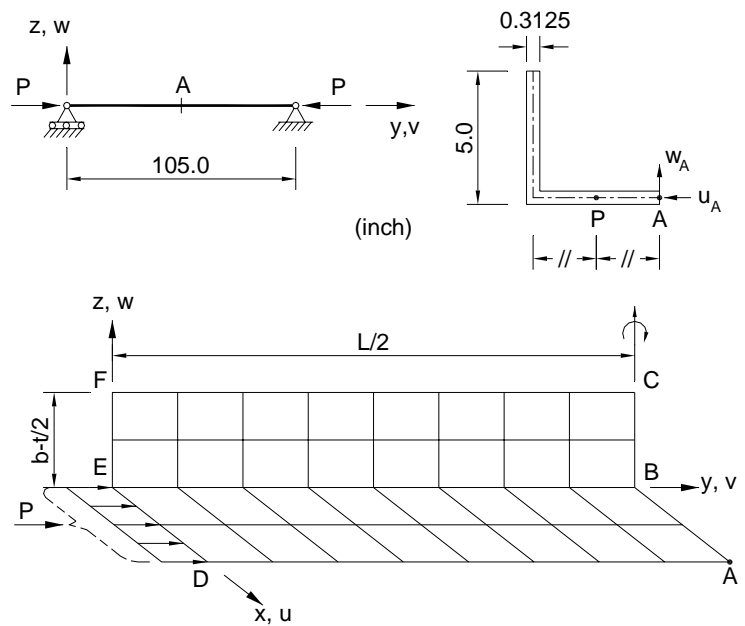


Figure 4.26. Cornière chargée sur son aile.

DE VILLE DE GOYET [D3-1989] a étudié avec son élément fini de type poutre-poteau, implanté dans le programme FINELG, le cas d'une cornière bi-appuyée en flexion et en torsion, sollicitée par une force axiale de compression appliquée au milieu d'une aile. Les dimensions géométriques sont données à la figure 4.26. La simulation numérique par notre programme FENALYSE est donnée aussi à la figure 4.25. Grâce à la symétrie, une moitié de la cornière est modélisée. Plusieurs discrétisations, 2x2x8, 2x2x12 et 2x2x16 éléments, sont utilisées. La charge concentrée P est remplacée par des charges uniformément réparties sur l'aile. L'indéformabilité de la section d'extrémité à gauche est assurée par les conditions d'appui. A l'extrémité gauche, sur l'aile DE, le déplacement  $w$  et la rotation  $\theta_y$  sont bloqués. Sur l'aile EF,  $u$  et  $\theta_y$  sont bloqués. A la section au centre,  $v$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_z$  sont bloqués sur les deux ailes.

Le calcul de stabilité est réalisé et comparé avec les résultats obtenus par le programme CUFSM 2.6 (méthode des bandes finies semi-analytiques classiques) de SCHAFER [S3-2003], par DE VILLE DE GOYET et JAAMEI dans la référence [D3-1989]. JAAMEI utilise aussi le programme FINELG avec les discrétisations de 2x4x32 et 2x2x32 éléments de coque pour toute la cornière. Le tableau 4.1 résume les différentes valeurs des charges critiques. Deux cas de charges sont examinés:

Cas 1: charge P, appliquée au centre de gravité de la section;

Cas 2: charge P, appliquée au point P (Fig. 4.26).

Les résultats obtenus avec l'élément fini à 8-nœuds de plaque déformable en cisaillement du programme FENALYSE s'accordent bien avec les résultats des autres auteurs.

Tableau 4.1. Forces critiques de la cornière.

$P_{cr}$ (kips)	DE VILLE DE GOYET	JAAMEI		CUFSM (SCHAFER)	FENALYSE		
		2x4x32	2x2x32		4x4	2x2x8	2x2x12
Maillage	10	2x4x32	2x2x32	4x4	2x2x8	2x2x12	2x2x16
Cas – mode							
Cas 1: Flexionnel	76.82	78.51	77.12	76.99	76.531	76.529	76.528
Cas 2: Flexio-torsionnel	59.36	-	60.46	-	58.891	58.890	58.889

Ensuite, on effectue le calcul non-linéaire géométrique élastique en utilisant les éléments de 8-nœuds de plaque et de coque surbaissée avec la charge P sur une aile (Fig. 4.26). La figure 4.27 représente les déplacements  $u_A$ ,  $w_A$  du point A situé à mi-longueur de la barre (Fig.4.26). On montre à la fois les résultats de JAAMEI, de DE VILLE DE GOYET et les nôtres.

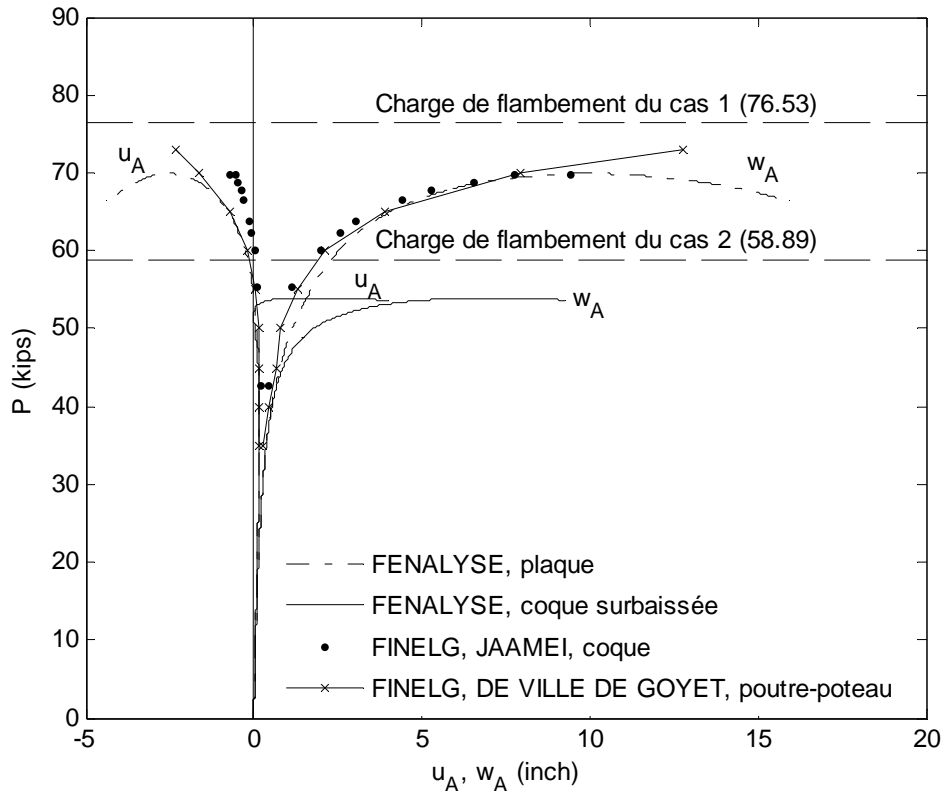


Figure 4.27. Courbes charge-déplacement de la cornière chargée sur son aile.

Pour l'élément de plaque, l'examen de la figure 4.27 montre que les déplacements  $w_A$  sont en bon accord avant la charge maximum, pour JAAMEI,  $P_{\max}=69.80$  kips et pour nous,  $P_{\max}=70.11$  kips. Après cette charge maximum, la courbe de DE VILLE DE GOYET reste stable et continue à monter, tandis que les courbes de JAAMEI et de l'auteur s'accordent encore bien et commencent à descendre. Pour les déplacements  $u_A$ , les courbes de JAAMEI et de l'auteur sont identiques jusqu'à la charge critique 58.89 kips du cas 2 dans le tableau 4.1; ensuite elles divergent. Les courbes de DE VILLE DE GOYET et de l'auteur sont identiques jusqu'à une certaine valeur proche de la charge maximum, puis la courbe de DE VILLE DE GOYET reste indéfiniment stable. La raison de la différence de comportement est due au fait que l'hypothèse de l'indéformabilité de la section de l'élément fini de poutre-poteau donne une rigidité trop grande à la cornière étudiée. C'est la limite de la théorie poutre-poteau que DE VILLE DE GOYET a commenté dans sa thèse [D3-1989]. La charge maximum donné par l'élément de plaque est plus élevée que la charge de flambement du cas 2 (58.89 kips) dans le tableau 4.1 mais plus petite que la charge de flambement du cas 1 (76.53 kips).

Avec l'élément de coque surbaissée, au début les courbes de  $w_A$  et  $u_A$  s'accordent très bien avec les autres courbes mais dans la suite elles divergent. La courbe de  $u_A$  est totalement différente des autres en donnant un même sens de déplacement que  $w_A$  aux charges très proches de la charge maximale. La charge maximale a la valeur de 53.94 kips qui est significativement inférieure à la charge de flambement du cas 2 (58.89 kips). Nous trouvons que l'élément de coque surbaissée est plus exact que notre élément de plaque et que l'élément de poutre-poteau de DE VILLE DE

GOYET et l'élément de coque de JAAMEI parce que notre élément de coque surbaissée donne une solution qui ne dépasse pas la charge de flambement du cas 2 correspondant.

#### **4.6. CONCLUSION**

Nous avons montré que les éléments non-linéaires de plaque et de coque surbaissée développés peuvent prédire le comportement non-linéaire pré- et post-critique des structures à parois minces. L'influence de la déformation fictive (Eq. 3.20) sur le comportement non-linéaire élastique a été montrée à travers le paramètre  $\alpha$ . Quelques valeurs de  $\alpha$  ont été examinées. Nous trouvons que plus  $\alpha$  est petit, plus les résultats non-linéaires sont exacts. Cependant, lorsque  $\alpha$  est trop petit, la convergence est difficile. Ainsi, nous décidons de choisir  $\alpha$  dans l'intervalle  $0.01 \div 0.001$  pour les calculs non-linéaires mixtes géométrique et matériel dans le chapitre 5 qui suit. Nous avons trouvé aussi que l'élément de coque surbaissée est plus adéquat pour l'analyse non-linéaire élastique des structures à parois minces que les éléments de plaque et nos éléments de plaque et de coque surbaissée ne s'appliquent qu'aux problèmes dont les rotations dans l'espace sont modérées.



# CHAPITRE 5. ANALYSE NON-LINEAIRE MIXTE GEOMETRIQUE ET MATERIELLE DES STRUCTURES A PAROIS MINCES

## 5.1. Introduction

Les modèles de plaques et de coques surbaissées déformables en cisaillement avec six degrés de liberté ont été appliqués avec succès dans l'analyse linéaire et non-linéaire géométrique élastique aux chapitres précédents. Ce chapitre étend ces modèles dans le domaine de non-linéarité élasto-plastique. En appliquant la théorie incrémentielle de la plasticité (*flow theory*, en anglais), la loi constitutive incrémentielle élasto-plastique peut être établie. La formulation de la description lagrangienne actualisée du chapitre 4 est toujours valable en remplaçant la loi constitutive incrémentielle élastique par la loi constitutive incrémentielle élasto-plastique. Afin d'examiner la propagation de la plasticité à travers l'épaisseur de la plaque et de la coque, on peut diviser la plaque et la coque en couches et appliquer le critère de plasticité pour chaque couche. Cette approche de couches est une approche largement utilisée. Ainsi, nous pouvons obtenir le comportement non-linéaire total de la structure.

## 5.2. Formulation

La formulation du principe incrémentiel de la description lagrangienne actualisée a été présentée pour l'analyse non-linéaire géométrique élastique. Pour tenir compte de la mixité non-linéaire géométrique et matérielle, il ne faut établir que la loi constitutive élasto-plastique que nous exposons plus loin en se basant essentiellement sur les présentations de FREY [F3-1978] et OWEN et HINTON [O1-1986]. Toutes les autres formules appliquées au domaine non-linéaire géométrique élastique dans le chapitre 4 restent valables. Comme nous l'avons abordé au chapitre 4, pour éviter les complications, nous présenterons la formulation pour la théorie des plaques et l'appliquerons à la théorie des coques surbaissées en ajoutant les termes linéaires omis dans la théorie des coques surbaissées.

### 5.2.1. Diagramme contrainte-déformation

On n'aborde que les effets macroscopiques et la relation multidimensionnelle est déduite du comportement observé sur éprouvette de traction.

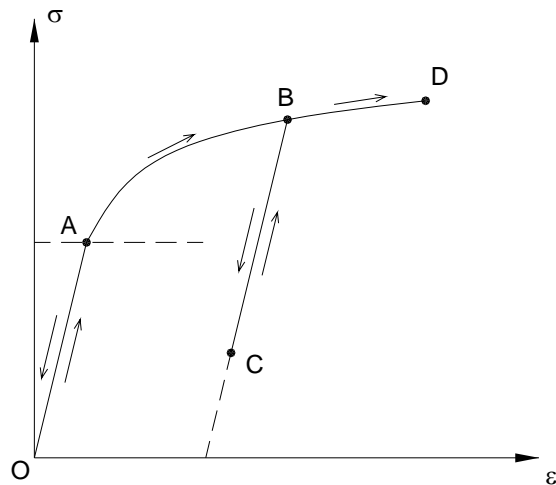


Figure 5.1. Comportement contrainte-déformation idéaliste.

OA: partie linéaire élastique réversible,

AD: partie plastique irréversible,

BC: déchargement élastique et rechargement élastique

La déformation limite à D (petites déformations,  $\varepsilon_{\max} \leq 5\%$ ).

## 5.2.2. Théorie incrémentielle de la plasticité

### 5.2.2.1. Hypothèses de base

Les hypothèses de bases pour la théorie incrémentielle de la plasticité présentée dans ce chapitre sont les suivantes:

(i) le matériau est isotrope;

(ii) les déformations sont petites et décomposables en parties élastique et plastique:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (5.1)$$

De plus, la déformation plastique est incompressible;

(iii) la plasticité est indépendante d'une contrainte hydrostatique;

(iii) l'écroutissage est isotrope (sans considérer l'effet BAUSCHINGER).

### 5.2.2.2. Surfaces de plasticité

L'état de contrainte peut se représenter généralement par un point dans l'espace à neuf dimensions des contraintes; l'origine est à l'état non-contraint de la configuration initiale du corps et, en son voisinage, il existe une zone où un accroissement des contraintes  $d\sigma_{ij}$  ne produit qu'un accroissement élastique des déformations  $d\varepsilon_{ij}^e$  ( $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ ). La frontière de cette zone est la surface de plasticité dont on suppose qu'elle existe. Elle se représente par l'équation:

$$F_o(\sigma_{ij}) = 0 \quad (5.2)$$

Lorsque l'érouissage se produit, cette surface change au fur et à mesure que les déformations plastiques progressent; l'expression mathématique de ces surfaces de plasticité successives s'appelle la fonction de charge; elle définit des régions successives dans lesquelles les points représentent des états élastiques et sur la frontière desquelles les points peuvent conduire à des états plastiques. Enfin, elle dépend de l'état de contrainte atteint  $\sigma_{ij}$ , de l'histoire des déformations plastiques  $\varepsilon_{ij}^p$  et de l'érouissage par l'intermédiaire d'un paramètre k. En résumé:

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = 0 \quad (5.3)$$

Les propriétés de la fonction de charge (5.3) sont telles que:

$F < 0$ , la structure est en état d'équilibre élastique;

$F = 0$ , la structure est en état d'équilibre élasto-plastique;

$F > 0$ , cas impossible.

Si  $\sigma_{ij}$  est tel que  $F=0$  qui constitue la condition de plasticité à partir de laquelle on peut définir trois cas de chargement différents, pour un accroissement de sollicitation donné; soit  $dF$  la variation correspondante de la fonction de charge:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial F}{\partial k} dk \quad (5.4)$$

(i)  $dF < 0$ ; alors  $F+dF < 0$  et l'état atteint est élastique; donc  $d\varepsilon_{ij}^p = dk = 0$  et on a un processus de déchargement élastique:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, F=0 \quad \text{cas de déchargement}$$

(ii)  $dF=0$ , alors  $F+dF=0$ , mais  $d\varepsilon_{ij}^p = 0$  (donc  $dk = 0$ ); ce processus, qui passe d'un état plastique à un autre sans variation des incréments des déformations plastiques, est appelé chargement neutre:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, F=0 \quad \text{cas de chargement neutre (comportement plastique pour un matériau parfaitement plastique) et le point de contraintes reste sur la surface de plasticité;}$$

(iii)  $dF=0$ , alors  $F+dF=0$ , mais  $d\varepsilon_{ij}^p \neq 0$ ,  $dk \neq 0$ ; ce processus fait passer d'un état plastique à un autre et s'appelle chargement:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0, F=0 \quad \text{cas de chargement plastique (comportement plastique pour un matériau avec érouissage) et le point se trouve sur une autre surface de plasticité plus grande.}$$

La figure 5.2 fait comprendre graphiquement ces trois possibilités.

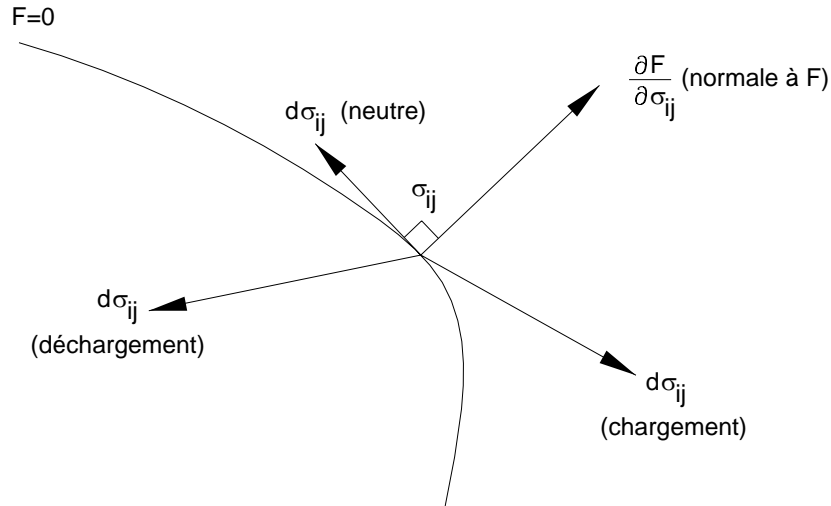


Figure 5.2. Chargement, chargement neutre et déchargement.

### 5.2.2.3. Postulat de DRUCKER

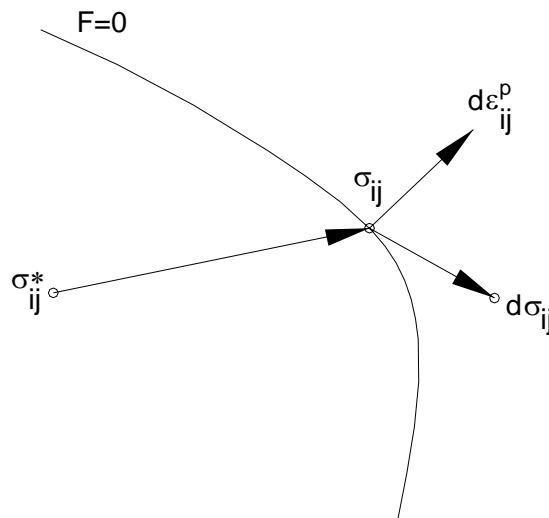


Figure 5.3. Postulat de DRUCKER.

Ce postulat, qui est une définition de l'écrouissage, s'énonce comme suit: soit  $\sigma_{ij}^*$  l'état de contrainte en un point d'un corps pour une sollicitation donnée; par une cause extérieure distincte de la sollicitation première, un état de contrainte additionnel est appliqué puis retiré lentement. Alors, pendant l'application seule, ou pendant le cycle complet (application – retrait), l'agent extérieur fournit un travail non-négatif.

Soit  $\sigma_{ij}^*$  (Fig. 5.3) l'état de contraintes existant; l'agent extérieur amène d'abord cet état sur la surface de plasticité au point  $\sigma_{ij}$  en suivant un chemin élastique; puis il provoque un accroissement  $d\sigma_{ij}$  des contraintes en domaine plastique, produisant des déformations tant élastiques  $d\varepsilon_{ij}^*$  que

plastiques  $d\varepsilon_{ij}^p$ ; enfin, il se retire et l'état de contrainte retourne au niveau  $\sigma_{ij}^*$  en suivant un chemin élastique. Dans ce cycle, le travail élastique est nul, de sorte que le travail de l'agent extérieur est (produit scalaire):

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)d\varepsilon_{ij}^p + d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (5.5)$$

Puisqu'on peut choisir  $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}$ , on a d'abord:

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (5.6)$$

et, puisque ce second terme est d'un ordre de grandeur inférieur au premier, ce dernier doit satisfaire:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (5.7)$$

Les égalités ont lieu pour le chargement neutre.

Les inégalités (5.6) et (5.7) ont des conséquences fondamentales sur la théorie de la plasticité, puisqu'on peut en déduire la forme des équations constitutives recherchées; deux propriétés principales se dégagent de ce postulat:

+ convexité: toute surface de plasticité  $F=0$  est convexe;

+ normalité: le vecteur incrémental des déformations plastiques est normal à la surface de plasticité.

La propriété de normalité se traduit par l'équation:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.8)$$

où  $d\lambda \geq 0$  est une constante nommée multiplicateur plastique.

#### 5.2.2.4. Surface de plasticité initiale

La surface de plasticité initiale  $F_o(\sigma_{ij}) = 0$  ne dépend que des contraintes puisque aucune déformation plastique n'a encore eu lieu. La surface de plasticité initiale doit être indépendante de l'orientation du système de coordonnées utilisé et elle doit être une fonction des trois invariants du tenseur des contraintes, seulement:

$$J_1 = \sigma_{ii} ; \quad J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} ; \quad J_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \quad (5.9)$$

La déformation plastique des métaux est indépendante d'un état de contrainte hydrostatique. Ainsi la surface de plasticité initiale ne dépend maintenant que de  $J_2'$  et  $J_3'$  (parce que  $J_1' = 0$ ):

$$F_o(J_2', J_3') = 0 \quad (5.10)$$

où  $J_2'$  et  $J_3'$  sont le second et le troisième invariants du tenseur déviateur des contraintes  $\sigma_{ij}'$ :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad i,j=1,2,3 \quad (5.10)$$

Les indices 1, 2, 3 sont attribués aux composantes de DESCARTES x, y, z, respectivement,  $\sigma_{11} = \sigma_{xx} = \sigma_x$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{xy} = \frac{1}{2} \tau_{xy}$ , etc.  $\delta_{ij}$  est le delta de KRONECKER qui est égal à 1 si  $i=j$  et à 0 si  $i \neq j$ .

$J_2'$  et  $J_3'$  sont donnés par:

$$J_2' = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} ; \quad J_3' = \frac{1}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad (5.11)$$

### 5.2.2.5. Critère de plasticité

On appelle critère de plasticité une loi qui définit explicitement la forme de la surface de plasticité. Les deux critères couramment employés sont les critères de TRESCA et de VON MISES (voir par exemple [M9-1976]).

#### 5.2.2.5.1. Critère de TRESCA

Le critère de TRESCA (1864) postule que, dans tous les états de contrainte possibles, les déformations plastiques se produisent au moment où la contrainte de cisaillement maximale atteint une valeur déterminée, caractéristique du métal considéré. Si les contraintes principales sont  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  où  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , la contrainte de cisaillement maximale est donnée par la formule  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ .

Le critère de TRESCA peut être écrit  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = C$  où C est une constante universelle du métal considéré. En appliquant ce critère en traction pure où  $\sigma_1 = \sigma_{y_0}, \sigma_{\min} = 0$ , on obtient  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sigma_{y_0}$ .

Il est équivalent d'écrire:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_{y_0} = 0 \quad (5.12)$$

où  $\sigma_{y_0}$  est la limite élastique initiale en traction pure.

En considérant tous les autres contraintes maximales de cisaillement possibles (par exemple  $\sigma_2 - \sigma_1$  si  $\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$ ), on peut montrer que dans le système d'axes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (Fig. 5.4), ce critère correspond au prisme hexagonal régulier d'équations:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_{y_0} ; \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_{y_0} ; \quad \sigma_3 - \sigma_1 = \pm \sigma_{y_0} ; \quad (5.13)$$

L'axe du prisme coïncide avec la diagonale de l'espace, qui est définie par les points  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  et, comme chaque section droite du prisme est identique (une conséquence de l'hypothèse que la plasticité est indépendante d'une contrainte hydrostatique), il est avantageux de représenter

géométriquement la surface de plasticité en la projetant sur le plan nommé  $\pi$ ,  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ , comme indique la figure 5.4.

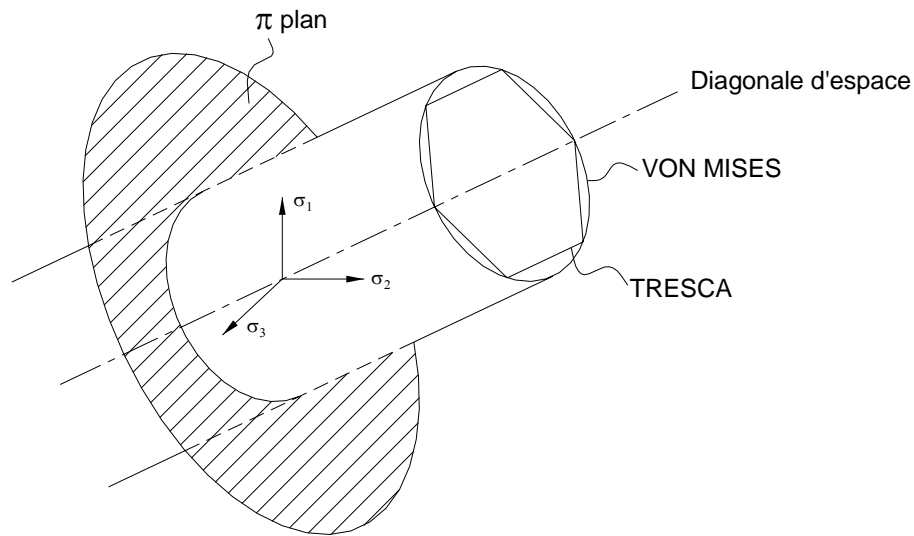


Figure 5.4. Représentation géométrique des critères de plasticité de TRESCA et de VON MISES dans le système spatial des contraintes principales.

#### 5.2.2.5.2. Critère de VON MISES

Le prisme hexagonal représentant le critère de TRESCA (Fig. 5.4) est une surface discontinue possédant six expressions analytiques distinctes. Cette discontinuité entraîne des difficultés mathématiques évidentes dans l'application du critère. Pour les éviter, VON MISES a proposé en 1913 de modifier légèrement ce prisme et de le remplacer par le cylindre circulaire circonscrit (Fig. 5.4) d'équation:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{yo}^2 \quad (5.14)$$

Le lieu de plasticité dans le plan  $\pi$  est la circonférence circonscrite à l'hexagone de TRESCA (Fig. 5.5).

On peut vérifier que l'équation de ce cylindre peut s'écrire:

$$J_2' = C \quad \text{avec} \quad C = \frac{\sigma_{yo}^2}{3} \quad (5.15)$$

En substituant la formule pour  $J_2'$  (Eqs. (5.11)), la condition de plasticité initiale de VON MISES prend la forme classique:

$$\sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_{ij}'\sigma_{ij}')} - \sigma_Y = \bar{\sigma} - \sigma_{yo} = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_{ij}'\sigma_{ij}')} \quad (5.16)$$

où  $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_{ij}'\sigma_{ij}')}$  s'appelle la contrainte de comparaison (contrainte effective ou équivalente).

Les expériences réalisées pour la plupart des métaux montrent que les points expérimentaux sont plus proches du critère de VON MISES que de TRESCA [C16-2000]. La différence maximale entre les deux critères apparaît en cisaillement pur (Fig. 5.5), pour lequel le critère de VON MISES prédit une contrainte de plasticité qui est  $2/\sqrt{3} = 1.155$  fois celle de TRESCA.

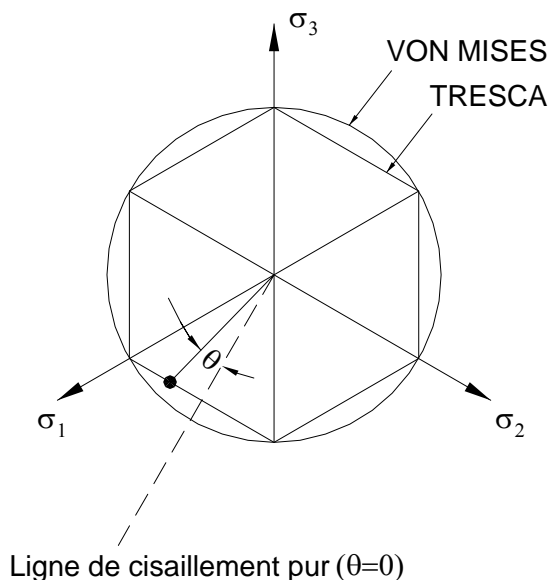


Figure 5.5. Représentation bidimensionnelle des critères de plasticité de TRESCA et de VON MISES.

### 5.2.2.6. Ecrouissage isotrope

La loi d'écrouissage isotrope postule essentiellement que la fonction de charge est obtenue par une expansion uniforme de la surface de plasticité initiale dans tous les sens. Cette loi est en contradiction directe avec l'effet BAUSCHINGER, et conserve l'isotropie. On en déduit que la fonction de charge a la même forme que le critère de plasticité initial, que seule la constante qui y apparaît devient fonction d'une certaine mesure de l'écrouissage (paramètre  $k$ ), et que la détermination expérimentale de cette fonction est indépendante de la sollicitation, c'est-à-dire qu'on peut l'obtenir par un essai de traction simple.

La fonction de charge (5.3) est représentée par la formule suivante:

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = 0 \rightarrow F(\sigma_{ij}, k) = f(\sigma_{ij}) - \sigma_Y(k) = 0 \quad (5.17)$$

où  $f(\sigma_{ij})$  est la contrainte de comparaison,  $\sigma_Y(k)$  est la limite élastique en traction simple, et où la dépendance fondamentale de  $F$  par rapport à  $\varepsilon_{ij}^p$ , qui semble avoir disparu, est en fait maintenue par l'intermédiaire de  $k$ , qui dépend de l'histoire des déformations plastiques.

Lorsque le critère de plasticité de VON MISES est appliqué, la contrainte de comparaison est donnée par:



$$f(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma'_{ij}\sigma'_{ij})} \quad (5.18)$$

Pour l'essai de traction uni-axial  $\sigma_1=\sigma$ ,  $\sigma_2=\sigma_3=0$ , et:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\sigma\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sigma\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sigma\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \sigma \quad (5.19)$$

Afin de compléter la loi d'érouissage, c'est nécessaire de relier  $\bar{\sigma}$  à une mesure appropriée des déformations plastiques. Comme première hypothèse, on suppose que  $\bar{\sigma}$  est une fonction du travail plastique total par unité volumique que l'on appelle l'hypothèse du travail d'érouissage:

$$W^p = \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (5.20)$$

Le paramètre d'érouissage  $k$  est supposé défini par:

$$k = W^p \quad (5.21)$$

Alternativement, une hypothèse qui est nommée l'hypothèse de la déformation d'érouissage, suppose que  $\bar{\sigma}$  est une fonction d'une mesure convenable de la déformation plastique de comparaison que l'on appelle l'hypothèse de la déformation d'érouissage. Correspondant à l'expression de  $\bar{\sigma}$ , on introduit un scalaire positif  $d\bar{\varepsilon}^p$  nommé la déformation plastique incrémentielle de comparaison:

$$d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}(d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p)} \quad (5.22)$$

Pour le cas uni-axial, si la déformation plastique incrémentielle dans la direction du chargement est  $d\varepsilon^p$ , alors  $d\varepsilon_1^p = d\varepsilon^p$ , car la déformation plastique est supposée incompressible, le coefficient de POISSON est effectivement égal à 0.5 et  $d\varepsilon_2^p = -\frac{1}{2}d\varepsilon^p$ ,  $d\varepsilon_3^p = -\frac{1}{2}d\varepsilon^p$ . Alors, la déformation plastique incrémentielle effective (5.22) devient:

$$d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\left[(d\varepsilon^p)^2 + \left(-\frac{1}{2}d\varepsilon^p\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}d\varepsilon^p\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = d\varepsilon^p \quad (5.23)$$

Le paramètre d'érouissage  $k$  est supposé défini par:

$$k = \bar{\varepsilon}^p = \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} d\bar{\varepsilon}^p \quad (5.24)$$

où  $\bar{\varepsilon}^p$  est le résultat de l'intégration de  $d\bar{\varepsilon}^p$  au cours de la déformation.

La pente locale de la courbe contrainte - déformation plastique est défini par:

$$H(\bar{\varepsilon}^p) = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p} \quad (5.25)$$

Pour le cas uni-axial:

$$H(\bar{\varepsilon}^p) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon^e} = \frac{1}{d\varepsilon/d\sigma - d\varepsilon^e/d\sigma} = \frac{1}{1/E_t - 1/E}$$

$$H = \frac{E_t}{1 - E_t/E} \quad (5.26)$$

où H est nommé le module plastique; E, E<sub>t</sub> sont le module d'élasticité et le module tangent élasto-plastique, respectivement.

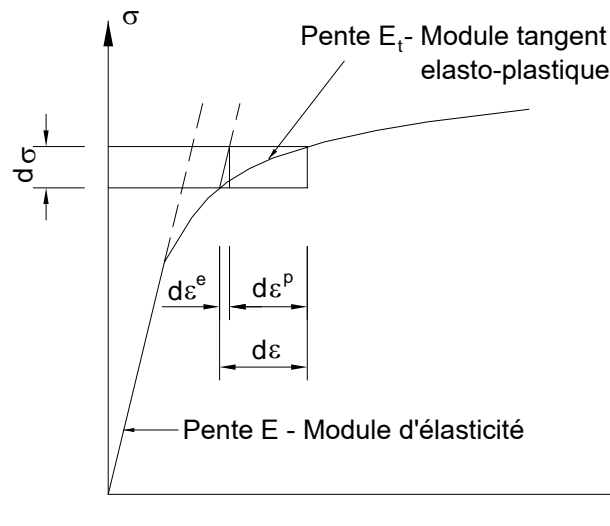


Figure 5.6. Comportement d'érouissage élasto-plastique pour le cas uni-axial.

### 5.2.2.7. Loi constitutive incrémentielle en forme matricielle

La fonction de charge (5.17) est réécrite ici:

$$F(\{\sigma\}, k) = 0 \quad (5.27)$$

où  $\{\sigma\}$  est le vecteur des contraintes et k est le paramètre d'érouissage, qui gouvernent l'expansion de la surface de plasticité.

Particulièrement, pour l'hypothèse du travail d'érouissage (5.20) et (5.21):

$$dk = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon^p\} \quad (5.28)$$

Pour l'hypothèse de la déformation d'érouissage (5.22) et (5.24):

$$dk = d\bar{\varepsilon}^p \quad (5.29)$$

En différentiant (5.27), on a:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (5.30)$$

On réécrit (5.30) sous la forme suivante:

$$\{a\}^T \{d\sigma\} - Ad\lambda = 0 \quad (5.31)$$

avec

$$\{a\}^T = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (5.32)$$

et

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial k} dk \quad (5.33)$$

Le vecteur  $\{a\}$  est nommé le vecteur incrémental. Après la plasticité initiale, le changement de déformation est supposé décomposable en composantes élastique et plastique  $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$ .

La déformation incrémentielle élastique est reliée à la contrainte incrémentielle par la loi de HOOKE:

$$\{d\sigma\} = [D] \{d\varepsilon^e\} \quad (5.34)$$

ou

$$\{d\varepsilon^e\} = [D]^{-1} \{d\sigma\} \quad (5.35)$$

où  $[D]$  est la matrice usuelle des constantes élastiques.

La relation entre la déformation incrémentielle plastique et la contrainte incrémentielle est obtenue à partir de la condition de normalité (5.8):

$$\{d\varepsilon^p\}^T = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (5.36)$$

Par conséquent:

$$\{d\varepsilon\} = [D^{-1}] \{d\sigma\} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (5.37)$$

En pré-multipliant les deux membres de (5.37) par  $\{d\sigma\}^T = \{a\}^T [D]$  et en considérant les équations (5.31) et (5.32), on obtient le multiplicateur plastique  $d\lambda$ :

$$d\lambda = \frac{1}{\left(A + \{a\}^T [D] \{a\}\right)} \{a\}^T [D] \{d\varepsilon\} \quad (5.38)$$

En substituant (5.38) à (5.37), on obtient la relation élasto-plastique incrémentielle entre les contraintes et les déformations:

$$\{d\sigma\} = [D^{ep}] \{d\varepsilon\} \quad (5.39)$$

avec

$$[D^{ep}] = [D] - \frac{\{d_D\} \{d_D\}^T}{A + \{d_D\}^T \{a\}} \quad \text{où} \quad \{d_D\}^T = \{a\}^T [D] \quad (5.40)$$

Maintenant, il reste à déterminer explicitement l'expression du scalaire A (Eq. (5.33)). L'hypothèse du travail d'érouissage est employée dans ce travail; on a:

$$dk = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon^p\} \quad (5.41)$$

L'équation (5.27) peut être réécrite sous la forme (voir (5.17)):

$$F(\{\sigma\}, k) = f(\{\sigma\}) - \sigma_Y(k) = 0 \quad (5.42)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial k} = -\frac{d\sigma_Y}{dk} \quad (5.43)$$

En substituant (5.43) à (5.33):

$$A = \frac{1}{d\lambda} \frac{d\sigma_Y}{dk} dk \quad (5.44)$$

En substituant (5.32) et (5.36) à (5.41):

$$dk = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon^p\} = \{\sigma\}^T d\lambda \{a\} = d\lambda \{a\}^T \{\sigma\} \quad (5.45)$$

Pour le cas uni-axial  $\sigma = \bar{\sigma} = \sigma_Y$  et  $d\varepsilon^p = d\varepsilon^{\bar{p}}$  où  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\varepsilon}^p$  sont la contrainte de comparaison et la déformation plastique de comparaison, respectivement. Ainsi, (5.45) devient:

$$dk = \sigma_Y d\varepsilon^{\bar{p}} = d\lambda \{a\}^T \{\sigma\} \quad (5.46)$$

En outre, de (5.24) on a:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon^{\bar{p}}} = \frac{d\sigma_Y}{d\varepsilon^p} = H \quad (5.47)$$

OWEN et HINTON [O1-1986] et CRISFIELD [C16-1991] ont utilisé le théorème d'EULER qui est applicable aux fonctions homogènes de premier ordre, pour justifier à partir de (5.42) que:

$$\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \{\sigma\} = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \{\sigma\} = \sigma_Y \quad (5.48)$$

En considérant l'équation (5.32), on a:

$$\{a\}^T \{\sigma\} = \sigma_Y \quad (5.49)$$

Substituant (5.47) et (5.49) à (5.46) et (5.44), on obtient:

$$d\lambda = d\bar{\varepsilon}^p \quad (5.50a)$$

$$A = H \quad (5.50b)$$

Par conséquent, (5.40) devient:

$$[D^{ep}] = [D] - \frac{\{d_D\}\{d_D\}^T}{H + \{d_D\}\{a\}} \quad (5.51)$$

### 5.2.2.8. Formes alternatives des critères de plasticité et détermination du vecteur incrémental

Pour le calcul numérique, il est intéressant de réécrire les critères de plasticité en termes des invariants des contraintes. Cette formulation est due à NAYAK et ZIENKIEWICZ [N2-1972]. Les contraintes déviatrices principales  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$  sont déterminées comme les racines de l'équation cubique:

$$t^3 - J'_2 t - J'_3 = 0 \quad (5.52)$$

Notant l'identité trigonométrique:

$$\sin^3 \theta - \frac{3}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 3\theta = 0 \quad (5.53)$$

Substituant  $t = r \sin \theta$  à (5.52), on a:

$$\sin^3 \theta - \frac{J'_2}{r^2} \sin \theta - \frac{J'_3}{r^3} = 0 \quad (5.54)$$

Comparant (5.53) et (5.54):

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} (J'_2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.55)$$

$$\sin 3\theta = -\frac{4J'_3}{r^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J'_3}{(J'_2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.56)$$

La première racine de l'équation (5.56) avec  $\theta$  déterminé pour  $3\theta$  dans l'intervalle  $\pm\pi/2$  est une alternative commode pour le troisième invariant,  $J_3$ . En notant la nature cyclique de  $\sin(3\theta + 2n\pi)$ , nous avons immédiatement les trois (et trois seules) valeurs possibles de  $\sin\theta$  pour définir trois contraintes principales déviatrices  $t = r \sin \theta$ . En substituant pour  $r$  de (5.55) et en additionnant la moyenne des contraintes hydrostatiques, on obtient les contraintes principales:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2(J_2')^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\theta \\ \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \end{Bmatrix} + \frac{J_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.57)$$

avec  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  et  $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ .

Les critères de plasticité de TRESCA et de VON MISES sont représentés à l'état courant des contraintes suivant la loi d'érouissage isotrope.

#### *Critère de TRESCA*

En substituant pour  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  de (5.57) à (5.12), on a:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}(J_2')^{\frac{1}{2}} \left[ \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \right] - \sigma_Y(k) = 0 \quad (5.58)$$

ou en étendant (5.58), on obtient:

$$2(J_2')^{\frac{1}{2}} \cos\theta - \sigma_Y(k) = 0 \quad (5.59)$$

L'interprétation physique de  $\theta$  est évident sur la figure 5.5.

#### *Critère de VON MISES*

Il n'y a pas de changement dans ce cas car ce critère de plasticité ne dépend que de  $J_2'$ . A partir de l'équation (5.15), on a:

$$\sqrt{3}(J_2')^{\frac{1}{2}} - \sigma_Y(k) = 0 \quad (5.60)$$

Afin de calculer la matrice  $[D^{ep}]$  dans l'équation (5.51), il faut exprimer le vecteur incrémental  $\{a\}$  sous forme convenable pour le calcul numérique. Le vecteur incrémental  $\{a\}$  (Eq. (5.32)) peut être écrit:

$$\{a\}^T = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \frac{\partial F}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial (J_2')^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial (J_2')^{\frac{1}{2}}}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} \quad (5.61)$$

En différenciant (5.56), on obtient:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \left[ \frac{1}{(J_2')^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}} - \frac{3J_3}{(J_2')^2} \frac{\partial (J_2')^{\frac{1}{2}}}{\partial \{\sigma\}} \right] \quad (5.62)$$

En substituant (5.62) à (5.61) et en utilisant (5.56), on peut exprimer:

$$\{a\} = C_1 \{a_1\} + C_2 \{a_2\} + C_3 \{a_3\} \quad (5.63)$$

où

$$\{a_1\}^T = \frac{\partial J_1}{\partial \{\sigma\}} \quad (5.64a)$$

$$\{a_2\}^T = \frac{\partial (J_2')^{\frac{1}{2}}}{\partial \{\sigma\}} \quad (5.64b)$$

$$\{a_3\}^T = \frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}} \quad (5.64c)$$

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial J_1} \quad (5.65a)$$

$$C_2 = \left( \frac{\partial F}{\partial (J_2')^{\frac{1}{2}}} - \frac{\tan 3\theta}{(J_2')^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \quad (5.65b)$$

$$C_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(J_2')^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (5.65c)$$

Seuls les constantes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont nécessaires pour définir la surface de plasticité. Les constantes  $C_i$  sont données dans le tableau 5.1 pour les deux critères de TRESCA et de VON MISES.

Tableau 5.1. Les constants définissent la surface de plasticité.

Critère de plasticité	$C_1$	$C_2$	$C_3$
TRESCA	0	$2\cos\theta(1+\tan\theta\tan3\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{J_2'} \frac{\sin\theta}{\cos 3\theta}$
VON MISES	0	$\sqrt{3}$	0

### 5.2.3. Expressions de base pour les plaques déformables en cisaillement

Pour la théorie des plaques déformables en cisaillement, les expressions générales du paragraphe 5.2.2 doivent être modifiées. Premièrement, c'est la suppression de la contrainte  $\sigma_z$  dans la direction de l'épaisseur de la plaque qui est supposée égale à zéro et, en conséquence, la déformation  $\varepsilon_z$  est éliminée. Deuxièmement, c'est l'ignorance des contraintes de cisaillement

transversal  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  en comportement plastique car leur influence est très petite par rapport à  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ .

D'abord, on peut explicitement obtenir les expressions pour  $\sigma_x'$ ,  $\sigma_y'$ ,  $\sigma_z'$ ,  $\tau_{xy}'$ ,  $J_2'$  et  $J_3'$ :

$$\sigma_x' = \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3} \quad (5.66a)$$

$$\sigma_y' = \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3} \quad (5.66b)$$

$$\sigma_z' = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{3} \quad (5.66c)$$

$$\tau_{xy}' = \tau_{xy} \quad (5.66d)$$

$$J_2' = \frac{1}{2}(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2) + \tau_{xy}^2 \quad (5.67a)$$

$$J_3' = \sigma_z'(\sigma_x'^2 - J_2') \quad (5.68b)$$

La relation pour l'état élastique isotrope peut être écrite:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (5.69)$$

où

$$\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xy}^*, \tau_{xz}, \tau_{yz}]^T = [\{\sigma_{pb}\}^T, \{\tau_s\}^T]^T \quad (5.70)$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xy}^*, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T = [\{\varepsilon_{pb}\}^T, \{\gamma_s\}^T]^T \quad (5.71)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_{pb}] & 0 \\ 0 & [D_s] \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

avec

$$[D_{pb}] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

$$[D_s] = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

La relation incrémentielle élasto-plastique contrainte-déformation est donnée par:



$$\begin{bmatrix} \{d\sigma_{pb}\} \\ \{d\tau_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_{pb}^{ep}] & 0 \\ 0 & [D_s] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{d\varepsilon_{pb}\} \\ \{d\varepsilon_s\} \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

dans lequel  $[D_{pb}^{ep}]$  est identique à l'équation (5.51) pour l'élasto-plasticité. Tandis que  $D_s$  est supposé rester toujours en élasticité.

$$[D_{pb}^{ep}] = [D_{pb}] - \frac{\{d_D\}\{d_D\}^T}{H + \{d_D\}\{a\}} \quad (5.74)$$

où

$$\{a\} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right]^T \quad (5.75)$$

$$\{d_D\} = [D_{pb}]\{a\} \quad (5.76)$$

La plaque est divisée en couches à travers l'épaisseur et le comportement élasto-plastique est évalué pour chaque couche.

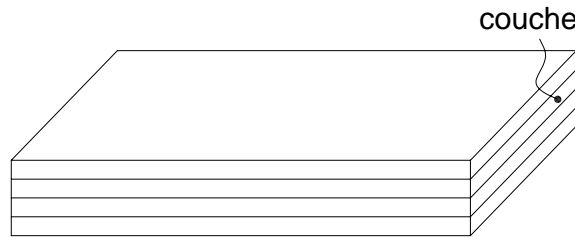


Figure 5.7. Division d'une plaque en couches.

La forme spécifique du vecteur  $a$  est encore donnée à partir des équations (5.63) et (5.64):

$$\{a_1\}^T = \frac{\partial J_1}{\partial \{\sigma\}} = \{1, 1, 0\} \quad (5.77a)$$

$$\{a_2\}^T = \frac{\partial (J_2')^{\frac{1}{2}}}{\partial \{\sigma\}} = \frac{1}{2(J_2')^{\frac{1}{2}}} \{\sigma'_x, \sigma'_y, 2\tau_{xy}\} \quad (5.77b)$$

$$\{a_3\}^T = \frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}} = \left\{ \left( \sigma'_y \sigma'_z + \frac{J_2'}{3} \right), \left( \sigma'_x \sigma'_z + \frac{J_2'}{3} \right), -2\sigma'_z \tau_{xy} \right\} \quad (5.77c)$$

Pour compléter la matrice élasto-plastique  $[D_{pb}^{ep}]$  de (5.74), on a besoin de déterminer  $\{d_D\}$  de (5.63), (5.76) et (5.77).

$$\{d_D\} = [D_{pb}]\{a\} = [D_{pb}](C_1\{a_1\} + C_2\{a_2\} + C_3\{a_3\}) \quad (5.78)$$

#### 5.2.4. Points singuliers sur la surface de plasticité

Pour le critère de TRESCA, le vecteur incrémental n'est pas uniquement défini aux coins positionnés à  $\theta = \pm 30$  et la direction de la déformation plastique  $y$  est indéterminée. On voit aussi dans le tableau 5.1 que pour ces valeurs de  $\theta$ ,  $C_2$  et  $C_3$  deviennent indéterminés. Cette difficulté peut être surmontée par le retour à l'expression (5.59) du critère de TRESCA et on le réécrit pour les valeurs explicites  $\theta = \pm 30$  :

$$\sqrt{3}(J_2')^{\frac{1}{2}} - \sigma_Y(k) = 0 \quad (5.79)$$

Alors, de (5.65) on obtient:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \sqrt{3}, \quad C_3 = 0 \quad \text{pour } \theta = \pm 30 \quad (5.80)$$

Physiquement, car (5.79) est le critère de VON MISES, c'est équivalent d'énoncer que la direction de la déformation plastique aux coins du critère de TRESCA est donnée par le cercle de VON MISES qui passe aussi en ces coins (Fig. 5.5).

Pour la pratique, OWEN et HINTON [O1-1986] ont conseillé d'utiliser les expressions générales de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  dans le tableau 5.1 pour toutes les valeurs de  $|\theta| \leq 29^\circ$  et puis d'employer (5.80) pour le critère de TRESCA au voisinage des coins.

#### 5.2.5. Transcription en grands déplacements

Grâce aux deux hypothèses d'isotropie et de petites déformations, on peut transposer directement les lois constitutives précédentes de la théorie infinitésimale à celle des grands déplacements en remplaçant simplement:

- + les déformations infinitésimales par celles de GREEN;
- + les contraintes (vraies) par celles de PIOLA-KIRCHHOFF N°2.

### 5.3. Types des modèles matériels

Les types des modèles matériels qui proviennent de la traction uni-axiale d'éprouvettes, introduits dans le programme FENALYSE, sont les suivants: parfaitement élastique (Fig. 5.8a), élastique-parfaitement plastique (bi-linéaire, Fig. 5.8b), élastique-plastique + écrouissage (tri-linéaire et multilinéaire, Figs. 5.8c et 5.8d) et lois de RAMBERG-OSGOOD (Fig. 5.8e) et de RAMBERG-OSGOOD modifiée par RASSMUSSEN [R7-2003] (Fig. 5.8f).

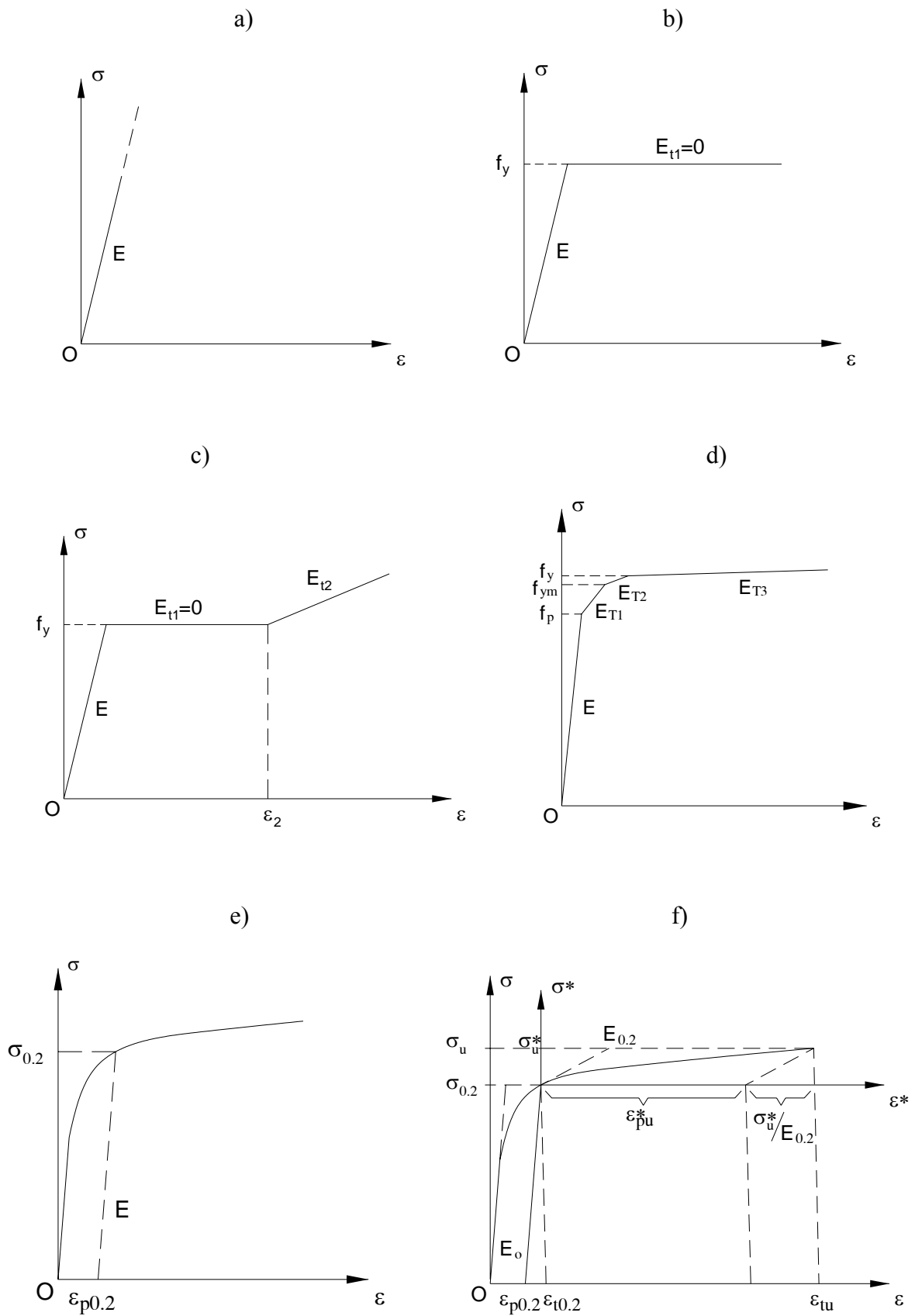


Figure 5.8. Modèles matériels utilisés dans le programme FENALYSE.

#### 5.4. Stratégie de solution à l'intérieur d'un pas

La méthode de RIKS modifiée par RAMM (voir paragraphe 4.4, chapitre 4) est employée pour la résolution des problèmes non-linéaires élasto-plastiques. Durant l'application d'un incrément, un élément ou une partie d'un élément peut être plastifié. Toutes les contraintes et les déformations sont notées à chaque point d'intégration de GAUSS et alors, on peut déterminer si la déformation plastique se produit à ce point. Par conséquent, un élément peut se comporter partiellement élastique et élasto-plastique si quelques points de GAUSS indiquent la plasticité. Pour un incrément de charge quelconque, il est nécessaire de déterminer quelle proportion est élastique et quelle proportion se plastifie et puis régler les contraintes et les déformations jusqu'à la satisfaction du critère de plasticité et des modèles matériels. La procédure adoptée est la suivante:

1<sup>er</sup> pas. La force appliquée pour la i<sup>e</sup> itération sont les forces résiduelles  $\{R_{i-1}\}$  qui causent les déplacements incrémentiels  $\{du^{(i)}\}$  et les déformations incrémentielles  $\{d\varepsilon^{(i)}\}$ .

2<sup>e</sup> pas. Calculer les contraintes incrémentielles,  $\{d\sigma^{(i)e}\}$  telles que  $\{d\sigma^{(i)e}\} = [D]\{d\varepsilon^{(i)}\}$  où l'indice supérieur e désigne que l'on suppose le comportement élastique.

3<sup>e</sup> pas. Accumuler les contraintes totales pour chaque point de GAUSS telles que  $\{\sigma_i^e\} = \{\sigma_{i-1}\} + \{d\sigma^{(i)e}\}$  où  $\{\sigma_{i-1}\}$  sont les contraintes notées de la (i-1)<sup>e</sup> itération.

4<sup>e</sup> pas. Le pas subséquent dépend de savoir si la plasticité a lieu au point de GAUSS durant la (i-1)<sup>e</sup> itération. On note que  $\bar{\sigma}_{i-1}$  est la contrainte de comparaison,  $\sigma_Y$  est la contrainte de plasticité uni-axiale courante, toutes sont données dans le tableau 5.2, H est le paramètre d'écrouissage linéaire et  $\bar{\varepsilon}_{i-1}^p$  est la déformation plastique de comparaison existant à la fin de la (i-1)<sup>e</sup> itération.

Tableau 5.2. Contrainte effective et contrainte de plasticité uni-axiale pour les critères de plasticité de TRESCA et de VON MISES.

Critère de plasticité	Contrainte de comparaison	Contrainte de plasticité uni-axiale
TRESCA	$2(J_2')^{\frac{1}{2}} \cos \theta$	$\sigma_Y$
VON MISES	$\sqrt{3}(J_2')^{\frac{1}{2}}$	$\sigma_Y$

On vérifie si  $\bar{\sigma}_{i-1} > \sigma_Y = \sigma_Y^o + H \bar{\varepsilon}_{i-1}^p$ . Si la réponse est:

OUI		NON	
<p>Le point de GAUSS a été précédemment plastifié. Maintenant, vérifier si <math>\bar{\sigma}_i^e &gt; \bar{\sigma}_{i-1}</math> où <math>\bar{\sigma}_i^e</math> est la contrainte de comparaison basée sur les contraintes <math>\{\sigma_i^e\}</math>. Si la réponse est:</p>		<p>C'est que le point de GAUSS n'est pas précédemment plastifié. Maintenant, vérifier si <math>\bar{\sigma}_i^e &gt; \sigma_Y</math>. Si la réponse est:</p>	
NON	OUI	NON	OUI
<p>Le point de GAUSS est déchargé mais on doit vérifier si c'est une vraie ou fausse décharge (Fig. 5.9). La solution suivante est adoptée dans ce travail [F3-1978]: + 1<sup>ère</sup> itération: c'est la vraie décharge élastique et aller directement au 7<sup>e</sup> pas. + Itérations suivantes: on doit vérifier</p> <p>a/ <math>\bar{\varepsilon}_i &gt; \bar{\varepsilon}_n</math>, fausse décharge, suivre le chemin 1→3, on prend <math>R=1</math> (Eq. 5.81) et va au pas subséquent,</p> <p>b/ <math>\bar{\varepsilon}_i &lt; \bar{\varepsilon}_n</math>, vraie décharge, suivre le chemin 1→2, aller au 7<sup>e</sup> pas.</p> <p>où <math>\bar{\varepsilon}_i</math> est la déformation totale de comparaison à la i<sup>e</sup> itération courante et <math>\bar{\varepsilon}_n</math> est la déformation totale de comparaison obtenue avant l'application de l'incrément des sollicitations extérieures.</p>	<p>Le point de GAUSS a été précédemment plastifié et les contraintes augmentent encore. Ainsi, toutes les contraintes qui excèdent <math>(\{\sigma_i^e\} - \{\sigma_{i-1}\})</math> doivent être réduites à la surface de plasticité comme indiqué la figure 5.10. Alors, le facteur R (Eq. 5.81) qui définit la portion des contraintes qui doit être modifiée afin de satisfaire le critère de plasticité, est égal à 1.</p>	<p>Le point de GAUSS est encore élastique et ainsi aller directement au 7<sup>e</sup> pas.</p>	<p>Le point de GAUSS est plastifié durant l'application de charge correspondant à cette itération comme indique la figure 5.11. La portion des contraintes plus grande que la valeur de plasticité doit être réduite à la surface de plasticité. Le facteur de réduction R est donné sur la figure 5.11.</p> $R = \frac{AB}{AC} = \frac{\bar{\sigma}_i^e - \sigma_Y}{\bar{\sigma}_i^e - \bar{\sigma}_{i-1}} \quad (5.81)$

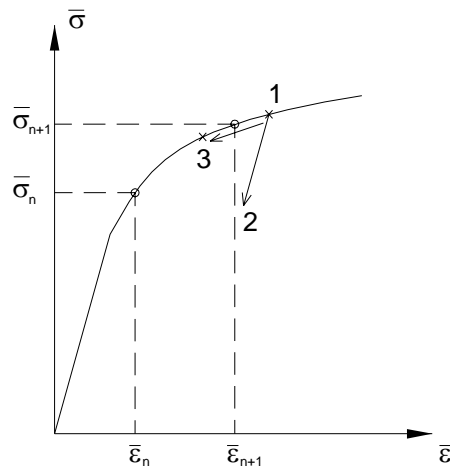


Figure 5.9. Vraie ou fausse décharge.

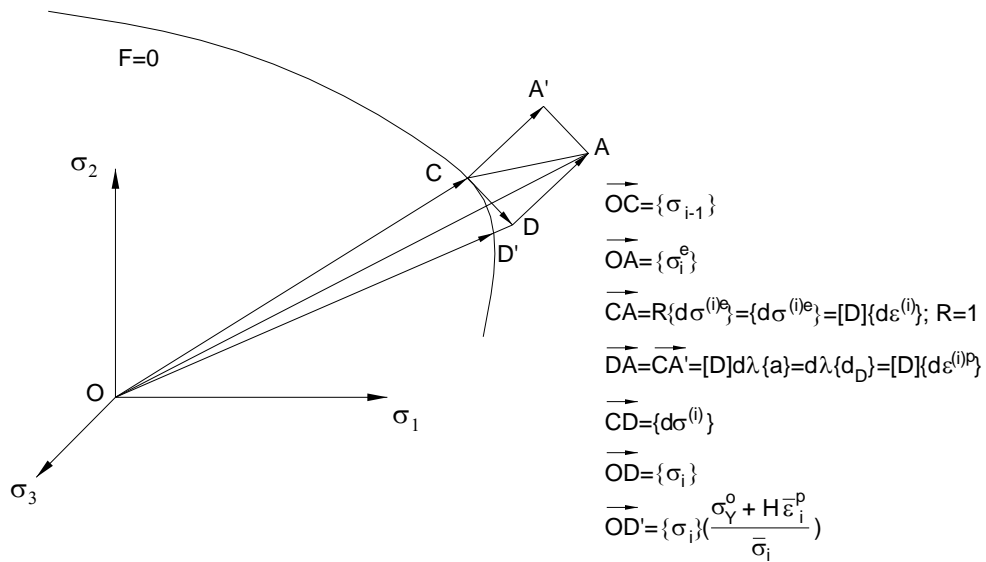


Figure 5.10. Changement des contraintes incrémentielles en un point déjà plastifié.

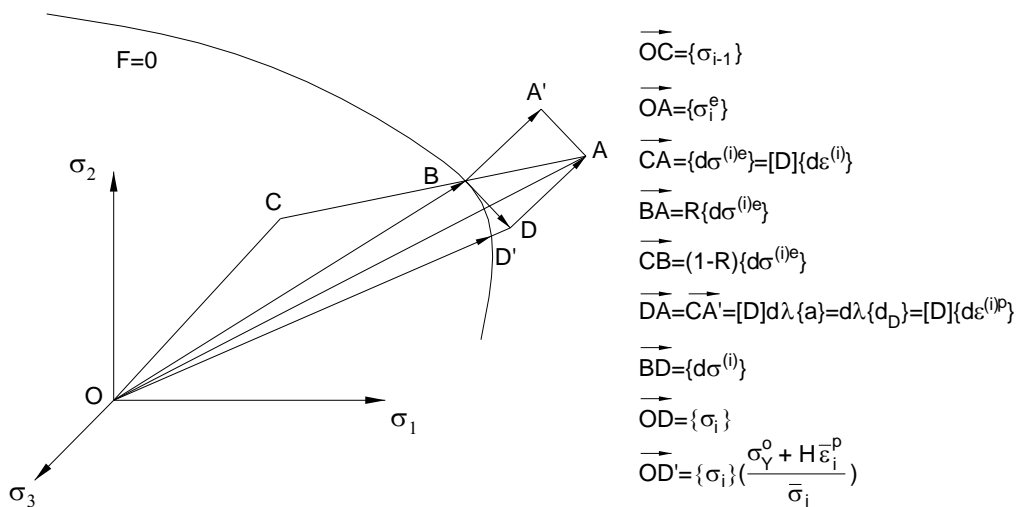


Figure 5.11. Changement des contraintes incrémentielles en un point initialement plastifié.

5<sup>e</sup> pas. Pour les points de GAUSS plastifiés, calculer la proportion des contraintes totales qui satisfont le critère de plasticité telles que  $\{\sigma_{i-1}\} + (1-R)\{d\sigma^{(i)e}\}$ .

6<sup>e</sup> pas. La partie restante des contraintes,  $R\{d\sigma^{(i)e}\}$ , doit être effectivement éliminée. Le point A doit retourner à la surface de plasticité par la déformation plastique à apparaître. Physiquement, cela peut être décrit comme suit: pour le chargement à partir du point C, le point de contraintes se déplace élastiquement jusqu'à la rencontre de la surface de plasticité à B. Le comportement élastique en dehors de ce point à l'état final des contraintes est défini par le point A. Cependant, pour satisfaire le critère de plasticité, le point des contraintes ne peut pas se déplacer en dehors de la surface de plasticité et conséquemment le point peut seulement traverser la surface de plasticité jusqu'à ce que les conditions d'équilibre et la relation constitutive soient satisfaites, à la fois. De (5.38), (5.39) et (5.40), on a:

$$\{d\sigma^{(i)}\} = [D]\{d\varepsilon^{(i)}\} - d\lambda\{d_D\} \quad (5.82)$$

ou

$$\{\sigma_i\} = \{\sigma_{i-1}\} + \{d\sigma^{(i)e}\} - d\lambda\{d_D\} \quad (5.83)$$

qui donne les contraintes totales satisfaisant les conditions d'équilibre élasto-plastique lorsque les contraintes augmentent incrémentiellement à partir de  $\sigma_{i-1}$ . L'expression (5.83) est vectoriellement illustrée sur les figures (5.10) et (5.11). On voit que le point final des contraintes D, correspondant à  $\{\sigma_i\}$ , peut dévier de la surface de plasticité. Cette déviation peut être pratiquement éliminée en assurant que les incréments de charge considérés dans la solution sont suffisamment petits. Toutefois, le point D peut être réduit à la surface de plasticité par la réduction proportionnelle du vecteur  $\sigma_i$ . D'abord, on détermine la déformation effective  $\bar{\varepsilon}_i^p$ . A partir de (5.45), on a:

$$d\lambda\{a\}^T\{\sigma\} = \{\sigma\}^T\{d\varepsilon^p\}$$

ou en réécrivant le membre à droite de (5.45) en termes de la contrainte de comparaison  $\bar{\sigma}$  et de la déformation plastique de comparaison  $\bar{\varepsilon}^p$ , on a:

$$d\lambda\{a\}^T\{\sigma\} = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p$$

et par conséquent:

$$\bar{\varepsilon}_i^p = \bar{\varepsilon}_{i-1}^p + d\varepsilon^{(i)p} = \bar{\varepsilon}_{i-1}^p + \frac{d\lambda\{a\}^T\{\sigma\}}{\bar{\sigma}} \quad (5.84)$$

Remarquant que la contrainte de comparaison des contraintes  $\{\sigma_i\}$  est  $\bar{\sigma}_i$ , cette valeur doit coïncider avec  $\sigma_Y = \sigma_Y^o + H \bar{\varepsilon}_i^p$  si le point D se trouve sur la surface de plasticité. Le facteur de réduction approprié est:

$$\{\sigma_i\} = \{\sigma_i\} \left( \frac{\sigma_Y^o + H \bar{\varepsilon}_i^p}{\bar{\sigma}_i} \right) \quad (5.85)$$

Ceci représente un vecteur de réduction proportionnel au vecteur  $\{\sigma_i\}$  qui implique que les composants individuels sont proportionnellement réduits. La condition de normalité pour l'incrément de la déformation plastique est évidente sur la figure (5.10) et (5.11) car  $[D]d\lambda\{a\} = [D]\{d\varepsilon^p\}$ .

Si de grands incréments de charge sont utilisés, il faut diviser les contraintes excédentaires en quelques stages (Fig. 5.12). Après les cycles de réduction au point E, la déviation de la surface de plasticité peut être corrigée par la réduction proportionnelle afin d'obtenir le point final E'. On peut voir que les points finals D' et E' sont significativement différents.

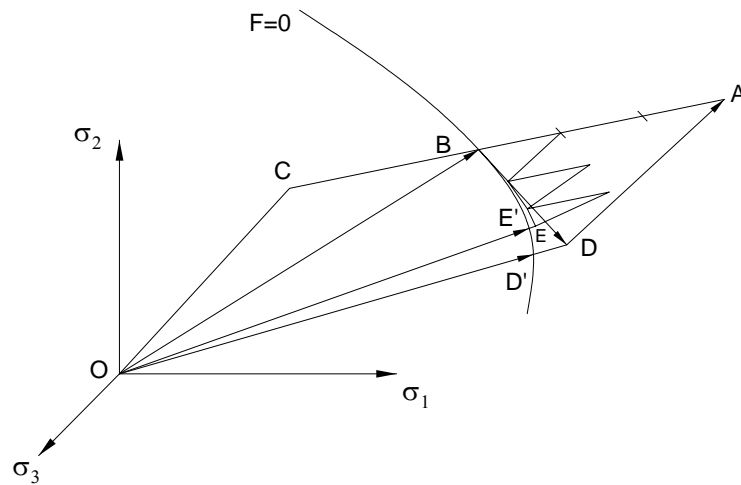


Figure 5.12. Processus raffiné pour réduire un point de contraintes à la surface de plasticité.

Selon OWEN et HINTON [O1-1986], il est raisonnable de diviser les contraintes excédentaires  $R\{d\sigma^{(i)e}\}$  en  $m$  parties où  $m$  est donné par le plus proche nombre entier qui est plus petit que:

$$\left( \frac{\bar{\sigma}_i - \sigma_Y}{\sigma_Y^o} \right) 8 + 1 \quad (5.86)$$

7<sup>e</sup> pas. Pour des points de GAUSS élastiques,  $\{\sigma_i\}$  est simplement calculé par:



$$\{\sigma_i\} = \{\sigma_{i-1}\} + \{d\sigma^{(i)e}\} \quad (5.87)$$

A la fin, l'algorithme pour trouver les forces nodales et les critères de convergence, qui a été présenté dans le paragraphe 4.3 du chapitre 4, est appliqué.

## 5.5. Applications numériques

Comme le critère de VON MISES convient mieux pour l'analyse des structures métalliques que le critère de TRESCA, nous n'utilisons que le premier dans les applications numériques ci-dessous bien que les deux critères aient été introduits dans le programme FENALYSE. Nous trouvons aussi que la méthode de résolution de type NEWTON-RAPHSON modifié est plus favorable que la méthode de résolution NEWTON-RAPHSON conventionnelle dans l'analyse non-linéaire mixte géométrique et matérielle. Cette méthode de résolution est appliquée dans tous les exemples.

### 5.5.1. Analyse élasto-plastique d'un poteau soumis à une force de compression axiale avec petite imperfection géométrique

$$b=172\text{mm}$$

$$h=172\text{mm}$$

$$t=20\text{mm}$$

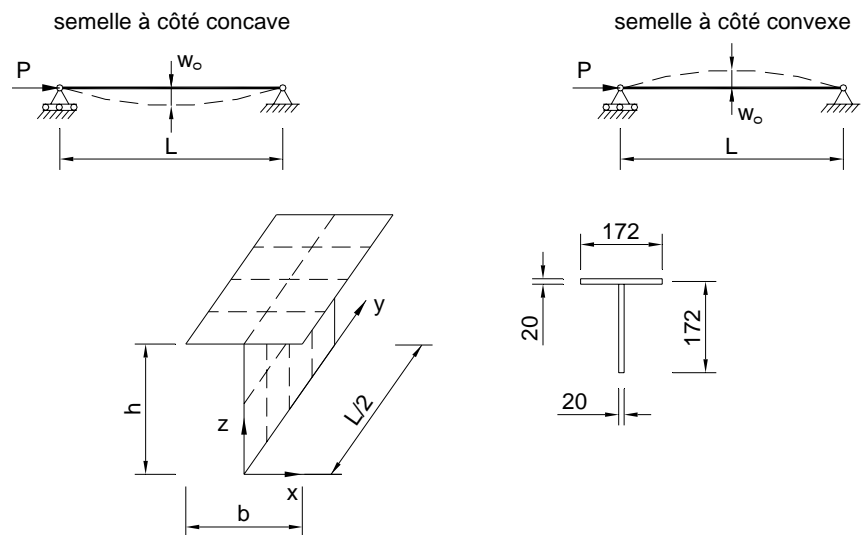
$$E=2.1 \times 10^5 \text{N/mm}^2$$

$$\nu=0.3$$

$$\sigma_y=240\text{N/mm}^2$$

P=Force de compression axiale

$w_0=L/750$ , imperfection initiale au centre



5.13. Poteau soumis à une force de compression axiale avec petite imperfection géométrique.

Dans cet exemple, le comportement élasto-plastique d'un poteau est étudié. Le poteau est simplement appuyé. Les dimensions de la section en T sont données sur la figure 5.13. Deux élancements sont examinés, concrètement  $L/r=40$  et  $100$  ( $L$  est la portée et  $r$  est le rayon de giration). L'imperfection est sinusoïdale avec une amplitude égale à  $L/750$ . Les flèches initiales avec semelle à côté concave et avec semelle à côté convexe sont considérées. Le matériau est élastique parfaitement plastique. Les éléments à 8-nœuds (RI) avec  $2 \times 2$  points d'intégration de Gauss sont utilisés. 4 éléments pour la section transversale et 4 éléments pour la longueur sont utilisés pour une demi portée. La figure 5.14 donne la relation entre la contrainte axiale nominale  $\sigma$

et le déplacement axial moyen de la section. La solution de référence est celle de BERGAN *et al.* [B14-1978]. Un bon accord est obtenu pour l'élancement  $L/r=40$  avant une certaine valeur de charge en régime post-critique; à partir de cette valeur les courbes données par FENALYSE descendent brusquement. Toutefois, les charges de ruine s'accordent bien. Tandis que pour  $L/r=100$ , les contraintes de ruine de BERGAN *et al.* sont considérablement plus élevées. Les désaccords sont dus aux types d'éléments utilisés. BERGAN *et al.* ont employé des éléments de poutre-poteau où l'indéformabilité de la section est toujours supposée, tandis que les éléments de plaque déformable en cisaillement sont utilisés dans FENALYSE. Donc ce programme peut tenir compte de la déformabilité de la section. De plus, l'instabilité locale des parois en régime non-linéaire peut être détectée. Cela explique le changement brusque de la solution de FENALYSE pour  $L/r=40$ . On trouve aussi des contraintes de ruine plus hautes pour le cas avec semelle à côté concave par rapport au cas avec semelle à côté convexe malgré la même amplitude d'imperfection géométrique. Pour bien voir cette différence, la figure 5.15 représente la relation entre la contrainte de ruine et l'élancement réduit  $\bar{\lambda} = \frac{L}{r} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}}$  lorsque ce dernier varie. Selon l'EUROCODE 3, partie 1.1 [E1-2003], le calcul d'un poteau de section en T est basé sur la courbe de flambement c, cette courbe est également introduite sur la figure 5.15.

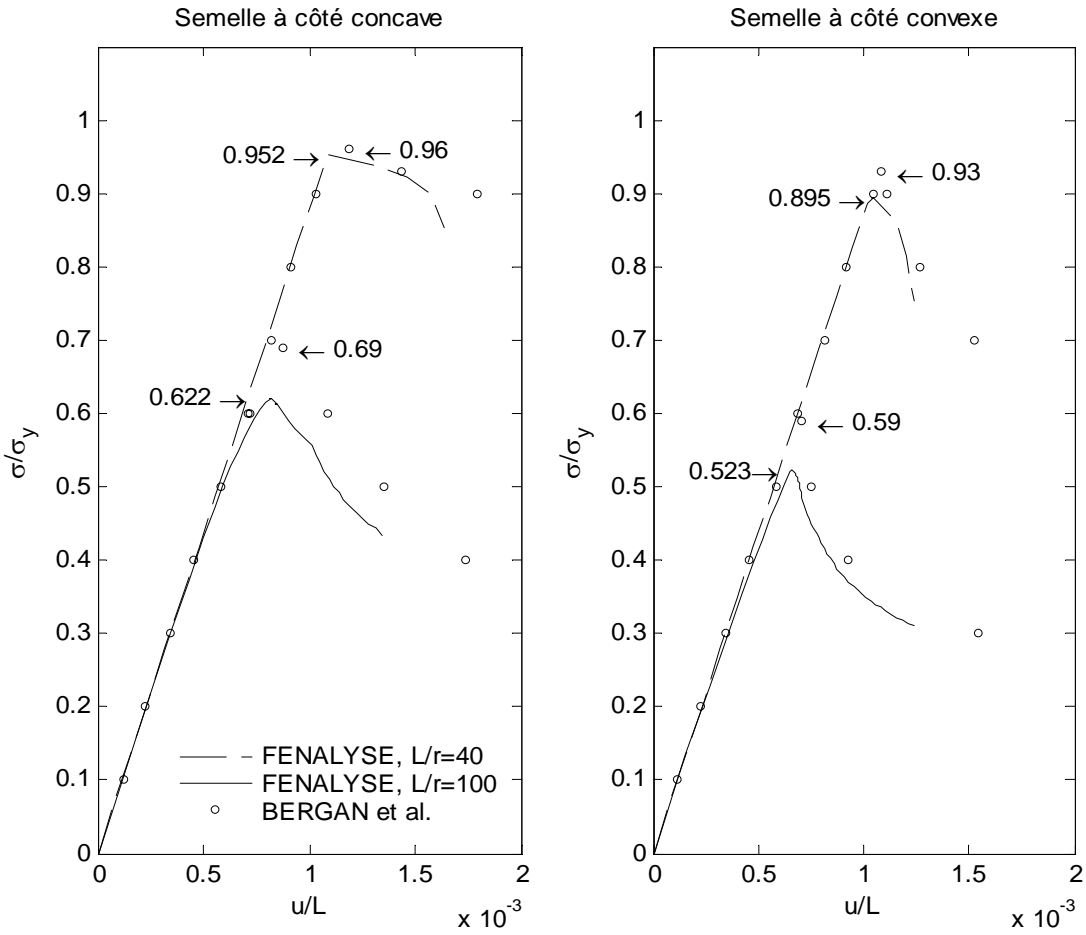


Figure 5.14. Courbes contrainte-déplacement.

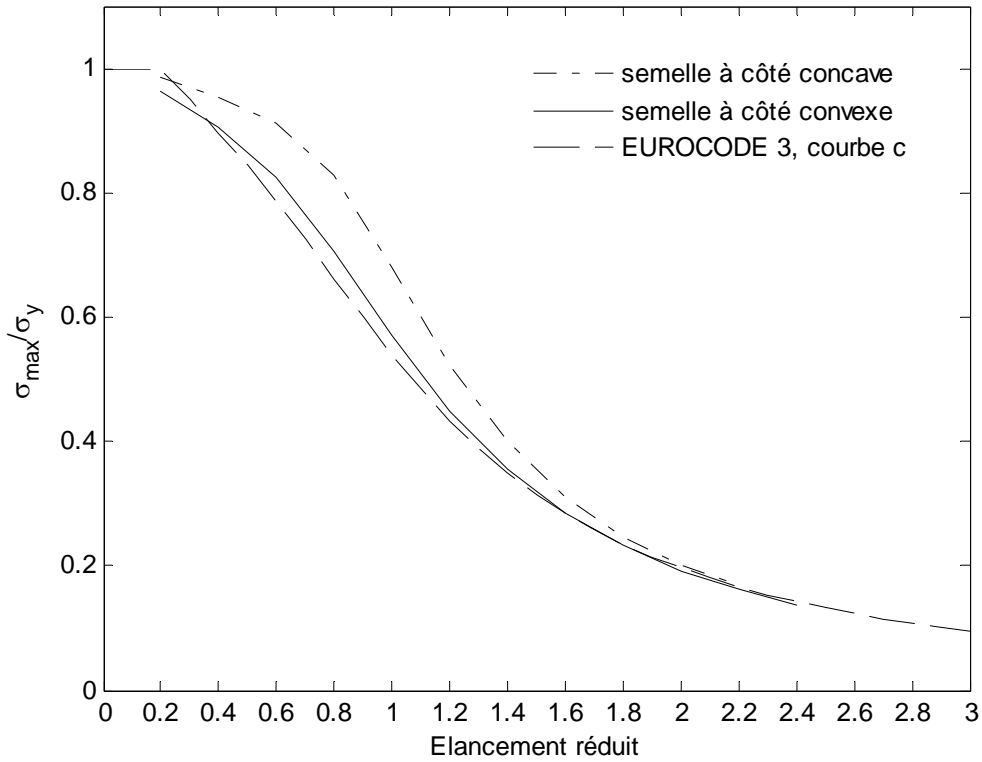


Figure 5.15. Relation contrainte-élancement.

**5.5.2. Analyse élasto-plastique d'un poteau à inertie variable soumis à une charge de compression axiale avec petite excentricité**

$b=100\text{mm}$

$h_1=100\text{mm}$

$h_2$  est variable

$t=10\text{mm}$

$L=3169.5\text{mm}$

$E=2.1 \times 10^5 \text{N/mm}^2$

$\nu=0.3$

$\sigma_y=235\text{N/mm}^2$

$P$ =Charge de compression axiale

$e$ =excentricité

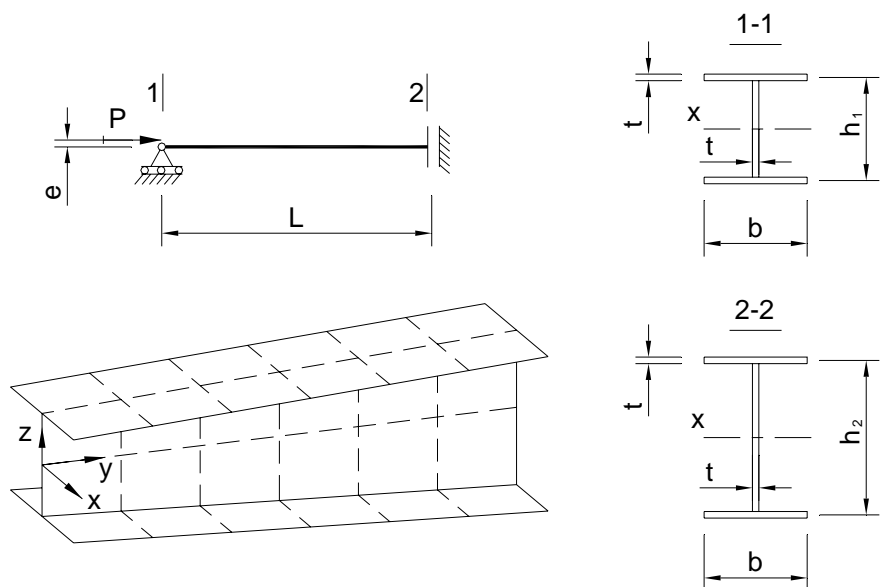


Figure 5.16. Poteau à inertie variable soumis à une charge de compression avec une petite excentricité.

Un poteau à inertie variable est examiné. La hauteur de la section varie linéairement, tandis que la largeur de la section et l'épaisseur des parois sont constantes. Les dimensions sont données sur la figure 5.16. Le matériau est élastique parfaitement plastique. La petite extrémité du poteau est un simple appui. Pour la grande extrémité, les rotations autour les axes x-x et z-z sont bloquées et le déplacement dans la direction z-z est libre. Le déplacement du poteau suivant l'axe x est empêché. Le poteau est modélisé par éléments à 8-nœuds avec 6 éléments pour la section transversale et 6 éléments pour la longueur. L'analyse élasto-plastique est réalisée pour le cas  $h_2/h_1=2$  ( $h_1=100\text{mm}$ ,  $h_2=200\text{mm}$ ,  $t=10\text{mm}$ ) et comparée avec le comportement d'un poteau à inertie constante ( $b=100\text{mm}$ ,  $h=150\text{mm}$ ,  $t=10\text{mm}$ ). L'excentricité pour les deux poteaux  $e=2L/1000$ . On trouve que la quantité de matériau pour les deux poteaux est la même, mais le poteau à inertie variable peut supporter une charge significativement plus grande que le poteau à inertie constante (Fig. 5.17). Afin d'étudier la performance de l'augmentation du rapport  $h_2/h_1$ , les courbes reliant ce rapport avec la contrainte de ruine sont présentées sur la figure 5.18 avec des excentricités différentes. L'augmentation du rapport  $h_2/h_1$  fait accroître la contrainte de ruine, mais cet accroissement n'est réellement effectif lorsque  $h_2/h_1 \leq 2.25$ .

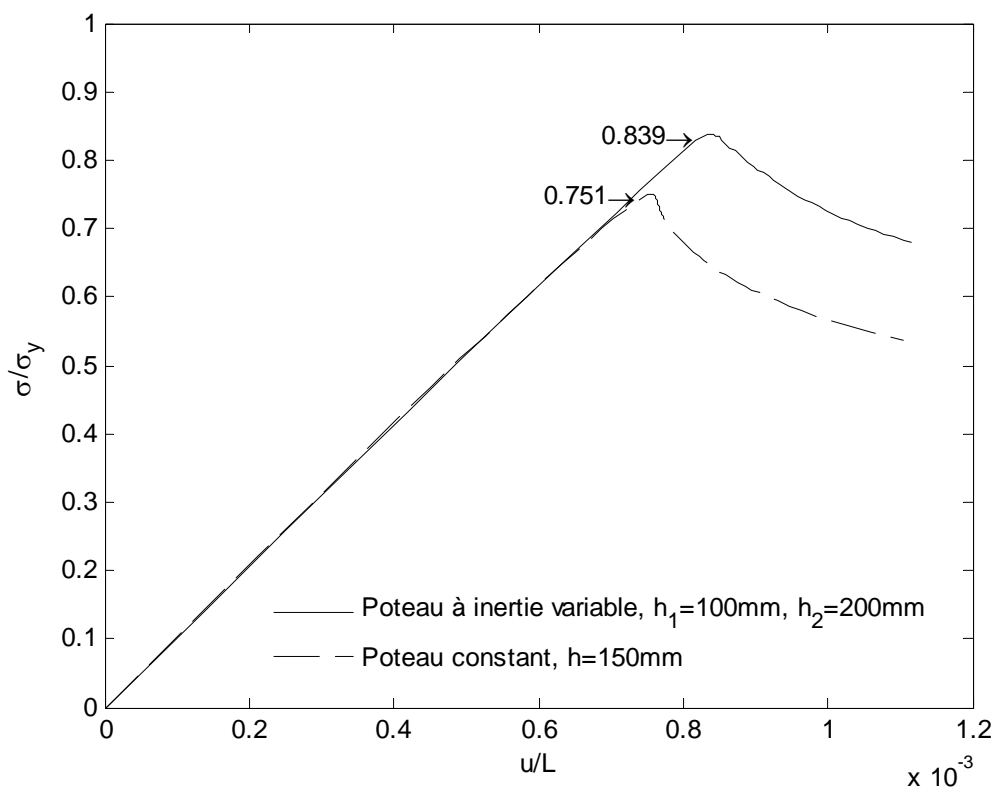


Figure 5.17. Comparaison du comportement élasto-plastique entre le poteau à inertie variable et le poteau à inertie constante.

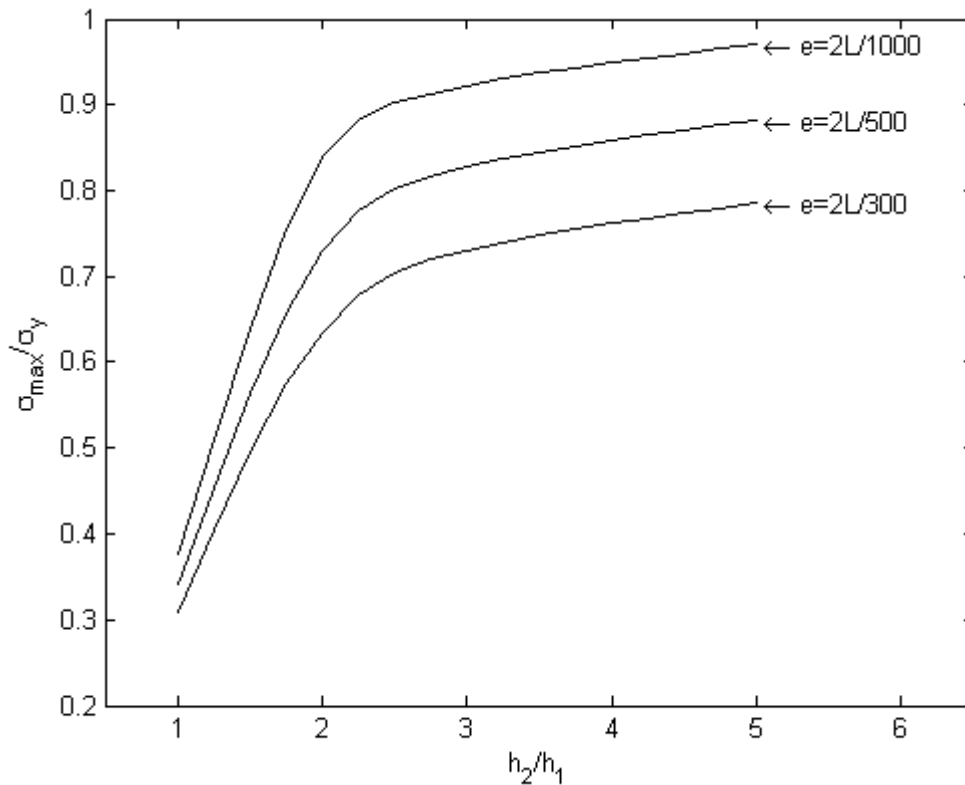


Figure 5.18. Performance de l'augmentation du rapport  $h_2/h_1$  du poteau à inertie variable.

### 5.5.3. Analyse élasto-plastique d'un poteau court

L'analyse d'un poteau court de section creuse rectangulaire formé à froid de 330x200x4mm a été réalisée par FREY [F3-1978] en utilisant le programme FINELG. Les données expérimentales et numériques concernant cette éprouvette peuvent être trouvées aussi dans les références de CESCOTTO *et al.* [C17-1980], BRAHAM *et al.* [B2-1980] et RONDAL et MAQUOI [R6-1985]. Ces données sont représentées sur la figure 5.19. Grâce à la symétrie, seul un huitième de l'éprouvette est discrétisé avec 10x12 éléments à 8-nœuds (RI) de coque surbaissée. Il y a 405 points avec six degrés de liberté. Chaque paroi est divisée en 5 couches pour tenir compte de la propagation de la plastification à travers l'épaisseur. La commande de l'analyse non-linéaire est réalisée par la méthode de RIKS. FREY [F3-1978] a utilisé l'élément à 4-nœuds avec le même maillage de 10x12; donc il n'y a que 143 points et chaque point a également six degrés de liberté. Il a résolu le problème en imposant des incréments de déplacement longitudinal.

$$E=2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu=0.3$$

$\delta_o=8 \text{ mm}$ ,  
amplitude de  
l'imperfection  
locale des parois.

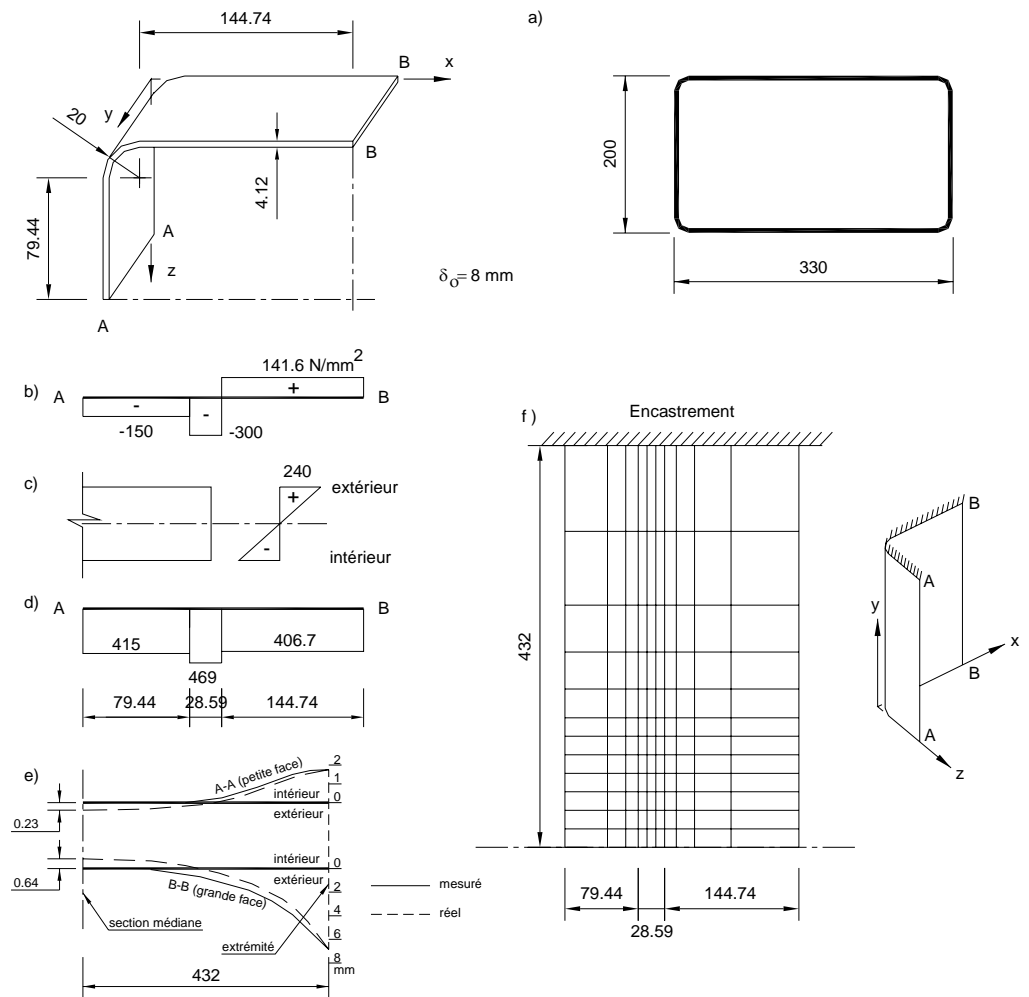


Figure 5.19. Caractéristiques du poteau court: a) dimensions de la section; b) contraintes résiduelles membranaires; c) contraintes résiduelles flexionnelles; d) distribution de la limite élastique à travers la section; e) déformées initiales des génératrices médianes des faces; f) discrétisation en éléments finis de l'un huitième du poteau.

Le matériau est élastique parfaitement plastique. Les imperfections géométriques locales et les contraintes résiduelles membranaires et flexionnelles sont présentées sur la figure 5.19. Il est à noter que, selon FREY [F3-1978], les contraintes résiduelles flexionnelles ne sont qu'approximativement estimées et elles sont incomplètes. C'est pour quoi, on peut trouver que la somme de la contrainte résiduelle membranaire et la contrainte résiduelle flexionnelle au coin de la section est beaucoup plus grande que la limite élastique de la zone correspondante. Il faut d'abord réaliser un premier pas de calcul avec la charge égale à zéro pour que les contraintes résiduelles satisfassent le critère de plasticité. La figure 5.20 indique l'évolution de la charge totale de compression selon la déformation axiale  $\varepsilon_c$  au centre de la zone arrondie. Avant la charge maximale, la solution de FENALYSE est un peu plus rigide que celle expérimentale et mais un peu plus souple que la solution numérique de FREY [F3-1978]. Après la charge maximale, FENALYSE montre des résultats plus souples que ceux donnés par FREY et l'expérience. FENALYSE prédit un peu plus

exactement la charge maximale que celle obtenue par FREY. La charge maximale calculée par FREY est environs 940 kN, tandis que notre programme donne une valeur de 927 kN qui est plus proche de la charge maximale obtenue de l'expérience  $P_{max}=870$  kN.

La forme déformée du poteau court en stade post-critique est donnée sur la figure 5.21. Nous trouvons que c'est assez similaire à celle obtenue dans l'expérience.

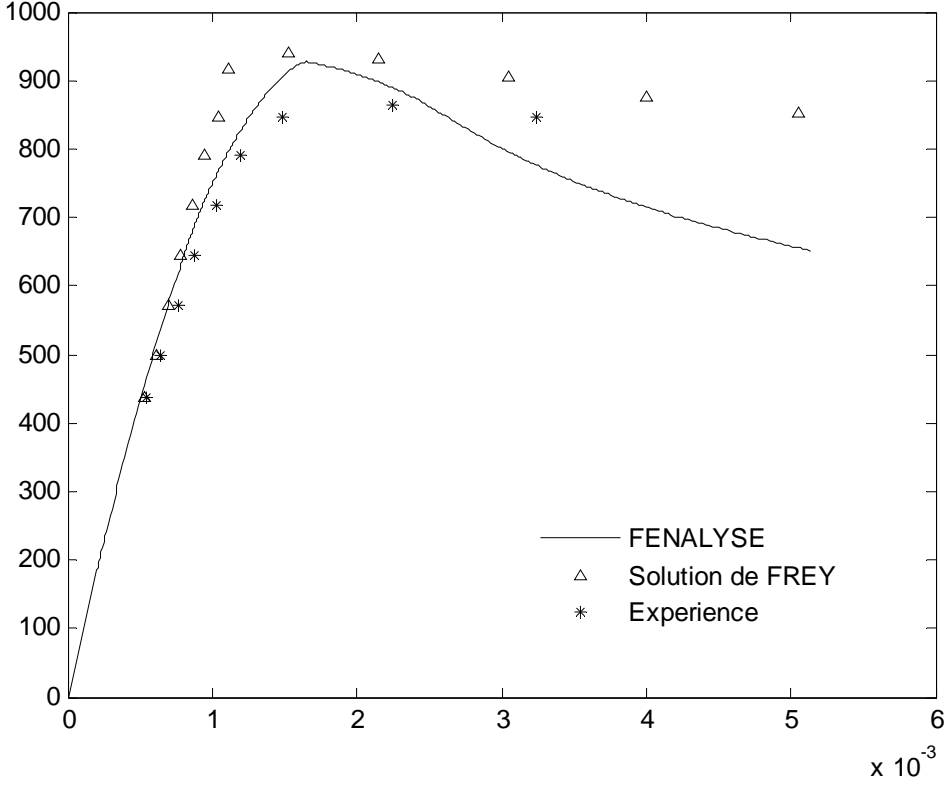


Figure 5.20. Courbes charge-déformation du poteau court.

a) b)

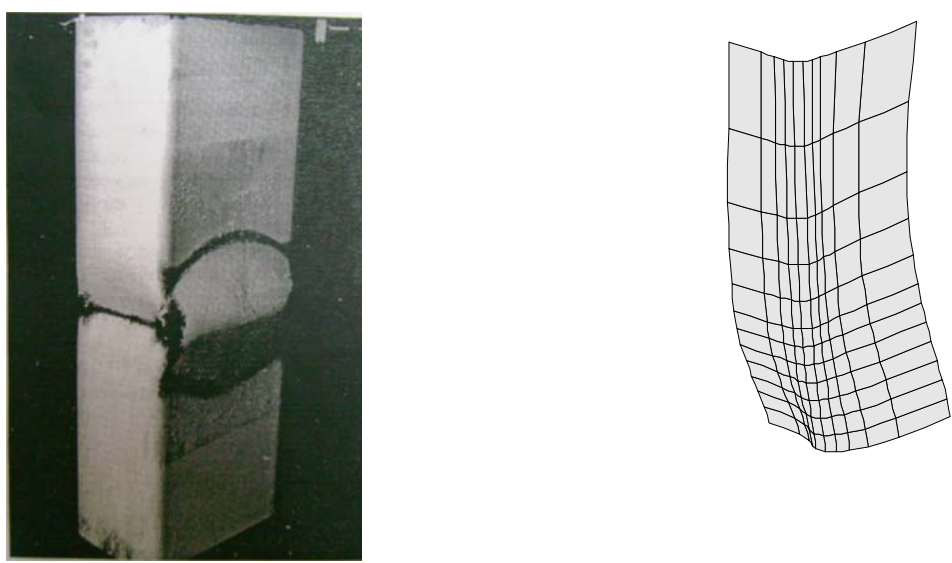


Figure 5.21. Ruine du poteau court

a) Expérience; b) Simulation numérique (exagérée de 2 fois).

#### 5.5.4. Comportement des poteaux creux carrés formés à froid

$$E=2.0e+05 \text{ MPa}$$

$$\nu=0.3$$

$$f_y=350 \text{ MPa}$$

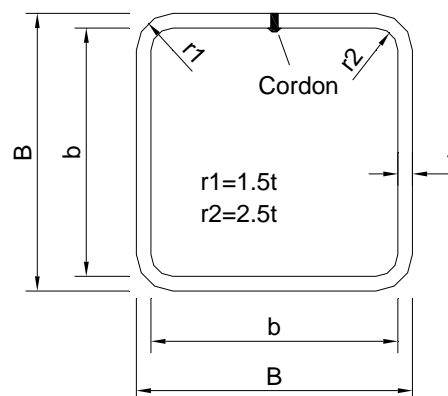


Figure 5.22. Section creuse carrée formée à froid.

Les techniques de formage à froid pour les sections creuses carrées ne doivent pas inclure le post-processus de dégagement thermique. Dans ce cas il y a des distributions complexes des limites élastiques et contraintes résiduelles [K2-1993], comme présenté dans le sous-paragraphe 1.1.3.2.1 du chapitre 1. Le gradient élevé des contraintes résiduelles à travers l'épaisseur des plaques peut avoir une influence significative sur le comportement de la section. Cela est un objectif de recherche de KEY et HANCOCK [K2-1993] qui ont employé la méthode des bandes finies semi-analytiques afin d'examiner le comportement des poteaux de section creuse carrée formés à froid en tenant compte des effets de l'instabilité, de la plastification, des contraintes résiduelles initiales et des imperfections géométriques. Ils ont étudié quatre sections telles que SHS 76x76x2.0, SHS 152x152x4.9, SHS 203x203x6.3, SHS 254x254x6.3. Ils ont comparé leurs solutions numériques charge-déplacement avec leurs expériences de poteaux très courts et poteaux simplement appuyés. Il est à noter que à cause de la limite de la méthode des bandes finies semi-analytiques, KEY et HANCOCK n'ont pas pu tenir compte de l'interaction entre le voilement local et l'instabilité globale du poteau dans leurs simulations numériques.

Les contraintes résiduelles des sections creuses carrées formées à froid ont été mesurées par KEY et HANCOCK [K2-1993]. Elles sont différentes de celles d'autres auteurs. A part les contraintes résiduelles membranaires et flexionnelles, ils ont mesuré aussi les contraintes résiduelles d'étagement (*layering* en anglais) dans les sens longitudinal et transversal. Tous les types de contraintes résiduelles ont été présentés sur les figures 1.15 et 1.16. Nous les redessignons ici pour la commodité (Fig. 5.23 et Fig. 5.24).

KEY et HANCOCK ont proposé des modèles matériels différents pour les zones planes et arrondies de la section transversale. Le matériau élastique parfaitement plastique est utilisé pour les zones planes, tandis que le modèle de type RAMBERG-OSGOOD est proposé pour les zones arrondies (Fig. 5.25).



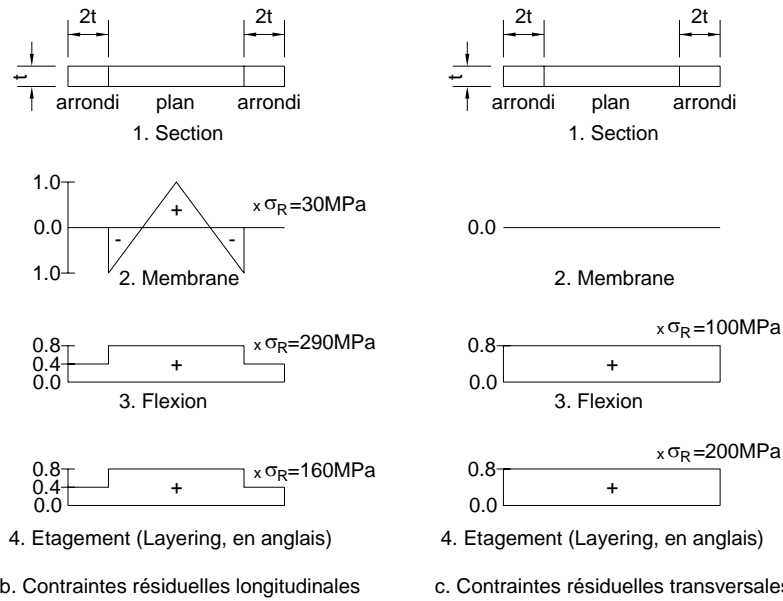


Figure 5.23. Contraintes résiduelles pour la section creuse carrée formée à froid.

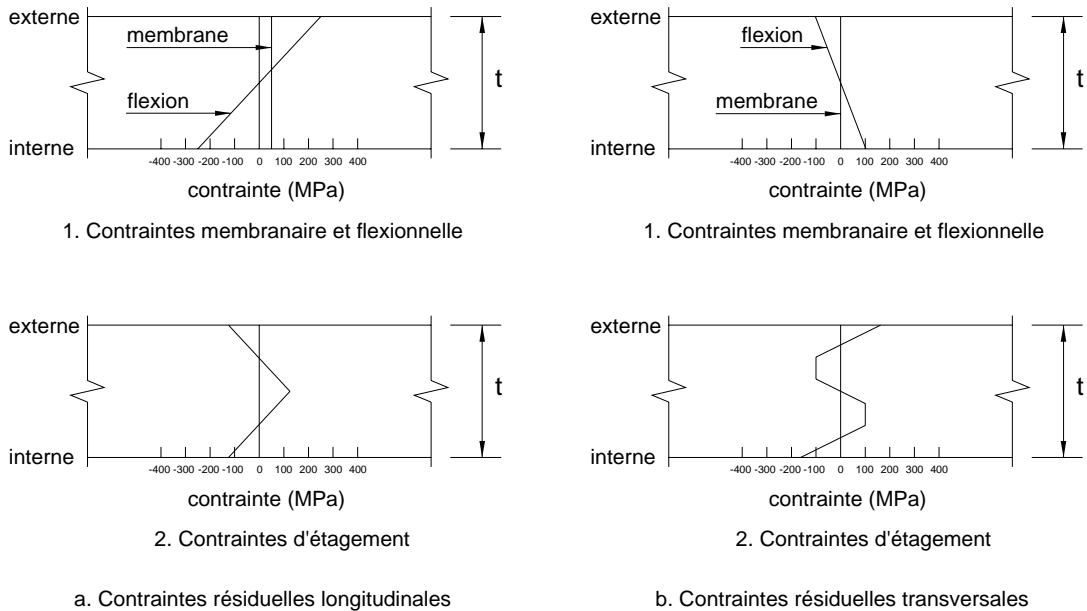


Figure 5.24. Contraintes résiduelles à travers l'épaisseur de la section creuse carrée formée à froid.

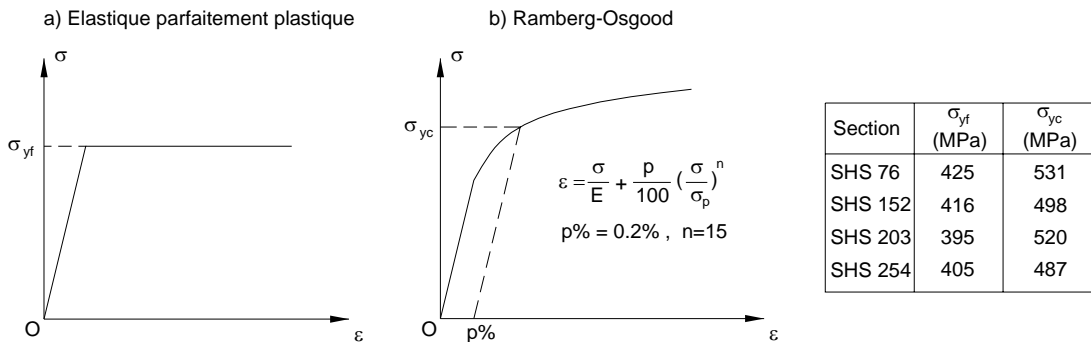


Figure 5.25. Modèles matériels.

Nous n'analysons ici que le comportement de poteaux simplement supportés de sections SHS 203x203x6.3 et SHS 76x76x2.0. En modélisant les poteaux par les bandes finies semi-analytiques, KEY et HANCOCK [K2-1993] ont ignoré la courbure des zones arrondies. Dans notre analyse, nous l'ignorons aussi. Grâce à la symétrie, nous ne discrétisons qu'un quart du poteau avec les éléments finis à 8-nœuds de plaque et de coque surbaissée. Les parois sont divisées en 13 couches. Les imperfections locale et globale sont prises égales à  $0.001B$  et  $0.001L$ , respectivement ( $B$  est la largeur de la section,  $L$  est la longueur du poteau).

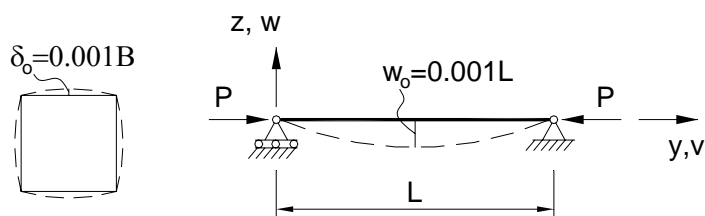


Figure 5.26. Imperfections locale et globale du poteau.

### SHS 203x203x6.3

Deux élancements du poteau de section SHS 203x203x6.3 sont considérés,  $L/r=65.7$  et  $L/r=95.7$ . Un quart du poteau est discrétisé en  $8 \times 15$  éléments finis (8 éléments sont pour la section dans laquelle 2 éléments sont pour chaque zone d'angle, 15 éléments sont pour la direction longitudinale). Les courbes charge – déplacement axial du poteau sont présentées sur les figures 5.27 et 5.28. La charge de compression est normalisée par la charge maximale expérimentale qui est égale à 2010 kN [K2-1993]. Le déplacement axial ici est la valeur moyenne des déplacements axiaux de la section à l'extrémité du poteau. Les résultats expérimentaux et numériques de KEY et HANCOCK y sont également introduits.

Nous voyons que les solutions de FENALYSE s'accordent bien avec celles de KEY et HANCOCK et assez bien avec les résultats des tests. Cependant, les charges maximales sont un peu plus élevées que celles des tests. Concrètement: FENALYSE donne  $P/P_{\text{sult}}=0.662$  pour  $L/r=65.7$  et  $P/P_{\text{sult}}=0.405$  pour  $L/r=95.7$ , tandis que les tests fournissent  $P/P_{\text{sult}}=0.633$  pour  $L/r=65.7$  et  $P/P_{\text{sult}}=0.392$  pour  $L/r=95.7$ . Pour le poteau qui a un élancement  $L/r=65.7$ , à partir d'une valeur normalisée de 0.5 de la charge au stage post-critique, KEY et HANCOCK ont observé la plastification accompagnant l'instabilité locale et la rigidité du poteau descend brusquement. Nos éléments finis et les bandes finies de KEY et HANCOCK ne détectent pas ce phénomène.

Nous trouvons également que les solutions obtenues par éléments finis de plaque et de coque surbaissée sont identiques. Pour l'élancement  $L/r=65.7$ , l'imperfection locale n'influence pas les résultats. Cela peut être dû au fait que la contrainte de flambement local est beaucoup plus grande que la contrainte de flambement flexionnel global ( $\sigma_{\text{cri}}=724 \text{ N/mm}^2$  contre  $\sigma_{\text{crg}}=457 \text{ N/mm}^2$ ). C'est pour quoi nous ne considérons plus l'interaction entre deux modes de flambement pour l'élancement plus grand,  $L/r=97.5$ .

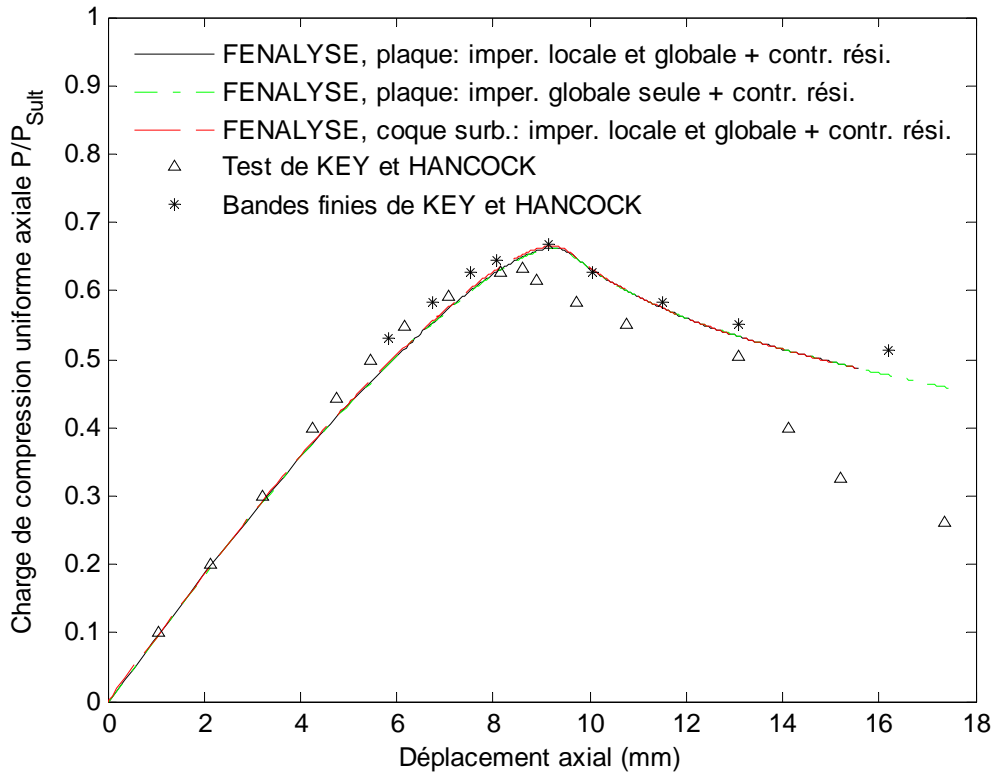


Figure 5.27. Comportement du poteau simplement supporté – SHS 203,  $L/r=65.7$ .

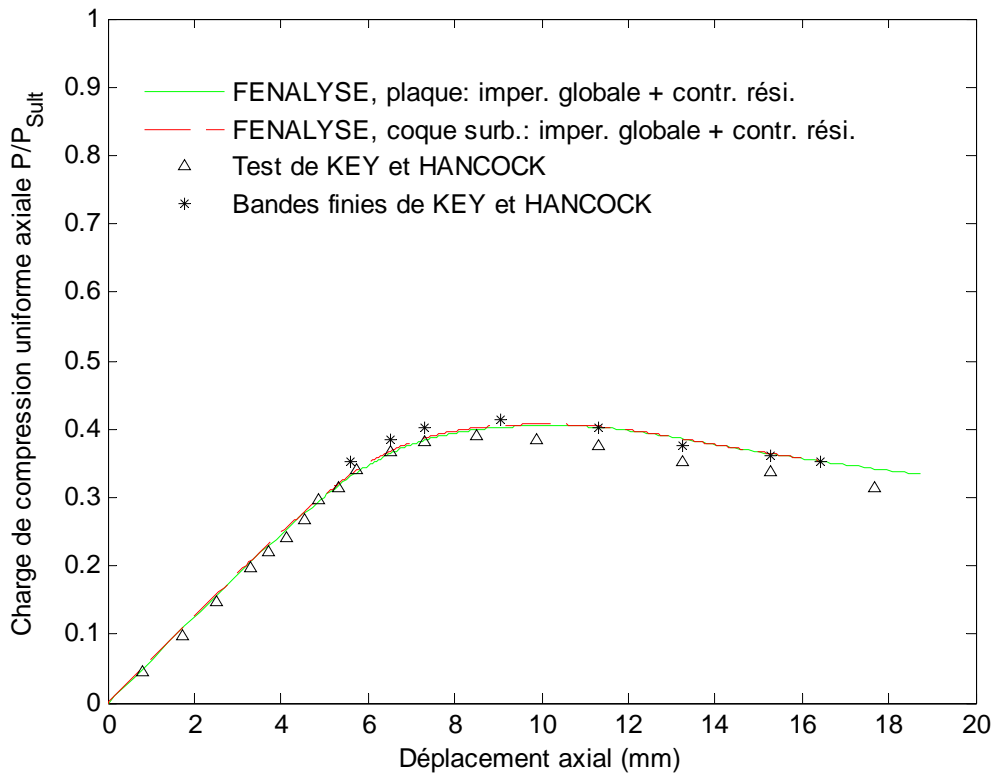


Figure 5. 28. Comportement du poteau simplement supporté – SHS 203,  $L/r=95.7$ .

Pour examiner l'interaction entre les modes de flambements local et global, nous considérons maintenant un poteau de section SHS 76x76x2.0 qui a un petit élancement de  $L/r=15.3$ . Un quart du poteau est discrétisé en  $12 \times 7$  éléments finis (12 éléments sont pour la section dans laquelle 2 éléments sont pour chaque zone d'angle, 7 éléments sont pour la direction longitudinale). La figure 5.29 montre le comportement non-linéaire du poteau par la relation entre la charge normalisée et le déplacement axial. La charge ultime expérimentale est prise du graphique du test des poteaux courts de KEY et HANCOCK [K2-1993],  $P_{sult}=2435$  kN. Avant la charge ultime donnée par FENALYSE, nos résultats et ceux de KEY et HANCOCK sont en bon accord mais après cette valeur ultime, nos courbes descendent brusquement tandis que la courbe de KEY et HANCOCK continue à augmenter jusqu'à une valeur plus grande que la charge ultime, puis la courbe de KEY et HANCOCK descend très lentement. Le comportement du poteau prédit par KEY et HANCOCK et par nous est très différent après la charge ultime. Cette différence est due au fait que les bandes finies de KEY et HANCOCK ne peuvent pas associer les imperfections locale et globale; elles n'introduisent que l'imperfection globale dans ce cas.

Il est évident que les formes de nos courbes numériques sont semblables aux formes des courbes expérimentales. Toutefois, nos solutions montrent un comportement plus rigide que celui obtenu lors du test avec l'imperfection globale de  $w_0=0.001L$ . La charge ultime numérique normalisée est de 0.97 tandis que celle du test est de 0.92. Nous voyons que les courbes obtenues avec les éléments finis de plaque et de coque surbaissée sont identiques jusqu'à la charge ultime. Au stade post-critique, largement non-linéaire, ces courbes divergent. L'élément fini de coque surbaissée donne des résultats plus raisonnables à ce stade.

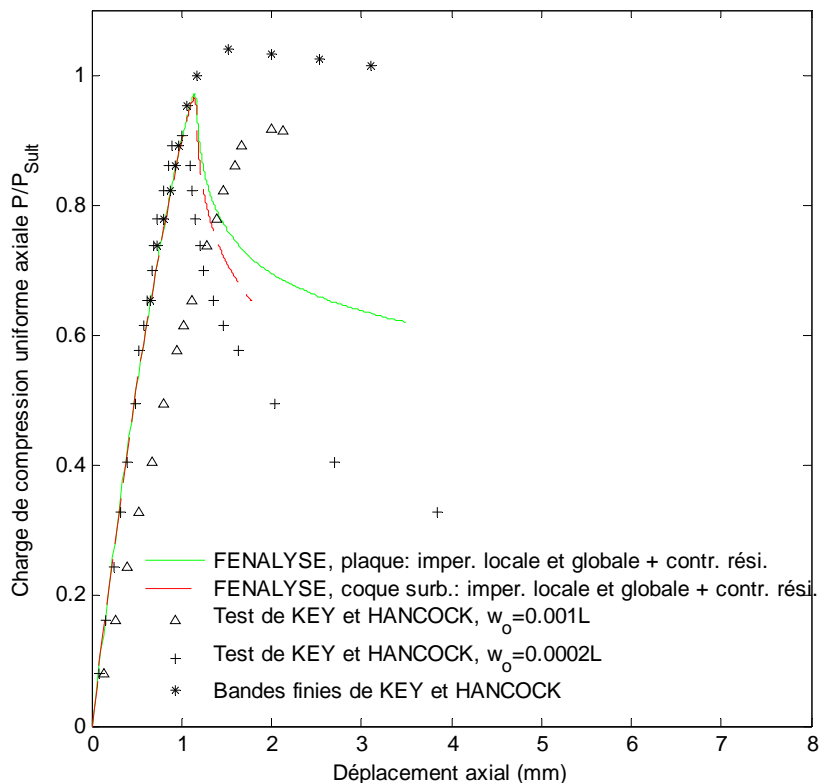


Figure 5.29. Comportement du poteau simplement supporté - SHS 76,  $L/r=15.3$ .

### 5.5.5. Cornières laminées chargées centriquement

DE VILLE DE GOYET [D3-1989] a étudié les cornières sollicitées par un effort appliqué au centre de gravité de la section. La barre est bi-appuyée en flexion et en torsion. Deux types de sections sont envisagés, une cornière à ailes égales (L125x125x10) et une cornière à ailes inégales (L125x80x10). DE VILLE DE GOYET a utilisé un élément fini non-linéaire de type poutre-poteau qui a été implanté dans le programme FINELG. Deux types de calcul sont effectués

+ la déformée initiale  $w_{01}$  est imposée, mais sans contraintes résiduelles;

+ la déformée initiale  $w_{02}$  est imposée avec des contraintes résiduelles dont le schéma est donné à la figure 5.30.

Trois élancements réduits relatifs au flambement autour de l'axe d'inertie faible sont considérés  $\bar{\lambda} = 0.7, 1.0, 1.5$ , correspondant respectivement aux élancements,  $\lambda = 63.3, 90.5, 135.7$ .

$$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$f_y = 25.31 \text{ kN/cm}^2$$

P = Charge de compression centrée

$$\text{L125x125x10: } r_{\min} = 2.455 \text{ cm}$$

$$\text{L125x80x10: } r_{\min} = 1.720 \text{ cm}$$

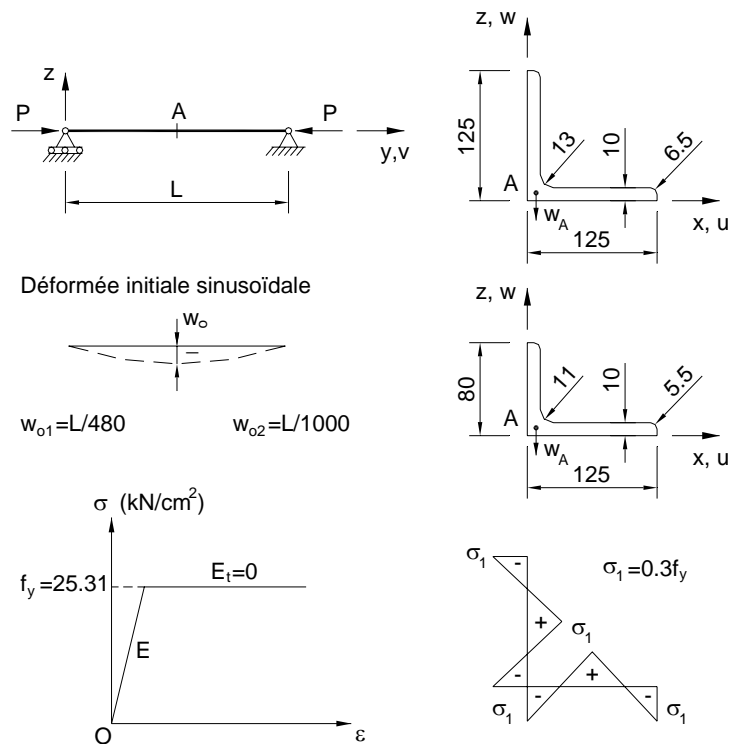


Figure 5.30. Cornières laminées chargées centriquement.

De notre côté, on refait cet exemple avec notre programme FENALYSE, avec l'élément fini non-linéaire de 8-nœuds de type plaque déformable en cisaillement. Les ailes de la section sont modélisées par des plaques dont la largeur est comptée à partir des lignes moyennes. Grâce à la symétrie, une moitié de la barre est discrétisée par  $2 \times 2 \times 8$  éléments de 8-nœuds. D'abord, le calcul des forces critiques est comparé avec la formule d'Euler et ce qui est donné par le programme CUFMS 2.6b de SCHAFER [S4-2003] (Tableau 5.3). On peut rappeler que le programme CUFMS utilise les bandes finies en se basant sur la théorie des plaques de KIRCHHOFF. Nous avons développé aussi le programme FLAMBANDE de bandes finies basé sur la théorie des plaques

déformables en cisaillement, la comparaison avec CUFSM a été faite dans le chapitre 3 et on n'est plus refaite plus dans cet exemple.

Tableau 5.3. Charges axiales de flambement.

$P_{cr}$ (kN)	L125x125x10			L125x80x10		
	Euler	CUFSM	FENALYSE	Euler	CUFSM	FENALYSE
$\lambda$						
63.3	1249.1	1209.7	1175.7	1013.9	792.1	777.0
90.5	612.0	606.3	602.2	496.8	451.5	446.8
135.7	272.0	271.1	269.4	220.8	213.9	212.3

Le tableau 5.3 montre une différence considérable entre la charge critique Euler autour de l'axe faible et celle-ci obtenue par la voie numérique lorsque l'élancement est moyen. Tandis que les résultats de FENALYSE sont très proches mais un peu plus petits que CUFSM. On peut les expliquer que la formule d'Euler est fondée sur l'hypothèse de l'indéformabilité de la section droite et ne tient compte pas de l'influence du cisaillement. CUFSM permet la déformabilité de la section mais l'influence du cisaillement perpendiculaire aux parois n'est pas prise en compte, tandis que FENALYSE aborde tous ces problèmes. En plus, la formule d'Euler ne donne que la valeur de la charge critique du flambement flexionnel mais l'examen des figures du post-processeur de CUFSM montre que le flambement est plutôt flexio-torsionnel lorsque l'élancement est moyen. Lorsque l'élancement est grand, la barre travaille comme poutre. L'indéformabilité de la section est respectée, l'influence du cisaillement peut être ignorée et le flambement est purement flexionnel pour le cas L125x125x10 et principalement flexionnel pour le cas L125x80x10. Alors la différence entre les résultats est très faible.

Pour l'analyse non-linéaire élasto-plastique, les parois sont divisées en trois couches à travers l'épaisseur. Le tableau 5.4 reprend l'ensemble des charges ultimes obtenues.

Tableau 5.4. Charges ultimes.

$P_{cr}$ (kN)	L125x125x10				L125x80x10			
	DE VILLE DE GOYET		FENALYSE		DE VILLE DE GOYET		FENALYSE	
	$w_{o1}$	$w_{o2}, \sigma_{res}$	$w_{o1}$	$w_{o2}, \sigma_{res}$	$w_{o1}$	$w_{o2}, \sigma_{res}$	$w_{o1}$	$w_{o2}, \sigma_{res}$
$\lambda$								
63.3	487.35	479.22	481.3	472.0	357.54	371.05	347.8	359.6
90.5	386.58	386.11	375.3	390.5	268.34	287.75	259.6	278.8
135.7	218.61	229.39	220.4	235.4	157.04	170.28	156.3	170.8

Le tableau 5.4 montre que nous obtenons des résultats très proches de ceux de DE VILLE DE GOYET dans tous les deux types de calcul. Les petites différences sont dues à la déformabilité de la section droite dont tient compte le programme FENALYSE. Ce n'est pas le cas pour l'élément poutre-poteau développé dans la référence [D3-1989]. Les figures 5.31 et 5.32 montrent les courbes non-linéaires entre la charge axiale de compression et la flèche verticale du point A au centre de la barre sur la figure 5.30. On voit bien le comportement particulier de la cornière lorsque l'élanement est faible. DE VILLE DE GOYET ne fournit pas ces courbes dans la référence [D3-1989].

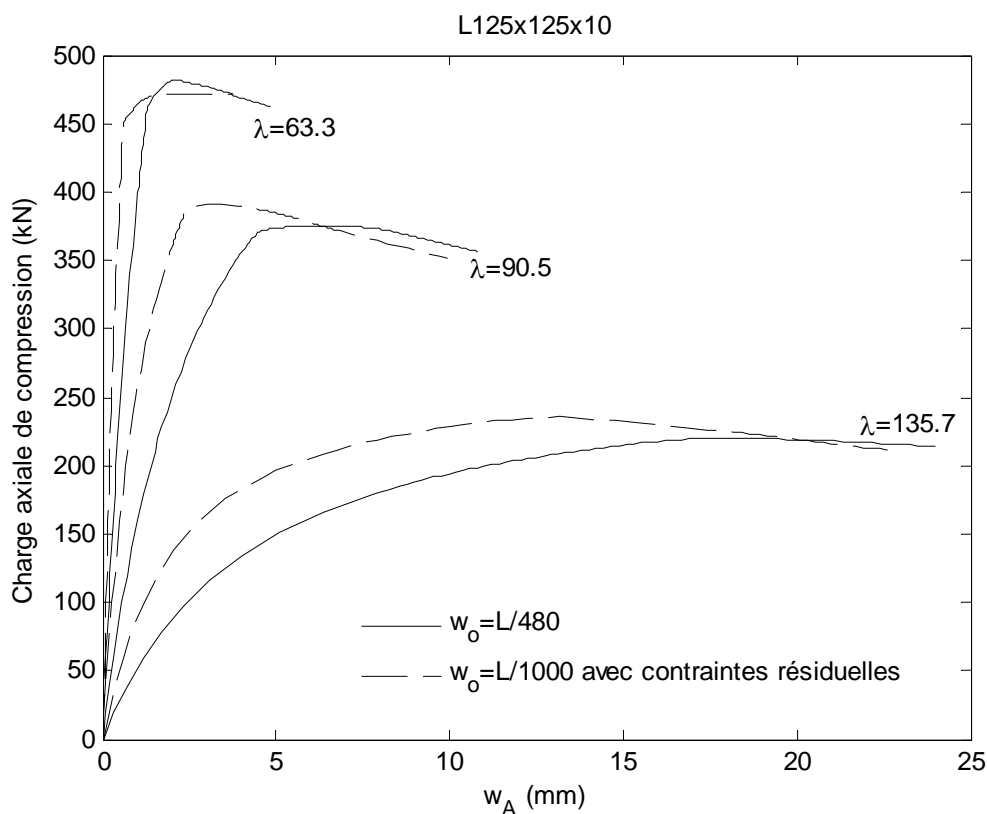


Figure 5.31. Courbes charge-déplacement pour la cornière L125x125x10.

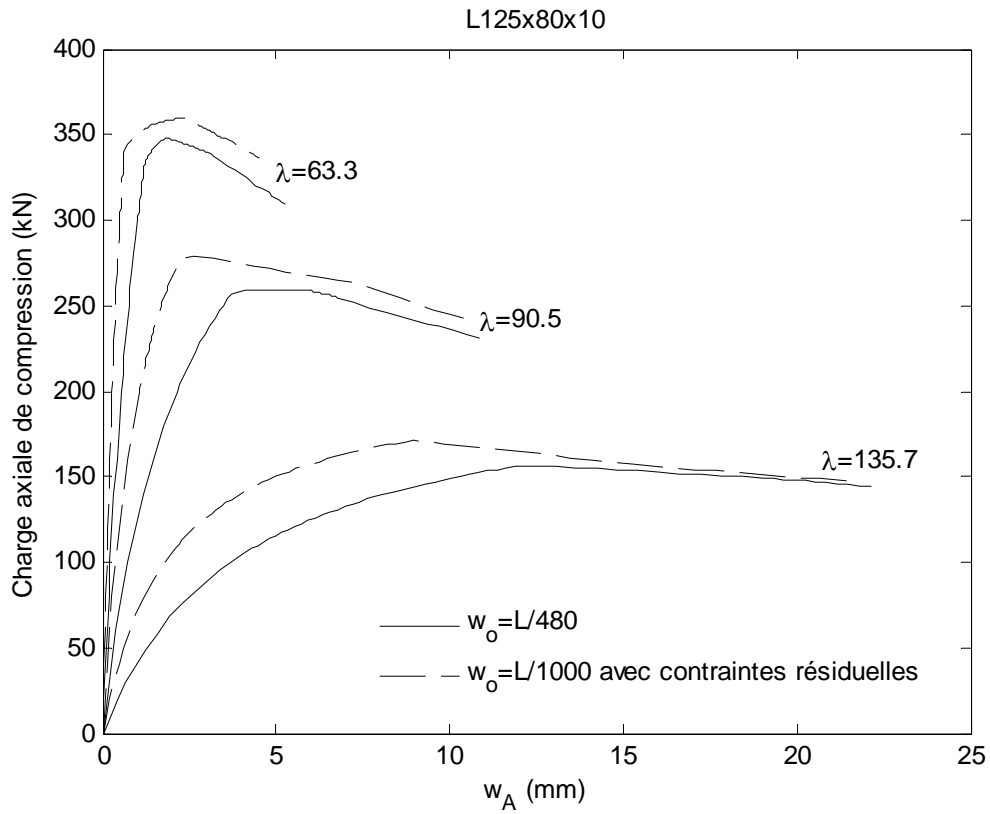


Figure 5.32. Courbes charge-déplacement pour la cornière L125x80x10.

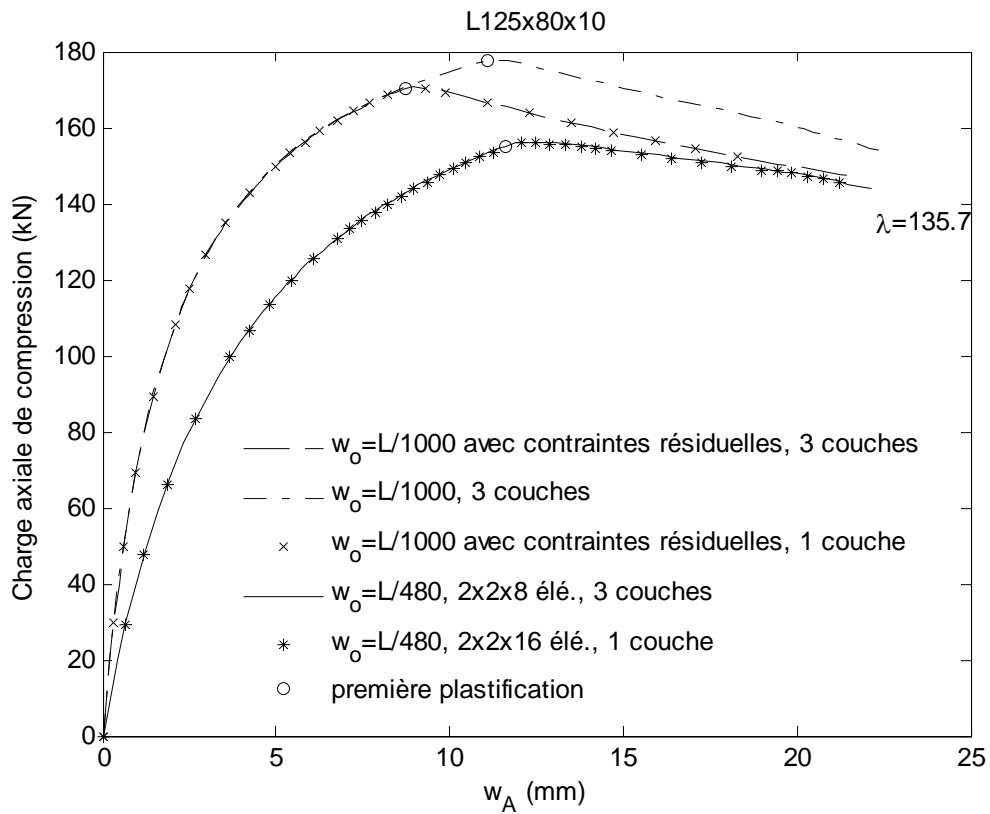


Figure 5.33. Influence des contraintes résiduelles et convergence de l'analyse numérique.



Les cas de simulation numérique sont interprétés sur la figure 5.33 pour mettre en évidence l'influence des contraintes résiduelles et la convergence de l'analyse numérique. Les contraintes résiduelles font apparaître plus tôt la plastification et dans tous les cas sur la figure 6.1d, après la première plastification, la réponse descend presque immédiatement et la charge axiale comprimée y est trouvée maximale. Aucun écart n'est visualisé dans les différents cas de discrétisation (2x2x8 éléments ou 2x2x16 éléments, 3 couches ou 1 couche à travers l'épaisseur).

### 5.5.6. Barre courte de section en C soumise à une compression uniforme

$E=203000 \text{ N/mm}^2$   
 $E_{T1}=100000 \text{ N/mm}^2$   
 $E_{T2}=20000 \text{ N/mm}^2$   
 $E_{T3}=1000 \text{ N/mm}^2$   
 $\nu=0.3$   
 $f_y=385.2 \text{ N/mm}^2$   
 $f_u=475 \text{ N/mm}^2$   
 $L=475 \text{ mm}; h=203 \text{ mm};$   
 $b=41.3 \text{ mm}; d=12.7 \text{ mm};$   
 $t=1.91 \text{ mm}; r=4.94 \text{ mm}.$

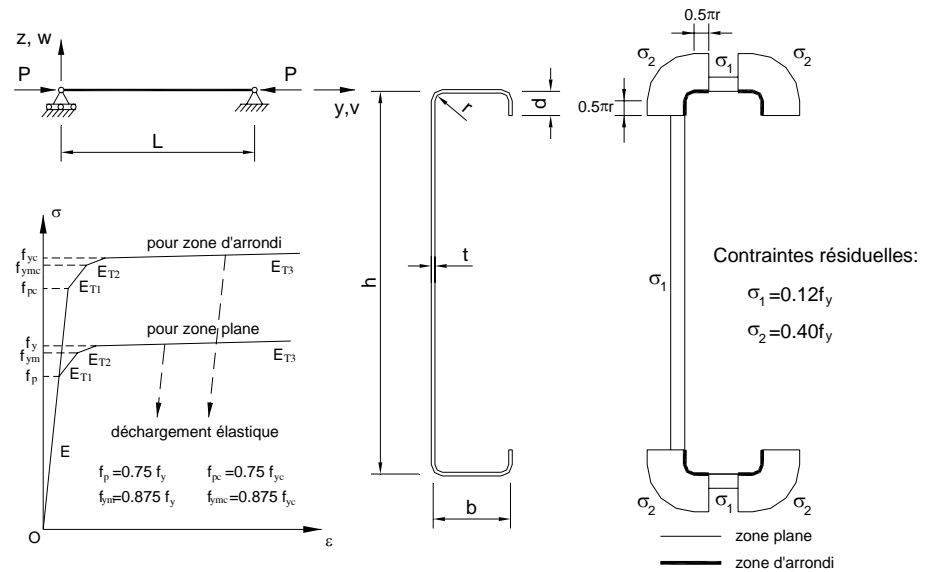


Figure 5.34. Barre courte de section en C sollicitée en compression.

Dans cet exemple, nous incorporons la loi matérielle multi-linéaire dans le programme FENALYSE. L'exemple provient d'un article d'ABDEL-RAHMAN et SIVAKUMARAN [A4-1997]. La loi matérielle multi-linéaire d'ABDEL-RAHMAN et SIVAKUMARAN pour les zones planes et zones arrondies de la section en C est donnée dans le paragraphe 1.1.3.2.1 du chapitre 1 et elle est rappelée à la figure 5.34. La distribution des contraintes résiduelles à travers l'épaisseur est linéaire pour toute la section, avec les contraintes tendues sur la surface extérieure et les contraintes comprimées sur la surface intérieure. Les valeurs des contraintes résiduelles dans les zones planes et les zones arrondies sont statistiquement prises égales à  $0.12f_y$  et  $0.4f_y$ , respectivement. La limite d'élasticité des zones arrondies est déterminée à partir des expressions (1.12) du chapitre 1:

$$m = 0.192 \left( \frac{f_u}{f_y} \right) - 0.068 = 0.192 \left( \frac{475}{385.2} \right) - 0.068 = 0.16876$$

$$B_c = 3.69 \left( \frac{f_u}{f_y} \right) - 0.819 \left( \frac{f_u}{f_y} \right)^2 - 1.79 = 3.69 \left( \frac{475}{385.2} \right) - 0.819 \left( \frac{475}{385.2} \right)^2 - 1.79 = 1.51487$$

$$\Delta f_y = 0.60 \left[ \frac{B_c}{(r/t)^m} - 1.0 \right] f_y = 0.60 \left[ \frac{1.51487}{(4.94/1.91)^{0.16876}} - 1.0 \right] 385.2 = 67.1 (N/mm^2)$$

$$f_{yc} = f_y + \Delta f_y = 385.2 + 67.1 = 452.3 (N/mm^2)$$

ABDEL-RAHMAN et SIVAKUMARAN ont choisi 475mm pour la longueur de la barre pour étudier le comportement non-linéaire pré- et post- localement flambé en retenant les contraintes résiduelles, mais en éliminant la possibilité de flambement global. Ils ont également fait des tests qui ont été comparés avec leurs résultats numériques réalisés par leur programme non-linéaire en utilisant les éléments de type coque de 9-nœuds basés sur la théorie d'AHMAD *et al.* [A6-1970] et les hypothèses de MINDLIN-REISSNER. Nous refaisons cet exemple en divisant, grâce à la symétrie, un quart de la barre en 8x10 éléments dont les éléments rigides sont disposés à l'extrémité chargée pour assurer des déplacements uniformes. Les parois sont divisées en 4 couches. L'imperfection locale est introduite par une analyse de flambement élastique (exagérée sur la figure 5.35) et l'amplitude est prise à la valeur déterministe conseillée par SCHAFER et PEKÖZ [S1-1998] (Eq. (1.3) du chapitre 1):

$$\delta = 0.006h = 0.006 * 203 = 1.218(mm)$$

Il est à noter que ABDEL-RAHMAN et SIVAKUMARAN n'ont pas donné la valeur de l'amplitude d'imperfection utilisée dans leur modèle d'analyse numérique.

Les conditions de symétrie sont imposées aux lignes symétriques du quart de la barre courte. Seul le déplacement axial à l'extrémité chargée est libre afin de simuler les conditions du test et du modèle numérique d'ABDEL-RAHMAN et SIVAKUMARAN. La figure 5.36 indique les courbes charge-déplacement axial obtenues lors de deux types de calcul différents (FE1 et FE2). Le premier type ne considère pas les contraintes résiduelles et il considère une relation contrainte-déformation élastique parfaitement plastique avec la limite d'élasticité  $f_y$  égale à 385.2 pour toute la section. Le second type considère les lois matérielles multilinéaires proposées par ABDEL-RAHMAN et SIVAKUMARAN [A4-1997, S7-1998] et y introduit les contraintes résiduelles. Les tests et l'analyse numérique non-linéaire d'ABDEL-RAHMAN et SIVAKUMARAN, en utilisant les lois multilinéaires, sont aussi présentés sur la figure 5.36.

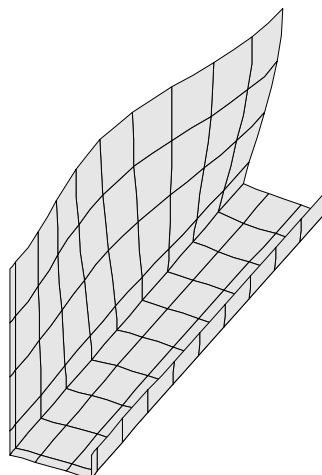


Figure 5.35. Forme de l'imperfection locale.

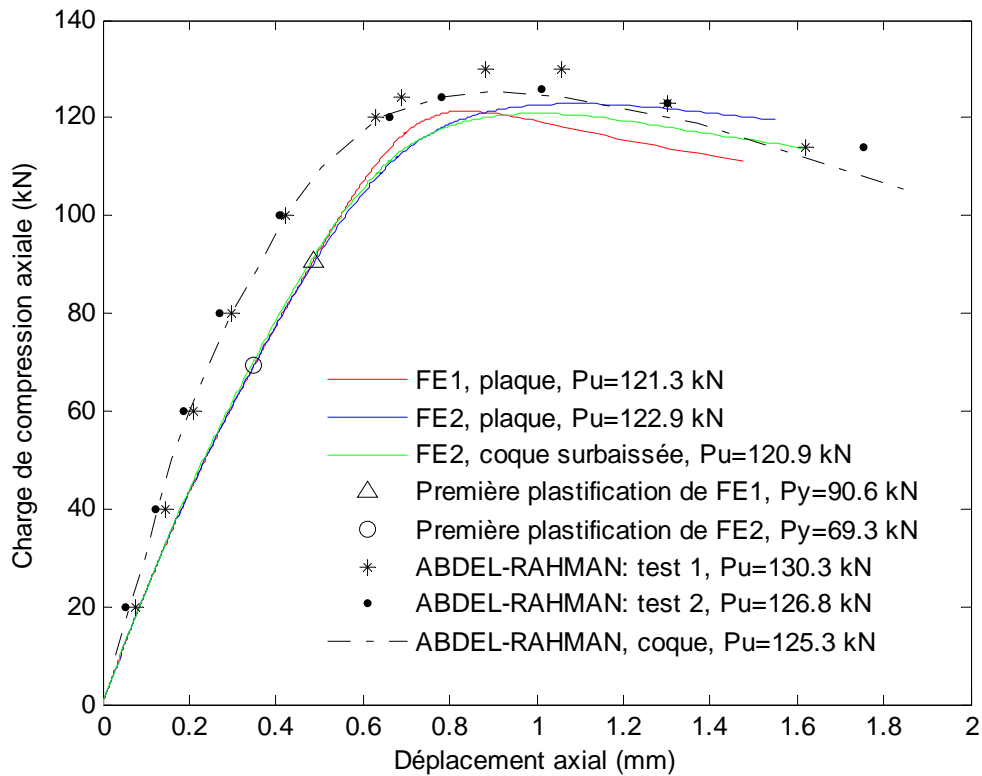


Figure 5.36. Courbes charge-déplacement pour la barre de section en C.

Les résultats indiquent que l'élément de type plaque de FENALYSE est plus souple que l'élément de type coque et les tests d'ABDEL-RAHMAN et SIVAKUMARAN. Toutefois, les éléments de type plaque et de coque surbaissée sont capables de prévoir la charge ultime et la déformation correspondante dans tous les deux types de calcul. Les deux modèles donnent des charges ultimes similaires et un peu plus petites que les tests. Cependant, une différence significative peut être notée entre les deux comportements quand la barre commence à plastifier. A cause de l'existence des contraintes résiduelles, la première plastification du second modèle apparaît plus tôt que celle du premier. Le modèle FE2 donne assez exactement le déplacement axial expérimental correspondant à la charge ultime. Tandis que le modèle FE1 donne environ 70% de ce déplacement. L'idée que l'existence des contraintes résiduelles sur sections en C est compensée par les effets du relèvement de la limite d'élasticité peut être acceptée lorsque l'on ne considère que la charge ultime, mais cela ne peut pas être valide quand la déformation est considérée.

### 5.5.7. Portique avec éléments à inertie variable

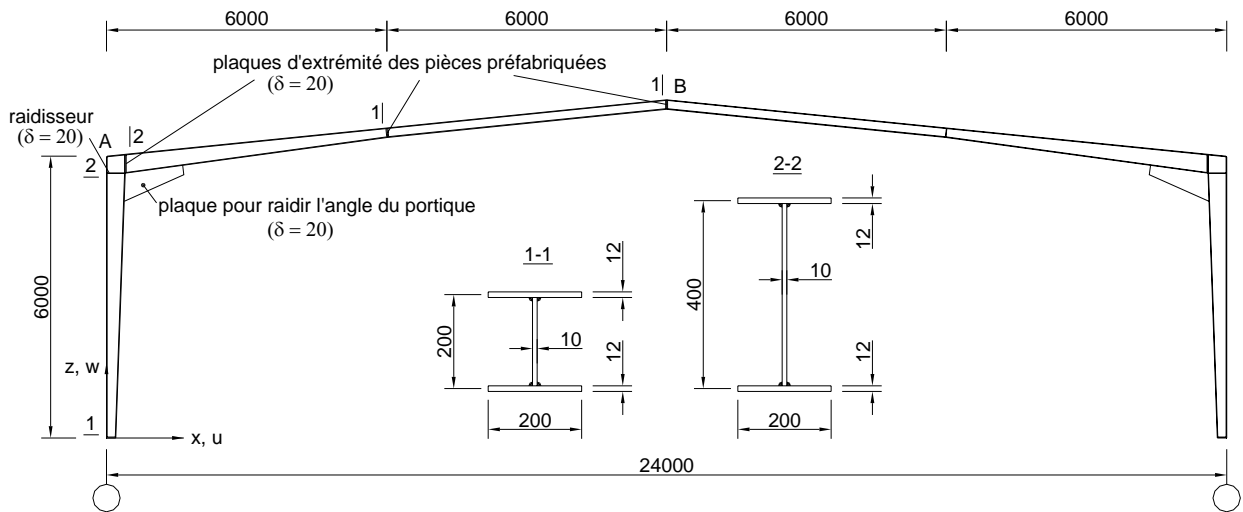


Figure 5.37. Portique avec éléments à inertie variable.

$$E=210000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu=0.3$$

$$f_y=275 \text{ N/mm}^2$$

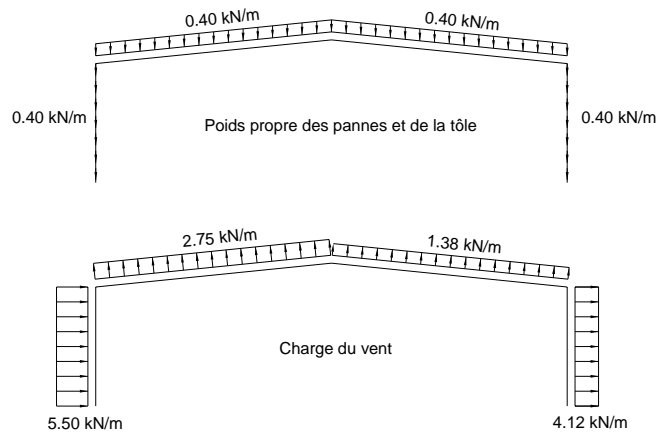


Figure 5.38. Charges appliquées sur le portique.

Les portiques avec éléments à inertie variable sont largement utilisés dans la construction des ateliers. Les parties du portique sont préfabriquées et elles sont assemblées sur chantier, les liaisons entre les poteaux et la fondation sont articulées. Ce qui facilite le montage des portiques. Un exemple de ce genre de portique est présenté sur la figure 5.37. Les charges appliquées sur le portique (Fig. 5.38) sont le poids propre des pannes, de la tôle de couverture et du portique même et le vent. Le vent provoque une action de soulèvement du toit. La charge du vent cause de grands déplacements du portique et la non-linéarité géométrique doit y être abordée. On considère que la charge du vent est statiquement appliquée. L'élanement relatif des parois est assez faible, donc le phénomène de voilement local ne se produit que si la contrainte de compression est très importante. On n'examine pas ce phénomène dans l'analyse non-linéaire de notre portique.

Les résultats de l'analyse linéaire par FENALYSE sont comparés à ceux réalisés par SAP2000 v7.40 pour lequel on utilise les éléments de poutre-poteau et on doit remplacer les plaques raidies aux angles du portique par les barres équivalentes (de section 20x400mm). SAP2000 permet

d'introduire une barre à inertie variable en interpolant l'inertie entre ses deux extrémités par fonction polynomiale de deuxième ordre ou de troisième ordre.

Tableau 5.5. Analyse linéaire.

Déplacement (mm)	Poids propre			Vent				
	$u_A$	$\theta_{yA}$	$w_B$	$u_A$	$\theta_{yA}$	$u_B$	$w_B$	$\theta_{yB}$
SAP2000	-3.53	0.00154	-35.89	91.03	0.00572	82.97	81.62	-0.00688
FENALYSE	-3.26	0.00144	-32.55	90.02	0.00568	80.74	72.10	-0.00714

Les résultats s'accordent assez bien malgré que des éléments finis de types différents soient utilisés pour SAP2000 et pour FENALYSE.

Les analyses non-linéaires sont exécutées dans les cas suivant:

- + analyse non-linéaire matérielle seule en tenant compte du poids propre,
- + analyse non-linéaire matérielle seule sans tenir compte du poids propre,
- + analyse non-linéaire mixte, géométrique et matérielle, en tenant compte du poids propre,
- + analyse non-linéaire mixte, géométrique et matérielle, sans tenir compte du poids propre.

Les membrures du portique sont composées des plaques et elles sont totalement modélisées par 102 éléments de 9 nœuds, y compris les plaques d'extrémité et les raidisseurs (3 éléments sont utilisés pour la section). Les déplacements hors du plan du portique sont empêchés par les pannes et les contrefiches. Dans la modélisation numérique, les déplacements hors du plan du portique des semelles des sections en I sont également empêchés. Pour les cas tenant compte du poids propre, qui est petit par rapport à la valeur de la charge du vent, les contraintes causées par le poids propre sont préalablement déterminées par une analyse linéaire et elles sont considérées comme contraintes initiales pour une analyse ultérieure non-linéaire pas-à-pas du portique sous l'action du vent. L'acier est pris élastique parfaitement plastique. La modélisation par éléments finis de plaque est donnée à la figure 5.39.

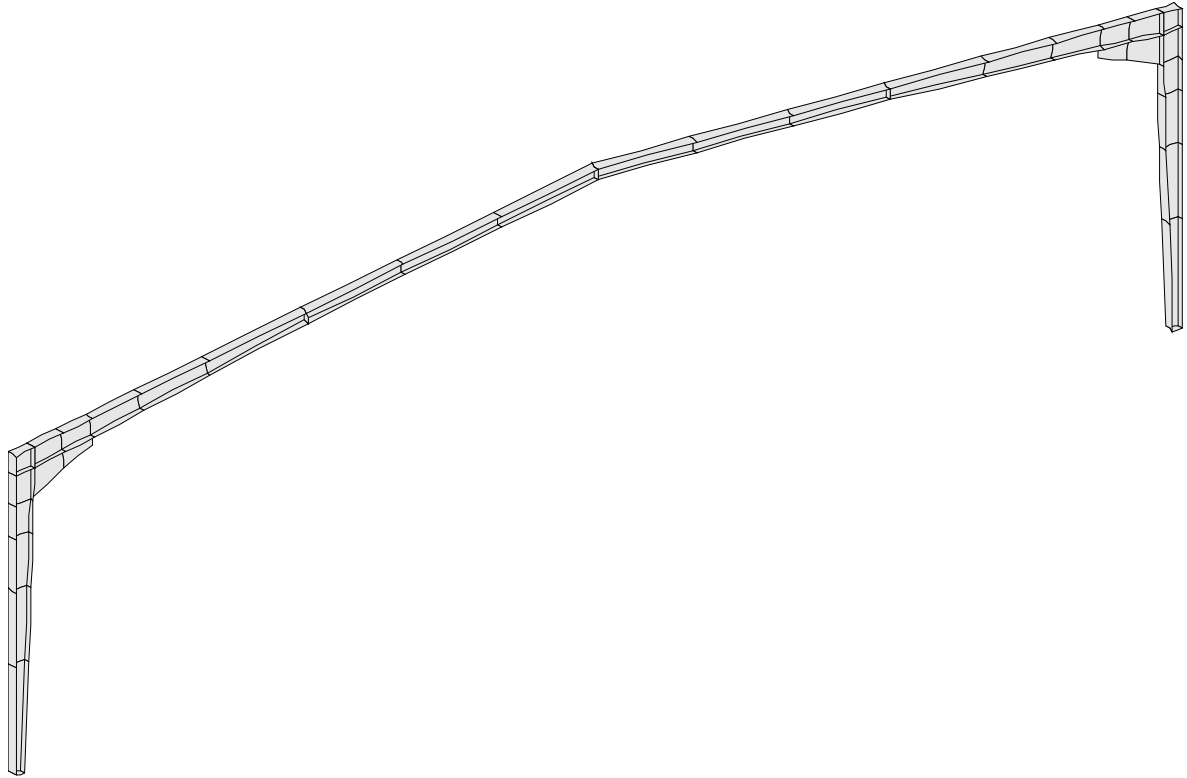


Figure 5.39. Modélisation du portique par éléments finis de plaque.

Les courbes non-linéaires du portique sont interprétées sur la figure 5.40. Les analyses mixtes en tenant compte de la non-linéarité géométrique donne des solutions plus rigides et des capacités portantes plus élevées par rapport aux analyses non-linéaires matérielles seules. Cependant, les valeurs de la charge du vent causant la première plastification sont très proches et il est à noter que pour les analyses non-linéaires matérielles seules, avant la première plastification, elles sont égales aux analyses linéaires élastiques. Cela signifie que si l'on ne s'intéresse qu'à la capacité portante et à la première plastification du portique, l'analyse linéaire est suffisante en réalité pour ce genre de portique. La capacité portante et la première plastification du portique sont aussi plus élevées si l'on y introduit la charge du poids propre. Cela est évident car l'action du poids propre est inverse de l'action du vent sur le toit et allège l'action de ce dernier. La figure 5.41 permet de voir les zones plastifiées du portique à l'état post-critique déformé.

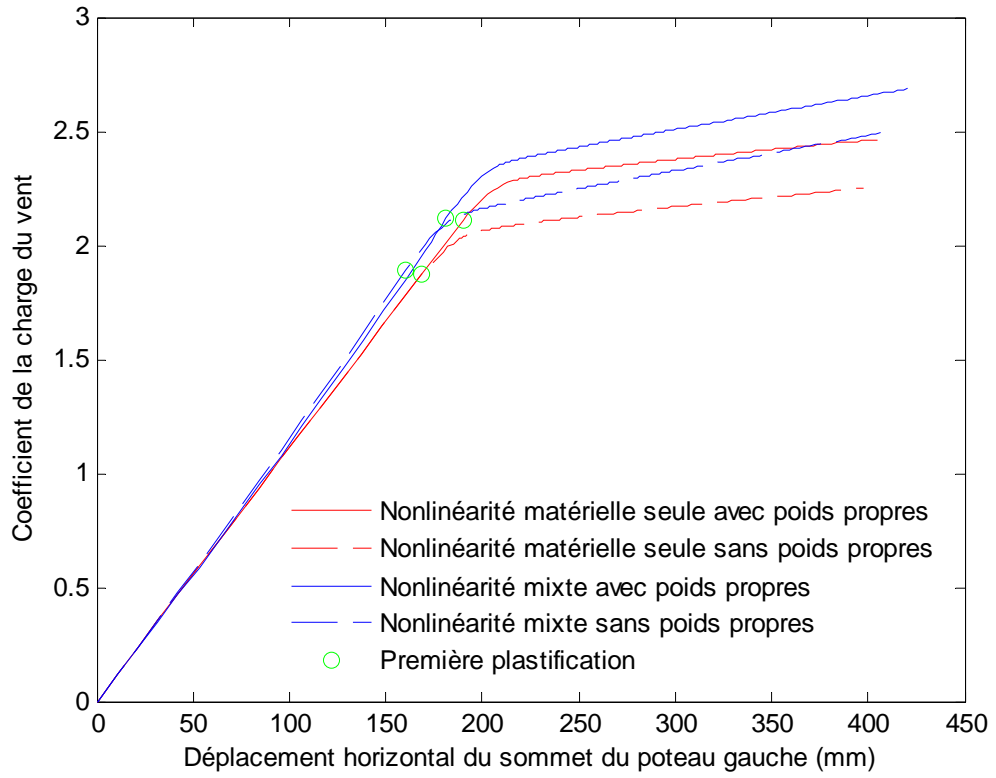


Figure 5.40. Courbes non-linéaires du portique sous l'action du vent.

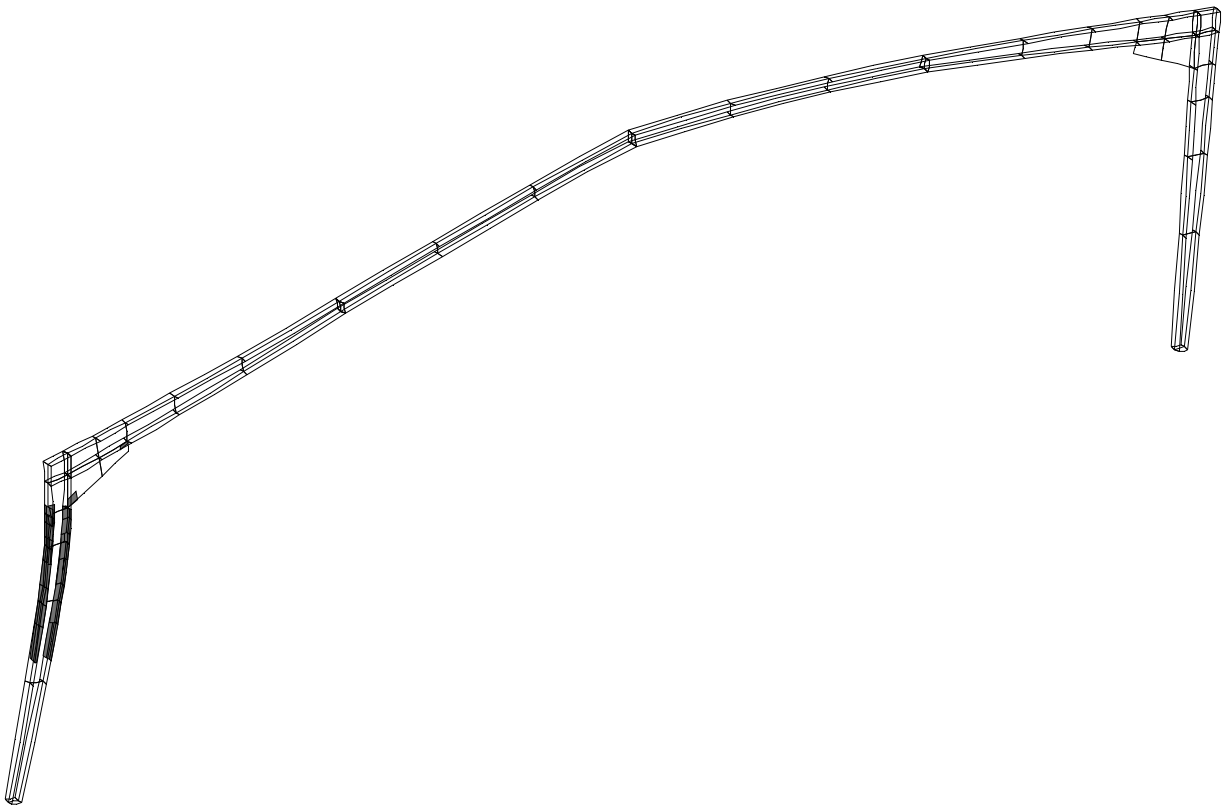


Figure 5.41. Zones plastifiées du portique.

## **5.6. Conclusions**

Les éléments de plaque et de coque surbaissée peuvent prédire avec précision le comportement non-linéaire mixte géométrique et matériel des structures à parois minces en tenant compte des imperfections géométriques, structurale (contraintes résiduelles) et matérielle (écrouissage). Les structures à parois minces abordées dans ce chapitre sont des barres de sections différentes et un portique. Nous voyons que les éléments de plaque et de coque surbaissée donnent des résultats identiques jusqu'à la charge de ruine de la structure. Après cette charge, les éléments de coque surbaissée travaillent un peu mieux que les éléments de plaque. En réalité, la charge de ruine est toujours la donnée la plus importante et alors, tous les deux types d'éléments sont fiables en analyse.



## CHAPITRE 6. CONCLUSIONS

### 6.1. Bilan de la thèse

Chapitre 1: Présenter les caractéristiques des profils à parois minces. Ces caractéristiques sont les formes de section, les nuances d'acier et l'état initial du profil qui comprend les imperfections géométriques, les contraintes résiduelles et l'écroutissement. Les modèles matériels des sections à parois minces proposés par plusieurs auteurs dans la littérature sont aussi présentés. Les généralités sur le comportement des barres à parois minces est exposée à la fin du chapitre.

Chapitre 2: Présenter l'état du sujet étudié. L'étude bibliographique de l'analyse des structures à parois minces est concentrée sur la méthode Generalised Beam Theory, les méthodes semi-empiriques et les méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis, la méthode des bandes finies semi-analytique et la méthode des bandes finies splines. A partir de l'étude bibliographique, l'objectif de la thèse est déterminé à la fin du chapitre.

Chapitre 3: Analyser le comportement linéaire et le flambement des structures à parois minces par la méthode des bandes finies semi-analytiques et la méthode des éléments finis. Ces méthodes sont basées sur la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER et la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE. Les applications numériques sont réalisées en comparant avec les résultats connus. Les bons accords justifient la qualité de la formulation des bandes finies et des éléments finis. L'influence de l'épaisseur des parois sur le comportement des structures à parois minces est mise en évidence au travers des exemples. Les bandes finies et les éléments finis basés sur la théorie des coques surbaissées convergent plus rapidement que ceux basés sur la théorie des plaques en calculant des structures qui ont une surface curviligne.

Chapitre 4: Analyser le comportement non-linéaire géométrique élastique des structures à parois minces. La formulation de la description lagrangienne actualisée est exposée et les équations d'équilibre incrémentielles sont élaborées. La méthode de RIKS modifiée (*modified arc-length control*, en anglais) est choisie pour présenter la stratégie de résolution. Les éléments finis non-linéaires sont développés. De bons résultats sont obtenus lorsque les rotations sont modérées. Les éléments finis basés sur la théorie des coques surbaissées sont meilleurs que ceux basés sur la théorie des plaques dans le domaine non-linéaire où les parois des structures sont légèrement courbées.

Chapitre 5: Analyser le comportement non-linéaire mixte géométrique et matériel des structures à parois minces. La relation incrémentielle élasto-plastique de contrainte-déformation est présentée dans ce chapitre tandis que les formulations du chapitre 4 sont toujours valables. Les structures à parois minces réelles sont analysées par les éléments non-linéaires développés et confrontées avec les résultats expérimentaux et numériques étudiés par les autres auteurs. La confrontation montre que les éléments finis développés peuvent prédire avec précision le comportement non-linéaire élasto-plastique, la charge de ruine et la déformation des structures à parois minces.

Chapitre 6: Conclusions.

### 6.2. Apports de la thèse

Le but de la thèse, analyser numériquement les structures à parois minces, est atteint, comme l'ont montré les exemples traités aux chapitres 3, 4 et 5 concernant le comportement linéaire, non-linéaire

géométrique élastique et non-linéaire mixte géométrique et matériel, respectivement. Il est également possible de simuler l'essai de laboratoire et de calculer le comportement non-linéaire d'une structure réelle, compte tenu de ses imperfections, jusqu'à la ruine par voie numérique, sur la base de la théorie des plaques déformables en cisaillement de MINDLIN-REISSNER et de la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE.

A titre de rappel, les apports originaux de la thèse sont récapitulés comme suit:

- (i) traiter le problème du sixième degré de liberté en introduisant la déformation de cisaillement fictive dans les relations déformation-déplacement classiques de la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER et de la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE;
- (ii) appliquer la méthode des bandes finies basée sur la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER et la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE au calcul du flambement élastique des barres à parois minces. Les relations déformation-déplacement de ces théories sont complétées par la déformation de cisaillement fictive. Le programme de bandes finies nommé FLAMBANDE a été mis au point avec succès;
- (iii) développer les éléments finis de 8-nœuds et de 9-nœuds basés sur la théorie des plaques de MINDLIN-REISSNER et la théorie des coques surbaissées de MARGUERRE pour l'analyse linéaire, non-linéaire géométrique élastique et non-linéaire mixte géométrique et matérielle des structures à parois minces. Les relations déformation-déplacement de ces théories sont complétées par la déformation de cisaillement fictive. Le programme d'éléments finis nommé FENALYSE a été mis au point avec succès.

### **6.3. Perspectives d'avenir**

Les études que nous nous proposons de faire dans l'avenir peuvent être mentionnées comme suit:

- (i) convertir le programme FENALYSE en d'autres langages plus utilisés dans l'analyse des structures, tels que FORTRAN, C<sup>#</sup>;
- (ii) implanter des éléments linéaires à 3- et 4-nœuds dans FENALYSE, qui, malgré qu'ils soient beaucoup moins chers que les éléments de 8- et 9-nœuds, sont plus difficiles à maîtriser;
- (iii) appliquer des techniques qui permettent d'ajouter de larges rotations dans l'espace tridimensionnel;
- (iv) appliquer la théorie des plaques déformables en cisaillement de plus haut ordre. Cette théorie permet de décrire une distribution exacte, en forme parabolique, des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur des parois;
- (v) calculer le flambement des barres à parois minces soumises à des charges quelconques par la méthode des bandes finies semi-analytiques;
- (vi) appliquer la technique du sixième degré de liberté proposée à la méthode des bandes finies de type spline;
- (vii) implanter dans le programme FENALYSE d'autres types d'éléments finis, tels que des éléments de type poutre-poteau, de type coque 'vraie' et tridimensionnels, afin d'analyser des structures qui doivent être modélisées par des types d'éléments différents;
- (viii) considérer des charges non-conservatives;

(ix) les programmes FLAMBANDE et FENALYSE peuvent servir à l'enseignement et à la recherche sur les structures à parois minces au Département de Bâtiment à l'Ecole supérieure de Génie civil du Vietnam (ESGC).

## BIBLIOGRAPHIE

### A

- A1. ARCELOR GROUP. *Profil ARBED*. Programme de vente, 2001.
- A2. ASHRAF, M., GARDNER, L. and NETHERCOT, D., A. *Finite element modelling of structural stainless steel cross-sections*. Thin-Walled Structures, 44, pp. 1048-1062, 2006.
- A3. ASHRAF, M., GARDNER, L. and NETHERCOT, D. A. *Strength enhancement of the corner regions of stainless steel cross-sections*. Jour. Construct. Steel Research, 61, pp. 37-52, 2005.
- A4. ABDEL-RAHMAN, N. and SIVAKUMARAN, K. S. *Material properties models for analysis of cold-formed steel members*. Jour. Struct. Engrg, ASCE, 123(9), pp. 1135-1143, 1997.
- A5. AU, F. T. K. and CHEUNG, Y. K. *Isoparametric spline finite strip for plane structures*. Computers & Structures, 48, pp. 23-32, 1993.
- A6. AHMAD, S., IRONS, B. M. and ZIENKIEWICZ, O. C. *Analysis of thick and thin shell structures by curved elements*. Int. Jour. Num. Meth. Engng., 2, pp. 419-451, 1970.
- A7. ALLMAN, D. J. *A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis*. Comp. & Struct., 19, pp. 1-8, 1984.
- A8. ALLMAN, D. J. *Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations*. Int. Jour. Num. Meth. Engng., 26, pp. 2645-2655, 1988.

### B

- B1. BRAHAM, M., MAQUOI, R. RANGELOV, N. et RICHARD, C. *L'influence des défauts de planéité de l'âme des profilés reconstitués soudés sur leur résistance en flexion et compression*. Construction Métallique, N° 1, 1995.
- B2. BRAHAM, M., GRIMAULT, J. P., MASSONNET, C., MOUTY, J. and RONDAL, J. *Buckling of thin-walled hollow sections – Cases of axially-loaded rectangular sections*. Acier-Stahl-Steel, pp. 30-36, 1-1980.
- B3. BATISTA, E. M. *Etude de la stabilité des profils à parois minces et section ouverte de types U et C*. Université de Liège, Thèse de doctorat, 1988.
- B4. BREDENKAMP, P. J. and VAN DEN BERG, G. J. *The strength of stainless steel built-up I section columns*. Jour. Construct. Steel Research, 34, pp. 131-144, 1995.
- B5. BRADFORD, M. A. and HANCOCK, G. J. *Elastic interaction of local and lateral buckling in beams*. Thin-walled Structures, 2(1), pp. 1-25, 1984.
- B6. BLEICH, F. *Buckling strength of metal structures*. Mc Graw-Hill, London, 1952.

- B7. BERGAN, P. G. and FELIPPA, C. A. *Efficient implementation of a triangular membrane element with drilling freedoms*. In 'Finite element methods for plate and shell structures', volume 1: Element technology. Ed. Hughes, T. J. R. and Hinton, E. Pineridge Press Inter., 1986.
- B8. BELYTSCHKO, T., STOLARSKI, H., LIU, W. K., CARPENTER, N. and ONG, J. S-J. *Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 51, pp. 221-258, 1985.
- B9. BELYTSCHKO, T., LIN, J. and TSAY, C-S., *Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 42, 225-251, 1984.
- B10. BELYTSCHKO, T., WONG, B. L. and STOLARSKI, H. *Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange shell element*. Int. Jour. Num. Meth. Engng., 28, pp. 385-414, 1989.
- B11. BELYTSCHKO, T. and TSAY, C-S. *A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature*. Int. Jour. Numer. Meth. Engng., 19, pp. 405-419, 1983.
- B12. BATHE, K. J. and BOLOURCHI, S. *A geometric and material non-linear plate and shell element*. Comput. & Struct., 11, pp. 23-48, 1980.
- B13. BUI, H. C. and RONDAL, J. *Buckling analysis of thin-walled sections by semi-analytical Mindlin-Reissner finite strips – A treatment of drilling rotation problem*. Thin-walled structures, 2008, 46, pp.646-652.
- B14. BERGAN, P. G., HERRIGMOE, G., KRAKELAND, B. and SØREIDE, H. T. *Solution techniques for non-linear finite element problems*. Int. Jour. Num. Meth. Engng., 12, pp. 1677-1696, 1978.

## C

- C1. COSTA FERREIRA, C. M. et RONDAL, J. *Etude expérimentale de la stabilité des cornières à parois minces profilées à froid*. Université de Liège, Laboratoire de Stabilité des Constructions, Rapport N°149, janvier, 1985.
- C2. COSTA FERREIRA, C. M. *Essais de cornières en acier pliées à froid*. Université de Liège, Laboratoire de Stabilité des Constructions, Rapport N°155, Septembre, 1986.
- C3. CHEUNG, Y. K. *Finite strip method in structural analysis*. Pergamon Press, New York, 1976.
- C4. CHEUNG, Y. K. and AU, F. T. K. *Isoparametric spline finite strip for degenerate shells*. Thin-walled structures, 21, pp. 65-92, 1995.
- C5. CHU, XT., YE, ZM., KETTLE, R. and LI, LY. *Buckling behaviour of cold-formed channel sections under uniformly distributed loads*. Thin-walled Structures, 43, pp. 531-542, 2005.
- C6. CHOU, S. M. and RHODES, J. *Review and compilation of experimental results on thin-walled structures*. Computers & Structures, Vol. 65, pp. 47-67, 1997.

- C7. CRISFIELD, M. A. *Finite elements and Solution procedures for Structural analysis*. Vol I: Linear analysis. Pinneridge, Swansea, UK, 1986.
- C8. CRISFIELD, M. A. *A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”*. *Comput. & Struct.*, 13, pp. 55-62, 1981.
- C9. CRISFIELD, M. A. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. Volume 1: Essentials. John Wiley & Sons, 1991.
- C10. CLOUGH, R. W. and JOHNSON, C. P. *A finite element approximation for the analysis of thin-shells*. *Int. Jour. Solids Struct.*, 4, pp. 43-60, 1968.
- C11. COWPER, G. R. *The shear coefficient in Timoshenko’s beam theory*. *Jour. App. Mech.*, pp. 335-340, 1966.
- C12. CHIN, C-K., AL-BERMANI, F. G. A. and KITIPORNCHAI, S. *Finite element method for buckling analysis of plate structures*. *Jour. Struct. Engng*, Vol. 119, No. 4, pp. 1048-1068, 1993.
- C13. CHIN, C. K., AL-BERMANI, F. G. A. and KITIPORNCHAI, S. *Non-linear analysis of thin-walled structures using plate elements*. *Int. j. numer. methods eng.*, 37, pp. 1697-1711, 1994.
- C14. COOK, R. D. *Finite element modelling for stress analysis*. John Wiley & Sons, 1995.
- C15. CHAN, S. L. and KITIPORNCHAI, S. *Geometric nonlinear analysis of asymmetric thin-walled beam-columns*. *Eng. Struct.*, 9, pp. 243-254, 1987.
- C16. CHAKRABARTY, J. *Applied plasticity*. Springer-Verlag, 2000.
- C17. CESCOTTO, S., FREY, F. and MASSONNET, C. *On the effective finite element analysis of engineering structures in the nonlinear range*. In: *Theoretical and applied mechanics*, ed. Rimrott, F. P. J. and Tabarrok, B., Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1980.

## D

- D1. DUBINA, D. and UNGUREANU, V. *Effect of imperfections in numerical simulation of instability behaviour of cold-formed steel members*. *Thin-Walled Structures*, 40, pp.239-262, 2002.
- D2. DADDI, I. et MAZZOLANI, F. M. *Détermination expérimentale des imperfections structurales des profilés en acier*. *Construction Métallique*, N° 1, 1974.
- D3. DE VILLE DE GOYET, V. *L’analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique*. Université de Liège, Thèse de doctorat, 1989.
- D4. DE VILLE DE GOYET, V. *Analyse non-linéaire des structures*. Note de cours, Université de Liège, 2007.
- D5. DAWE, D. J., LAM, S. S. E. and AZIZIAN, Z. G. *Finite strip post-local-buckling analysis of composite prismatic plate structures*. *Computers & Structures*, Vol. 48, No. 6, pp. 1011-1023, 1993.

- D6. DAWE, D. J. and PESHKAM, V. *Buckling and vibration of finite-length composite prismatic plate structures with diaphragm ends, part I: Finite strip formulation*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 77, pp. 1-30, 1989.
- D7. DAVIES, J. M. and LEACH, P. *First-order generalised beam theory*. Jour. Construct. Steel Research, 31, pp. 197-220, 1994.
- D8. DAVIES, J. M. and LEACH, P. *Second-order generalised beam theory*. Jour. Construct. Steel Research, 31, pp. 221-241, 1994.
- D9. DEBONGNIE, J. F. *Physical interpretation and generalization of Marguerre's shallow shell*. Int. Jour. Engng. Sci., pp. 387-399, 1978.
- D10. DEGEE, H. *Contribution à la prise en compte de la déformabilité de la section droite dans un élément fini de type poutre..* Université de Liège, Thèse de doctorat, 2000.
- D11. DEGEE, H., BOISSONNADE, N. and ROSSI, B. *Local and Interactive post-buckling of RHS thin-walled members – Comparing a new special beam finite element with shell FE models*. Int. Jour. Struct. Stability and Dynamics, 7, pp. 213-241, 2007.

## E

- E1. EUROCODE 3. *Calcul des structures en acier*. Part 1-1: Règles générales et règles pour les bâtiments, prEN 1993-1-1, 2003.
- E2. EUROCODE 3. *Design of steel structures*. Part 1-3: General rules – Supplementary rules for cold-formed members and sheeting, prEN 1993-1-3, 2004.
- E3. EUROCODE 3. *Design of steel structures*. Part 1-4: General rules – Supplementary rules for stainless steels, prEN 1993-1-4, 2004.
- E4. E.C.C.S. *Ultimate limit state calculations of sway frames with rigid joints*. Technical Committee 8 – Structural stability technical working group 8.2. – System. First edition, 1984.
- E5. ECCHER, G., RASMUSSEN, K. J. R. and ZANDONINI, R. *Elastic buckling analysis of perforated thin-walled structures by the isoparametric spline finite strip method*. Thin-walled structures, 46(2), pp. 165-191, 2008.

## F

- F1. FAN, S. C. and CHEUNG, Y. K. *Analysis of shallow shells by spline finite strip method*. Engng. Struct., 5, pp. 255-262, 1983.
- F2. FELIPPA, C. A. *Nonlinear finite element methods (NFEM)*. Lecture note, University of Colorado at Boulder, 2007.
- F3. FREY, F. *L'analyse statique non-linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application*. Université de Liège, Thèse de doctorat, 1978.

## G

- G1. GRUMBACH, M. et PRUDHOMME, M. *Propriétés des profilés à froid*. Construction Métallique, N° 1, 1974.
- G2. GARDNER, L. and NETHERCOT, D. A. *Experiments on stainless steel hollow sections – Part 1: Material and cross-sectional behaviour*. Jour. Construct. Steel Research, 60, pp. 1291-1318, 2004.
- G3. SCHULZ, G. W. and ALPSTEN, G. *Geometrical and cross-sectional properties of steel structures*. European Convention for Constructional Steelwork, Manual on the Stability of Steel Structures, 1976.
- G4. GRAVES SMITH, T. R. and SRIDHARAN, S. *A finite strip method for the post-locally buckled analysis of plate structures*. Int. Jour. Mech. Science, 20(12), pp. 833-842, 1978.
- G5. GONÇALVES, R. and CAMOTIM, D. *GBT local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns*. Computers & Structures, 82, pp. 1473-1484, 2004.
- G6. GONÇALVES, R. and CAMOTIM, D. *Thin-walled member plastic bifurcation analysis using generalised beam theory*. Adv. Engrg. Software, 38, pp. 637-646, 2007.
- G7. GALLAGHER, R. H. *Finite element analysis - Fundamentals*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1975.

## H

- H1. HANCOCK, G. J. *Nonlinear analysis of thin sections in compression*. Jour. Struct. Division, ASCE, 25 (1), pp. 147-155, 1981.
- H2. HANCOCK, G. J. *Local distortional and lateral buckling of I-beams*. Jour. Struct. Div., ASCE, 104(ST11), pp. 1787-1798, 1978.
- H3. HANCOCK, G. J. *Distortional buckling of steel storage rack columns*. Jour. Struct. Engrg, ASCE, 111(12), pp. 2270-2283, 1985.
- H4. HANCOCK, G. J. *Finite strip buckling, nonlinear elastic and elastic-plastic analyses*. Coupled instabilities in metal structures. CISM courses and lectures. Ed. RONDAL, J., 1998.
- H5. HANCOCK, G. J., DAVIDS, A. J., KEY, P. W., LAU, S. C. W. and RASMUSSEN, K. J. R. *Recent developments in the buckling and nonlinear analysis of thin-walled structural members*. Thin-walled Structures, 9, pp. 309-338, 1990.
- H6. HANCOCK, G. J. *Design for distortional buckling of flexural members*. Thin-walled Structures, 27(1), pp. 3-12, 1997.
- H7. HINTON, E. *Buckling of initially stressed Mindlin plates using a finite strip method*. Computers & Structures, 8, pp. 99-105, 1978.
- H8. HINTON, E. and RAO, N. V. R. *Structural shape optimization of shells and folded plates using two-noded finite strips*. Computers & Structures, 46, pp. 1055-1071, 1993.



H9. HORRIGMOE, G. and BERGAN, P. G. *Nonlinear analysis of free-form shells by flat finite elements*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 16, pp.11-35, 1978.

H10. HUANG, H. C. and HINTON, E. *Lagrangian and serendipity plate and shell elements through thick and thin*. In: Finite Element Methods for Plate and Shell Structures, ed. HUGHES, T.J.R. and HINTON, E., Pineridge Swansea, pp. 46-61, 1986.

H11. HUGHES, T. J. R. and LIU, W. K. *Nonlinear finite element analysis of shells; Part 1: three-dimensional shells*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 26, pp. 331-362, 1981.

H12. HAN, Z-W, LIU, C., LU, W-P. and REN, L-Q. *The effects of forming parameters in the roll-forming of a channel section with an outer edge*. Jour. Mater. Process. Tech., 116, pp. 205-210, 2001.

H13. HAN, Z-W, LIU, C., LU, W-P., REN, L-Q. and TONG, J. *Spline finite strip analysis of forming parameters in roll-forming of a channel section*. Jour. Mater. Process. Tech., 159, pp. 383-388, 2005.

## I

I1. ITOH, Y. *Ultimate strength variations of structural steel members*. University of Nagoya, Department of Civil Engineering, Doctorat Dissertation, November, 1984.

I2. IRONS, B. and SHRIVE, N. *Finite element primer*. Chichester: Ellis Horwood, 1983.

I3. IRONS, B. *The SemiLoof shell element. Finite elements for thin shells and curved members*. Ed. ASHWELL, D. G. et GALLAGHER, R. H. John Wiley & Sons, 1976.

I4. IRONS, B. and AHMAD, S. *Techniques of finite elements*. Ellis Horwood, 1980.

I5. IDELSOHN, S. *Analyses statique et dynamique des coques par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 1974.

I6. IDELSOHN, S. *On the use of deep, shallow or flat shell finite elements for the analysis of thin shell structures*. Comp. Meth. App. Mech. Engng, 26, pp. 321-330, 1981.

## J

J1. JETTEUR, P. and FREY, F. *A four node Marguerre element for non-linear shell analysis*. Engineering Computations, 3, pp. 276-282, 1986.

J2. JETTEUR, P. *Contribution à la solution de problèmes particuliers d'instabilité dans les grandes poutres métalliques*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 1984.

## K

K1. KAITILA, O. *Imperfection sensitivity analysis of lipped channel columns at high temperatures*. Jour. Construct. Steel Research, 58, pp. 333-351, 2002.

- K2. KEY, P. W. and HANCOCK, G. J. *A theoretical investigation of the column behaviour of cold-formed square hollow sections*. Thin-Walled Structures, 16(1), pp. 31-64, 1993.
- K3. KEY, P. W. and HANCOCK, G. J. *A finite strip method for the elastic-plastic large displacement analysis of thin-walled and cold-formed steel sections*. Thin-Walled Structures, 16, pp. 3-29, 1993.
- K4. KWON, Y. B. and HANCOCK, G. J. *A nonlinear elastic spline finite strip analysis for thin-walled sections*. Thin-walled Structures, 12, pp. 295-319, 1991.
- K5. KWON, Y. B. and HANCOCK, G. J. *Post-buckling analysis of thin-walled channel sections undergoing local and distortional buckling*. Computers & Structures, 49, pp. 507-516, 1993.
- K6. KONG, J. and CHEUNG, Y. K. *A generalized spline finite strip for the analysis of plates*. Thin-walled Structures, 22, pp. 181-202, 1995.
- K7. KESTI, J. and DAVIES, J. M. *Local and distortional buckling of thin-walled short columns*. Thin-walled Structures, 34, pp. 115-134, 1999.
- K8. KOITER, W. T. *The theory of thin elastic shells*. Proceedings of the symposium on ... delf, 1960.

## L

- L1. LAM, S. S. E. and ZOU, G. P. *Higher-order shear deformable finite strip for the flexure analysis of composite laminates*. Engrg. Struct. 23, pp. 198-206, 2001.
- L2. LAU, S. C. W. and HANCOCK, G. J. *Buckling of thin flat-walled structures by a spline finite strip method*. Thin-walled Structures, 4, pp. 269-294, 1986.
- L3. LAU, S. C. W. and HANCOCK, G. J. *Distortional buckling formulas for channel columns*. J. Struct. Eng., ASCE, 113(5), pp. 1063-1078, 1987.
- L4. LEACH, P. and DAVIES, J. M. *An experimental verification of the Generalized Beam Theory applied to interactive buckling problems*. Thin-walled Structures, Vol. 25, N° 1, pp. 61-79, 1996.
- L5. LOVE, A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. New York, Dover, 1944.
- L6. LIU, C., ZHOU, Y. and LU, W. *Numerical simulation of roll-forming by B-spline finite strip method*. Jour. Mater. Process. Tech., 60, pp. 215-218, 1996.

## M

- M1. MIRAMBELL, E. and REAL, E. *On the calculation of deflections in structural stainless steel beams: an experimental and numerical investigation*. Jour. Construct. Steel Research, 54, pp. 109-133, 2000.
- M2. MATTHEY, P. A. *Comportement des poutres-colonnes métalliques en double té*. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Thèse N° 592, 1985.

- M3. MIZUSAWA, T., KAJITA, T. and NARUOKA, M. *Buckling of skew plate structures using B-spline functions*. Int. Jour. Num. Meth. Engng, 15, pp. 87-96, 1980.
- M4. MURRAY, N. W. *Introduction to the theory of thin-walled structures*. Clarendon Press, Oxford, 1984.
- M5. MARGUERRE, K. *Knick-und Beulvorgänge – Einführung in die Theorie der elastischen Stabilität*. Chapitre VI de: Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs, herausgegeben von K. Marguerre, Springer-Verlag, 1950.
- M6. MILFORD, R. V. and SCHNOBRICH, W. C. *Degenerated isoparametric finite elements using explicit integration*. Int. Jour. Num. Meth. Engng., 23, pp. 133-154, 1986.
- M7. MORRIS, A. J. *A summary of appropriate governing equations and functionals in the finite element analysis of thin shells*. In: Finite Elements for Thin Shells and Curved Members, ed. ASHWELL, D. G. and GALLAGHER, R. H. John Wiley & Sons, 1976.
- M8. MORLEY, L. S. D. and MERRIFIELD, B. C. *Polynomial comparison solutions in the Sanders-Koiter theory of circular cylindrical shells*. In: Finite Elements for Thin Shells and Curved Members, ed. ASHWELL, D. G. and GALLAGHER, R. H. John Wiley & Sons, 1976.
- M9. MASSONNET, C. *Résistance des matériaux*. Vol. 2. Sciences et Lettres, Liège, 1976.

## N

- N1. NARAYANAN, S. and MAHENDRAN, M. *Ultimate capacity of innovative cold-formed steel columns*. Jour. Construct. Steel Research, 59, pp. 489-508, 2003.
- N2. NAYAK, G. C. and ZIENKIEWICZ, O. C. *Convenient form of stress invariants for plasticity*. Jour. Struct. Division, Vol. 98, ST4, pp. 949-954, 1972.
- N3. NOVOZHILOV, V. V. *The theory of thin-shells*. Groningen: P. Noordhoff, 1959.

## O

- O1. OWEN, D. R. J. and HINTON, E. *Finite elements in plasticity: Theory and Practice*. Pinneridge Press, 1986.

## P

- P1. PI, Y-L. and TRAHAIR, N. S. *Lateral buckling strengths of cold-formed rectangular hollow sections*. Thin-Walled Structures, 22, pp. 71-95, 1995.
- P2. PI, Y-L., PUT, B. M. and TRAHAIR, N. S. *Lateral buckling strengths of cold-formed Z-section beam*. Thin-Walled Structures, 34, pp. 65-93, 1999.

- P3. PLANK, R. J. and WITTRICK, W. H. *Buckling under combined loading of thin, flat-walled structures by a complex finite strip method*. Inter. Jour. Num. Meth. Engrg, Vol. 8, N° 2, pp. 323-339, 1974.
- P4. PRATHAP, G. *The poor bending response of the four-node plane stress quadrilateral*. Int. J. Numer. Methods Engrg., 21, pp. 825-835, 1985.
- P5. PROVIDAS, E. and KATTIS, M. A. *An assessment of two fundamental flat triangular shell elements with drilling rotations*. Comput. & Struct., 77, pp. 129-139, 2000.

## R

- R1. RONDAL, J. *Structure à parois mince*. Note de cours, Université de Liège, 2000.
- R2. RONDAL, J. *Contribution à l'étude de la stabilité des profils creux à parois minces*. Université de Liège, Thèse de doctorat, 1984.
- R3. RONDAL, J. *Residual stresses in cold-rolled profiles*. Construction and Building Material, 1(3), 1987.
- R4. RONDAL, J. *Buckling and interactive buckling of metal columns, optimum design under stability constraints and code aspects*. Coupled instabilities in metal structures. CISM courses and lectures. Ed. Rondal, J., 1998.
- R5. RONDAL, J. et MAQUOI, R. *Formulation d'Ayrton-Perry pour le flambement des barres métalliques*. Construction Métallique, 4, pp. 41-53, 1979.
- R6. RONDAL, J. and MAQUOI, R. *Stub-column strength of thin-walled square and rectangular hollow sections*. Thin-walled structures, 3, pp. 15-34, 1985.
- R7. RASMUSSEN, K. J. R. *Full-range stress-strain curves for stainless steel alloys*. Jour. Construct. Steel Research, 59, pp. 47-61, 2003.
- R8. RASMUSSEN, K. J. R., BURNS, T., BEZKOROVAING, P. and BAMBACH, M. R. *Numerical modelling of stainless steel plates in compression*. Jour. Construct. Steel Research, 59, pp. 1345-1362, 2003.
- R9. RASMUSSEN, K. J. R. and HANCOCK, G. J. *Design of cold-formed stainless steel tubular members. I: Columns*. Jour. Struct. Engrg., ASCE, 119(8), pp. 2349-2367, 1993.
- R10. RASMUSSEN, K. J. R. and HANCOCK, G. J. *Design of cold-formed stainless steel tubular members. II: Beams*. Jour. Struct. Engrg., ASCE, 119(8), pp. 2368-2386, 1993.
- R11. RASMUSSEN, K. J. R. and RONDAL, J. *Column curves for stainless steel alloys*. Jour. Construct. Steel Research, 54, pp. 89-107, 2000.
- R12. REDDY, J. N. *A simple higher-order theory for laminated composite plates*. Jour. Appl. Mech., 51, pp. 745-752, 1984.

- R13. RUSCH, A. and LINDNER, J. *Remarks to the Direct Strength Method*. Thin-walled Structures, 39(9), pp. 807-820, 2001.
- R14. RAZZAQUE, A. *The patch test for elements*. Inter. Jour. Numer. Methods Engng., Vol. 22, pp. 63-71, 1986.
- R15. RAMN, E. *Strategies for tracing the nonlinear response near limit points*, in Wunderlich, W. et al. (eds.), *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, Springer, Berlin, pp. 63-89, 1981.

## S

- S1. SCHAFER, B. W. and PEKÖZ, T. *Computational modelling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses*. Jour. Construct. Steel Research, 47, pp. 193-210, 1998.
- S2. SCHAFER, B. W., GRIGORIU, M. and PEKÖZ, T. *A probabilistic examination of the ultimate strength of cold-formed steel elements*. Thin-walled Structures, Vol. 31, I. 4, pp. 271-288, 1998.
- S3. SCHAFER, B. W. *Elastic buckling analysis of thin-walled members using the classical finite strip method*. CUFSM Version 2.6, John Hopkins University, 2003.
- S4. SCHAFER, B. W. *Cold-formed steel behaviour and design: analytical and numerical modelling of elements and members with longitudinal stiffness*. Ph.D. dissertation, Cornell University, Ithaca, New York, 1997.
- S5. SCHAFER, B. W. and PEKÖZ, T. Direct strength prediction of cold-formed steel members using numerical elastic buckling solution. In: Proceedings, Second International Conference on Thin-walled Structures: Thin-walled Structures, Research and Development. Singapore: Elsevier Science Ltd, Oxford, pp. 137-144, 1998.
- S6. SCHAFER, B. W. *Local, distortional and Euler buckling of thin-walled columns*. Jour. Struc. Engng., 128, pp. 289-299, 2002.
- S7. SIVAKUMARAN, K. S. and ABDEL-RAHMAN, N. *A finite element analysis model for the behaviour of cold-formed steel members*. Thin-Walled Structures, 31, pp. 305-324, 1998.
- S8. SRIDHARAN, S. *Semi-analytical method for the post-local-torsional buckling analysis of prismatic plates structures*. Int. J. Num. Meth. Engng, 18(11), pp. 1685-1697, 1982.
- S9. SCHARDT, R. *Lateral torsional and distortional buckling of channel- and hat-sections*. Jour. Construct. Steel Research, 31, pp.243-265,1994.
- S10. SILVESTRE, N. and CAMOTIM, D. *First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials*. Thin-walled Structures, 40, pp. 755-789, 2002.
- S11. SILVESTRE, N. and CAMOTIM, D. *Second-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials*. Thin-walled Structures, 40, pp. 791-820, 2002.

- S12. SILVESTRE, N. and CAMOTIM, D. *Distortional buckling formulae for cold-formed steel C and Z-section members, Part I – derivation*. Thin-walled Structures, 42, pp. 1567-1597, 2004.
- S13. SILVESTRE, N. and CAMOTIM, D. *Distortional buckling formulae for cold-formed steel C and Z-section members, Part II – Validation and application*. Thin-walled Structures, 42, pp. 1599-1629, 2004.
- S14. SURANA, K. S. *Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements*. Int. j. numer. methods eng., 19, pp. 581-615, 1983.
- S15. STOLARSKI, H. and BELYTSCHKO, T. *Membrane locking and reduced integration for curved elements*. Jour. Appl. Mech., 49, pp. 172-176, 1982.
- S16. STANLEY, G. M., PARK, K. C. and HUGHES, T. J. R. *Continuum-based resultant shell elements*. In: Finite Element Methods for Plate and Shell Structures, ed. Hughes, T. J. R. and Hinton, E., Pineridge, Swansea, pp. 1-45, 1986.
- S17. SIMO, J. C. and RIFAI, M. S. *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*. Int. Jour. Num. Meth. Engng., 29, pp. 1595-1638, 1990.
- S18. SIMO, J. C. and ARMERO, F. *Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes*. Int. Jour. Num. Meth. Engng., 33, pp. 1413-1449, 1992.

## T

- T1. TEBEDGE, N. et TALL, L. *Contraintes résiduelles dans les profilés en acier*. Construction Métallique, N° 2, 1974.
- T2. THAM, L. G. *Application of spline finite strip method in the analysis of space structures*. Thin-walled Structures, 10, pp. 235-246, 1990.
- T3. TIMOSHENKO, S and GERE, J. M. *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill, New York, 1961.
- T4. TRAHAIR, N. S. *Flexural-Torsional Buckling of Structures*. London, E & FN Spon, 1993.
- T5. TENG, J. G., YAO, J. and ZHAO, Y. *Distortional buckling of channel beam-column*. Thin-walled Structures, 41(7), pp. 595-617, 2003.

## V

- V1. VLASOV, V. Z. *Thin-walled elastic beams*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.
- V2. VLACHOUTSIS, S. *Shear correction factors for plates and shells*. Int. Jour. Num. Meth. Engng., 33, pp. 1537-1552, 1992.

## W

W1. WENG, C. C. and PEKÖZ, T. *Residual stresses in cold-formed steel members*. Jour. Struct. Engrg., ASCE, 116(6), pp. 1611-1625, 1990.

W2. WANG, S. and DAWE, D. J. *Finite strip large deflection and post-overall-buckling analysis of diaphragm-supported plate structures*. Computers & Structures, Vol. 61, No. 1, pp. 155-170, 1996.

## Y

Y1. YANG, H. Y. and CHONG, K. P. *Finite strip method with X-spline functions*. Computers & Structures, 18 (1), pp. 127-132, 1984.

## Z

Z1. ZIENKIEWICZ, O. C. *The finite element method*. Third edition, McGraw-Hill, London, 1977.

Z2. ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. and TOO, J. M. *Reduced integration technique in general analysis of plates and shells*. Inter. Jour. Numer. Methods Engng., Vol. 3, pp 275-290, 1971.

Z3. ZIENKIEWICZ, O. C. and TAYLOR, R. L. *The finite element method*. Fifth edition, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

## ANNEXE

Les rigidités fictives attachées aux rotations nodales dans le plan peuvent être explicitement déterminées à partir des équations (3.18) et (3.19). Ces rigidités fictives, pour les méthodes des bandes finies et des éléments finis, qui sont utilisées dans la thèse, peuvent être trouvées dans les formules ci-dessous.

### I.1. Rigidité fictive de rotation pour les bandes finies

Pour la bande finie de 2-lignes nodales:

$$\frac{1}{2} tabG \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

Pour la bande finie de 3-lignes nodales:

$$\frac{1}{360} tabG \begin{bmatrix} 19 & -8 & -11 \\ -8 & 16 & -8 \\ -11 & -8 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{bmatrix}$$

Pour la bande finie de 4-lignes nodales:

$$\frac{1}{13440} tabG \begin{bmatrix} 814 & 162 & -918 & -58 \\ 162 & 3294 & -2538 & -918 \\ -918 & -2538 & 3294 & 162 \\ -58 & -918 & 162 & 814 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \\ \theta_{z4} \end{bmatrix}$$

### I.2. Rigidité fictive de rotation pour les éléments rectangulaires

Pour l'élément rectangulaire de 8-nœuds:

$$\frac{\alpha^2}{720} tabG \begin{bmatrix} 19 & 3 & 7 & 3 & -4 & -12 & -12 & -4 \\ & 19 & 3 & 7 & -4 & -4 & -12 & -12 \\ & & 19 & 3 & -12 & -4 & -4 & -12 \\ & & & 19 & -12 & -12 & -4 & -4 \\ & & & & 48 & 0 & -16 & 0 \\ & & & & & 48 & 0 & -16 \\ & & & & & & 48 & 0 \\ & & & & & & & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \\ \theta_{z4} \\ \theta_{z5} \\ \theta_{z6} \\ \theta_{z7} \\ \theta_{z8} \end{bmatrix}$$

Pour l'élément rectangulaire de 9-nœuds:



$$\frac{\alpha^2}{32400} \text{tab}G \begin{bmatrix} 551 & -169 & 11 & -169 & 188 & -172 & -172 & 188 & -256 \\ & 551 & -169 & 11 & 188 & 188 & -172 & -172 & -256 \\ & & 551 & -169 & -172 & 188 & 188 & -172 & -256 \\ & & & 551 & -172 & -172 & 188 & 188 & -256 \\ & & & & 1904 & -256 & -976 & -256 & -448 \\ & & & & & 1904 & -256 & -976 & -448 \\ & & & & & & 1904 & -256 & -448 \\ & & & & & & & 1904 & -448 \\ & & & & & & & & 2816 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \\ \theta_{z4} \\ \theta_{z5} \\ \theta_{z6} \\ \theta_{z7} \\ \theta_{z8} \\ \theta_{z9} \end{bmatrix}$$