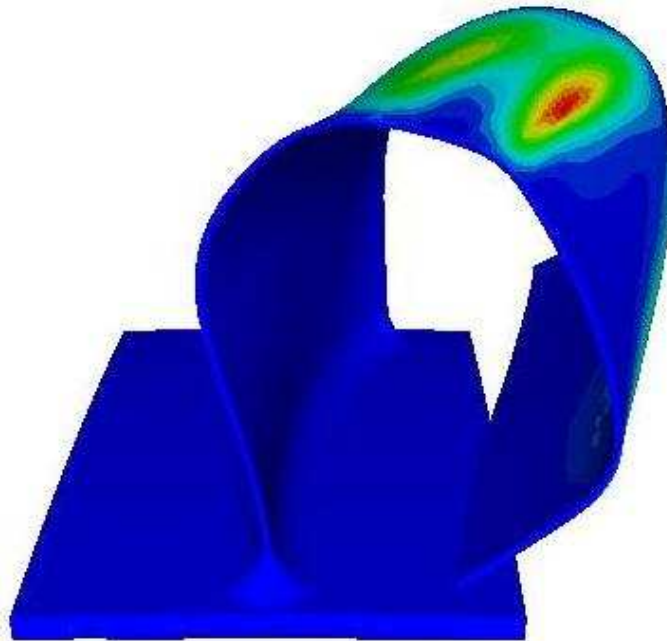


Université de Liège  
Faculté des Sciences Appliquées

Simulation numérique, à l'aide d'algorithmes  
thermomécaniques implicites, de matériaux  
endommageables pouvant subir  
de grandes vitesses de déformation.

Application aux structures aéronautiques  
soumises à impact.



Travail présenté par  
Pierre-Paul Jeunechamps  
Ingénieur civil physicien

pour l'obtention du grade légal de  
Docteur en Sciences de l'Ingénieur  
Septembre 2008



# Remerciements

*Je voudrais profiter de l'occasion qui m'est présentée pour remercier toutes les personnes sans qui le présent travail n'aurait jamais pu voir le jour.*

*En premier lieu, je remercie chaleureusement Monsieur le Professeur Jean-Philippe Ponthot pour la confiance qu'il m'a accordée tout au long de ce travail de recherche ainsi que pour les relectures attentives de ce manuscrit. Ma reconnaissance va également aux membres du LTAS-MN<sup>2</sup>L et en particulier à Messieurs Romain Boman, Ludovic Noels et Luc Papeleux pour leurs conseils tant techniques que scientifiques et leur aide dans ce long et tortueux chemin. Merci également à Monsieur Luc Papeleux pour les nombreux temps de midi passés sur les sentiers boueux du Sart Tilman.*

*Ensuite, j'adresse mes plus vifs remerciements à Mesdames et Messieurs les Professeurs qui ont accepté de participer au jury de cette Thèse de Doctorat, ainsi qu'à Monsieur le Professeur Hogge d'avoir accepté de présider ce Jury. Je remercie également Messieurs Olivier Beaupain et Damien Verhelst de la société Techspace Aero S.A. pour leur bonne volonté et le temps consacré à l'élaboration du problème industriel. Ce projet n'aurait pu voir le jour sans le concours de la Région Wallonne qui a financé ce projet de recherche durant les quatre années de la Convention FIRST-EUROPE 215275 - IMPAMETA. Qu'elle en soit remerciée.*

*Je terminerai en remerciant ma famille, en particulier mes parents et mon épouse, Florence, pour la relecture fastidieuse de ce manuscrit et qui furent admirables de courage, de patience et de compréhension durant ces années de recherche...*



# Table des matières

Liste des figures	11
Liste des tableaux	15
Liste des définitions et des notations	17
<b>1 Introduction générale</b>	<b>21</b>
1.1 Généralités	21
1.2 Position du problème	22
1.3 Plan du travail	23
1.4 Contributions originales	24
<b>2 Modèles constitutifs pour les grandes vitesses de déformation</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction	27
2.2 Lois de comportement prenant en compte la vitesse de déformation	28
2.3 Lois de comportement dynamiques	29
2.3.1 Loi de Johnson-Cook	32
2.3.2 Loi de Zerilli-Armstrong	34
2.3.3 Loi de Cowper-Symonds	36
2.3.4 Autres lois	37
2.4 Intégration temporelle des lois constitutives	41
2.4.1 Introduction	41
2.4.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement	42
2.4.3 Hypothèse hypoélastique	43
2.4.4 Définition du critère de plasticité	44
2.4.5 Intégration des lois constitutives	45
2.4.6 Matrice de raideur tangente analytique	46
2.4.6.1 Définitions	46
2.4.6.2 Terme volumique $\mathbf{H}^{vol}$	47
2.4.6.3 Terme déviatorique $\mathbf{H}^{dev}$	47
2.4.6.4 Analyse	48
2.5 Conclusions	49

<b>3</b>	<b>Algorithmes d'intégration temporelle</b>	<b>51</b>
3.1	Introduction . . . . .	51
3.2	Résolution du problème mécanique : la famille des algorithmes $\alpha$ -généralisés	52
3.3	Résolution du problème thermique . . . . .	55
3.3.1	Schéma du trapèze généralisé . . . . .	56
3.3.2	Schéma du point milieu généralisé . . . . .	58
3.3.3	Précision et stabilité des schémas . . . . .	58
3.4	Algorithme thermomécanique . . . . .	59
3.5	Conclusions . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Applications première partie</b>	<b>63</b>
4.1	Introduction . . . . .	63
4.2	Application 1 : Barre de Taylor . . . . .	63
4.2.1	Introduction . . . . .	63
4.2.2	Présentation et données du problème . . . . .	64
4.2.3	Comparaison des résultats . . . . .	67
4.2.4	Etude numérique . . . . .	69
4.3	Application 2 : Barre d'Hopkinson . . . . .	75
4.3.1	Introduction . . . . .	75
4.3.2	Description de l'expérience . . . . .	75
4.3.3	Modélisation par éléments finis . . . . .	76
4.3.4	Résultats et comparaisons . . . . .	79
4.3.5	Recalibrage de la loi de Johnson-Cook . . . . .	84
4.3.6	Mise en évidence des effets dynamiques . . . . .	86
4.3.7	Etude numérique . . . . .	87
4.4	Application 3 : Test de traction à grande vitesse . . . . .	90
4.4.1	Introduction . . . . .	90
4.4.2	Données du problème . . . . .	90
4.4.3	Modélisation par le code éléments finis MSC.MARC . . . . .	92
4.4.4	Modélisation par Metafor . . . . .	92
4.4.5	Résultats et comparaisons . . . . .	94
4.5	Conclusions . . . . .	97
	<b>Conclusions de la première partie</b>	<b>99</b>
<b>5</b>	<b>Endommagement des matériaux à comportement ductile</b>	<b>101</b>
5.1	Introduction . . . . .	101
5.2	Modèle d'endommagement de type Gurson . . . . .	103
5.2.1	Introduction . . . . .	103
5.2.2	Evolution de l'endommagement . . . . .	103
5.2.3	Critère de plasticité . . . . .	105
5.2.4	Prise en compte de la dégradation des paramètres élastiques . . . . .	105
5.3	Modèle d'endommagement continu . . . . .	105

5.3.1	Introduction et généralités . . . . .	105
5.3.2	Définition de la variable d'endommagement isotrope . . . . .	106
5.3.3	Modèle thermodynamique de Lemaitre . . . . .	107
5.3.3.1	Introduction . . . . .	107
5.3.3.2	Notion de contraintes effectives . . . . .	107
5.3.3.3	Principe d'équivalence en déformations . . . . .	108
5.3.3.4	Formulation pour l'endommagement isotrope . . . . .	108
5.3.3.5	Ecrouissage isotrope de Von Mises . . . . .	112
5.4	Revue bibliographique des modèles d'endommagement continu . . . . .	116
5.4.1	Introduction . . . . .	116
5.4.2	Modèles d'endommagement quasi-statiques . . . . .	118
5.4.2.1	Le modèle de Lemaitre et Chaboche . . . . .	118
5.4.2.2	Le modèle de Driemeier . . . . .	119
5.4.2.3	Le modèle de Goldthorpe . . . . .	120
5.4.2.4	Le modèle de Geers . . . . .	120
5.4.2.5	Le modèle de Hancock et Mackenzie . . . . .	121
5.4.2.6	Le modèle de Cochran et Banner . . . . .	122
5.4.2.7	Le modèle de Bonora . . . . .	123
5.4.2.8	Les modèles d'endommagement anisotrope . . . . .	123
5.4.3	Modèles d'endommagement dynamiques . . . . .	125
5.4.3.1	Le modèle de Johnson-Cook . . . . .	125
5.4.3.2	Le modèle de Langseth . . . . .	125
5.4.3.3	Le modèle à effet retard de Suffis et Combescure . . . . .	126
5.4.4	Conclusions . . . . .	127
5.5	Adaptation du modèle d'endommagement continu . . . . .	127
5.5.1	Introduction . . . . .	127
5.5.2	Hypothèse hypoélastique : décomposition des déformations . . . . .	128
5.5.3	Définition du critère de plasticité . . . . .	129
5.5.4	Intégration temporelle des lois constitutives . . . . .	130
5.5.4.1	Introduction . . . . .	130
5.5.4.2	Grandeurs mises en jeu et système d'équations à résoudre . . . . .	131
5.5.4.3	Travail plastique . . . . .	134
5.5.4.4	Algorithmes d'intégration . . . . .	134
5.6	Modèle unifié du calcul de la matrice de raideur tangente consistante . . . . .	142
5.7	Conclusions . . . . .	147
<b>6</b>	<b>Rupture des matériaux ductiles</b>	<b>149</b>
6.1	Introduction . . . . .	149
6.2	Critères de rupture . . . . .	151
6.2.1	Les critères de rupture basés sur l'endommagement . . . . .	151
6.2.2	Les critères de rupture basés sur la déformation plastique . . . . .	152
6.2.3	Autres critères de rupture . . . . .	155
6.3	Technique numérique de propagation de fissure . . . . .	156

6.3.1	Introduction . . . . .	156
6.3.2	Méthode de décohesion . . . . .	156
6.3.3	Méthode par discontinuités . . . . .	157
6.3.4	Méthode de remaillage de la structure . . . . .	159
6.3.5	Méthode par érosion . . . . .	162
6.3.6	Autres méthodes . . . . .	163
6.3.7	Conclusions sur les méthodes de propagation de fissure . . . . .	163
6.4	Conclusions . . . . .	164
<b>7</b>	<b>Applications deuxième partie</b>	<b>165</b>
7.1	Introduction . . . . .	165
7.2	Application 1 : Test de traction avec endommagement . . . . .	166
7.2.1	Introduction . . . . .	166
7.2.2	Présentation et données du problème . . . . .	166
7.2.3	Résultats et comparaisons . . . . .	168
7.2.4	Etude numérique . . . . .	171
7.3	Application 2 : Test de propagation de fissure . . . . .	172
7.3.1	Introduction . . . . .	172
7.3.2	Présentation et données du problème . . . . .	172
7.3.3	Comparaison des résultats . . . . .	174
7.4	Application 3 : Tests de traction à grande vitesse . . . . .	180
7.4.1	Introduction . . . . .	180
7.4.2	Présentation du problème . . . . .	180
7.4.2.1	Maillage de la structure . . . . .	182
7.4.2.2	Modélisation 1 . . . . .	182
7.4.2.3	Modélisation 2 . . . . .	184
7.4.3	Comparaison des résultats . . . . .	184
7.4.3.1	Modélisation 1 . . . . .	184
7.4.3.2	Modélisation 2 . . . . .	190
7.5	Application 4 : Extension des tests de traction à grande vitesse . . . . .	196
7.5.1	Introduction . . . . .	196
7.5.2	Présentation des problèmes . . . . .	196
7.5.3	Critère de rupture simple . . . . .	197
7.5.4	Rupture par endommagement . . . . .	199
7.5.5	Etude numérique . . . . .	203
7.5.5.1	Influence du maillage . . . . .	203
7.5.5.2	Influence du type de critère de rupture . . . . .	204
7.5.5.3	Influence de l'algorithme utilisé . . . . .	209
7.5.5.4	Influence de la valeur critique d'endommagement . . . . .	214
7.5.5.5	Evaluation du coût des différentes méthodes . . . . .	216
7.6	Conclusions . . . . .	221
	<b>Conclusions de la deuxième partie</b>	<b>223</b>



<b>8</b>	<b>Application industrielle</b>	<b>225</b>
8.1	Introduction . . . . .	225
8.2	Description et données du problème . . . . .	225
8.2.1	Introduction . . . . .	225
8.2.2	Géométrie et maillage . . . . .	226
8.2.3	Fixations et chargement . . . . .	229
8.2.4	Paramètres du calcul . . . . .	231
8.3	Modélisation du matériau utilisé . . . . .	231
8.3.1	Introduction . . . . .	231
8.3.2	Comportement thermo-viscoplastique du matériau . . . . .	233
8.3.3	Modélisation de l'endommagement du matériau . . . . .	233
8.4	Résultats et discussion . . . . .	240
8.4.1	Validation de l'hypothèse simplificatrice . . . . .	240
8.4.2	Etude de maillage . . . . .	244
8.4.2.1	Introduction . . . . .	244
8.4.2.2	Configuration de la solution déformée . . . . .	245
8.4.2.3	Courbes force-déplacement . . . . .	249
8.4.2.4	Coût CPU . . . . .	251
8.5	Conclusions . . . . .	251
<b>9</b>	<b>Conclusions générales et perspectives</b>	<b>253</b>
<b>A</b>	<b>Annexes relatives au chapitre 2</b>	<b>255</b>
A.1	Résolution de la plasticité pour un matériau thermo-élasto-viscoplastique . . . . .	255
A.1.1	Données du problème . . . . .	255
A.1.2	Normale à la surface de plasticité et déformations plastiques . . . . .	256
A.1.3	Intégration des lois constitutives . . . . .	257
A.1.4	Calcul de la normale à la surface de plasticité . . . . .	258
A.1.5	Résolution de la plasticité . . . . .	259
A.1.6	Calcul de $\Gamma$ . . . . .	260
A.1.7	Dissipation plastique . . . . .	260
A.2	Matrice de raideur tangente analytique . . . . .	261
A.2.1	Calcul de la dérivée de $\Gamma$ . . . . .	261
A.2.2	Calcul de la dérivée de la normale à la surface de plasticité . . . . .	262
<b>B</b>	<b>Annexes relatives au chapitre 5</b>	<b>263</b>
B.1	Introduction . . . . .	263
B.2	Grandeurs mises en jeu . . . . .	263
B.3	Différentiation des grandeurs mises en jeu . . . . .	264
B.4	Dérivées formelles de $\Delta r$ et $D$ . . . . .	265
B.5	écriture formelle de la matrice de raideur . . . . .	267
B.6	Décomposition en termes volumique et déviatorique . . . . .	268
B.7	Expression des dérivées explicites . . . . .	270

B.7.1	Dérivées des contraintes . . . . .	270
B.7.2	Dérivées du critère de plasticité . . . . .	271
B.7.3	Dérivée de la normale à la surface de plasticité . . . . .	271
B.8	Calcul de $\frac{d'\sigma}{dJ}$ et $\frac{d'\sigma}{d'\varepsilon}$ . . . . .	272
B.9	Calcul de $\frac{d\Delta r}{d\varepsilon}$ . . . . .	273
B.10	Calcul de $\frac{d\sigma}{dD}$ . . . . .	274
B.11	Calcul de $\frac{dD}{d\varepsilon}$ . . . . .	276
B.12	Expression finale de la matrice de raideur tangente analytique . . . . .	278
<b>Bibliographie</b>		<b>281</b>

# Liste des figures

3.1	Principe du schéma de résolution étagé thermomécanique. . . . .	61
4.1	Barre de Taylor. Configuration initiale. . . . .	66
4.2	Barre de Taylor. Configuration finale du barreau 1. . . . .	68
4.3	Barre de Taylor. Configuration finale du barreau 2. . . . .	69
4.4	Barre de Taylor. Comparaison des algorithmes explicite et implicites. . . . .	70
4.5	Barre de Taylor. Coût de l'utilisation d'une matrice de raideur numérique. . . . .	71
4.6	Barre de Taylor. Coût des modèles thermo-viscoplastiques. . . . .	73
4.7	Barre d'Hopkinson. Montage expérimental. . . . .	75
4.8	Barre d'Hopkinson. Schéma de fonctionnement. . . . .	76
4.9	Barre d'Hopkinson. Vitesse de l'extrémité du spécimen. . . . .	77
4.10	Barre d'Hopkinson. Géométrie du spécimen. . . . .	79
4.11	Barre d'Hopkinson. Cartes des températures. . . . .	80
4.12	Barre d'Hopkinson. Cartes des vitesses de déformation plastique. . . . .	81
4.13	Barre d'Hopkinson. Comparaison de la réduction de section. . . . .	82
4.14	Barre d'Hopkinson. Comparaison de la force transmise. . . . .	82
4.15	Barre d'Hopkinson. Comparaison de la température à la rupture. . . . .	83
4.16	Barre d'Hopkinson. Résultats après recalage. . . . .	85
4.17	Barre d'Hopkinson. Position du point de rupture. . . . .	86
4.18	Barre d'Hopkinson. Influence des effets d'inertie. . . . .	87
4.19	Barre d'Hopkinson. Maillages considérés. . . . .	88
4.20	Barre d'Hopkinson. Etude de maillage. . . . .	89
4.21	Barre d'Hopkinson. Effet du facteur de Taylor-Quinney. . . . .	90
4.22	Test de traction. Schéma de l'éprouvette de traction. . . . .	91
4.23	Test de traction. Modèle géométrique. . . . .	91
4.24	Test de traction. Modèle éléments finis MARC. . . . .	93
4.25	Test de traction. Modèle éléments finis Metafor. . . . .	94
4.26	Test de traction. Acier TRIP800. Configuration finale. . . . .	95
4.27	Test de traction. Acier TRIP800. Configuration avant striction. . . . .	95
4.28	Test de traction. Courbe contrainte-déformation. . . . .	96
4.29	Test de traction. Evolution de la température. . . . .	97
5.1	Schéma d'intégration de la loi constitutive avec endommagement. . . . .	141

6.1	Modes de rupture. . . . .	149
6.2	Solide présentant une discontinuité. . . . .	157
6.3	Décomposition du champ de déplacement élémentaire. . . . .	158
6.4	Système de coordonnées polaires. . . . .	159
6.5	Algorithme de résolution du problème de propagation de fissure. . . . .	160
6.6	Domaine de moyennage du critère de rupture. . . . .	161
7.1	Traction avec endommagement. Modèle éléments finis. . . . .	166
7.2	Traction avec endommagement. Configuration finale. . . . .	168
7.3	Traction avec endommagement. Zoom sur la partie endommagée. . . . .	168
7.4	Traction avec endommagement. Points caractéristiques. . . . .	168
7.5	Traction avec endommagement. Courbe force-déplacement. . . . .	169
7.6	Traction avec endommagement. Courbe contrainte-déformation. . . . .	169
7.7	Traction avec endommagement. Evolution de l'endommagement 1. . . . .	170
7.8	Traction avec endommagement. Evolution de l'endommagement 2. . . . .	170
7.9	Traction avec endommagement. Evolution de la triaxialité 1. . . . .	170
7.10	Traction avec endommagement. Evolution de la triaxialité 2. . . . .	170
7.11	Traction avec endommagement. Comparaison des algorithmes. . . . .	171
7.12	Propagation de fissure. Géométrie et chargement du test. . . . .	173
7.13	Propagation de fissure. Courbes force-déplacement 1. . . . .	175
7.14	Propagation de fissure. Courbes force-déplacement 2. . . . .	176
7.15	Propagation de fissure. Méthode par remaillage. . . . .	177
7.16	Propagation de fissure. Méthode par érosion, maillage 1 (érosion). . . . .	178
7.17	Propagation de fissure. Méthode par érosion, maillage 2 (érosion). . . . .	178
7.18	Propagation de fissure. Méthode par érosion, maillage 3 (érosion). . . . .	179
7.19	Propagation de fissure. Méthode par érosion, maillage 4 (érosion). . . . .	179
7.20	Traction à grande vitesse. Géométrie des tests. . . . .	180
7.21	Traction à grande vitesse. Chargement. . . . .	181
7.22	Traction à grande vitesse. Maillages. . . . .	182
7.23	Traction à grande vitesse. Courbes force-déplacement. . . . .	186
7.24	Traction à grande vitesse. Endommagement pour les différentes géométries. . . . .	187
7.25	Traction à grande vitesse. Influence de la triaxialité. . . . .	187
7.26	Traction à grande vitesse. Influence des effets dynamiques. . . . .	188
7.27	Traction à grande vitesse. Utilisation d'une loi d'écrouissage viscoplastique. . . . .	189
7.28	Traction à grande vitesse. Comparaison mécanique et thermomécanique. . . . .	189
7.29	Traction à grande vitesse. Distribution de température. . . . .	190
7.30	Traction à grande vitesse. Vitesse de déformation plastique équivalente. . . . .	190
7.31	Traction à grande vitesse. Courbes force-déplacement. . . . .	191
7.32	Traction à grande vitesse. Courbes force-déplacement pour $m$ variable. . . . .	193
7.33	Traction à grande vitesse. Température et endommagement ( $R = 0.4mm$ ). . . . .	194
7.34	Traction à grande vitesse. Température et endommagement (sans encoche). . . . .	195
7.35	Extension tests traction. Fer REMCO. Géométrie du spécimen. . . . .	196
7.36	Extension tests traction. Aciers DP800 et TRIP800. Modèle géométrique. . . . .	197

7.37	Extension tests traction. Courbes force-déplacement. . . . .	198
7.38	Extension tests traction. Oscillations. . . . .	199
7.39	Extension tests traction. Courbes force-déplacement. . . . .	202
7.40	Extension tests traction. Oscillations. . . . .	203
7.41	Extension tests traction. Fer REMCO. Maillage. . . . .	204
7.42	Extension tests traction. Aciers DP800 et TRIP800. Maillage. . . . .	204
7.43	Extension tests traction. Influence du maillage sur les oscillations. . . . .	205
7.44	Extension tests traction. Volume de matière enlevée 1. . . . .	206
7.45	Extension tests traction. Influence du type de critère de rupture. . . . .	207
7.46	Extension tests traction. Volume de matière enlevée 2. . . . .	208
7.47	Extension tests traction. Modification de la frontière. . . . .	209
7.48	Extension tests traction. Nœuds dépourvus de toute connexion. . . . .	209
7.49	Extension tests traction. Etude du pas de temps critique. . . . .	212
7.50	Extension tests traction. Influence de l'algorithme utilisé (force). . . . .	213
7.51	Extension tests traction. Influence de l'algorithme utilisé ( $\Delta t_{crit}$ ). . . . .	215
7.52	Extension tests traction. Courbes force-déplacement en fonction de $D_C$ . . . . .	217
7.53	Extension tests traction. Pas de temps critique en fonction de $D_C$ . . . . .	218
7.54	Extension tests traction. Coût des méthodes de rupture. . . . .	219
7.55	Extension tests traction. Coût de la désactivation d'éléments. . . . .	220
8.1	Géométrie et maillage de l'aube. . . . .	227
8.2	Vue générale de la géométrie aube-carter. . . . .	228
8.3	Encastrement des nœuds des portées de l'aube. . . . .	230
8.4	Simplification de la géométrie de l'aube. . . . .	230
8.5	Fixation des nœuds suite à la simplification de la géométrie. . . . .	230
8.6	Variation des paramètres matériau du titane avec la température. . . . .	235
8.7	Détermination des paramètres de la loi d'endommagement. . . . .	239
8.8	Courbes numériques de traction pour différentes vitesses de déformation. . . . .	239
8.9	Influence des conditions d'encastrement sur la force de contact. . . . .	240
8.10	Zone critique de flambement 1. Distribution d'endommagement. . . . .	241
8.11	Zone critique de flambement 1. Distribution de température. . . . .	241
8.12	Zone critique de flambement 2. Distribution d'endommagement. . . . .	242
8.13	Zone critique de flambement 2. Distribution de température. . . . .	242
8.14	Déformée finale de l'aube. Distribution d'endommagement. . . . .	243
8.15	Déformée finale de l'aube. Distribution de température. . . . .	243
8.16	Déformée de l'aube maillage 1, éléments SRI. . . . .	245
8.17	Déformée de l'aube maillage 2, éléments SRI. . . . .	245
8.18	Déformée de l'aube maillage 3, éléments SRI. . . . .	246
8.19	Déformée de l'aube maillage 4, éléments SRI. . . . .	246
8.20	Déformée de l'aube maillage 5, éléments SRI. . . . .	246
8.21	Déformée de l'aube maillage 6, éléments SRI. . . . .	246
8.22	Déformée de l'aube maillage 7, éléments SRI. . . . .	247
8.23	Déformée de l'aube maillage 1, éléments EAS. . . . .	247

---

8.24	Déformée de l'aube maillage 2, éléments EAS. . . . .	247
8.25	Déformée de l'aube maillage 3, éléments EAS. . . . .	248
8.26	Déformée de l'aube maillage 4, éléments EAS. . . . .	248
8.27	Déformée de l'aube maillage 5, éléments EAS. . . . .	248
8.28	Déformée de l'aube maillage 6, éléments EAS. . . . .	248
8.29	Déformée de l'aube maillage 7, éléments EAS. . . . .	249
8.30	Courbes force-déplacement en fonction du maillage (éléments SRI). . . . .	250
8.31	Courbes force-déplacement en fonction du maillage (éléments EAS). . . . .	250

# Liste des tableaux

2.1	Lois constitutives empiriques. . . . .	30
2.2	Lois constitutives additives. . . . .	31
2.3	Lois constitutives multiplicatives. . . . .	31
4.1	Barre de Taylor. Données géométriques du problème. . . . .	64
4.2	Barre de Taylor. Paramètres matériau du cuivre OFHC. . . . .	65
4.3	Barre de Taylor. Comparaison des résultats avec Abaqus. . . . .	67
4.4	Barre de Taylor. Comparaison des résultats avec LS-DYNA. . . . .	67
4.5	Barre de Taylor. Paramètres des schémas $\alpha$ -généralisés. . . . .	69
4.6	Barre de Taylor. Comparaison des algorithmes implicites et explicite. . . . .	71
4.7	Barre de Taylor. Énergie cinétique initiale. . . . .	73
4.8	Barre de Taylor. Etude de l'influence de la précision. . . . .	74
4.9	Barre d'Hopkinson. Paramètres matériau du fer REMCO. . . . .	78
4.10	Barre d'Hopkinson. Données géométriques de l'éprouvette. . . . .	79
4.11	Barre d'Hopkinson. Aire sous la courbe de température à la rupture. . . . .	83
4.12	Barre d'Hopkinson. Paramètres de Johnson-Cook après recalibrage. . . . .	84
4.13	Test de traction. Données géométriques du test. . . . .	92
4.14	Test de traction. Paramètres matériau des aciers DP800 et TRIP800. . . . .	93
5.1	Variables d'état et variables associées. . . . .	114
5.2	Couplage élasto-viscoplastique avec l'endommagement. . . . .	117
5.3	Données du problème d'élasto-viscoplasticité couplé à l'endommagement. . . . .	132
7.1	Traction avec endommagement. Données géométriques du test. . . . .	167
7.2	Traction avec endommagement. Paramètres matériau. . . . .	167
7.3	Propagation de fissure. Données géométriques du test. . . . .	172
7.4	Propagation de fissure. Paramètres matériau. . . . .	174
7.5	Traction à grande vitesse. Données géométriques des tests. . . . .	181
7.6	Traction à grande vitesse. Paramètres matériau (modèle de Geers). . . . .	183
7.7	Traction à grande vitesse. Paramètres matériau (modèle de Langseth). . . . .	185
7.8	Extension tests traction. Fer REMCO. Paramètres d'endommagement. . . . .	200
7.9	Extension tests traction. Aciers. Paramètres d'endommagement. . . . .	201
7.10	Extension tests traction. Comparaison des algorithmes 1. . . . .	221

---

7.11	Extension tests traction. Comparaison des algorithmes 2. . . . .	221
8.1	Dimensions de l'ensemble aube-carter. . . . .	226
8.2	Caractéristiques des maillages de l'aube. . . . .	228
8.3	Influence de la simplification de la géométrie sur le nombre d'éléments. . .	231
8.4	Paramètres thermomécaniques du titane. . . . .	234
8.5	Paramètres de la loi d'endommagement du titane. . . . .	238
8.6	Influence de la simplification de la géométrie sur le temps de calcul. . . . .	244
8.7	Comparaison du coût CPU entre les formulations EAS et SRI. . . . .	251



# Liste des définitions et des notations

## Conventions mathématiques

$x$	La lettre est en italique : la grandeur est scalaire
$\vec{x}$	La lettre est en italique et surmontée d'une flèche : la grandeur est vectorielle
$\mathbf{x}$	La lettre est en italique et en gras : la grandeur est un tenseur d'ordre 2
$\mathbf{x}$	La lettre est droite et en gras : la grandeur est un tenseur d'ordre 4
$x_0$	Grandeur $x$ au début de l'intervalle temporel
$x_1$	Grandeur $x$ à la fin de l'intervalle temporel
$\dot{x}$	Dérivée temporelle de la grandeur $x$

## Liste des scalaires

$t$	Temps
$t_n$	Instant auquel tout est connu (début d'intervalle temporel)
$t_{n+1}$	Instant auquel on cherche à déterminer les positions, vitesses, accélérations, contraintes, variables d'hérédité (fin d'un intervalle temporel)
$\Delta t$	Incrément temporel : $\Delta t = t_{n+1} - t_n$
$n_{ddl}^{mec}$	Nombre de degrés de liberté mécaniques
$n_{ddl}^{ther}$	Nombre de degrés de liberté thermiques
$T$	Température
$\rho$	Masse volumique du matériau
$E$	Module de Young du matériau
$\nu$	Coefficient de Poisson du matériau
$G$	Module de cisaillement du matériau : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
$K$	Module de compressibilité cubique du matériau : $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$
$\alpha$	Coefficient de dilatation thermique du matériau
$k$	Coefficient de conduction thermique du matériau

$c$	Chaleur spécifique du matériau
$\sigma_{eq}$	Contrainte équivalente au sens de Von Mises
$\sigma_{crit}$	Limite élastique étendue
$\bar{\varepsilon}^{pl}$	Déformation plastique équivalente
$\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}$	Vitesse de déformation plastique équivalente
$\dot{\lambda}$	Multiplicateur plastique
$p$	Pression hydrostatique
$D$	Valeur de l'endommagement
$\dot{D}$	Vitesse d'évolution de l'endommagement
$\sigma^*$	Triaxialité des contraintes : $\sigma^* = \frac{p}{\sigma_{eq}}$

## Liste des vecteurs

$\vec{x}$	Vecteur position des nœuds
$\dot{\vec{x}}$	Vecteur vitesse des nœuds
$\ddot{\vec{x}}$	Vecteur accélération des nœuds
$\vec{T}$	Vecteur température des nœuds
$\dot{\vec{T}}$	Vecteur vitesse d'évolution des températures des nœuds
$\vec{F}^{int,mec}$	Vecteur des forces internes mécaniques aux nœuds
$\vec{F}^{ext,mec}$	Vecteur des forces externes mécaniques aux nœuds
$\vec{F}^{inert,mec}$	Vecteur des forces d'inertie mécaniques aux nœuds
$\vec{F}^{int,ther}$	Vecteur des forces internes thermiques aux nœuds
$\vec{F}^{ext,ther}$	Vecteur des forces externes thermiques aux nœuds
$\vec{F}^{inert,ther}$	Vecteur des forces d'inertie thermiques aux nœuds

## Liste des tenseurs d'ordre 2

$\sigma$	Tenseur des contraintes de Cauchy
$\tilde{\sigma}$	Tenseur des contraintes effectives
$S$	Tenseur déviateur des contraintes de Cauchy
$\tilde{S}$	Tenseur déviateur des contraintes effectives
$\dot{\varepsilon}$	Tenseur des vitesses de déformation totale
$\dot{\varepsilon}^{el}$	Partie élastique du tenseur des vitesses de déformation
$\dot{\varepsilon}^{th}$	Partie thermique du tenseur des vitesses de déformation
$\dot{\varepsilon}^{vp}$	Partie viscoplastique du tenseur des vitesses de déformation
$M$	Matrice des masses
$C$	Matrice de capacité thermique
$I$	Tenseur identité d'ordre 2

## Liste des tenseurs d'ordre 4

<b>C</b>	Tenseur d'élasticité de Hooke
<b><math>\Delta</math></b>	$\Delta_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$
<b>I</b>	Tenseur identité d'ordre 4

## Liste des opérations mathématiques

$\vec{x}^T$	Transposée du vecteur $\vec{x}$
$\mathbf{x}^T$	Transposée du tenseur $\mathbf{x}$ d'ordre 2
$\vec{x} \cdot \vec{y}$	Produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ : $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}_i \vec{y}_i$
$\mathbf{x} \cdot \vec{y}$	Produit d'un tenseur $\mathbf{x}$ d'ordre 2 et d'un vecteur $\vec{y}$ : $[\mathbf{x} \cdot \vec{y}]_i = \mathbf{x}_{ij} \vec{y}_j$
$\vec{x} \cdot \mathbf{y}$	Produit d'un vecteur $\vec{x}$ et d'un tenseur $\mathbf{y}$ d'ordre 2 : $[\vec{x} \cdot \mathbf{y}]_j = \vec{x}_i \mathbf{y}_{ij}$
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	Produit de deux tenseurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ d'ordre 2 : $[\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}]_{ij} = \mathbf{x}_{ik} \mathbf{y}_{kj}$
$\mathbf{x} : \mathbf{y}$	Double produit contracté de deux tenseurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ d'ordre 2 : $\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{x}_{ij} \mathbf{y}_{ij}$
$\mathbf{x} : \mathbf{y}$	Produit d'un tenseur $\mathbf{x}$ d'ordre 4 et d'un tenseur $\mathbf{y}$ d'ordre 2 : $[\mathbf{x} : \mathbf{y}]_{ij} = \mathbf{x}_{ijkl} \mathbf{y}_{kl}$
$\mathbf{x} : \mathbf{y}$	Produit d'un tenseur $\mathbf{x}$ d'ordre 2 et d'un tenseur $\mathbf{y}$ d'ordre 4 : $[\mathbf{x} : \mathbf{y}]_{kl} = \mathbf{x}_{ij} \mathbf{y}_{ijkl}$
$\vec{x} \otimes \vec{y}$	Produit dyadique de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ : $[\vec{x} \otimes \vec{y}]_{ij} = \vec{x}_i \vec{y}_j$
$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$	Produit tensoriel de deux tenseurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ d'ordre 2 : $[\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}]_{ijkl} = \mathbf{x}_{ij} \mathbf{y}_{kl}$
$\mathbf{x} : \mathbf{y}$	Produit de deux tenseurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ d'ordre 4 : $[\mathbf{x} : \mathbf{y}]_{ijkl} = \mathbf{x}_{ijmn} \mathbf{y}_{mnkl}$
$tr(\mathbf{x})$	Trace du tenseur $\mathbf{x}$ d'ordre 2 : $tr(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{ii}$
$\hat{\mathbf{x}}$	Partie déviatorique du tenseur $\mathbf{x}$ d'ordre 2 : $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \frac{1}{3} tr(\mathbf{x}) \mathbf{I}$ , avec $\mathbf{I}$ le tenseur identité



# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Généralités

La modélisation des problèmes de dynamique rapide, qui sont par essence fortement non linéaires, est un problème complexe de plus en plus étudié depuis plusieurs décennies. Ces problèmes ont des applications directes dans le domaine de l'automobile (crash-tests) ou encore de l'aéronautique (perte d'aube dans un moteur), où les normes de sécurité lors de crashes sont de plus en plus sévères. Le dimensionnement des structures soumises à de telles sollicitations peut se faire de manière expérimentale, mais aussi, de plus en plus souvent, par des méthodes numériques. En effet, les tests expérimentaux peuvent s'avérer extrêmement coûteux, en particulier pour des essais de destruction de moteurs d'avion. De plus, au-delà des coûts, ces tests sont longs à mettre en place et souvent difficiles à interpréter. Il devient dès lors très important, du point de vue économique, de simuler tous les accidents possibles par des modèles numériques adéquats, pour ensuite n'effectuer qu'un seul test final de validation de la structure étudiée.

La modélisation et la simulation par ordinateur de ces phénomènes doit se faire de toute évidence dans le cadre non linéaire des grandes transformations. De plus, vu la rapidité des problèmes étudiés, l'échauffement thermique résultant des déformations irréversibles au sein de la structure peut être significatif aux endroits critiques, aboutissant à une baisse de résistance du matériau à ces endroits. Il est donc important d'estimer au mieux cette augmentation de température et de traduire ses effets au niveau du comportement de la structure. Cette interaction entre les comportements mécanique et thermique de la structure implique une modélisation couplée du phénomène thermomécanique global.

Dans les problèmes de crash ou d'impact considérés ici, le comportement du matériau peut également se dégrader sous l'effet de la sollicitation. Le matériau résiste dès lors moins bien aux efforts qui lui sont imposés et cela peut mener, le cas échéant, à la ruine de la structure. Il est donc important de prendre également en compte cette dégradation de la résistance du matériau.

## 1.2 Position du problème

Dans le présent travail, nous nous plaçons volontairement dans une approche purement phénoménologique et pragmatique des phénomènes étudiés. Nous ne nous intéressons pas de manière détaillée aux techniques expérimentales capables de reproduire les phénomènes étudiés, pour mettre l'accent sur les méthodes de simulation numérique de la problématique. C'est pourquoi nous essaierons d'établir des comparaisons avec des codes de calcul commerciaux reconnus, tels que par exemple LS-DYNA [158] ou Abaqus [111] sans pour autant négliger les comparaisons avec les expériences lorsque des résultats sont disponibles dans la littérature.

Pour l'étude du comportement des matériaux, nous adopterons une approche macroscopique des phénomènes étudiés, ce qui peut constituer une limitation. Cependant, les modèles microscopiques de comportement peuvent nécessiter l'identification de nombreux paramètres caractéristiques du modèle en question ainsi que plusieurs tests expérimentaux (traction, compression, cisaillement, chargement cyclique...). Or, comme nous ne disposons pas de tels tests expérimentaux, il s'avère hasardeux d'utiliser de tels modèles sans avoir, ni une grande maîtrise des techniques expérimentales, ni un accès à des résultats expérimentaux détaillés. Dans le même ordre d'idées, la modélisation de la dégradation irréversible des propriétés du matériau (endommagement, rupture) est également étudiée via des modèles macroscopiques.

Il faut néanmoins noter que l'approche adoptée dans la programmation n'obère aucunement, pour le futur, l'introduction de modèles matériau "multi-échelles". Notre travail peut donc être vu comme un premier pas dans l'établissement d'une plate-forme numérique capable d'être enrichie, au cours du temps, de modèles matériau de plus en plus complexes et sophistiqués.

Vu l'importance des interactions mécaniques et thermiques, nous nous placerons toujours dans le cadre d'une étude thermomécanique des phénomènes étudiés. Nous mettrons en évidence l'intérêt d'utiliser une telle formulation par une estimation de l'augmentation de température aux endroits critiques de la structure étudiée, ainsi que l'impact de cette hausse de température sur la résistance du matériau.

Lors des simulations de phénomènes d'impact, la solution proposée pour l'intégration des équations du mouvement dans les codes commerciaux retient principalement des algorithmes d'intégration de type explicite. Le principal inconvénient de ces algorithmes est leur stabilité conditionnelle qui dépend de la taille des mailles et de l'évolution de celle-ci. Nous utiliserons quant à nous des algorithmes de type implicite, qui, s'ils sont plus complexes à implémenter et nécessitent une mémoire plus importante, sont inconditionnellement stables (tout au moins dans le domaine linéaire) et peuvent s'avérer plus rapides en termes de temps de calcul.

Nous attacherons toujours de l'importance à la mesure du coût CPU des méthodes proposées. En effet, enrichir un modèle peut avoir un impact négatif sur le temps de cal-

cul de la simulation. Dans le cadre de notre approche pragmatique, nous mettrons donc l'accent sur l'utilisation de méthodes de calcul et de modèles de comportement permettant l'obtention de résultats exploitables dans des temps de calcul raisonnables.

Nous nous attèlerons dès lors à proposer des méthodes numériques les plus générales possible, c'est-à-dire à rendre ces méthodes les plus indépendantes possible des différents modèles de comportement du matériau. Tout d'abord, les algorithmes d'intégration des équations du mouvement et de l'évolution de température (équation de la chaleur) seront totalement découplés du comportement du matériau. Ensuite, les méthodes d'intégration des lois constitutives, avec ou sans dégradation du comportement du matériau, seront indépendantes du modèle choisi pour décrire le comportement thermomécanique dudit matériau.

Tous les développements numériques présentés dans ce travail ont été implémentés dans le code éléments finis Metafor<sup>1</sup> développé au sein du département LTAS-MC&T et MN<sup>2</sup>L de l'Université de Liège<sup>2</sup>. Ce code est de type orienté objet, ce qui facilite l'établissement de méthodes numériques générales.

## 1.3 Plan du travail

Le présent travail est divisé en trois parties. La première partie (chapitres 2 à 4) concerne la description et la modélisation thermomécanique des phénomènes à dynamique rapide sans dégradation irréversible des propriétés du matériau utilisé. La deuxième partie (chapitres 5 à 7) est consacrée à l'étude du comportement des matériaux dits endommageables éventuellement soumis à rupture, c'est-à-dire des matériaux dont les propriétés se dégradent de façon irréversible au cours de la déformation. La troisième partie (chapitre 8) est une application à l'échelle industrielle des méthodes proposées tout au long de cet ouvrage.

Ainsi, le chapitre 2 propose un inventaire des lois constitutives des matériaux, permettant de décrire le comportement de la structure lors de sollicitations rapides. L'accent est mis sur les principales lois d'évolution de la limite élastique implémentées dans les codes de calcul commerciaux, ainsi que sur les variantes de ces lois d'évolution. L'aspect numérique de l'intégration thermomécanique de ces lois est également abordé.

Le deuxième aspect abordé dans cette première partie concerne les algorithmes d'intégration temporelle des équations de conservation de la quantité de mouvement. Le chapitre 3 décrit les algorithmes d'intégration utilisés dans ce travail, en mettant l'accent sur l'aspect dynamique et le couplage thermomécanique des phénomènes à dynamique rapide.

Le chapitre 4 présente quelques applications illustrant les méthodes de calcul utilisées et permettant la validation de l'implémentation des modèles programmés dans Metafor.

---

<sup>1</sup><http://www.ltas-mnl.ulg.ac.be/dokuwiki/doku.php?id=metafor:start>

<sup>2</sup><http://www.ltas-mnl.ulg.ac.be> et <http://www.ulg.ac.be>

En effet, il est apparu opportun de coupler les chapitres 2 et 3 : des lois constitutives thermomécaniques doivent être intégrées avec des algorithmes thermomécaniques. Or, comme la génération de chaleur est principalement due à la rapidité des phénomènes étudiés, il est indispensable d'en tenir compte lors des simulations par éléments finis. Les comparaisons sont effectuées dans la mesure du possible par rapport à des données expérimentales quand celles-ci sont disponibles et également par rapport à des résultats issus de codes de calcul commerciaux.

Le chapitre 5 présente une modélisation de la dégradation du matériau au cours de la déformation. En effet, le matériau, sous l'effet des sollicitations et des efforts résultants, perd de ses propriétés de résistance à l'effort et ce, de manière irréversible. Il est alors endommagé. Dans ce travail, nous avons choisi d'utiliser la théorie de l'endommagement continu (voir entre autres Lemaitre [149]) pour décrire ces phénomènes. Le chapitre 5 rappelle les fondements de cette théorie ainsi que les principales lois d'endommagement continu. Une méthode générale et originale d'intégration de ces modèles d'endommagement est également proposée.

Une fois que la structure est soumise à de trop fortes sollicitations, la rupture consécutive à l'endommagement du matériau apparaît. Le chapitre 6 décrit la méthode numérique développée pour modéliser le déchirement d'une structure ainsi que les différents critères de rupture utilisés. Encore une fois, nous nous limitons à une approche phénoménologique et pragmatique : il ne s'agit pas ici d'implémenter des critères complexes multi-échelles. Cependant, la structure du code de calcul est conçue pour permettre aisément de telles extensions.

Le chapitre 7 présente une série d'applications permettant de valider l'implémentation des lois d'endommagement et de rupture ainsi que la formulation proposée de la théorie d'endommagement. Nous étudierons également le coût CPU engendré par la modélisation de l'endommagement et de la rupture du matériau.

Enfin, le chapitre 8 présente une application industrielle proposée par la société Techspace Aero S.A. Il s'agit de l'étude du flambement d'une aube de compresseur basse pression d'un moteur d'avion lors du contact accidentel de celle-ci avec le carter du moteur. Tous les développements présentés dans les chapitres précédents sont alors utilisés pour simuler au mieux le phénomène.

## 1.4 Contributions originales

Un premier apport de ce travail est l'utilisation d'algorithmes thermomécaniques de type étagé (voir chapitre 3), dont l'intégration temporelle des équations de conservation du mouvement prend en compte les effets d'inertie. En cela, nous complétons la thèse d'Adam [2] qui utilise des algorithmes ne prenant pas en compte ces effets d'inertie. L'application de lois de comportement dynamiques (voir chapitre 2), i.e. dépendantes de la



vitesse de déformation, prend donc tout son sens. L'intérêt d'utiliser de tels schémas de résolution est la possibilité d'intégrer l'équation de la chaleur complète, en tenant compte de la conduction thermique et d'éventuelles conditions aux limites. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par une méthode explicite, utilisée fréquemment en dynamique rapide (voir Belytschko et Hugues [22, 23], Hugues [117], Hulbert et Chung [119] ou Tchamwa [257]).

Un deuxième apport est une amélioration de la technique d'intégration des lois constitutives avec endommagement, utilisant la théorie de l'endommagement continu (voir par exemple Lemaitre [149]). Un couplage thermomécanique des modèles d'endommagement permet également l'utilisation de lois d'endommagement dynamiques thermomécaniques telles que celles exposées au chapitre 5. L'efficacité de la méthode proposée est comparée à deux autres méthodes de la littérature.

Le troisième apport concerne le développement d'une méthode unifiée de calcul de la matrice de raideur tangente matérielle analytique pour un matériau hypoélastique avec endommagement, toujours selon la théorie de l'endommagement continu (voir chapitre 5), et dans le cadre thermomécanique. Outre les avantages d'efficacité qu'elle présente par rapport aux méthodes où la matrice de raideur est évaluée par voie numérique, cette méthode permet d'utiliser une loi d'érouissage quelconque couplée à une loi d'endommagement quelconque. Ainsi, il est possible, par exemple, utiliser une loi d'érouissage de type Johnson-Cook (voir section 2.3.1) avec une loi d'endommagement de type Lemaitre-Chaboche (voir section 5.4.2.1) couplée à un algorithme implicite thermomécanique ; une loi d'érouissage de Zerilli-Armstrong (voir section 2.3.2) peut également être couplée avec une loi d'endommagement de type Langseth (voir section 5.4.3.2). Toutes les combinaisons de lois d'érouissage élasto-viscoplastiques et de lois d'endommagement continu sont donc envisageables de manière transparente pour l'utilisateur.

Le dernier apport majeur est l'application d'algorithmes implicites couplés au déchirement de structures (voir chapitre 6). En effet, dans le cadre de problèmes de dynamique rapide avec déchirement éventuel, les algorithmes utilisés par les codes commerciaux sont toujours de type explicite. La solution proposée dans ce travail permet, dans une certaine mesure, de garder une solution équilibrée lors du déchirement de la structure. Elle n'empêche donc pas la convergence des algorithmes de Newton-Raphson lors des pas de temps ultérieurs.



# Chapitre 2

## Modèles constitutifs pour les grandes vitesses de déformation

### 2.1 Introduction

Pour décrire correctement des phénomènes de dynamique rapide, il est important d'utiliser des lois constitutives tenant compte non seulement de la vitesse de déformation plastique équivalente  $\dot{\epsilon}^{pl}$  mais aussi de la température, afin d'être capable de représenter l'adoucissement résultant de l'échauffement du matériau (adoucissement thermique). Clifton [56], entre autres, a mis en évidence l'importance de cet adoucissement thermique sur la résistance des matériaux sous sollicitations dynamiques.

Un modèle idéal de plasticité pour les métaux devrait donc être capable de décrire les propriétés du matériau telles que la dépendance à la vitesse de déformation, à la température, à l'histoire de la déformation et de la vitesse de déformation, à l'écrouissage (cet écrouissage pouvant être isotrope ou non) ou encore à la viscosité. Une description précise de tous ces phénomènes est bien entendu impossible. Des hypothèses doivent donc être introduites selon les besoins des applications étudiées pour simplifier le modèle et rendre celui-ci utilisable en pratique.

Dans ce travail, nous nous concentrons sur les lois les plus utilisées dans le cadre des phénomènes dynamiques pour des matériaux métalliques. Nous ne nous intéressons pas ici aux polymères, composites, céramiques, mousses ou verres. Dans le même ordre d'idées, nous nous limitons aux surfaces de plasticité de type Von Mises avec écrouissage isotrope. Une attention particulière est accordée à la modélisation de la dépendance à la vitesse de déformation et à la température dans le cadre des grandes déformations et des grandes vitesses de déformation.

La section 2.2 présente une série d'exemples de lois de comportement viscoplastiques avec ou sans dépendance directe à la température<sup>1</sup>. Dans la section 2.3, nous décrivons

---

<sup>1</sup>Rappelons que nous ne considérons dans ce travail que les modèles macroscopiques.

plus en détails les principales lois utilisées dans le cadre des simulations de dynamique rapide, et nous essayons d'en tirer les avantages et inconvénients de ces modèles. Dans la section 2.4, une formulation générale d'intégration de ces lois constitutives est proposée, en ce compris la formulation de la matrice de raideur tangente matérielle. Cette formulation permet également de prendre en compte les variations des paramètres du matériau avec la température.

## 2.2 Lois de comportement prenant en compte la vitesse de déformation

Dans le cadre de l'étude des propriétés des matériaux et des structures métalliques usuelles, on parle de régime dynamique pour des vitesses de déformation supérieures à  $1s^{-1}$ . Le régime dynamique est dit lent pour des vitesses de déformation de 1 à  $10s^{-1}$ . On est alors proche du cas quasi-statique. On parle de régime dynamique moyen lorsque la vitesse de déformation se situe entre 10 et  $1000s^{-1}$ . A titre d'exemple, dans l'industrie automobile, les vitesses de déformation atteintes sont de l'ordre de  $100s^{-1}$  pour un impact à  $60km/h$  (voir Cunat [63]). Dans le cadre de ce type d'essais à moyenne vitesse, les vitesses d'impact sont au maximum de l'ordre de  $100m/s$ . L'échelle de temps de ces phénomènes est de l'ordre de la milliseconde. Au-delà de  $1000s^{-1}$ , on entre dans le régime de la dynamique rapide. L'échelle temporelle est alors de l'ordre de la microseconde. C'est le cas de la balistique ou des explosions. Les applications sont surtout des applications dans le domaine militaire et les vitesses d'essai sont alors de l'ordre du  $km/s$ . Nous nous concentrons dans ce travail sur la description de phénomènes se situant entre 10 et  $10000s^{-1}$ .

Il existe deux grandes familles de lois constitutives : les modèles phénoménologiques ou empiriques (par exemple les lois de Johnson-Cook [123], Cowper-Symonds [61] ou Zhao [281]) et les modèles à base physique (par exemple Zerilli-Armstrong [280], Bodner et Partom [26] ou Rusinek et Klepaczko [231]) qui prennent en compte des phénomènes microscopiques comme la taille des grains, la structure cristalline ou la structure des dislocations.

Dans les modèles de plasticité quasi-statiques où la vitesse de déformation n'est pas prise en compte, l'expression de la surface de plasticité  $f$  s'écrit :

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_{yield}(\bar{\varepsilon}^{pl})$$

où  $\sigma_{eq}$  est une mesure scalaire de l'état de contraintes du matériau (dans notre cas, la contrainte équivalente au sens de Von Mises) et  $\sigma_{yield}$  est la limite élastique du matériau. Si  $f < 0$ , le matériau se trouve dans le domaine élastique. Si  $f = 0$ , le matériau plastifie. La zone  $f > 0$  est une zone interdite.

Dans le cas où la vitesse de déformation est prise en compte dans l'évaluation de la limite élastique, le critère de plasticité doit être modifié en conséquence. Langrand et al. [141] ont

fait une étude des différents types de lois incluant la vitesse de déformation. Ils ont divisé ces lois en trois catégories :

- Les lois empiriques, obtenues par une procédure expérimentale dont la formulation est plus ou moins complexe. Des exemples de ce type de lois sont présentés dans le tableau 2.1. Signalons que ces lois peuvent également, par leur forme d'écriture, se classer dans l'une des deux catégories suivantes.
- Les lois d'érouissage visqueux de type additif, un terme visqueux  $F(\bar{\varepsilon}^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl})$  est ajouté à la limite élastique  $\sigma_{yield}$ . Ce faisant, la fonction  $f$  peut prendre des valeurs positives (égales à la fonction  $F$ ). Des exemples de telles lois sont donnés dans le tableau 2.2.
- Les lois d'érouissage visqueux de type multiplicatif, où la limite élastique  $\sigma_{yield}$  est multipliée par une fonction de la vitesse de déformation  $G(\bar{\varepsilon}^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl})$ . De cette façon, la taille du domaine élastique est ajustée lorsque la vitesse de déformation augmente. Des exemples sont donnés dans le tableau 2.3.

D'une manière générale, le critère de plasticité de Von Mises, que nous appellerons critère étendu, peut s'écrire de la façon suivante :

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_{crit} = 0 \quad (2.1)$$

où  $\sigma_{crit}$  est la limite élastique étendue qui peut prendre les formes suivantes selon le type de lois utilisées :

$$\sigma_{crit} = \begin{cases} \sigma_{yield} & \text{pour le critère de Von Mises classique} \\ \sigma_{yield} + F(\bar{\varepsilon}^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl}) & \text{pour les modèles d'érouissage de type additif} \\ \sigma_{yield} G(\bar{\varepsilon}^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl}) & \text{pour les modèles d'érouissage de type multiplicatif} \end{cases}$$

## 2.3 Lois de comportement dynamiques

Dans cette section, nous nous attardons sur les lois de comportement utilisées spécifiquement pour la description de phénomènes rapides, dont les vitesses de déformation sont typiquement de l'ordre de 100 à 1000s<sup>-1</sup>. En effet, les lois présentées dans la section 2.2 ne sont pas toutes utilisées dans ce cadre. Citons par exemple les modèles de Perzyna et de Prandtl généralement utilisés dans le cadre des processus de mise à forme (voir Adam [2]).

Auteur(s)	Modèle	Paramètres
Prandtl [223]	$\sigma_{crit} = \frac{1}{A} \operatorname{arcsinh} \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{C}$	$A, C$
Perzyna [213]	$\sigma_{crit} = K (\dot{\varepsilon}^{pl})^m (\bar{\varepsilon}^{pl})^n$	$K, m, n$
Zerilli-Armstrong FCC [280]	$\sigma_{crit} = \sigma_0 + C_2 (\bar{\varepsilon}^{pl})^n e^{-C_3 T + C_4 T \ln \dot{\varepsilon}^{pl}}$	$\sigma_0, C_2, C_3, C_4, n$
Zerilli-Armstrong BCC [280]	$\sigma_{crit} = \sigma_0 + C_5 (\bar{\varepsilon}^{pl})^n + C_2 e^{-C_3 T + C_4 T \ln \dot{\varepsilon}^{pl}}$	$\sigma_0, C_2, C_3, C_4, C_5, n$
Krupkowski [220]	$\sigma_{crit} = K X^a (\varepsilon_{ref} X^b + \bar{\varepsilon}^{pl})^{nX^c}$ $X = \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_{ref}^{pl}}$	$K, \varepsilon_{ref}, a, b, n, c$
Rusinek et Klepaczko [234] <sup>a</sup>	$\sigma_{crit} = \frac{E(T)}{E_0} (\sigma_\mu (\bar{\varepsilon}^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl}, T) + \sigma^* (\dot{\varepsilon}^{pl}, T))$ $\sigma_\mu = B (\dot{\varepsilon}^{pl}, T) (\bar{\varepsilon}_0^{pl} + \bar{\varepsilon}^{pl})^{n(\dot{\varepsilon}^{pl}, T)}$ $B (\dot{\varepsilon}^{pl}, T) = B_0 \left( \frac{T}{T_{melt}} \log \frac{\dot{\varepsilon}_{max}^{pl}}{\dot{\varepsilon}^{pl}} \right)^{-v}$ $n (\dot{\varepsilon}^{pl}, T) = n_0 \left( 1 - D_2 \frac{T}{T_{melt}} \log \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_{min}^{pl}} \right)$ $\sigma^* = \sigma_0^* \left( 1 - D_1 \frac{T}{T_{melt}} \log \frac{\dot{\varepsilon}_{max}^{pl}}{\dot{\varepsilon}^{pl}} \right)$ $E(T) = E_0 \left[ 1 - \frac{T}{T_{melt}} \exp(\theta^* (1 - \frac{T_{melt}}{T})) \right]$	$E_0$ $\bar{\varepsilon}_0^{pl}$ $B_0, \dot{\varepsilon}_{max}^{pl}, v$ $n_0, \dot{\varepsilon}_{min}^{pl}, D_2$ $\sigma_0^*, D_1$ $E_0, \theta^*$
Uenishi et Teodosiu [263] <sup>b</sup>	$\sigma_{crit} = Y_0 + R + f \ S\ $ $Y_0 = \hat{Y}_0 + Y_0^* \left( 1 - \frac{kT}{\Delta F_0} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_0^*}{\dot{\varepsilon}^{pl}} \right)^2$ $\dot{R} = C_R (R_{sat} - R) \dot{\varepsilon}^{pl}, R_{sat} = R_{sat,0} \left( \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^v$ $S = S_L + S_D N \otimes N, \quad N = \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\ \dot{\varepsilon}^{pl}\ }$ $\dot{S}_L = -C_{SL} \left( \frac{\ S_L\ }{S_{sat}} \right)^{n_L} S_L \dot{\lambda}$ $\dot{S}_D = C_{SD} g (S_{sat} - S_D) \dot{\lambda}$ $g = \begin{cases} 1 - \frac{C_P}{C_{SD} + C_P} \left  \frac{S_D}{S_{sat}} - P_D \right  & P_D \geq 0 \\ (1 + P_D)^{n_P} \left( 1 - \frac{C_P}{C_{SD} + C_P} \frac{S_D}{S_{sat}} \right) \sin \theta & \text{sinon} \end{cases}$ $P_D = P : N, \quad \dot{P} = C_P (N - P) \dot{\varepsilon}^{pl}$	$f$ $\hat{Y}_0, Y_0^*, \Delta F_0, \dot{\varepsilon}_0^*$ $C_R, R_{sat,0}, v$ $C_{SL}, S_{sat}, n_L$ $C_{SD}$ $C_P, n_P$

TAB. 2.1 – Lois constitutives empiriques prenant en compte la vitesse de déformation.

<sup>a</sup>Voir page 38 pour plus de détails.<sup>b</sup>Voir page 40 pour les détails de cette loi.

Auteur(s)	$F(\bar{\varepsilon}^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl})$	Paramètres
Sokolovsky-Malvern [210]	$A \log(1 + B\dot{\varepsilon}^{pl})$	$A, B$
Loi de type Ludwick [210]	$g(\dot{\varepsilon}^{pl}) \log \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_{ref}^{pl}}$	$g(\dot{\varepsilon}^{pl}), \dot{\varepsilon}_{ref}^{pl}$
Lindholm [154]	$A + B(\bar{\varepsilon}^{pl})^n \log \dot{\varepsilon}^{pl}$	$A, B, n$
Zhao [281] <sup>a</sup>	$(C + D(\dot{\varepsilon}^{pl})^m) \ln \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0} + E(\dot{\varepsilon}^{pl})^k$ <sup>b</sup>	$A, B, n, m, C, D, E, k$

TAB. 2.2 – Lois constitutives de type additif prenant en compte la vitesse de déformation.

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_{yield} - F(\bar{\varepsilon}^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl}) = 0$$

<sup>a</sup>Voir page 37 pour plus de détails.

$$^b \sigma_{yield} = A + B(\bar{\varepsilon}^{pl})^n$$

Auteur(s)	$\sigma_{yield}(\bar{\varepsilon}^{pl})$	$G(\bar{\varepsilon}^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl})$	Paramètres
Cowper-Symonds [61]	Courbe analytique/ linéaire par morceaux	$1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{D}\right)^{\frac{1}{p}}$	$D, p$
Johnson-Cook [123]	$(A + B(\bar{\varepsilon}^{pl})^n)(1 - T^{*m})$	$\left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)$	$A, B, n, m, C$
Jones [125]	Courbe analytique/ linéaire par morceaux	$1 + \left(\frac{(\varepsilon_u - \varepsilon_y)\dot{\varepsilon}}{(\varepsilon - \varepsilon_y)D_u + (\varepsilon_u - \varepsilon)D_y}\right)^{\frac{1}{p}}$	$D_u, D_y, \varepsilon_u, \varepsilon_y, m$
Molinari [182]	$\sigma_0 \left(\frac{\bar{\varepsilon}^{pl}}{\bar{\varepsilon}_0^{pl}}\right)^n \left(\frac{T}{T_0}\right)^\nu$	$\left(\frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0^{pl}}\right)^m$	$\sigma_0, m, n, \nu$
Kobayashi [137]	$\sigma_0 (\bar{\varepsilon}^{pl})^n (1 - \beta\Delta T)$	$(\dot{\varepsilon}^{pl})^m$	$\sigma_0, n, m, \beta$

TAB. 2.3 – Lois constitutives de type multiplicatif prenant en compte la vitesse de déformation.

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_{yield} G(\bar{\varepsilon}^{pl}, \dot{\varepsilon}^{pl}) = 0$$

### 2.3.1 Loi de Johnson-Cook

Cette loi d'érouissage très répandue a été proposée en 1983 par Johnson et Cook [123]. Depuis lors, elle a été utilisée avec des variantes (voir ci-après) dans de nombreux cas (voir par exemple [20, 66, 88, 118, 128, 131, 141, 152, 157, 180, 194, 230, 235]) et pour des matériaux très divers (fer, acier, aluminium, titane, cuivre ou encore tungstène). La loi d'évolution de la limite élastique étendue de l'expression (2.1) s'écrit :

$$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right) \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m\right) \quad (2.2)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $n$ ,  $C$  et  $m$  sont des paramètres matériau;  $T_{room}$  est la température ambiante et  $T_{melt}$  la température de fusion du matériau;  $\dot{\varepsilon}_0$  est une vitesse de déformation plastique de référence arbitraire.

Le premier facteur de l'expression (2.2) donne la dépendance de la limite élastique à la déformation plastique, le deuxième facteur représente la sensibilité à la vitesse de déformation et le troisième facteur modélise l'adoucissement thermique dû à l'élévation de température résultant de la déformation. Cette approche ne prend pas en compte les effets dus à l'histoire de la vitesse de déformation et de la température.

Ce modèle est une loi purement empirique. Il a rencontré beaucoup de succès vu sa simplicité et la grande disponibilité de paramètres pour différents matériaux. De plus, ces paramètres peuvent être obtenus par un nombre peu élevé d'expériences. Des modèles plus complexes peuvent fournir une description plus précise du comportement du matériau, mais ces modèles plus complexes ne sont pas toujours aisément intégrables dans les codes de calcul commerciaux via les routines utilisateurs. L'inconvénient de ce modèle est la forme imposée de l'érouissage du matériau (de type puissance).

Le choix de  $\dot{\varepsilon}_0$  influence la valeur du paramètre  $C$  : lors du processus d'identification des contraintes, on obtient une valeur différente pour  $C$  si la valeur de  $\dot{\varepsilon}_0$  est modifiée. Il n'y a pas d'unanimité dans la littérature concernant le choix de  $\dot{\varepsilon}_0$ , mais une valeur de  $\dot{\varepsilon}_0 = 1s^{-1}$  est couramment utilisée.

Ajoutons que, lorsque la vitesse de déformation plastique équivalente  $\dot{\varepsilon}^{pl}$  est inférieure à  $\dot{\varepsilon}_0$ , le terme de viscosité est annulé. Ceci est logique dans la mesure où cela induirait une diminution de la limite élastique du matériau. Or, la viscosité plastique ne peut qu'augmenter cette limite élastique. De plus, le test de plasticité (voir section 2.4) se fait sur la limite de plasticité non visqueuse (on considère que la vitesse de déformation plastique est nulle si on n'a pas de plastification). Ajoutons encore que, sans cette précaution numérique, nous risquons d'obtenir, pour de très faibles valeurs de  $\dot{\varepsilon}^{pl}$ , une limite élastique négative!

Dans le même ordre d'idées, si la température est inférieure à  $T_{room}$ , le facteur d'adoucissement thermique est pris égal à 1, ce qui supprime les problèmes numériques rencontrés dans le cas où l'exposant  $m$  est inférieur à 1. En pratique, nous choisirons logiquement,



comme température initiale, la température ambiante  $T_{room}$  ou éventuellement une température supérieure au cas où le matériau serait chauffé auparavant. Cependant, des températures inférieures à  $T_{room}$  peuvent quand même éventuellement résulter d'effets numériques dus à un maillage trop grossier et à une variation brutale de la température (effet de peau).

Dans un souci de simplification des écritures, nous définissons la vitesse de déformation plastique équivalente relative  $\dot{\bar{\epsilon}}^{*pl}$  et la température relative  $T^*$  par :

$$\dot{\bar{\epsilon}}^{*pl} = \begin{cases} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} & \text{si } \dot{\bar{\epsilon}}^{pl} \geq \dot{\bar{\epsilon}}_0 \\ 1 & \text{si } \dot{\bar{\epsilon}}^{pl} \leq \dot{\bar{\epsilon}}_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$T^{*m} = \begin{cases} \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}} & \text{si } T \geq T_{room} \\ 0 & \text{si } T \leq T_{room} \end{cases} \quad (2.4)$$

Dès lors, la relation (2.2) s'écrit :

$$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\epsilon}^{pl})^n) (1 + C \ln \dot{\bar{\epsilon}}^{*pl}) (1 - T^{*m}) \quad (2.5)$$

### Extensions

L'expression (2.2) de la loi de Johnson-Cook peut s'avérer insuffisante pour des vitesses de déformation supérieures à  $1000s^{-1}$ . En effet, pour certains métaux ductiles, la limite élastique augmente plus rapidement avec la vitesse de déformation que ce qui est prédit par (2.2).

- Holmquist et Johnson [116] proposent une loi de type puissance en la vitesse de déformation qui est également utilisée dans Allen et al. [4], Rule et Jones [230] ou Sattouf et al. [235] :

$$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\epsilon}^{pl})^n) (\dot{\bar{\epsilon}}^{*pl})^C (1 - T^{*m}) \quad (2.6)$$

où  $\dot{\bar{\epsilon}}^{*pl}$  et  $T^*$  sont définis de manière identique à (2.3) et (2.4). L'intérêt de cette extension est une plus grande augmentation de la limite élastique avec la vitesse de déformation au-delà de  $1000s^{-1}$  dans le cas de métaux ductiles.

- Rule et Jones [230] proposent une version modifiée de la loi de Johnson-Cook qu'ils identifient pour de l'aluminium, du cuivre, du fer et un acier haute résistance :

$$\sigma_{crit} = f(\dot{\bar{\epsilon}}^{*pl}) (A + B (\bar{\epsilon}^{pl})^n) (1 - T^{*m}) \quad (2.7)$$

où

$$f(\dot{\bar{\epsilon}}^{*pl}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{\bar{\epsilon}}^{pl} \leq \dot{\bar{\epsilon}}_0 \\ 1 + C_3 \ln \dot{\bar{\epsilon}}^{*pl} + C_4 \left( \frac{1}{C_5 - \ln \dot{\bar{\epsilon}}^{*pl}} - \frac{1}{C_5} \right) & \text{si } \dot{\bar{\epsilon}}^{pl} \geq \dot{\bar{\epsilon}}_0 \end{cases}$$

où  $C_3$ ,  $C_4$  et  $C_5$  sont des paramètres matériau ;  $T^*$  est défini par l'équation (2.4). De plus, une vitesse de déformation maximale est imposée, pour éviter de voir le

terme  $\ln \dot{\varepsilon}^{*pl}$  s'approcher de  $C_5$  et ainsi avoir une limite élastique infinie. Cette condition est imposée via l'inégalité suivante :

$$\left(1 + C_3 \ln \dot{\varepsilon}^{*pl} + C_4 \left( \frac{1}{C_5 - \ln \dot{\varepsilon}^{*pl}} - \frac{1}{C_5} \right)\right) \leq C_6 \quad (2.8)$$

où  $C_6$  est un nouveau paramètre matériau. Cette modification permet une modélisation du comportement du matériau plus précise pour les vitesses de déformation supérieures à  $1000s^{-1}$ . Au-delà de cette vitesse de déformation, Rule et Jones observent un accroissement très important de la limite élastique impossible à prendre en compte avec la formulation classique de Johnson-Cook. C'est le but du terme  $\frac{1}{C_5 - \ln \dot{\varepsilon}^{*pl}} - \frac{1}{C_5}$ .

- Toujours dans le but d'augmenter la sensibilité à la vitesse de déformation, Kang et Huh [128, 232, 236] proposent d'ajouter un terme quadratique en le logarithme de la vitesse de déformation pour un meilleur ajustement de la variation de la limite élastique par rapport à la vitesse de déformation :

$$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left(1 + C \ln \dot{\varepsilon}^{*pl} + C_2 (\ln \dot{\varepsilon}^{*pl})^2\right) (1 - T^{*m}) \quad (2.9)$$

- Khan et al. [130, 131, 152] ajoutent un terme en viscosité au facteur d'écroutissage. Ils proposent le modèle suivant :

$$\sigma_{crit} = \left( A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^{n_0} \left( 1 - \frac{\ln \dot{\varepsilon}^{pl}}{\ln D_0^{pl}} \right)^{n_1} \right) (\dot{\varepsilon}^{*pl})^C (1 - T^{*m}) \quad (2.10)$$

où  $n_1$  et  $D_0^{pl}$  sont deux nouveaux paramètres matériau ( $D_0^{pl}$  est une borne supérieure arbitraire sur la vitesse de déformation plastique). L'avantage de cette formulation est d'ajouter une plus grande dépendance par rapport à la vitesse de déformation du taux d'écroutissage  $\frac{d\sigma_{crit}}{d\bar{\varepsilon}^{pl}}$ .

Toutes ces extensions, si elles peuvent apporter un plus dans certaines applications ou pour certains matériaux, n'apportent pas d'amélioration significative dans des cas plus généraux par rapport à la loi de Johnson-Cook originale. De plus, à l'exception de la loi proposée par Holmquist [116], ces extensions nécessitent l'identification de paramètres matériau supplémentaires.

### 2.3.2 Loi de Zerilli-Armstrong

Cette loi a été proposée pour la première fois en 1987 par Zerilli et Armstrong [280] et est, depuis lors, largement utilisée (voir [20, 32, 141, 152, 164, 180, 194, 215, 270]) pour des matériaux divers (acier, aluminium, tantale, cuivre, titane, tungstène, fer, zirconium ou encore molybdène). La loi d'évolution de la limite élastique étendue s'écrit, pour un métal cubique faces centrées FCC :

$$\sigma_{crit} = \sigma_0 + C_2 (\bar{\varepsilon}^{pl})^{n_2} \exp(-C_3 T + C_4 T \ln \dot{\varepsilon}^{pl}) \quad (2.11)$$

Pour un métal cubique centré BCC, l'expression de la limite élastique étendue est donnée par :

$$\sigma_{crit} = \sigma_0 + C_5 (\bar{\varepsilon}^{pl})^{n_1} + C_2 \exp(-C_3 T + C_4 T \ln \dot{\varepsilon}^{pl}) \quad (2.12)$$

où  $\sigma_0$  est la limite élastique initiale et  $C_2, C_3, C_4, C_5, n_1$  et  $n_2$  sont des paramètres matériau.

Contrairement à Johnson-Cook, cette loi n'est pas une loi empirique mais repose sur les mécanismes microscopiques de dislocation dans les métaux. Les effets de l'écroutissage visqueux et non visqueux ainsi que l'adoucissement thermique sont basés sur l'analyse de l'activation thermique et ont été intégrés de cette façon à la loi constitutive. La loi proposée par Zerilli et Armstrong a une expression relativement simple, en comparaison des autres modèles constitutifs basés sur les mécanismes de dislocation. C'est cette simplicité qui fait sa force.

La différence dans les deux formes d'écriture de la limite élastique (2.11) et (2.12) dépend des caractéristiques des dislocations pour chaque structure métallique. Les métaux de type BCC montrent une plus grande dépendance de la limite élastique avec la température et la vitesse de déformation (franchissement des barrières de Peierls-Nabarro) tandis que la limite élastique des métaux de type FCC est principalement due à l'écroutissage (coupe des forêts de dislocation).

La loi de Zerilli-Armstrong est utilisée dans le même cadre d'applications que la loi de Johnson-Cook. Certains auteurs ont d'ailleurs déterminé des paramètres matériau pour la loi de Johnson-Cook (2.2) et la loi de Zerilli-Armstrong (2.11,2.12) correspondant au même matériau (citons par exemple Becze et al. [20] et Dey et al. [73] pour de l'acier, Sattouf et al. [235] pour de l'acier et de l'aluminium, Meyer et Kleponis [180] pour du titane, ou encore Noble et al. [194] pour du fer).

### Extensions

La loi de Zerilli-Armstrong est parfois également écrite en fonction de la taille de grains suivant la relation de Hall-Petch (voir par exemple [32, 159, 190]). Pour un matériau de type FCC, la loi s'écrit :

$$\sigma_{crit} = \sigma_0 + C_2 (\bar{\varepsilon}^{pl})^{n_2} \exp(-C_3 T + C_4 T \ln \dot{\varepsilon}^{pl}) + \frac{k}{\sqrt{d}} \quad (2.13)$$

où  $d$  est la taille de grains et  $k$  est un paramètre matériau (en  $MPa/m$ ). De même, pour un matériau BCC, on a :

$$\sigma_{crit} = \sigma_0 + C_5 (\bar{\varepsilon}^{pl})^{n_1} + C_2 \exp(-C_3 T + C_4 T \ln \dot{\varepsilon}^{pl}) + \frac{k}{\sqrt{d}} \quad (2.14)$$

Voyiadjis et Abed [270] proposent une variante de la loi de Zerilli-Armstrong qu'ils comparent avec la loi de Zerilli-Armstrong pour des matériaux tels que le tantale, le molybdène,

le cuivre et le vanadium. La limite élastique étendue s'écrit pour un matériau FCC :

$$\sigma_{crit} = \sigma_0 + C_2 (\bar{\varepsilon}^{pl})^{n_2} \left[ 1 - (C_3 T - C_4 T \ln \dot{\varepsilon}^{pl})^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (2.15)$$

où  $p$  et  $q$  sont de nouveaux paramètres matériau. Pour un matériau BCC, on a :

$$\sigma_{crit} = \sigma_0 + C_5 (\bar{\varepsilon}^{pl})^{n_1} + C_2 \left[ 1 - (C_3 T - C_4 T \ln \dot{\varepsilon}^{pl})^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (2.16)$$

### 2.3.3 Loi de Cowper-Symonds

Cette loi d'évolution, proposée par Cowper et Symonds [61] en 1957, est la plus simple pour prendre en compte les effets de la vitesse de déformation. Elle est également très utilisée dans la littérature (voir [10, 63, 125, 141, 166, 209, 269, 278]). Elle consiste à multiplier la limite élastique dite "statique" par un facteur dépendant de la puissance de la vitesse de déformation plastique. Elle ne dépend pas explicitement de la température. La loi d'évolution de la limite élastique étendue s'écrit :

$$\sigma_{crit} = \sigma_{stat} \left( 1 + \left( \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{D} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \quad (2.17)$$

où  $\sigma_{stat}$  est la limite élastique non visqueuse,  $D$  et  $p$  sont des paramètres matériau.

Généralement, la limite élastique non visqueuse est donnée par une loi linéaire (voir par exemple Aoki et al. [10] ou Cunaat [63]) ou linéaire par morceaux (Yuen et Nurick [278]). Cependant, d'autres auteurs l'utilisent avec d'autres types de lois, par exemple une loi de type puissance (Markiewicz et al. [166]).

Dans ce travail, nous avons implémenté la loi de Cowper-Symonds de telle sorte qu'elle soit utilisable avec n'importe quel type de loi d'érouissage non visqueux (érouissage linéaire, à saturation, de type puissance...).

#### Extensions

Jones et al. [125, 209] proposent l'extension suivante de la loi de Cowper-Symonds :

$$\sigma_{crit} = \sigma_{stat} \left( 1 + \left( \frac{(\varepsilon_u - \varepsilon_y) \dot{\varepsilon}}{(\varepsilon - \varepsilon_y) D_u + (\varepsilon_u - \varepsilon) D_y} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \quad (2.18)$$

où  $\varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\varepsilon_u$  sont respectivement les déformations correspondant au seuil de plasticité et à la rupture.  $D_u$ ,  $D_y$  et  $p$  sont des paramètres matériau. Cette formulation présente le désavantage d'un grand nombre de paramètres, et également le fait que les coefficients de la vitesse de déformation plastique sont dépendants de la déformation totale, ce qui rend difficile son extension à trois dimensions.

Alvez [7] (modèle également utilisé par Peixinho et al. [209]), quant à lui, généralise la relation (2.17) sous la forme suivante :

$$\sigma_{crit} = \sigma_{stat} + \sigma_{ref} \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}}{D} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.19)$$

### 2.3.4 Autres lois

Dans cette section, nous mentionnons quelques modèles de lois de comportement dynamiques de la littérature, moins répandus cependant que les lois de Johnson-Cook, Zerilli-Armstrong ou Cowper-Symonds.

- Kobayashi et Dodd [137], Sheik-Ahmad et Twomey [240] ou encore Lee et al. [145] utilisent pour décrire le comportement dynamique de l'aluminium 7075 la forme suivante :

$$\sigma_{crit} = \sigma_0 (\bar{\epsilon}^{pl})^n (\dot{\bar{\epsilon}}^{pl})^m (1 - \beta \Delta T) \quad (2.20)$$

L'inconvénient d'une telle loi d'évolution est la dépendance linéaire de la limite élastique avec la température, ce qui n'est pas toujours le cas (l'exposant  $m$  de la loi de Johnson-Cook a des valeurs caractéristiques comprises entre 0.5 à 1.1).

- D'autres auteurs (Daridon et al. [66], Batra et Chen [18], Klopp et al. [136]), sous l'influence de Molinari [182], décrivent la courbe contrainte-déformation pour un chargement dynamique par :

$$\sigma_{crit} = \sigma_0 \left( \frac{\bar{\epsilon}^{pl}}{\bar{\epsilon}_0^{pl}} \right)^n \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0^{pl}} \right)^m \left( \frac{T}{T_0} \right)^\nu$$

Batra et Chen [18], ainsi que Daridon et al. [66], comparent cette loi avec les résultats obtenus en utilisant la loi de Johnson-Cook et la formulation de Bodner-Partom (voir page 38) pour un acier HY-100, dans le cas d'un test à une vitesse de déformation de  $3300s^{-1}$ . Ils comparent notamment l'apparition d'instabilité (striction) et de bandes de cisaillement dans le matériau, ainsi que la taille de ces bandes de cisaillement, pour les différentes lois en fonction de vitesses de déformation croissantes. Malheureusement, il n'y a pas de comparaison avec des résultats expérimentaux.

- Le modèle de Zhao [227, 281, 282] permet de prendre en compte l'évolution de l'écroutissage et le frottement visqueux. La limite élastique étendue s'écrit :

$$\sigma_{crit} = \left( A + B (\bar{\epsilon}^{pl})^n + (C + D (\bar{\epsilon}^{pl})^m) \ln \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\epsilon}}_0} + E (\dot{\bar{\epsilon}}^{pl})^k \right) (1 - \mu \Delta T)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  et  $\mu$  sont des paramètres matériau. Cette expression est plus "sophistiquée" en ce qui concerne la vitesse de déformation plastique. Cependant, elle présente l'inconvénient de n'avoir qu'une dépendance linéaire en la température.

Rusinek et al. [233] comparent brièvement cette loi avec les lois de Johnson-Cook, Cowper-Symonds et la loi de Rusinek et Klepaczko (voir ci-après). Le modèle proposé par Zhao [281] est moins adéquat pour des vitesses de déformation élevées induisant de fortes variations locales de température. La relation de Cowper-Symonds surestime l'effet de la vitesse de déformation sur la limite élastique étendue, vu qu'elle ne prend pas en compte l'adoucissement thermique. À l'inverse, le modèle de Johnson-Cook sous-estime l'effet de la vitesse de déformation.

- Citons encore la formulation de Bodner-Partom [26], utilisée notamment par Liang et Khan [152], Song et al. [250], Batra et Chen [18], Andersson [9] ou Harth et al. [110]. Cette formulation consiste à écrire le deuxième invariant du tenseur vitesse de déformation  $D_2^{pl} = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}^{pl} : \dot{\epsilon}^{pl}$  comme une fonction de  $J_2^1$  et d'une variable interne  $Z$  :

$$D_2^{pl} = \left(D_0^{pl}\right)^2 \exp\left(-\left(\frac{Z^2}{3J_2}\right)^n\right)$$

Cette variable  $Z$  est une fonction de  $W^{pl}$ , le travail plastique<sup>2</sup> :

$$Z = Z_1 + (Z_0 - Z_1) \exp\left(-m \frac{W^{pl}}{Z_0}\right)$$

où  $D_0$  (valeur limite de la vitesse de déformation plastique),  $m$ ,  $n$ ,  $Z_0$  (valeur initiale de  $Z$ ) et  $Z_1$  (valeur de saturation de  $Z$ ) sont des paramètres matériau. Il existe des formes plus évoluées de  $m$  et  $n$ , fonctions du travail plastique pour  $m$ , et de la température  $T$  pour  $n$  (voir Batra et Chen [18] ou Liang et Khan [152]) :

$$\begin{aligned} m &= m_0 + m_1 \exp(-\alpha W^{pl}) \\ n &= \frac{T_{melt}}{T} + b \end{aligned}$$

où  $m_0$ ,  $m_1$  et  $b$  sont des nouveaux paramètres matériau. Liang et Khan [152] proposent une extension de ce modèle pour accroître la sensibilité à la vitesse de déformation et obtenir une loi valable dans un plus grand spectre de vitesses de déformation (de  $10^{-5}$  à  $10^4 s^{-1}$ ).

- Rusinek et Klepaczko [231–234] proposent un modèle phénoménologique basé sur des considérations physiques qu'ils comparent à la loi de Johnson-Cook modifiée (2.9). Cette loi a été écrite initialement pour reproduire des expériences de cisaillement. Dans le cas général, la limite élastique étendue  $\sigma_{crit}$  est donnée par :

$$\sigma_{crit} = \frac{E(T)}{E_0} \left( \sigma_{\mu}(\bar{\epsilon}^{pl}, \dot{\epsilon}^{pl}, T) + \sigma^*(\dot{\epsilon}^{pl}, T) \right)$$

---

<sup>1</sup>  $J_2 = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}}$

<sup>2</sup>  $W^{pl} = \int_0^t \sigma_{eq} \dot{\epsilon}^{pl} d\tau$

La contrainte interne,  $\sigma_\mu$ , due à la création de nouvelles dislocations (produisant de l'écroutissage), a pour expression :

$$\sigma_\mu = B (\dot{\varepsilon}^{pl}, T) \left( \bar{\varepsilon}_0^{pl} + \varepsilon^{pl} \right)^{n(\dot{\varepsilon}^{pl}, T)}$$

avec

$$B(\dot{\varepsilon}^{pl}, T) = \left\langle B_0 \left( \frac{T}{T_{melt}} \log \frac{\dot{\varepsilon}_{max}^{pl}}{\dot{\varepsilon}^{pl}} \right)^{-v} \right\rangle$$

$$n(\dot{\varepsilon}^{pl}, T) = \left\langle n_0 \left( 1 - D_2 \frac{T}{T_{melt}} \log \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_{min}^{pl}} \right) \right\rangle$$

où  $\bar{\varepsilon}_0^{pl}$ ,  $B_0$ ,  $n_0$ ,  $v$ ,  $\dot{\varepsilon}_{max}^{pl}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{min}^{pl}$  et  $D_2$  sont des paramètres matériau, tandis que  $T_{melt}$  est la température de fusion du matériau. Le symbole  $\langle x \rangle$  représente les crochets de MacCaulay :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} (x + |x|)$$

La contrainte effective  $\sigma^*$  due à l'activation thermique est donnée par :

$$\sigma^* = \left\langle \sigma_0^* \left( 1 - D_1 \frac{T}{T_{melt}} \log \frac{\dot{\varepsilon}_{max}^{pl}}{\dot{\varepsilon}^{pl}} \right)^m \right\rangle$$

où  $\sigma_0^*$ ,  $D_1$  et  $m$  sont des paramètres matériau.

Enfin,  $E_0$  est le module de Young à  $T = 0K$  et  $E(T)$  est l'évolution du module de Young avec la température :

$$E(T) = E_0 \left[ 1 - \frac{T}{T_{melt}} \exp \left( \theta^* \left( 1 - \frac{T_{melt}}{T} \right) \right) \right]$$

où  $\theta^*$  est un paramètre matériau.

L'avantage principal de cette loi est d'être valable dans un spectre plus large de vitesses de déformation allant de l'emboutissage à la simulation du crash. De plus, cela permet d'avoir une modélisation plus précise du comportement de la structure, y compris des parties non soumises à de grandes vitesses de déformation, ce qui n'est pas le cas des lois présentées dans les sections 2.3.1 à 2.3.3. C'est ce qui est montré dans Rusinek et al. [233] où cette loi est comparée avec les modèles de Johnson-Cook, Cowper-Symonds et Zhao.

- Citons également, sans le détailler, le modèle de Bammann [14] utilisé notamment par Guo et al. [101] à 20 paramètres, valable dans un large spectre de vitesses de déformation et de températures.

- Terminons en présentant le modèle de Teodosiu [104] et étendu par Uenishi [262, 263]. Cette loi est extrêmement générale et prend en compte des facteurs tant macroscopiques que microscopiques. Elle tient également compte d'un possible écrouissage anisotrope (critère de Hill [113]) et d'un écrouissage cinématique que nous ne considérons pas ici (absence de phénomène charge-décharge). Elle introduit également une dépendance de la limite élastique vis-à-vis de l'évolution microscopique anisotrope du matériau via des variables internes  $\mathbf{S}$  (tenseur d'ordre 4) et  $\mathbf{P}$  (tenseur d'ordre 2) en plus des variables internes d'écrouissage classique  $R$  (évolution de la limite élastique) et des *backstresses*  $\mathbf{X}$ . La limite élastique étendue s'écrit :

$$\sigma_{crit} = Y_0 + R + f \|\mathbf{S}\|$$

où  $f$  est un paramètre matériau et  $Y_0$  est la limite élastique initiale. L'évolution de la variable d'écrouissage  $R$  se fait selon une loi à saturation :

$$\dot{R} = C_R (R_{sat} - R) \dot{\varepsilon}^{pl}$$

où  $C_R$  est un paramètre matériau et  $R_{sat}$  la valeur de saturation de la limite élastique  $R$ . Dans le modèle original,  $Y_0$  et  $R_{sat}$  sont considérés comme des paramètres matériau. Uenishi [262, 263] les fait dépendre de la vitesse de déformation pour prendre en compte l'influence de celle-ci sur la contrainte effective (dans le cas de  $Y_0$ ) et sur le retard dans la formation des dislocations (dans le cas de  $R_{sat}$ ). D'autre part,  $Y_0$  est donné par :

$$Y_0 = \hat{Y}_0 + Y_0^* \left( 1 - \frac{kT}{\Delta F_0} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_0^*}{\dot{\varepsilon}^{pl}} \right)^2$$

où  $\hat{Y}_0$ ,  $Y_0^*$ ,  $\Delta F_0$  et  $\dot{\varepsilon}_0^*$  sont de nouveaux paramètres matériau et  $k$  est la constante de Boltzmann. D'autre part, la valeur de saturation de la limite élastique  $R_{sat}$  a pour expression :

$$R_{sat} = R_{sat,0} \left( \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^v$$

avec  $R_{sat,0}$  et  $v$  qui sont des paramètres matériau.

La loi d'évolution du tenseur de polarité  $\mathbf{P}$  est donnée par :

$$\dot{\mathbf{P}} = C_P (\mathbf{N} - \mathbf{P}) \dot{\varepsilon}^{pl} \quad ; \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{0}$$

où  $\mathbf{N} = \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\|\dot{\varepsilon}^{pl}\|}$  est la direction de la vitesse de déformation plastique et  $C_P$  est un paramètre matériau. Au début du processus, la polarité est nulle et tend, au cours de la déformation, vers la direction de vitesse de déformation plastique (microstructure entièrement polarisée).

Le terme  $f\mathbf{S}$  de la limite élastique est la contribution des dislocations distribuées au hasard dans la structure. Il se décompose en  $S_D = \mathbf{N} : \mathbf{S} : \mathbf{N}$  qui est la force des



structures de dislocation associées au système de glissements actifs et  $\mathbf{S}_L$  qui est la partie de  $\mathbf{S}$  associée au système de glissements latents. On a :

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{S} - S_D \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}$$

L'évolution des deux grandeurs  $S_D$  et  $\mathbf{S}_L$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{S}}_L &= -C_{SL} \left( \frac{\|\mathbf{S}_L\|}{S_{sat}} \right)^{n_L} \mathbf{S}_L \dot{\lambda} \\ \dot{S}_D &= C_{SD} g(S_{sat} - S_D) \dot{\lambda}\end{aligned}$$

où  $C_{SL}$ ,  $C_{SD}$ ,  $S_{sat}$  et  $n_L$  sont des paramètres matériau, et  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique. La valeur de  $g$  est donnée par :

$$g = \begin{cases} 1 - \frac{C_P}{C_{SD} + C_P} \left| \frac{S_D}{S_{sat}} - P_D \right| & \text{si } P_D \geq 0 \\ (1 + P_D)^{n_P} \left( 1 - \frac{C_P}{C_{SD} + C_P} \frac{S_D}{S_{sat}} \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $n_P$  est un paramètre matériau et  $P_D = \mathbf{P} : \mathbf{N}$ . Ce paramètre permet de rendre compte des effets de prédéformation du matériau.

Pour une description détaillée de ce modèle et une interprétation physique de chaque terme, le lecteur se reportera à Haddadi et al. [104] et à Uenishi [262].

Tous ces modèles constitutifs ont montré des applications intéressantes, mais ont généralement été identifiés pour un petit nombre de matériaux, au contraire des lois présentées aux paragraphes 2.3.1 à 2.3.3. De plus, elles peuvent nécessiter l'identification de nombreux paramètres matériau comme la loi de Teodosiu.

## 2.4 Intégration temporelle des lois constitutives

### 2.4.1 Introduction

Pour l'intégration numérique des lois constitutives thermomécaniques du type de celles décrites dans la section 2.3, nous utilisons la méthode la plus générale possible. De plus, nous considérons que toutes les lois d'évolution de la limite élastique peuvent dépendre de la température, que ce soit via une dépendance explicite, comme pour les lois de Johnson-Cook et Zerilli-Armstrong, ou via une dépendance implicite au travers d'une variation des paramètres matériau avec la température (voir par exemple l'application 4.3). C'est pourquoi une formulation étendue (prenant en compte les variations des paramètres matériau avec la température) est utilisée pour l'intégration des lois constitutives.

Dans ce travail, nous nous plaçons dans le cadre de la formulation hypoélastique des matériaux en grandes déformations. Nous supposons également un écrouissage isotrope et

un critère de plasticité de type Von Mises. L'écroûissage cinématique est négligé, ce qui est justifié par le fait que nous ne considérons pas ici de cas où ont lieu des phénomènes de chargement et déchargement (au contraire des situations rencontrées dans les problèmes de mise à forme).

Nous rappelons ici les grands principes et les points importants de la formulation thermomécanique des matériaux élasto-viscoplastiques. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à Adam [2] ou Ponthot [217, 218].

### 2.4.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

Rappelons brièvement la forme semi-discrétisée<sup>1</sup> des équations de conservation de la quantité de mouvement (voir Ponthot [217, 218]) à tout instant  $t$  :

$$\vec{F}^{inert,mec} + \vec{F}^{int,mec} = \vec{F}^{ext,mec} \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

où  $\vec{F}^{inert,mec}$ ,  $\vec{F}^{int,mec}$  et  $\vec{F}^{ext,mec}$  sont respectivement les vecteurs nodaux des forces d'inertie, des forces internes et des forces externes. Ces forces nodales s'écrivent, dans l'espace isoparamétrique :

$$\begin{aligned} \vec{F}^{inert,mec} &= \left( \int_{V^{iso}} \rho \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi}^T J^{iso} dV^{iso} \right) \cdot \vec{a} \\ \vec{F}^{int,mec} &= \int_{V^{iso}} \mathbf{B}^T \cdot \vec{\sigma} J^{iso} dV^{iso} \\ \vec{F}^{ext,mec} &= \int_{V^{iso}} \rho \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \vec{b} J^{iso} dV^{iso} + \int_{S^{iso}} \rho \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \vec{t} J^{iso} dS^{iso} \end{aligned}$$

où :

- $V^{iso}$  est le volume de l'élément dans l'espace isoparamétrique,
- $J^{iso}$  est le jacobien de la transformation permettant de passer de l'espace réel à l'espace isoparamétrique,
- $\rho$  est la masse volumique du matériau,
- $\boldsymbol{\varphi}$  est la matrice des fonctions de forme (indépendantes du temps dans l'espace isoparamétrique),
- $\mathbf{B}$  est la matrice des dérivées spatiales des fonctions de forme,
- $\vec{a}$  est le vecteur des accélérations nodales,
- $\vec{\sigma}$  est le vecteur des contraintes aux points de Gauss,
- $\vec{b}$  est le vecteur des forces externes (forces de volume, forces de contact...),
- $\vec{t}$  est le vecteur des tractions de surface.

La résolution itérative -via un algorithme de Newton-Raphson- de l'équation d'équilibre des forces internes, externes (tractions de surface, forces de contact ou déplacements imposés) et d'inertie (voir section 3.2) passe par le calcul de la matrice de raideur tangente  $\mathbf{K}$

<sup>1</sup>i.e. discrétisée dans l'espace, mais pas dans le temps.

qui est la matrice des dérivées des forces internes  $\vec{F}^{int,mec}$  par rapport aux valeurs nodales du champ de déplacement discrétisé  $\vec{x}$ . Cette dérivée s'exprime formellement sous la forme suivante :

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \vec{F}^{int,mec}}{\partial \vec{x}} = \underbrace{\int_{V^{iso}} \frac{\partial (\mathbf{B}^T J^{iso})}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{\sigma} dV^{iso}}_{\text{Partie géométrique}} + \underbrace{\int_{V^{iso}} \mathbf{B}^T \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \vec{x}} J^{iso} dV^{iso}}_{\text{Partie matérielle}} \quad (2.21)$$

La partie géométrique de la matrice de raideur ne dépend que de la nature des éléments finis et des fonctions de forme utilisées. C'est donc une formulation assez générale dont l'expression analytique a déjà été établie (voir Ponthot [217]). La partie matérielle de la matrice de raideur dépend quant à elle de l'expression de la loi constitutive choisie pour la modélisation de l'évolution du comportement viscoplastique du matériau, et du schéma d'intégration utilisé pour calculer cette évolution. Nous proposons ici une méthode générale thermomécanique d'intégration des lois constitutives thermo-élasto-viscoplastiques. Nous calculons également l'expression de la matrice de raideur tangente matérielle de la façon la plus générale possible, sans tenir compte de la forme particulière de la loi d'évolution de la loi constitutive.

Rappelons que l'implémentation numérique des lois constitutives adaptées aux phénomènes rapides telles que décrites à la section 2.3 a été réalisée au sein du code éléments finis orienté objet Metafor<sup>1</sup>. L'avantage de ce type de programmation est la simplicité ultérieure lors de l'ajout de nouvelles lois d'érouissage. En effet, si la matrice de raideur tangente matérielle dépend de la forme de ces lois et de leur évolution, la formulation orientée objet permet d'implémenter de nouvelles lois sans se soucier de l'expression de ladite matrice de raideur, ni de la méthode utilisée pour intégrer numériquement ces lois.

### 2.4.3 Hypothèse hypoélastique

En petites déformations, la forme canonique d'une équation thermo-élasto-viscoplastique s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) \quad (2.22)$$

L'hypothèse de base des modèles matériau hypoélastiques en grandes transformations consiste en la décomposition additive du taux de déformation en une partie élastique  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el}$ , une partie viscoplastique  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$ , et une partie thermique  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}$  :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} \quad (2.23)$$

Le taux de variation des contraintes (qui doit être une quantité objective) est supposé proportionnel à la vitesse de déformation élastique. C'est pourquoi, pour calculer la vitesse d'évolution des contraintes, la loi de Hooke doit être appliquée sur les déformations

<sup>1</sup><http://www.ltas-mnl.ulg.ac.be/dokuwiki/doku.php?id=metafor:start>

élastiques uniquement<sup>1</sup> :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \overset{\nabla}{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}) + \overset{\nabla}{\mathbf{C}} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) \quad (2.24)$$

où nous faisons l'hypothèse que la variation des paramètres élastiques est seulement fonction de la température  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(T)$  et où le symbole  $\overset{\nabla}{\cdot}$  dénote une dérivée objective de la grandeur  $\overset{\nabla}{a}$ .

En prenant le soin d'introduire une dérivée objective adéquate à l'utilisation de cette dernière équation dans une analyse de solides métalliques soumis à de grandes déformations (voir entre autres Adam [2] ou Ponthot [217, 218]<sup>2</sup>), et en exprimant toutes les grandeurs intervenant dans un système d'axes corotationnels où les dérivées objectives se réduisent à de simples dérivées temporelles (voir Ponthot [217, 218]), il vient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^c = \mathbf{C}^c : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp,c} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th,c}) + \dot{\mathbf{C}}^c : (\boldsymbol{\varepsilon}^c - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp,c} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th,c}) \quad (2.25)$$

où l'exposant  $c$  désigne une dérivée corotationnelle. Dans le cadre d'un tenseur d'élasticité de Hooke isotrope, le tenseur dans l'espace corotationnel est identique à celui dans l'espace réel, soit  $\mathbf{C}^c = \mathbf{C}$ . Cette dernière remarque étant posée, l'exposant  $c$  sera dorénavant sous-entendu et toutes les grandeurs considérées seront décrites dans cet espace corotationnel.

#### 2.4.4 Définition du critère de plasticité

Le comportement plastique du solide est régi par une fonction  $f$  permettant de déterminer si l'état actuel d'un point matériel est élastique ou plastique. Cette fonction évolue au travers des variables d'hérédité<sup>3</sup>. Elle prend la forme générique suivante :

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}, \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pl}, T) \quad (2.26)$$

La valeur du critère permet de définir le comportement du matériau :

- si  $f < 0$  le matériau est dans un état élastique ;
- si  $f = 0$  le matériau est dans un état plastique ;
- si  $f > 0$  le comportement est non physique (zone interdite).

La fonction peut être vue comme la différence entre deux grandeurs<sup>4</sup> :

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_{crit} = \sigma_{eq} - (\sigma_{yield} + \sigma_{visq}) \quad (2.27)$$

<sup>1</sup>Pour le détail de l'établissement de la relation (2.24), voir Adam [2].

<sup>2</sup>Nous utilisons ici la dérivée de Jaumann.

<sup>3</sup>Comme précisé dans le paragraphe 2.4.1, nous ne considérons ici que l'écroutissage isotrope. L'écroutissage cinématique est négligé. Dans le cadre de problèmes d'impact, cette approximation est justifiée par l'absence de phénomènes de chargement et déchargement. La seule variable d'hérédité pertinente est donc ici la déformation viscoplastique équivalente  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$ .

<sup>4</sup>Notons que nous n'utilisons pas le critère de Von Mises original, mais bien le critère étendu de Ponthot [217, 218]. Ponthot [217] et Adam [2] utilisent également un critère de plasticité étendu, mais ils ne l'appliquent qu'à une loi de viscosité de type Perzyna. Nous généralisons ce critère à toutes les lois de viscoplasticité dont la limite élastique peut se décomposer en une partie plastique fonction de la déformation plastique équivalente et une partie visqueuse fonction de la déformation plastique équivalente et de la vitesse de déformation plastique équivalente.

où

- $\sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S} : \mathbf{S}}$  est une représentation scalaire de l'état de contraintes du matériau (ici la contrainte équivalente de Von Mises ( $J_2(\boldsymbol{\sigma})$ ), où  $\mathbf{S}$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ ).
- $\sigma_{crit}$  est la borne supérieure de la contrainte équivalente. Selon le modèle, elle est composée de<sup>1</sup> :
  - $\sigma_{yield}$ , la limite d'élasticité, mise à jour en fonction de l'écroutissage isotrope, et son évolution  $h_{yield} = \frac{d\sigma_{yield}}{d\bar{\varepsilon}^{pl}}$  ;
  - $\sigma_{visq}$ , la contrainte visqueuse (effet de la vitesse de déformation); et son évolution  $h_{visq} = \frac{d\sigma_{visq}}{d\bar{\varepsilon}^{pl}}$ .

Notons que les expressions  $\sigma_{yield}$  et  $\sigma_{visq}$  peuvent dépendre explicitement ou implicitement (via une dépendance des paramètres matériau) de la température. Ainsi, pour la loi de Johnson-Cook (2.5), on a pour  $\sigma_{yield}$  et  $\sigma_{visq}$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{yield} &= (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) (1 - T^{*m}) \\ \sigma_{visq} &= (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) (1 - T^{*m}) C \ln \dot{\bar{\varepsilon}}^{*pl}\end{aligned}$$

et il vient pour  $h_{yield}$  et  $h_{visq}$  :

$$\begin{aligned}h_{yield} &= n B (\bar{\varepsilon}^{pl})^{n-1} (1 - T^{*m}) \\ h_{visq} &= C (1 - T^{*m}) \left[ n B (\bar{\varepsilon}^{pl})^{n-1} \ln \dot{\bar{\varepsilon}}^{*pl} + \frac{1}{\Delta t \dot{\bar{\varepsilon}}^{*pl}} (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \right]\end{aligned}$$

De la même façon, des relations analogues pour les lois de Zerilli-Armstrong et Cowper-Symonds présentées dans les sections 2.3.2 et 2.3.3 peuvent être établies.

### 2.4.5 Intégration des lois constitutives

Nous ne présentons ici que les résultats. Pour plus de détails concernant l'établissement des expressions ci-après, nous renvoyons le lecteur à l'annexe A.1.

L'intégration des lois constitutives se fait en décomposant le tenseur des contraintes et sa variation temporelle en leurs parties volumique ( $p$  et  $\dot{p}$ ) et déviatorique ( $\mathbf{S}$  et  $\dot{\mathbf{S}}$ ). Il vient par la loi de Hooke (2.24) et par l'expression (A.1) du tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}$  :

$$\dot{p} = \frac{1}{3} tr(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = K tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el}) + \dot{K} tr(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}) \quad (2.28)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{p}\mathbf{I} = 2G\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + 2\dot{G}\boldsymbol{\varepsilon}^{el} \quad (2.29)$$

où  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  et  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  sont respectivement les modules de compressibilité cubique et de cisaillement du matériau.

L'intégration de ces deux expressions par la méthode du retour radial fournit le tenseur des contraintes à l'instant 1 à partir des valeurs à l'instant initial<sup>2</sup>. De plus, nous utili-

<sup>1</sup>Cela suppose une décomposition additive de la limite élastique.

<sup>2</sup>Les indices 0 et 1 sont de simples indicateurs de début et de fin d'intervalle temporel  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ .

sons une méthode implicite pour la mise à jour des paramètres  $G$  et  $K$  en fonction de la température. Il vient :

$$\mathbf{S}_1 = \frac{\mathbf{S}_0 + 2G_1\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G_1\Gamma\mathbf{N}_1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} = \frac{\mathbf{S}^{el} - 2G_1\Gamma\mathbf{N}_1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} \quad (2.30)$$

$$p_1 = \frac{p_0 + K_1(\Delta tr(\boldsymbol{\varepsilon}) - 3\alpha\Delta T)}{1 - \frac{\Delta K}{K_1}} \quad (2.31)$$

où le prédicteur élastique  $\mathbf{S}^{el}$  est défini par :

$$\mathbf{S}^{el} = \mathbf{S}_0 + 2G_1\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.32)$$

La variation des paramètres élastiques  $K$  et  $G$  est donnée par :

$$\Delta G = G_1 - G_0; \Delta K = K_1 - K_0 \quad (2.33)$$

$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  est la variation du tenseur des déformations naturelles énergétiquement associé au tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .

La normale à la surface de plasticité  $\mathbf{N}$  est donnée par l'expression suivante (voir annexe A.1) :

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}} = \frac{\mathbf{S}^{el}}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}} \quad (2.34)$$

Si  $\Gamma$  est l'incrément de déformation plastique équivalente entre l'instant 0 et l'instant 1, il vient d'une part :

$$\Gamma = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 \dot{\lambda} dt \quad (2.35)$$

et d'autre part :

$$\bar{\varepsilon}_1^{pl} = \bar{\varepsilon}_0^{pl} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Gamma \quad (2.36)$$

L'expression de  $\Gamma$  est obtenue par un schéma prédicteur-correcteur de Newton-Raphson à l'aide du critère de plasticité (2.26) (voir annexe A.1.5).

## 2.4.6 Matrice de raideur tangente analytique

### 2.4.6.1 Définitions

La partie de la matrice de raideur qui nous intéresse ici permet d'évaluer l'influence de la variation du tenseur des déformations sur le tenseur des contraintes<sup>1</sup> :

$$\mathbf{H} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.37)$$

---

<sup>1</sup>Nous ne considérons pas ici la partie géométrique de la matrice de raideur tangente.

Étant donné la séparation en termes volumique et déviatorique des contraintes, la matrice de raideur tangente  $\mathbf{H}$  peut également se décomposer en un terme volumique  $\mathbf{H}^{vol}$  et déviatorique  $\mathbf{H}^{dev}$  :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{vol} + \mathbf{H}^{dev} \quad (2.38)$$

$$= \frac{d(p\mathbf{I})}{d\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{d\mathbf{S}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.39)$$

#### 2.4.6.2 Terme volumique $\mathbf{H}^{vol}$

A l'aide de l'expression (2.31), il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{vol} &= \mathbf{I} \otimes \frac{dp}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \mathbf{I} \otimes \frac{d}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \left( \frac{p_0 + K_1 (\Delta tr(\boldsymbol{\varepsilon}) - 3\alpha\Delta T)}{1 - \frac{\Delta K}{K_1}} \right) \\ &= \frac{K_1}{1 - \frac{\Delta K}{K_1}} \mathbf{I} \otimes \frac{d\Delta tr(\boldsymbol{\varepsilon})}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned}$$

Et finalement :

$$\boxed{H_{ijkl}^{vol} = K^* \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}} \quad (2.40)$$

où  $K^*$  est défini par :

$$\boxed{K^* = \frac{K_1}{1 - \frac{\Delta K}{K_1}}} \quad (2.41)$$

#### 2.4.6.3 Terme déviatorique $\mathbf{H}^{dev}$

Pour obtenir le terme déviatorique  $\mathbf{H}^{dev}$ , il faut dériver l'expression du tenseur des contraintes déviatoriques (2.30) doit être dérivé par rapport au tenseur des déformations :

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = 2G^* \frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G^* \mathbf{N} \otimes \frac{d\Gamma}{d\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G^* \Gamma \frac{d\mathbf{N}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.42)$$

où  $G^*$  est défini par :

$$\boxed{G^* = \frac{G_1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}}} \quad (2.43)$$

Le premier terme s'écrit :

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\Delta} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (2.44)$$

où le tenseur  $\boldsymbol{\Delta}$  est défini par :

$$\boxed{\Delta_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})} \quad (2.45)$$

Ensuite, la variation de  $\Gamma$  s'écrit :

$$\frac{d\Gamma}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\mathbf{N}}{\kappa} \quad (2.46)$$

où  $\kappa$  est défini par :

$$\boxed{\kappa = 1 + \frac{1}{3G^*} (h_{yield} + h_{visq})} \quad (2.47)$$

Enfin, la variation de  $\mathbf{N}$  s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{N}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{2G \left( \frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right)}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}} \quad (2.48)$$

Les détails de l'établissement des relations (2.46) et (2.48) sont décrites dans l'annexe A.2.

Il vient donc pour l'expression de  $\frac{d\mathbf{S}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} &= 2G^* \frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G^* \mathbf{N} \otimes \frac{\mathbf{N}}{\kappa} - 2G^* \Gamma \frac{2G \left( \frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right)}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}} \\ &= 2G^* \frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \left( 1 - \frac{2G\Gamma}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}} \right) - 2G^* \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{2G\Gamma}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}} \right) \end{aligned}$$

En posant :

$$\boxed{\beta = 1 - \frac{2G\Gamma}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}}} \quad (2.49)$$

Il vient :

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = 2G^* \beta \frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G^* \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \left( \frac{1}{\kappa} + (\beta - 1) \right) \quad (2.50)$$

En introduisant l'expression (2.44) dans cette dernière expression, il vient pour l'expression finale de la partie déviatorique de la matrice de raideur :

$$\boxed{\mathbf{H}^{dev} = 2G^* \beta \left( \boldsymbol{\Delta} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) - 2G^* \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \left( \frac{1}{\kappa} + (\beta - 1) \right)} \quad (2.51)$$

#### 2.4.6.4 Analyse

Les expressions (2.40) et (2.51) sont tout à fait générales et sont indépendantes de la forme de la loi d'évolution de la limite élastique, pourvu que celle-ci se décompose en une partie non visqueuse  $\sigma_{yield}$  et une partie visqueuse  $\sigma_{visq}$ . L'expression de la loi d'évolution de la limite élastique apparaît dans l'expression de  $\kappa$  (2.47) via les expressions de  $h_{yield}$  et  $h_{visq}$ . Ainsi, lors de l'implémentation d'une nouvelle loi constitutive dans Metafor, il faut simplement introduire quatre fonctions calculant la limite élastique  $\sigma_{yield}$ , la contrainte visqueuse  $\sigma_{visq}$ , ainsi que leur dérivée par rapport à  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$ . Cette facilité d'implémentation est encore facilitée par l'utilisation d'un code de type orienté objet qui permet de séparer totalement l'intégration des lois constitutives et le calcul de la matrice de raideur tangente de l'évolution de la limite élastique.



## 2.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons décrit les principales lois de comportement thermo-élasto-viscoplastiques pour la modélisation des phénomènes à dynamique rapide. Nous avons également proposé une méthode générale d'intégration de ces lois constitutives et de calcul de la matrice de raideur tangente. Cette méthode d'intégration s'applique sans distinction à toutes les lois constitutives décrites dans le présent chapitre. Nous avons mis l'accent sur la possibilité d'inclure de nouveaux modèles sans devoir modifier la formulation proposée, que ce soit pour la technique d'intégration, ou le calcul de la matrice de raideur tangente.

Au chapitre suivant, nous allons décrire les algorithmes d'intégration temporelle des équations du mouvement dans lesquelles s'inscrivent ces modèles de comportement des matériaux. Comme les lois constitutives sont dépendantes de la vitesse de déformation et de la température, il est impératif de choisir des algorithmes prenant en compte ces deux facteurs.



# Chapitre 3

## Algorithmes d'intégration temporelle des équations de conservation de la quantité de mouvement

### 3.1 Introduction

La simulation de phénomènes à dynamique rapide implique de tenir compte de deux effets. Tout d'abord, les termes d'inertie mécanique : si ceux-ci peuvent généralement être négligés dans les problèmes de mise à forme, ils deviennent significatifs, voire primordiaux pour des phénomènes rapides. Le second effet est l'adoucissement thermique dû à l'élévation de température résultant des déformations plastiques. Pour des phénomènes lents, ils peuvent être négligés car la chaleur générée est évacuée par conduction et échangée avec l'environnement extérieur sans avoir d'effet significatif sur les propriétés mécaniques des matériaux considérés, ni sur l'environnement. Dans le cadre de processus rapides, la chaleur générée par unité de temps est plus importante et se concentre dans les zones de contraintes élevées et de grandes vitesses de déformation. Dans l'intervalle de temps considéré, la conduction et l'échange avec le milieu extérieur sont généralement négligés.

L'utilisation de méthodes explicites pour la résolution de problèmes thermomécaniques dynamiques s'avère intéressante par sa simplicité d'implémentation et un coût mémoire faible. Mais ces schémas peuvent s'avérer plus coûteux en termes de temps de calcul car ils deviennent instables lorsque le pas de temps augmente. De plus, si la limite de stabilité dans le cas purement mécanique est proportionnelle à la taille des mailles, la limite de stabilité liée à la résolution du problème thermique est proportionnelle au carré de la taille des mailles, ce qui peut s'avérer très pénalisant dans le cas de maillages très fins. Pour plus de détails concernant les algorithmes explicites (précision, stabilité, dissipation,...), le lecteur intéressé consultera Noels [195].

Les méthodes implicites peuvent être plus efficaces en termes de coût CPU car elles sont inconditionnellement stables (au moins dans le cas linéaire) et des pas de temps plus

grands peuvent donc être utilisés, y compris dans le cadre non linéaire. Mais ces algorithmes sont plus difficiles à implémenter et requièrent plus de mémoire : une matrice de raideur tangente doit être calculée, stockée et inversée à chaque itération de chaque pas de temps. De plus, un des problèmes dans le calcul de cette matrice est également de garantir la robustesse et la convergence du processus de Newton-Raphson. Nous nous focalisons dans ce chapitre sur l'utilisation de ces méthodes implicites.

Dans ce travail, le problème thermomécanique couplé est résolu grâce à une méthode séquentielle qui décompose le problème en un ensemble de sous-problèmes, ici le problème mécanique d'une part, et le problème thermique d'autre part. La méthode de résolution utilisée dans ce travail est basée sur un schéma thermomécanique implicite de type étagé proposée par Simo et Miehe [247] et étendue dans Adam [2].

Le schéma de résolution étagé a pour but de fractionner l'opérateur thermomécanique. Il sépare, dans un cadre tel que celui de la méthode des éléments finis, les inconnues mécaniques (positions nodales) des inconnues thermiques (températures nodales), permettant ainsi la réduction de la taille du système couplé (voir section 3.4). Dans ce type de schéma thermomécanique, nous choisissons de résoudre d'abord le problème mécanique, puis le problème thermique. Au vu du type d'applications envisagées, ce choix est logique dans la mesure où la chaleur est essentiellement générée par la dissipation plastique dans la structure. Une fois le problème mécanique résolu, le problème thermique est résolu pour évaluer l'élévation de température due aux changements mécaniques. Dans le cadre de ce travail, nous nous inscrivons dans la continuité des algorithmes développés dans Adam [2] que nous nous proposons d'étendre aux problèmes dynamiques.

La section 3.2 présente les algorithmes d'intégration temporelle utilisés dans ce travail. Nous avons choisi d'utiliser la famille des algorithmes  $\alpha$ -généralisés. La section 3.3 décrit quant à elle les algorithmes utilisés pour résoudre l'équation de la chaleur. Dans la section 3.4, nous montrons l'algorithme de couplage entre les algorithmes d'intégration mécanique et thermique par le principe du schéma étagé. Les paramètres numériques des différents schémas, permettant d'obtenir un schéma mécanique ou thermique inconditionnellement stable, sont également présentés. Notons que l'utilisation d'algorithmes étagés combinant de façon générale la famille des algorithmes  $\alpha$ -généralisés constitue une contribution originale de ce travail.

## 3.2 Résolution du problème mécanique : la famille des algorithmes $\alpha$ -généralisés

Les algorithmes choisis pour résoudre le problème mécanique sont les algorithmes de la famille de Newmark [192]. A partir d'un instant  $t_n$  où tout est connu, nous cherchons à déterminer les nouvelles positions, vitesses, accélérations, contraintes et variables d'héritage à l'instant suivant  $t_{n+1}$ . Dans la logique des schémas étagés, on supposera également connues les températures en  $t_{n+1}$ , soit  $T_{n+1}$  sont également connues.

Le principe de l'intégration temporelle par l'algorithme de Newmark est brièvement rappelé ici. Pour plus de détails, le lecteur se reportera, entre autres, à Noels [195] ou Gérardin [99]. L'équation d'équilibre mécanique semi-discrétisée, devant être vérifiée à chaque instant  $t$ , s'écrit<sup>1</sup> :

$$\vec{F}^{inert} + \vec{F}^{int} = \vec{F}^{ext} \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (3.1)$$

ou encore :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{x}} = \vec{F}^{ext} - \vec{F}^{int} \quad (3.2)$$

Dans le cas d'un algorithme quasi-statique, l'équation d'équilibre s'écrit simplement :

$$\vec{F}^{int} = \vec{F}^{ext}$$

Pour intégrer temporellement l'équation (3.1), la famille des algorithmes  $\alpha$ -généralisés est utilisée dans ce travail (cf. Noels [195] ou Ponthot [217]) : l'équation d'équilibre (3.1) est réécrite en pondérant les forces d'inertie aux temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$  par un paramètre  $\alpha_M$ , et les forces internes et externes par un paramètre  $\alpha_F$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_M) \vec{F}_{n+1}^{inert} + \alpha_M \vec{F}_n^{inert} + (1 - \alpha_F) \vec{F}_{n+1}^{int} + \alpha_F \vec{F}_n^{int} \\ = (1 - \alpha_F) \vec{F}_{n+1}^{ext} + \alpha_F \vec{F}_n^{ext} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Les valeurs particulières des paramètres de pondération  $\alpha_M$  et  $\alpha_F$  conduisent à :

- $\alpha_M = \alpha_F = 0$  : schéma de Newmark (pas de pondération des forces) ;
- $\alpha_M = 0$  : schéma de Hilber-Hughes-Taylor (HHT, voir Hilber et al. [112]) (pondération des forces internes et externes) ;
- $\alpha_M \neq 0, \alpha_F \neq 0$  : schéma de Chung-Hulbert (CH, voir Hulbert et Chung [51]) ou  $\alpha$ -généralisé ;
- $\alpha_F = 0$  : schéma de Wood-Bossak-Zienkiewicz (WBZ, voir Wood et al. [275]) (pondération des termes d'inertie).

Les relations entre les déplacements  $\vec{x}$ , vitesses  $\dot{\vec{x}}$  et accélérations  $\ddot{\vec{x}}$  sont données par les relations de Newmark :

$$\begin{aligned} \vec{x}_{n+1} &= \vec{x}_n + \Delta t \dot{\vec{x}}_n + \Delta t^2 \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\vec{x}}_n + \beta \ddot{\vec{x}}_{n+1} \right) \\ \dot{\vec{x}}_{n+1} &= \dot{\vec{x}}_n + \Delta t \left( (1 - \gamma) \ddot{\vec{x}}_n + \gamma \ddot{\vec{x}}_{n+1} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $\beta$  et  $\gamma$  sont les paramètres du schéma de Newmark. Les valeurs de ces paramètres sont généralement  $\beta = 0.25$  et  $\gamma = 0.5$ , pour obtenir une précision du schéma au second ordre par rapport au pas de temps (voir Noels [195]).

---

<sup>1</sup>Dans cette section, par souci de clarté d'écriture, nous omettons l'indication "mec". En effet, nous ne considérons que la résolution mécanique du problème.

La résolution du système d'équations (3.3, 3.4) est effectuée à l'aide d'un schéma itératif prédictor-correcteur de type Newton-Raphson. Le prédictor du pas de temps  $n + 1$  (itération 0) est donné en choisissant  $\vec{x}_{n+1}^{(0)} = \vec{0}$  (choix classique qui conduit à une bonne robustesse du schéma). Il vient donc pour le prédictor en utilisant (3.4) :

$$\begin{aligned}\vec{x}_{n+1}^{(0)} &= \vec{x}_n + \Delta t \dot{\vec{x}}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{\vec{x}}_n \\ \dot{\vec{x}}_{n+1}^{(0)} &= \dot{\vec{x}}_n + (1 - \gamma) \ddot{\vec{x}}_n \\ \ddot{\vec{x}}_{n+1}^{(0)} &= \vec{0}\end{aligned}\tag{3.5}$$

A l'itération  $i$ , le résidu de l'équation d'équilibre (3.3) est donné par :

$$\Delta \vec{F}^{(i)} = (1 - \alpha_M) \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{x}}_{n+1}^{(i)} + \alpha_M \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{x}}_n + (1 - \alpha_F) \left( \vec{F}_{n+1}^{int,(i)} - \vec{F}_{n+1}^{ext,(i)} \right) + \alpha_F \left( \vec{F}_n^{int} - \vec{F}_n^{ext} \right)\tag{3.6}$$

A l'aide des expressions (3.4), le correcteur à l'itération  $i + 1$  dans la configuration  $n + 1$  s'écrit en développant l'expression (3.6) en série de Taylor au premier ordre :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^{(i)} \cdot \Delta \vec{x}^{(i+1)} &= -\Delta \vec{F}^{(i)} \\ \vec{x}_{n+1}^{(i+1)} &= \vec{x}_{n+1}^{(i)} + \Delta \vec{x}^{(i+1)} \\ \dot{\vec{x}}_{n+1}^{(i+1)} &= \dot{\vec{x}}_{n+1}^{(i)} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \vec{x}^{(i+1)} \\ \ddot{\vec{x}}_{n+1}^{(i+1)} &= \ddot{\vec{x}}_{n+1}^{(i)} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \vec{x}^{(i+1)}\end{aligned}\tag{3.7}$$

où  $\mathbf{S}$  est la matrice jacobienne tangente de taille  $nddl^{mec} \times nddl^{mec}$ , dont les composantes sont définies par :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^{\xi\mu} &= \frac{\partial \left[ (1 - \alpha_M) \mathbf{M}^{\xi\nu} \cdot \ddot{\vec{x}}_{n+1}^{\nu} + (1 - \alpha_F) \left( \vec{F}_{n+1}^{int,\xi} - \vec{F}_{n+1}^{ext,\xi} \right) \right]}{\partial \vec{x}^{n+1,\mu}} \\ &= (1 - \alpha_F) \mathbf{K}^{\xi\mu} + (1 - \alpha_M) \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}^{\xi\mu}\end{aligned}\tag{3.8}$$

où on a utilisé (3.4). La matrice de raideur tangente  $\mathbf{K}$  est définie par :

$$\mathbf{K}^{\xi\mu} = \frac{\partial \vec{F}_{n+1}^{int,\xi}}{\partial \vec{x}_{n+1}^{\mu}} - \frac{\partial \vec{F}_{n+1}^{ext,\xi}}{\partial \vec{x}_{n+1}^{\mu}}\tag{3.9}$$

Ce schéma prédictor-correcteur doit être appliqué itérativement jusqu'à obtenir un résidu nul à une tolérance près. Le critère d'arrêt du processus de Newton-Raphson est une expression scalaire adimensionnelle du résidu  $\Delta \vec{F}$ . Il y a arrêt lorsque :

$$\frac{\left\| \Delta \vec{F} \right\|}{\frac{nddl}{nrea} \left( \left\| \vec{F}^{ext} \right\| + \left\| \vec{F}^{int} \right\| \right)} < PREC^{mec}\tag{3.10}$$

où  $nddl$  est le nombre de degrés de liberté mécaniques et  $nrea$  est le nombre de réactions mécaniques ;  $PREC^{mec}$  est la précision choisie par l'utilisateur (de l'ordre de  $10^{-6}$ ). Notons que, dans le cas de problèmes comportant un grand nombre de degrés de liberté et soumis à des forces très faibles, la division par  $nddl$  peut entraîner des problèmes de convergence purement numériques. Dans ce cas, pour rendre le critère d'arrêt moins dépendant du maillage, nous réécrivons celui-ci sous la forme suivante :

$$\frac{\|\Delta \vec{F}\|}{\|\vec{F}^{ext}\| + \|\vec{F}^{int}\|} < PREC^{mec} \quad (3.11)$$

La stabilité inconditionnelle (indépendante de la taille du pas de temps) est assurée dans le cas linéaire pour (voir Noels [195]) :

- $\alpha_M \leq \alpha_F \leq 0.5$
- $\gamma \geq 0.5 - \alpha_M + \alpha_F$
- $\beta \geq 0.25 (0.5 + \gamma)^2$

La précision de ce type de schéma est également étudiée en détails dans Noels [195]. Retenons simplement que, dans le cadre non linéaire, la précision est du second ordre pour les déplacements par rapport au pas de temps, mais que la précision sur les accélérations n'est que du premier ordre par rapport au pas de temps (sauf pour le cas  $\alpha_F = \alpha_M = \frac{1}{2}$  où la précision est du second ordre).

### 3.3 Résolution du problème thermique

Le problème thermique consiste en la résolution de l'équation de la chaleur en chaque point :

$$\rho c \dot{T} = \underbrace{\rho r + \dot{W}^{irr} - \dot{W}^s + \dot{W}^{te}}_{\text{Sources}} - \underbrace{\text{div} \vec{q}}_{\text{Flux}} \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (3.12)$$

où  $\rho c$  est la capacité calorifique,  $\rho r$  donne la contribution des sources volumiques de chaleur,  $\dot{W}^{irr} = \sigma_{eq} \dot{\epsilon}^{pl}$  est la puissance dissipée en chaleur générée de manière irréversible par la viscoplasticité et  $\dot{W}^s$  est la puissance stockée dans le matériau pour l'évolution microstructurale. Elle est calculée comme une fraction de la puissance irréversible  $\dot{W}^{irr}$  :  $\dot{W}^s = (1 - \beta) \dot{W}^{irr}$ , où  $\beta$  est le facteur de Taylor-Quinney. Ce facteur est généralement de l'ordre de 0.9. Enfin,  $\dot{W}^{te}$  est la dissipation thermo-élastique et  $\vec{q}$  sont les flux de chaleur libres ou imposés.

La résolution du problème thermique semi-discrétisé s'écrit (voir Adam [2] pour une description détaillée)<sup>1</sup> :

$$\vec{F}^{inert} + \vec{F}^{int} = \vec{F}^{ext} \quad (3.13)$$

<sup>1</sup>Comme dans la section 3.2, par souci de clarté d'écriture, nous omettons l'indice "ther". En effet, nous ne considérons que la résolution du problème thermique.

où le terme  $\vec{F}^{int}$  comprend les termes de conduction, de sources volumiques de chaleur et de dissipation, tandis que le terme  $\vec{F}^{ext}$  inclut les termes de chargement thermique (flux, convection et température imposée). Les forces d'inertie thermiques sont définies par l'expression :

$$\vec{F}^{inert} = \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{T}} \quad (3.14)$$

où  $\mathbf{C}$  est la matrice de capacité thermique.

Deux algorithmes sont proposés pour la résolution du problème thermique : le schéma du trapèze généralisé (STG) et le schéma du point milieu généralisé (SMG) (voir Hogge [114, 115]). Ce sont des algorithmes d'intégration à un pas (c'est-à-dire qui couplent deux -et seulement deux- stations temporelles).

### 3.3.1 Schéma du trapèze généralisé

Le schéma du trapèze généralisé ou STG consiste à interpoler la variation de température entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  selon :

$$\dot{\vec{T}}_{n+\vartheta} = (1 - \vartheta) \dot{\vec{T}}_n + \vartheta \dot{\vec{T}}_{n+1} \quad (3.15)$$

où  $\vartheta \in [0, 1]$  est le paramètre du schéma. La discrétisation de la variation de température s'écrit quant à elle :

$$\dot{\vec{T}}_{n+\vartheta} = \frac{\vec{T}_{n+1} - \vec{T}_n}{\Delta t} \quad (3.16)$$

Le bilan thermique de l'équation d'équilibre (3.13) en  $t_{n+1}$  est donné, en remplaçant les forces d'inertie par leur expression (3.14), par :

$$\mathbf{C} \cdot \dot{\vec{T}}_{n+1} + \vec{F}_{n+1}^{int} - \vec{F}_{n+1}^{ext} = 0 \quad (3.17)$$

La variation de température à l'instant  $n + 1$  est déduite en incluant l'expression (3.15) dans l'expression (3.16) :

$$\dot{\vec{T}}_{n+1} = \frac{\vec{T}_{n+1} - \vec{T}_n - (1 - \vartheta) \Delta t \dot{\vec{T}}_n}{\vartheta \Delta t} \quad (3.18)$$

De façon analogue à la partie mécanique, le problème thermique défini par (3.17) est résolu par une méthode de Newton-Raphson selon un schéma prédicteur-correcteur à l'instant  $t_{n+1}$ . Le prédicteur à l'instant  $t_{n+1}$  (itération 0) est donné en choisissant une variation de température nulle en  $t_{n+1}$ , soit  $\dot{\vec{T}}_{n+1} = 0$ . Il vient donc pour le prédicteur de la température :

$$\vec{T}_{n+1}^{(0)} = \vec{T}_n + (1 - \vartheta) \Delta t \dot{\vec{T}}_n$$

Le résidu de l'équation d'équilibre s'écrit à l'itération  $i$  pour les deux schémas :

$$\Delta \vec{F}^{(i)} = \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{T}}_{n+1}^{(i)} + \vec{F}_{n+1}^{int,(i)} - \vec{F}_{n+1}^{ext,(i)} \quad (3.19)$$



L'incrément de température entre deux itérations est obtenu en développant l'expression (3.19) en série de Taylor au premier ordre, et par l'annulation du résidu à l'instant  $t_{n+1}$  :

$$\mathbf{S}^{(i)} \cdot \Delta \vec{T}^{(i+1)} = -\Delta \vec{F}^{(i)} \quad (3.20)$$

où  $\mathbf{S}$  est la matrice jacobienne tangente de dimension  $nddl^{ther} \times nddl^{ther}$  donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{\xi\mu} &= \frac{\partial \left[ \mathbf{C}^{\xi\nu} \cdot \dot{T}_{n+1}^\nu + \vec{F}_{n+1}^{int,\xi} - \vec{F}_{n+1}^{ext,\xi} \right]}{\partial \vec{T}_{n+1}^\mu} \\ &= \frac{\partial \mathbf{C}^{\xi\nu}}{\partial \vec{T}_{n+1}^\mu} \cdot \dot{T}_{n+1}^\nu + \frac{1}{\vartheta \Delta t} \mathbf{C}^{\xi\mu} + \frac{\partial \left[ \vec{F}_{n+1}^{int,\xi} - \vec{F}_{n+1}^{ext,\xi} \right]}{\partial \vec{T}_{n+1}^\mu} \\ &= \mathbf{K}^{\xi\mu} + \frac{1}{\vartheta \Delta t} \mathbf{C}^{\xi\mu} + \frac{\partial \mathbf{C}^{\xi\nu}}{\partial \vec{T}_{n+1}^\mu} \cdot \dot{T}_{n+1}^\nu \end{aligned} \quad (3.21)$$

où on a utilisé (3.18). La matrice de raideur tangente  $\mathbf{K}$  est définie par :

$$\mathbf{K}^{\xi\mu} = \frac{\partial \vec{F}_{n+1}^{int,\xi}}{\partial \vec{T}_{n+1}^\mu} - \frac{\partial \vec{F}_{n+1}^{ext,\xi}}{\partial \vec{T}_{n+1}^\mu} \quad (3.22)$$

La correction  $\Delta \vec{T}^{(i+1)}$ , solution de (3.20), fournit l'incrément de température à l'itération  $i + 1$  :

$$\vec{T}_{n+1}^{(i+1)} = \vec{T}_{n+1}^{(i)} + \Delta \vec{T}^{(i+1)} \quad (3.23)$$

En utilisant (3.18), la variation de température à l'itération  $i + 1$  est donnée par :

$$\dot{T}_{n+1}^{(i+1)} = \dot{T}_{n+1}^{(i)} + \frac{\Delta \vec{T}^{(i+1)}}{\vartheta \Delta t} \quad (3.24)$$

Comme pour le schéma mécanique, ce schéma prédictor-correcteur doit être effectué jusqu'à obtenir un résidu nul à une tolérance près. Le critère d'arrêt du processus de Newton-Raphson est une expression scalaire adimensionnelle du résidu  $\Delta \vec{F}$ . Il y a arrêt lorsque :

$$\frac{\left\| \Delta \vec{F} \right\|}{nddl \left( \left\| \vec{F}^{ext} \right\| + \left\| \vec{F}^{int} \right\| + \left\| \vec{F}^{inert} \right\| \right)} < PREC^{ther} \quad (3.25)$$

où  $nddl$  est le nombre de degrés de liberté thermiques et  $PREC^{ther}$  est la précision choisie par l'utilisateur (typiquement de l'ordre de  $10^{-6}$ ).

### 3.3.2 Schéma du point milieu généralisé

Le schéma du point milieu généralisé ou SMG consiste quant à lui à interpoler la température entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  selon :

$$\vec{T}_{n+\vartheta} = (1 - \vartheta)\vec{T}_n + \vartheta\vec{T}_{n+1} \quad (3.26)$$

où  $\vartheta \in [0, 1]$  est le paramètre du schéma. La discrétisation de la variation de température s'écrit quant à elle :

$$\dot{\vec{T}}_{n+\vartheta} = \frac{\vec{T}_{n+1} - \vec{T}_n}{\Delta t} \quad (3.27)$$

Le bilan thermique de l'équation d'équilibre s'écrit en  $t_{n+\vartheta}$  :

$$\mathbf{C} \cdot \dot{\vec{T}}_{n+\vartheta} + \vec{F}_{n+\vartheta}^{int} - \vec{F}_{n+\vartheta}^{ext} = 0 \quad (3.28)$$

La variation de température à l'instant  $n + \vartheta$  est déduite en incluant l'expression (3.26) dans l'expression (3.27) :

$$\dot{\vec{T}}_{n+\vartheta} = \frac{\vec{T}_{n+\vartheta} - \vec{T}_n}{\vartheta\Delta t} \quad (3.29)$$

Le problème thermique défini par (3.28) est résolu par une méthode de Newton-Raphson selon un schéma prédicteur-correcteur à l'instant  $t_{n+\vartheta}$ . Le prédicteur du pas de temps  $t_{n+\vartheta}$  (itération 0) est donné en choisissant pour la variation de température en  $t_{n+\vartheta}$ , la variation de température initiale :  $\dot{\vec{T}}_{n+\vartheta} = \dot{\vec{T}}_n$ . Il vient donc pour le prédicteur de la température :

$$\vec{T}_{n+\vartheta}^{(0)} = \vec{T}_n + \vartheta\Delta t\dot{\vec{T}}_n$$

La résolution se fait de façon tout à fait semblable au schéma STG, à condition de se rappeler que l'équation d'équilibre s'écrit au temps  $t_{n+\vartheta}$  et non  $t_{n+1}$ . Les résultats sont identiques pour l'expression de la matrice de raideur et la mise à jour de la température et de sa variation à chaque itération.

Une fois la précision (3.25) atteinte, la température à l'instant  $t_{n+1}$  par l'expression est donnée par :

$$\vec{T}_{n+1} = \vec{T}_n + \dot{\vec{T}}_{n+\vartheta}\Delta t$$

Le critère d'arrêt de ce schéma est identique à celui du schéma STG (expression (3.25)).

### 3.3.3 Précision et stabilité des schémas

Dans le cas linéaire, la précision de ces deux schémas est du premier ordre par rapport au pas de temps, sauf si  $\vartheta = \frac{1}{2}$  où la précision est alors du second ordre par rapport au pas de temps. Ils sont également inconditionnellement stables si  $\vartheta \geq \frac{1}{2}$ .

Dans le cas unidimensionnel explicite ( $\vartheta = 0$ ), la limite de stabilité est la suivante pour les deux schémas (voir Hogge [114]) :

$$\Delta t \leq \delta \frac{\overline{\rho c \Delta x}^2}{k} \quad (3.30)$$

où  $\rho$ ,  $c$  et  $k$  sont respectivement la masse volumique, la chaleur spécifique et la conductivité thermique du matériau ;  $\delta$  vaut  $\frac{1}{6}$  dans le cas où la matrice de capacité thermique  $\mathbf{C}$  est consistante et  $\frac{1}{2}$  dans le cas où elle est diagonalisée (voir Hogge [114]) ;  $\overline{\Delta x}$  est la taille du plus petit élément. Ainsi, plus le maillage spatial est raffiné, plus la limite de stabilité est faible, cette limite de stabilité diminuant comme le carré de la discrétisation spatiale. Cette condition de stabilité du schéma explicite est donc extrêmement contraignante, bien plus que dans le cas mécanique où la limite de stabilité est proportionnelle à la taille des éléments.

### 3.4 Algorithme thermomécanique

Comme annoncé dans l'introduction de ce chapitre, le problème thermomécanique couplé est résolu grâce à un schéma de type étagé consistant en la séparation entre les inconnues mécaniques (positions nodales) et les inconnues thermiques (températures nodales). L'avantage de cette méthode est double. Tout d'abord, le temps de calcul se trouve réduit : nous passons d'un système de  $(nddl^{mec} + nddl^{ther})$  équations à deux systèmes de taille  $nddl^{mec}$  et  $nddl^{ther}$ . De plus, ces deux systèmes peuvent être symétriques, ce qui réduit encore le temps nécessaire pour les inverser. Le second avantage est une plus grande simplicité dans l'évaluation analytique de la matrice de raideur tangente. En effet, le système couplé thermomécanique discrétisé s'écrit de manière générale :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\vec{x}} \\ \ddot{\vec{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vec{x}} \\ \dot{\vec{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{MM} & \mathbf{K}_{MT} \\ \mathbf{K}_{TM} & \mathbf{K}_{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g}_M \\ \vec{g}_T \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

où  $\mathbf{K}_{MM}$  et  $\mathbf{K}_{TT}$  sont les matrices de raideur mécanique et thermique définies par (3.9) et (3.22). Les matrices  $\mathbf{K}_{MT}$  et  $\mathbf{K}_{TM}$  représentent les termes de couplage (difficiles à évaluer analytiquement). Les termes  $\vec{g}_M$  et  $\vec{g}_T$  sont les vecteurs de charge mécanique et thermique.

L'idée du schéma de résolution séquentielle est de décomposer un problème couplé en un sous-problème mécanique suivi d'un sous-problème thermique. L'approche adoptée dans ce travail -schéma de résolution étagé- est celle proposée par Simo [247] et étendue dans Adam [2].

Deux types de schémas étagés sont possibles dans Metafor :

- le schéma étagé isotherme considère un fractionnement de l'opérateur thermomécanique en une phase mécanique à température constante, suivie d'une phase thermique à configuration (déplacements) fixée ;

- le schéma étagé adiabatique considère un fractionnement de l'opérateur thermomécanique en une phase mécanique à entropie constante suivie d'une phase thermique à configuration fixée.

La phase mécanique est résolue par un schéma  $\alpha$ -généralisé présenté au paragraphe 3.2, tandis que la phase thermique est résolue par un schéma SMG ou STG, présenté au paragraphe 3.3.

Cependant, ces schémas étagés peuvent devenir instables, notamment en cas de fort couplage thermomécanique. voir Adam [2] ou Armero et Simo [12] estiment la limite de stabilité du schéma étagé isotherme par l'expression  $\varepsilon^{cpl}$ , qui doit rester inférieure à 1 :

$$\varepsilon^{cpl} = \frac{9K^2\alpha^2T_{ref}}{\rho c \left(K + \frac{10G}{3}\right)} \leq 1$$

Dans le cas de métaux à température ambiante, les valeurs prises par ce paramètre sont de l'ordre de  $10^{-2}$  et il est donc tout à fait justifié d'utiliser un schéma étagé isotherme.

La nouveauté apportée par ce travail est l'introduction des forces d'inertie mécanique dans la résolution du problème couplé. Habituellement, un problème thermomécanique couplé tenant compte des effets d'inertie pour la partie mécanique est résolu par une méthode explicite, ce qui limite drastiquement la taille du pas de temps. La situation est même encore plus pénalisante dans le cas thermomécanique car il a été montré dans la section 3.3.3 que la limite de stabilité du schéma explicite thermique est proportionnelle au carré de la taille des mailles. Ainsi, si la taille des éléments est divisée par deux, la taille maximale du pas de temps est divisée par quatre. La solution habituellement adoptée dans les codes de calcul explicites consiste à ne prendre en compte ni les effets de conduction dans le matériau, ni les échanges avec le milieu extérieur dans la résolution de l'équation de la chaleur (3.12). L'élévation de température à l'intérieur du matériau est alors estimée par l'expression :

$$T_{n+1} = T_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\beta\sigma_{eq}\dot{\varepsilon}^{pl}}{\rho c} dt$$

L'avantage de l'utilisation du schéma thermomécanique étagé est que l'équation de la chaleur est résolue dans son intégralité et peut donc inclure d'éventuelles conditions aux limites thermiques (flux, température imposée).

La figure 3.1 présente le schéma de résolution proposé du problème thermomécanique couplé<sup>1</sup>. Il faut noter que la condition de convergence du problème mécanique peut être différente de celle du problème thermique. Le choix du type de schéma pour la résolution du problème thermique (STG ou SMG) est laissé au soin de l'utilisateur. Hogge [115] montre que le STG est supérieur au SMG, excepté dans les problèmes transitoires pour lesquels il existe des variations rapides des conditions aux limites.

---

<sup>1</sup>Les indications *mech* et *ther* dans les expressions des forces ont été omises pour alléger le schéma.

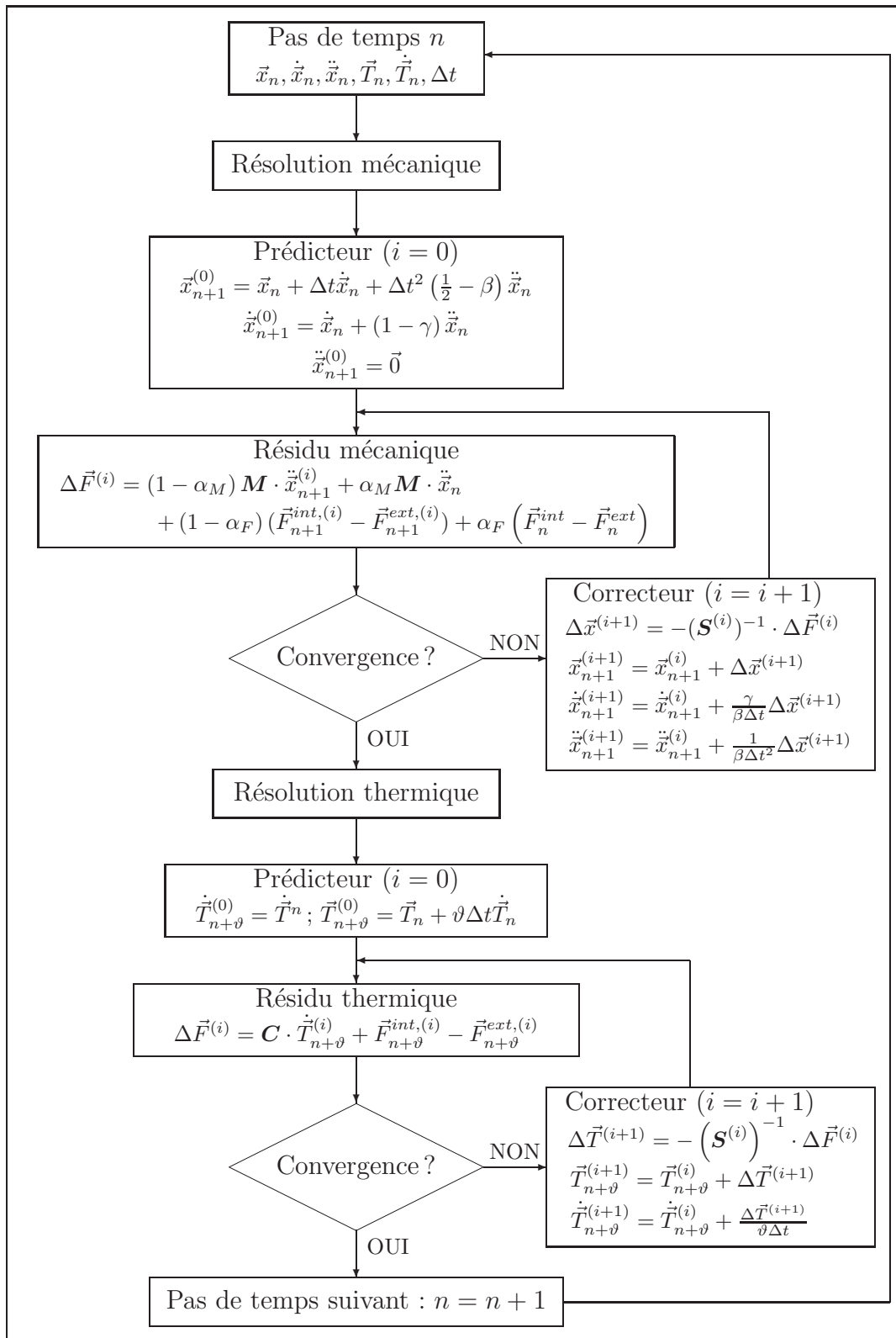


FIG. 3.1 – Principe du schéma de résolution étagé thermomécanique (Schéma SMG).

## 3.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les algorithmes d'intégration des équations du mouvement au sens large (déplacements et températures). Ces algorithmes d'intégration sont adaptés à la modélisation des phénomènes de dynamique rapide. Il est donc logique de coupler le comportement dynamique du matériau à des algorithmes thermomécaniques couplés tels que ceux présentés dans ce chapitre. Dans le chapitre 4, nous allons mettre en avant l'intérêt d'utiliser de tels algorithmes dans le cas d'applications standards, c'est-à-dire où l'endommagement n'est pas considéré.

Dans le cadre d'extension possible de la méthode proposée, il pourrait être intéressant d'étudier l'effet d'une boucle thermomécanique supplémentaire une fois le schéma étagé mécanique-thermique résolu : au sein du même pas de temps, une itération mécanique avec les nouvelles valeurs des températures (et donc éventuellement des paramètres matériau) serait effectuée, suivie d'une nouvelle résolution du problème thermique avec les nouvelles valeurs des contraintes et des déformations. Cette boucle supplémentaire aurait pour but d'augmenter la précision du schéma en garantissant une solution plus proche de l'équilibre.

# Chapitre 4

## Applications première partie

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques applications standards de validation des modèles constitutifs présentés au chapitre 2 et des algorithmes d'intégration temporelle présentés au chapitre 3. Ces applications ont pour but de vérifier la bonne implémentation des lois de comportement des matériaux ainsi que celle des schémas de résolution thermomécaniques étagés, proposée à la section 3.4. Les résultats ainsi obtenus sont comparés avec des résultats de la littérature et expérimentaux.

Les différents effets dynamiques sont quantifiés : les effets viscoplastiques, les effets thermiques, l'influence du choix d'un algorithme dynamique ou quasi-statique... Nous verrons que ces effets ne sont pas négligeables pour les problèmes qui nous concernent et qu'il est donc important de les prendre en considération.

D'un point de vue numérique, nous comparons l'efficacité, en termes de temps de calcul, des algorithmes proposés. Nous quantifions également l'influence, au niveau du coût CPU, de considérer des lois visqueuses et thermomécaniques par rapport à l'utilisation de lois classiques. Nous mettons également en évidence le gain en temps de calcul apporté par la formulation analytique de la matrice de raideur tangente.

### 4.2 Application 1 : Barre de Taylor

#### 4.2.1 Introduction

Cette première application est destinée à valider l'implémentation des lois constitutives à grandes vitesses de déformation, couplées à des algorithmes de type  $\alpha$ -généralisé. Les résultats obtenus seront comparés avec des résultats expérimentaux et des résultats numériques obtenus avec les codes commerciaux Abaqus [111] et LS-DYNA [106].

Nous étudierons également les performances numériques des schémas d'intégration présentés au chapitre 3. Pour ce faire, nous comparerons le coût CPU de ces algorithmes par rapport au coût de l'utilisation d'un algorithme explicite. L'efficacité de l'utilisation d'une matrice de raideur tangente analytique sera également quantifiée.

### 4.2.2 Présentation et données du problème

Le problème consiste en l'écrasement d'un barreau cylindrique contre une matrice rigide. Le barreau possède une vitesse initiale  $v_0$ . Le contact entre le barreau et la matrice est supposé parfait et sans frottement (appuis à rouleaux). Les données géométriques du problème sont répertoriées dans le tableau 4.1. Deux barreaux de dimensions différentes sont considérés selon les travaux de Zaera et Fernandez [279] et ceux de Kim et Huh [133]. Zaera et Fernandez ont utilisé quatre vitesses d'écrasement (barreau 1), tandis que Kim et Huh n'en ont utilisé qu'une seule (barreau 2).

	$L_0$ (mm)	$D_0$ (mm)	$v_0$
Barreau 1	56.96	7.595	153.0
Barreau 1	56.96	7.595	156.0
Barreau 1	56.96	7.595	180.0
Barreau 1	56.96	7.595	189.0
Barreau 2	25.40	7.620	190.0

TAB. 4.1 – Données géométriques du problème.  $L_0$ ,  $D_0$  et  $v_0$  sont respectivement les valeurs initiales de la longueur et du diamètre de la barre, et la vitesse d'impact.

Le matériau considéré dans ce problème est du cuivre OFHC. Son comportement est modélisé par une loi de Johnson-Cook (2.2). L'identification des paramètres de cette loi est présentée dans Meyers [181]. Les données sont résumées dans le tableau 4.2.

La modélisation est axisymétrique. Le maillage, ainsi que les conditions aux limites et le chargement, sont présentés à la figure 4.1. La partie gauche de la barre est fixée horizontalement pour raison de symétrie, et la partie inférieure est fixée verticalement. Le maillage comprend 960 ( $8 \times 120$ ) éléments quadrangulaires pour le barreau 1 et 400 ( $8 \times 50$ ) éléments pour le barreau 2, afin d'obtenir des mailles initiales bien conditionnées.

La précision d'intégration temporelle est de  $10^{-6}$ , tant pour la résolution du problème mécanique (expression (3.10)) que du problème thermique (expression (3.25)). Le schéma de résolution du problème thermique est le STG et le paramètre  $\vartheta$  du schéma (voir expression (3.15)) est choisi égal à 1.0. Le temps de simulation est de  $150ms$  pour le barreau 1 et  $70ms$  pour le barreau 2 (toute l'énergie cinétique initiale des barres est alors dissipée).

Pour les algorithmes implicites, nous utilisons une stratégie automatique de mise à jour du pas de temps. Cette mise à jour dépend du nombre d'itérations nécessaires à



Paramètres mécaniques et thermiques	Valeur
Module de Young $E$ (Mpa)	124000.0
Coefficient de Poisson $\nu$	0.34
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	8950.0
Conductivité thermique $k$ (W/mK)	400.0
Chaleur spécifique $c$ (J/KgK)	383.0
Coefficient d'expansion thermique $\alpha$ (K <sup>-1</sup> )	1.7e - 5
Facteur de Taylor-Quinney $\beta$	0.9
Paramètres de la loi de Johnson-Cook	
$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right) \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m\right)$	
$A$ (Mpa)	90.0
$B$ (Mpa)	292.0
$n$	0.31
$C$	0.025
$\dot{\varepsilon}_0$ (s <sup>-1</sup> )	1.0
$m$	1.09
$T_{room}$ (K)	298.0
$T_{melt}$ (K)	1083.0

TAB. 4.2 – Paramètres matériau du cuivre OFHC et paramètres de la loi de Johnson-Cook.

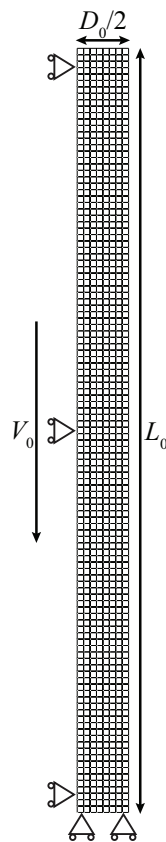


FIG. 4.1 – Configuration initiale ( $8 \times 120$  éléments).

la convergence des schémas prédicteur-correcteur mécanique et thermique. Si le nombre d'itérations est inférieur à 3, le pas de temps est augmenté ; il est gardé constant pour un nombre d'itérations de 3 ou 4 et il est diminué pour un nombre d'itérations supérieur à 4. Nous avons également fixé à 7 le nombre maximum d'itérations pour obtenir la convergence du processus itératif. En cas de non-convergence, le pas de temps est divisé par 3.0.

La configuration finale (avec la symétrie) est présentée sur les figures 4.2 pour le barreau 1 et 4.3 pour le barreau 2. La configuration initiale est indiquée par les lignes jaunes. Dans tous les cas, l'élévation de température est importante, ce qui montre l'importance de considérer une formulation thermomécanique.

### 4.2.3 Comparaison des résultats

En comparant les valeurs finales de l'écrasement (longueur et diamètre finaux de la barre) pour toutes les vitesses d'écrasement considérées (voir tableaux 4.3 et 4.4), nous voyons que les résultats obtenus cadrent avec les résultats expérimentaux, les résultats obtenus avec Abaqus et LS-DYNA, et ceux calculés par une méthode d'analyse limite (voir Kim et Huh [133]). La différence des valeurs d'écrasement (longueur et diamètre finaux) entre Metafor et Abaqus n'excède pas 1.75% et 2.5% pour LS-DYNA.

Vitesses	Expérience		Abaqus		Metafor	
	$L (mm)$	$D (mm)$	$L (mm)$	$D (mm)$	$L (mm)$	$D (mm)$
$v_0 = 153m/s$	46.16	11.94	43.30	12.50	42.55	12.41
$v_0 = 156m/s$	46.05	12.00	42.49	12.63	42.14	12.57
$v_0 = 180m/s$	42.51	14.56	39.43	14.13	38.87	13.99
$v_0 = 189m/s$	42.14	14.80	38.25	14.83	37.65	14.57

TAB. 4.3 – Comparaison des résultats expérimentaux avec ceux obtenus avec Abaqus [111] et Metafor (barreau 1).

Vitesse	LS-DYNA		Analyse limite		Metafor	
	$L (mm)$	$D (mm)$	$L (mm)$	$D (mm)$	$L (mm)$	$D (mm)$
$v_0 = 190m/s$	17.29	14.08	17.00	14.25	17.22	14.44

TAB. 4.4 – Comparaison des résultats expérimentaux avec ceux obtenus avec LS-DYNA [106], l'analyse limite [133] et Metafor (barreau 2).

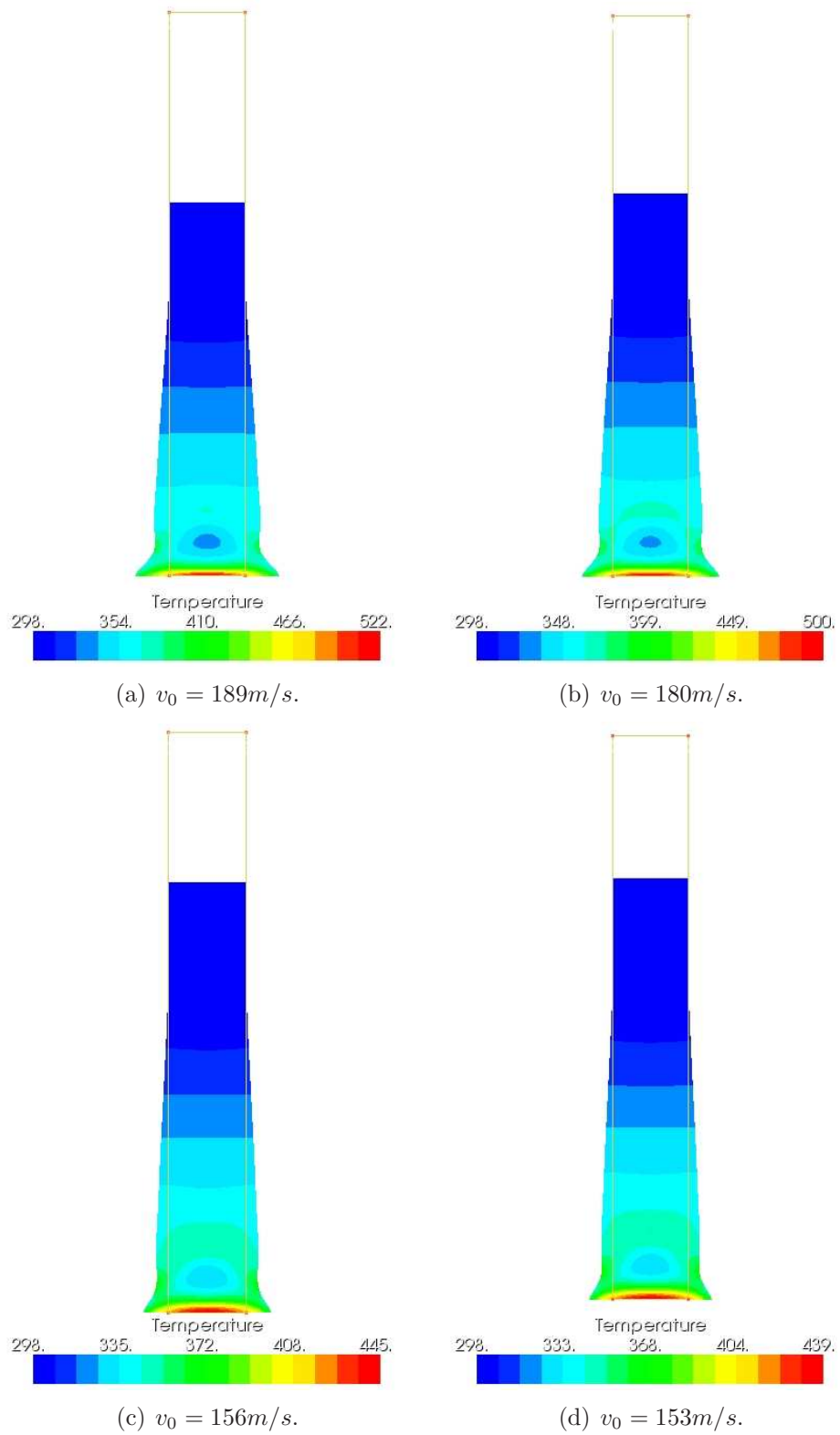


FIG. 4.2 – Configuration finale du barreau 1.

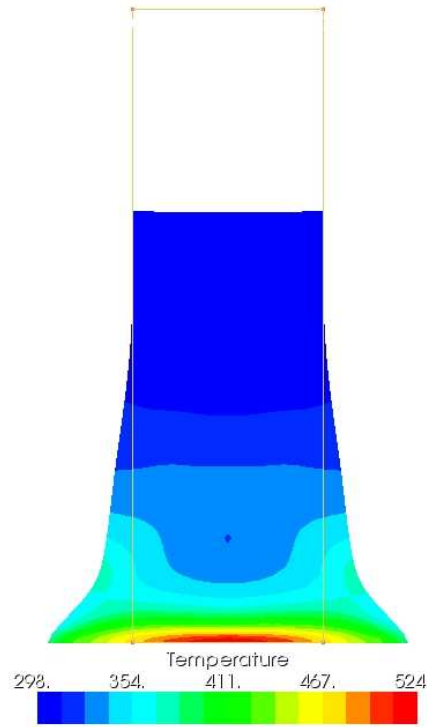


FIG. 4.3 – Configuration finale du barreau 2.

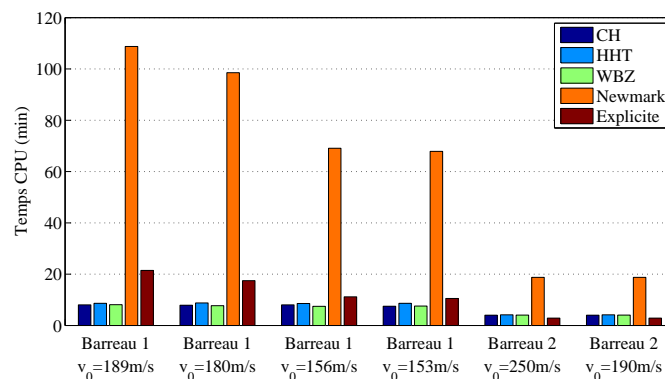
#### 4.2.4 Etude numérique

L'objectif de cette section est de comparer les performances, au point de vue des temps de calcul, des algorithmes présentés au chapitre 3.2. Ces temps de calcul sont comparés à ceux obtenus par l'utilisation d'un algorithme explicite. Nous comparons également les résultats CPU obtenus en utilisant une matrice de raideur obtenue par perturbations numériques ou analytiquement. Les paramètres utilisés pour les différents algorithmes  $\alpha$ -généralisé sont résumés dans le tableau 4.5. Ceux-ci sont choisis pour obtenir une dissipation numérique optimale des hautes fréquences (voir Noels [195]). Nous avons ajouté un test pour le second barreau à une vitesse d'impact  $v_0$  de  $250m/s$  pour corroborer les résultats obtenus par les quatre vitesses d'impact du premier barreau.

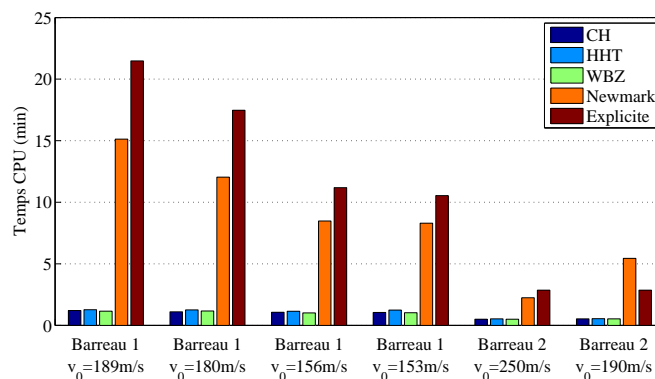
	$\beta$	$\gamma$	$\alpha_M$	$\alpha_F$
Newmark	0.25	0.5	0.0	0.0
HHT	0.25	0.5	0.0	$\frac{1}{3}$
WBZ	0.25	0.5	-1.0	0.0
CH	0.25	0.5	-0.97	0.01

TAB. 4.5 – Paramètres des schémas alpha-généralisés.

Les comparaisons sont présentées sur la figure 4.4. La figure 4.4(a) compare les temps CPU obtenus par les différents algorithmes présentés à la section 3.2 à ceux obtenus par une méthode explicite de type Hulbert et Chung (voir Hulbert et Chung [119] ou Noels [195]). Les matrices de raideur tangente (3.9) et (3.22) sont calculées par perturbations numériques. Dans tous les cas, le schéma de Newmark sans dissipation numérique est le plus défavorable. Le schéma explicite est quant à lui plus rapide lorsque la vitesse d'impact diminue, tout comme l'algorithme de Newmark sans dissipation. Quant aux schémas implicites avec dissipation numérique, ils ont des temps CPU comparables, quelle que soit la vitesse d'impact. En utilisant une matrice de raideur tangente analytique -figure 4.4(b)- pour l'évaluation des expressions (3.9) et (3.22), l'avantage du schéma implicite avec dissipation devient beaucoup plus important par rapport au schéma explicite.



(a) Matrice de raideur numérique.



(b) Matrice de raideur analytique.

FIG. 4.4 – Comparaison des algorithmes explicite et implicites.

La figure 4.5 résume la comparaison entre le schéma implicite avec une matrice de raideur analytique ou numérique et le schéma explicite, dans le cas de l'utilisation de l'algorithme de Chung-Hulbert. L'utilisation de la matrice de raideur numérique est avan-

tageuse dans le cas du barreau 1, le gain CPU par rapport au schéma explicite étant d'un facteur 1.4 à 2.6. L'utilisation d'une matrice de raideur analytique est toujours très avantageuse, l'avantage allant d'un facteur 5.7 à 12.8 par rapport au schéma explicite. Le gain de temps CPU par rapport à l'utilisation d'une matrice de raideur numérique est quant à lui de l'ordre de 7 à 8.

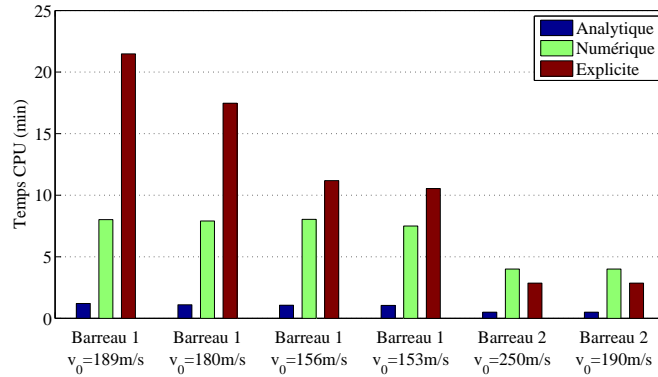


FIG. 4.5 – Comparaison des algorithmes explicite et implicite de Chung-Hulbert en utilisant une matrice de raideur analytique ou numérique.

Dans le tableau 4.6, nous comparons le nombre de pas et d'itérations nécessaires pour simuler l'écrasement du barreau pour les différents algorithmes. Comme pour la comparaison des temps CPU, nous avons considéré une deuxième vitesse d'écrasement  $v_0$  de  $250m/s$  pour le second barreau. De la même façon que pour les temps CPU, nous constatons l'importance d'introduire de la dissipation numérique dans la résolution du schéma prédicteur-correcteur. Dans ce cas, le nombre de pas de temps reste sensiblement identique, quel que soit le problème, alors qu'il diminue avec la vitesse d'impact pour les schémas explicite et de Newmark.

	CH		HHT		WBZ		Newmark		Explicite
	Pas	Ités	Pas	Ités	Pas	Ités	Pas	Ités	Pas
Barreau 1, $v_0 = 189m/s$	217	640	222	654	213	634	2235	6917	10506
Barreau 1, $v_0 = 180m/s$	211	627	227	663	210	623	1788	5608	8835
Barreau 1, $v_0 = 156m/s$	199	591	216	632	201	596	1312	4034	5861
Barreau 1, $v_0 = 153m/s$	201	597	225	658	201	595	1312	3966	5596
Barreau 2, $v_0 = 250m/s$	212	620	218	644	215	630	1653	5890	10787
Barreau 2, $v_0 = 190m/s$	211	615	220	643	208	607	786	2533	3648

TAB. 4.6 – Comparaison du nombre de pas et d'itérations mécaniques pour les différents algorithmes.

Estimons à présent le surcoût CPU dû à l'utilisation d'une loi visqueuse thermomécanique par rapport à l'utilisation d'une loi constitutive non visqueuse ou purement mécanique. Quatre cas de figure sont envisagés pour l'expression de la loi constitutive :

- Utilisation d'une loi non visqueuse purement mécanique :

$$\sigma_{crit} = A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n \quad (4.1)$$

- Utilisation d'une loi visqueuse purement mécanique :

$$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left( 1 + C \ln \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\varepsilon}}_0} \right) \quad (4.2)$$

- Utilisation d'une loi non visqueuse thermomécanique :

$$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left( 1 - \left( \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}} \right)^m \right) \quad (4.3)$$

- Utilisation d'une loi visqueuse thermomécanique :

$$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left( 1 + C \ln \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\varepsilon}}_0} \right) \left( 1 - \left( \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}} \right)^m \right) \quad (4.4)$$

Le schéma d'intégration choisi est celui de Chung-Hulbert dont les paramètres sont donnés dans le tableau 4.5. La précision d'intégration est de  $1.0e - 6$ . Les valeurs des paramètres matériau sont inchangées par rapport au modèle de Johnson-Cook utilisé jusqu'ici (voir tableau 4.2). Les résultats sont présentés à la figure 4.6. Nous avons normalisé les temps de calcul par rapport au temps CPU résultant de l'utilisation d'une loi non visqueuse purement mécanique. L'utilisation d'une loi viscoplastique engendre un surcoût de l'ordre de 25%. En utilisant un modèle thermomécanique, le surcoût est de l'ordre de 75%, tandis que le modèle thermo-viscoplastique fait plus que doubler le temps CPU.

Pour terminer, nous étudions l'influence des précisions d'intégration mécanique (expression (3.10)) et thermique (expression (3.25)). Nous ne comparons pas les temps de calcul qui sont forcément plus longs lorsque la précision demandée est plus importante, de même que le nombre de pas de temps et d'itérations. La mise à jour du pas de temps est automatique (voir page 67). Le schéma utilisé est celui de Chung-Hulbert dont les paramètres sont donnés dans le tableau 4.5. Quatre précisions d'intégration ont été examinées :  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-6}$  et  $10^{-8}$ . La grandeur analysée pour estimer la précision des résultats est le travail des forces internes  $W^{int}$ . En effet, vu que le travail des forces externes est nul, le travail des forces internes doit être égal, au terme du calcul, à la valeur de l'énergie cinétique initiale que nous pouvons calculer analytiquement :

$$E^{cin} = \frac{1}{2} \rho_0 Vol v_0^2$$

où  $Vol$  est le volume initial de la barre.



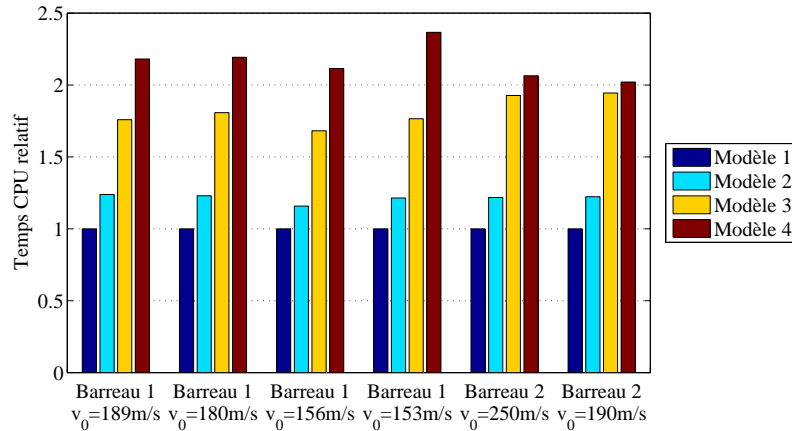


FIG. 4.6 – Coût des modèles thermo-viscoplastiques. La valeur de référence est la valeur du modèle non visqueux purement mécanique.

Modèle 1 : loi non visqueuse purement mécanique (4.1).

Modèle 2 : loi visqueuse purement mécanique (4.2).

Modèle 3 : loi non visqueuse thermomécanique (4.3).

Modèle 4 : loi visqueuse thermomécanique (4.4).

Ces valeurs de référence sont résumées dans le tableau 4.7. Les valeurs calculées numériquement, ainsi que les écarts entre les valeurs analytiques et numériques, sont repris dans le tableau 4.8. Nous estimons avoir atteint une précision suffisante lorsque l'écart entre les valeurs calculées analytiquement et numériquement est de l'ordre du pourcent. Ainsi, une précision de  $10^{-6}$  est suffisante pour le barreau 1, tandis qu'une précision de  $10^{-8}$  est plus appropriée pour le barreau 2. Cependant, le coût CPU pour obtenir une telle précision est important (le temps de calcul est pratiquement doublé), c'est pourquoi nous avons effectué les simulations avec une précision de  $10^{-6}$ , qui nous a paru un bon compromis.

	$E^{cin} (J)$
Barreau 1, $v_0 = 189m/s$	412.97
Barreau 1, $v_0 = 180m/s$	374.57
Barreau 1, $v_0 = 156m/s$	281.35
Barreau 1, $v_0 = 153m/s$	270.63
Barreau 2, $v_0 = 250m/s$	323.61
Barreau 2, $v_0 = 190m/s$	186.92

TAB. 4.7 – Énergie cinétique initiale.

Précision	$10^{-3}$		$10^{-4}$		$10^{-6}$		$10^{-8}$	
	$W^{int} (J)$	$\frac{\Delta W^{int}}{W_{ref}^{int}} (\%)$	$W^{int} (J)$	$\frac{\Delta W^{int}}{W_{ref}^{int}} (\%)$	$W^{int} (J)$	$\frac{\Delta W^{int}}{W_{ref}^{int}} (\%)$	$W^{int} (J)$	$\frac{\Delta W^{int}}{W_{ref}^{int}} (\%)$
Barreau 1, $v_0 = 189m/s$	404.16	2.13	404.88	1.96	408.69	1.04	410.64	0.56
Barreau 1, $v_0 = 180m/s$	366.58	2.13	367.28	1.95	370.74	1.03	372.54	0.54
Barreau 1, $v_0 = 156m/s$	275.14	2.21	275.62	2.04	278.29	1.09	279.68	0.59
Barreau 1, $v_0 = 153m/s$	264.58	2.24	265.12	2.04	267.68	1.09	268.99	0.61
Barreau 2, $v_0 = 250m/s$	309.13	4.47	309.69	4.30	315.90	2.38	319.33	1.32
Barreau 2, $v_0 = 190m/s$	178.41	4.55	178.75	4.37	182.50	2.36	184.54	1.27

TAB. 4.8 – Etude de l’influence de la précision de l’algorithme ;  
 $W_{ref}^{int}$  est le travail des forces internes au terme de la simulation.

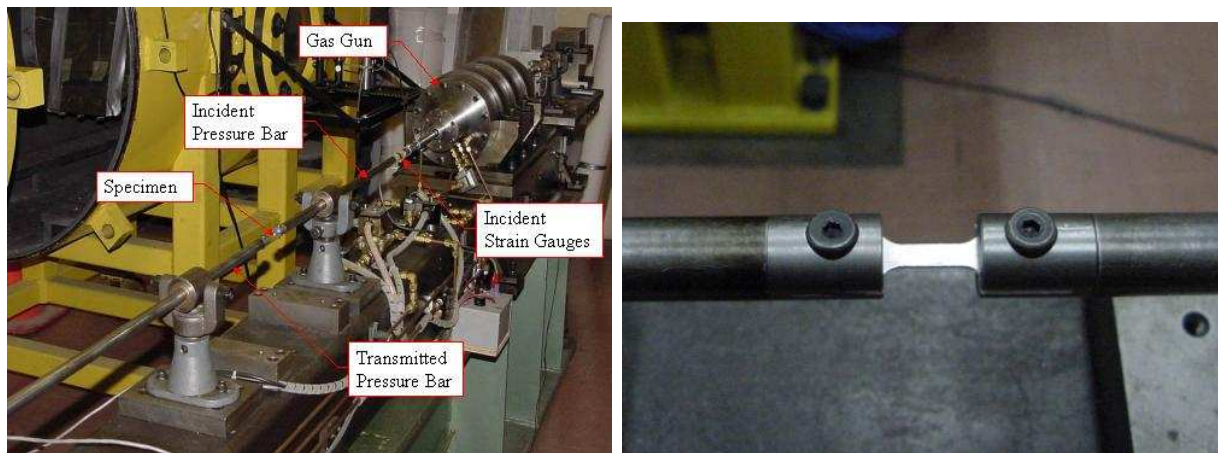
## 4.3 Application 2 : Barre d'Hopkinson

### 4.3.1 Introduction

Cette application est destinée à valider l'implémentation des lois de Johnson-Cook (2.2) et de Zerilli-Armstrong (2.112.12), ainsi qu'à mettre en évidence l'importance des effets dynamiques. Les données expérimentales sont tirées de Noble et al. [194]. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus expérimentalement et à l'aide du code DYNA-2D (voir Hallquist [105]).

### 4.3.2 Description de l'expérience

La barre d'Hopkinson est un test de traction ou de compression à grande vitesse destiné à déterminer les paramètres d'une loi constitutive dans des gammes de vitesses de déformation de 10 à  $1000s^{-1}$ . Un appareillage de barre d'Hopkinson est illustré sur les figures 4.7(a) et 4.7(b) (images tirées du site de l'université de Waterloo, Canada<sup>1</sup>).



(a) Vue générale.

(b) Spécimen.

FIG. 4.7 – Montage expérimental de la barre d'Hopkinson.

L'appareil comporte deux longues barres métalliques disposées bout à bout. Des jauges de déformation sont placées longitudinalement sur les barres. Lors du test de compression, un spécimen de petite taille (typiquement une dizaine de  $mm$  de long) est serré entre les extrémités des barres (voir figure 4.7(b)). On vient ensuite percuter un des bords libres d'une des deux barres (la barre incidente). L'onde de choc se propage alors dans la barre incidente. Vu la différence de matériaux entre la barre incidente et le spécimen, une partie de l'onde de choc est réfléchiée et le reste de l'onde se propage à travers le spécimen et parvient à la seconde barre (le transmetteur).

<sup>1</sup><http://visor.uwaterloo.ca/worswick/smf/HSR/hsr.htm>

Au début du processus, plusieurs transmissions de l'onde incidente (et réfléchiée) se produisent dans le spécimen avant d'arriver rapidement à un état quasi-stationnaire. Les contraintes dans le spécimen sont, à ce moment, approximativement uniformes et le spécimen se déforme à une vitesse de déformation quasi constante. Les ondes incidente et réfléchiée sont mesurées via deux jauges de déformation placées, l'une sur la barre incidente, la seconde sur le transmetteur. Ces signaux sont enregistrés et traités pour obtenir l'historique du déplacement des extrémités des barres et donc, du spécimen. La courbe contrainte-déformation du matériau testé peut alors en être déduite.

Le fonctionnement de la barre d'Hopkinson est schématisé à la figure 4.8. Pour plus de détails concernant son fonctionnement, le lecteur intéressé se reportera à Zhao [282], Field et al. [84] ou Gray [100].

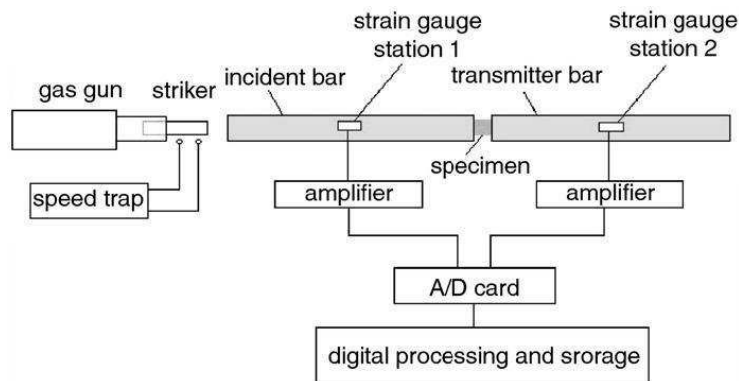


FIG. 4.8 – Barre d'Hopkinson. Schéma de fonctionnement.

### 4.3.3 Modélisation par éléments finis

Seul le spécimen est modélisé. Celui-ci est cylindrique, d'où une modélisation bidimensionnelle axisymétrique. Le chargement est effectué via le déplacement imposé d'une extrémité de la barre, obtenu par l'intégration de la courbe de vitesse expérimentale (voir figure 4.9). L'autre extrémité de la barre reste fixe dans la direction de chargement (appuis à rouleaux). Cette vitesse de chargement assure une vitesse de déformation de l'ordre de  $2500s^{-1}$ . Le temps de simulation est de  $0.2ms$ . La rupture du barreau n'est pas modélisée. Celle-ci se produit expérimentalement après  $0.18ms$ .

Le matériau considéré dans ce problème est du fer de type REMCO. Son comportement est modélisé par une loi de Zerilli-Armstrong (2.12). L'identification des paramètres de celle-ci est présentée dans Goldthorpe [97] et les données sont résumées dans le tableau 4.9. Dans le cas présent, le paramètre  $C_5$  de (2.12) varie avec la température selon la loi suivante :

$$C_5(T) = C_5(293)(sm_1 - sm_2T) \quad (4.5)$$

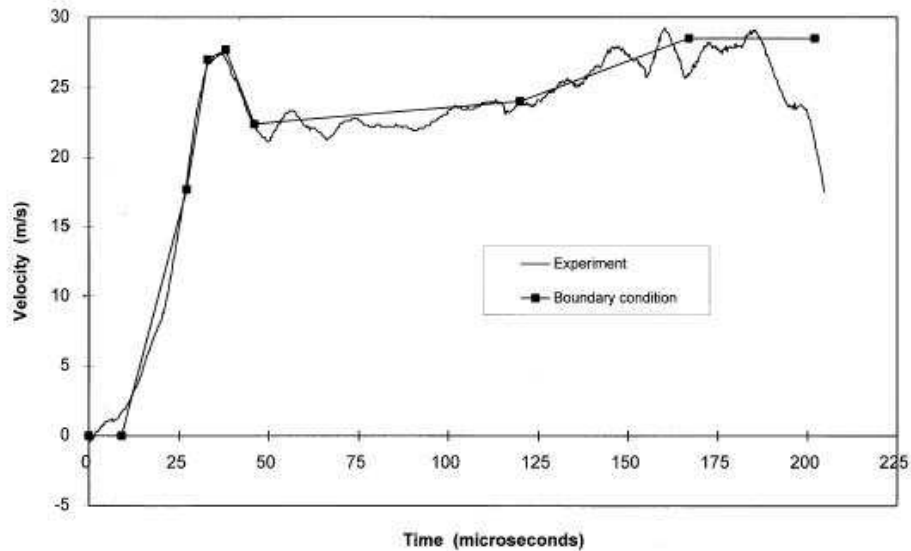


FIG. 4.9 – Variation de vitesse entre les deux extrémités du spécimen (courbe tirée de Noble et al. [194]).

où  $sm_1$  et  $sm_2$  sont deux nouveaux paramètres matériau. Le module de cisaillement  $G$  du matériau varie également selon cette loi.

Noble et al. [194] effectuent une comparaison avec la loi de Johnson-Cook. Cependant, les résultats mentionnés pour cette loi ont apparemment été obtenus à partir d'un maillage éléments finis non convergé, ce qui nous mène à prendre ces résultats avec circonspection. Nous effectuons également cette comparaison, en travaillant sur le maillage convergé, présenté à la figure 4.10. Les paramètres de la loi de Johnson-Cook (2.2) ont quant à eux été identifiés dans Johnson et Cook [123].

Le maillage initial est présenté à la figure 4.10. Les données géométriques de la structure sont résumées dans le tableau 4.10. La partie inférieure de la structure est fixée dans la direction verticale par symétrie et la partie gauche est fixée dans la direction horizontale. Le déplacement horizontal de la partie droite est imposé. Le maillage est logiquement densifié dans la zone de striction. Il comporte 940 ( $10 \times 94$ ) éléments thermomécaniques (40 éléments sur la longueur de raffinement). Le schéma d'intégration mécanique est le schéma de Chung-Hulbert dont les paramètres sont  $\alpha_M = -0.97$  et  $\alpha_F = 0.01$ . Le schéma d'intégration thermique est le schéma du trapèze généralisé et le paramètre du schéma  $\vartheta$  est fixé à 1.0. La précision d'intégration temporelle est de  $10^{-6}$ , tant pour la résolution du problème mécanique (expression (3.10)) que du problème thermique (expression (3.25)). La température initiale est de  $293K$ .

Paramètres mécaniques et thermiques	Valeur
Module de Young $E$ (Mpa)	193000.0
Coefficient de Poisson $\nu$	0.29
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	7870.0
Conductivité thermique $k$ (W/mK)	80.2
Chaleur spécifique $c$ (J/KgK)	449.0
Coefficient d'expansion thermique $\alpha$ (K <sup>-1</sup> )	1.18e - 5
Facteur de Taylor-Quinney $\beta$	0.9
Paramètres de la loi de Zerilli-Armstrong $\sigma_{crit} = \sigma_0 + C_5 (\bar{\varepsilon}^{pl})^{n_1} + C_2 \exp(-C_3 T + C_4 T \ln \dot{\varepsilon}^{pl})$ $C_5(T) = C_5(293) (sm_1 - sm_2 T)$	
$\sigma_0$ (Mpa)	50.0
$C_2$ (MPa)	1130.0
$C_3$ (K <sup>-1</sup> )	0.00515
$C_4$ (K <sup>-1</sup> )	0.000262
$C_5$ (Mpa)	357.0
$n_1$	0.52
$n_2$	0.0
$sm_1$	1.13.0
$sm_2$ (K <sup>-1</sup> )	0.000445
Paramètres de la loi de Johnson-Cook $\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right) \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m\right)$	
$A$ (Mpa)	175.0
$B$ (Mpa)	380.0
$n$	0.55
$C$	0.06
$\dot{\varepsilon}_0$ (s <sup>-1</sup> )	1.0
$m$	0.32
$T_{room}$ (K)	293.0
$T_{melt}$ (K)	1811.0

TAB. 4.9 – Paramètres matériau du fer REMCO et paramètres des lois de Zerilli-Armstrong et Johnson-Cook.

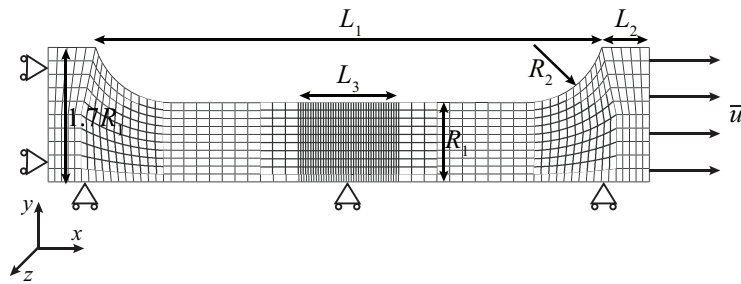


FIG. 4.10 – Géométrie, chargement et fixations du spécimen.

Données géométriques	Valeur
Longueur de l'éprouvette	$L_1 = 10.16mm$
Rayon de l'éprouvette	$R_1 = 1.5875mm$
Longueur des liaisons	$L_2 = 0.9525mm$
Rayon du congé	$R_2 = 1.5875mm$
Longueur de la zone de maillage raffiné	$L_3 = 2mm$

TAB. 4.10 – Données géométriques de l'éprouvette.

Nous avons représenté la distribution de température (figure 4.11) et de vitesse de déformation plastique équivalente (figure 4.12) à trois instants du test : après  $75$ ,  $140$  et  $180\mu s$ . Ces résultats sont obtenus en utilisant la loi de Zerilli-Armstrong. Après  $75\mu s$ , la striction est encore faible. La température (figure 4.11(a)) et la vitesse de déformation plastique (figure 4.12(a)) sont assez uniformes au centre de la barre. A  $140\mu s$ , la striction devient importante et l'évolution de la plasticité (figure 4.12(b)) se concentre à l'endroit de la striction ; l'élévation de température (figure 4.11(b)) devient importante (échauffement de  $150K$  au centre de la pièce). Au moment de la rupture ( $t = 180\mu s$ , figures 4.11(c) et 4.12(c)), seules les mailles localisées dans la zone de la rupture de la barre sont encore sujettes à un incrément de plasticité (voir figure 4.12(c)).

#### 4.3.4 Résultats et comparaisons

Une première comparaison entre les valeurs expérimentales et numériques est effectuée sur la mesure de la réduction de section au cours du processus. Pour ce faire, l'évolution de la réduction de section est tracée en fonction la déformation de l'ingénieur de la barre. Expérimentalement, cette déformation est mesurée par l'allongement d'une jauge de  $8.89mm$  placée sur le spécimen. Les résultats sont présentés à la figure 4.13. Ils sont en bonne concordance, avec une différence, au moment de la rupture (après  $180\mu s$ ), de  $6\%$  par rapport à la valeur expérimentale. Cependant, la réduction de section est sous-estimée par rapport à celle prédite par DYNA-2D pour des valeurs de la déformation supérieures à  $25\%$ , tandis que, pour des valeurs inférieures, elle épouse mieux la courbe expérimentale.

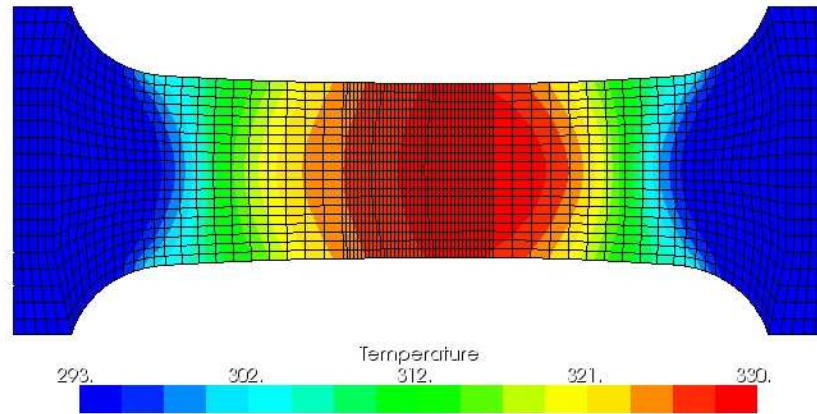
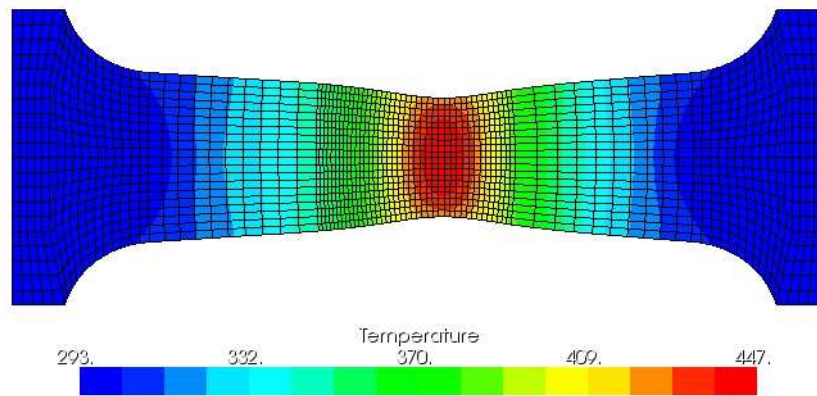
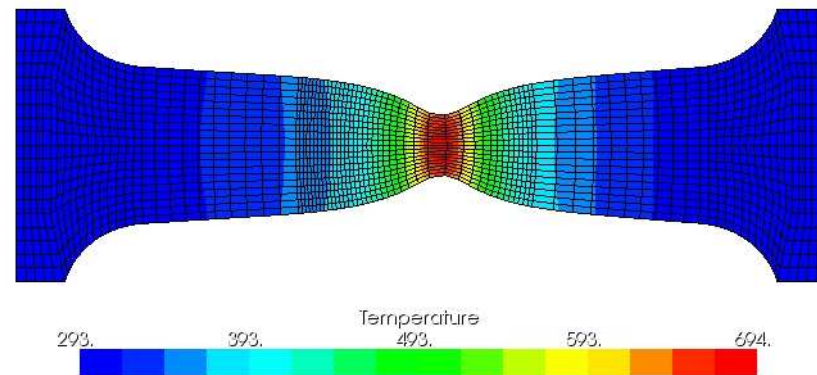
(a)  $t = 75 \mu s$ .(b)  $t = 140 \mu s$ .(c)  $t = 180 \mu s$ .

FIG. 4.11 – Cartes des températures pour deux configurations intermédiaires et la déformée finale.



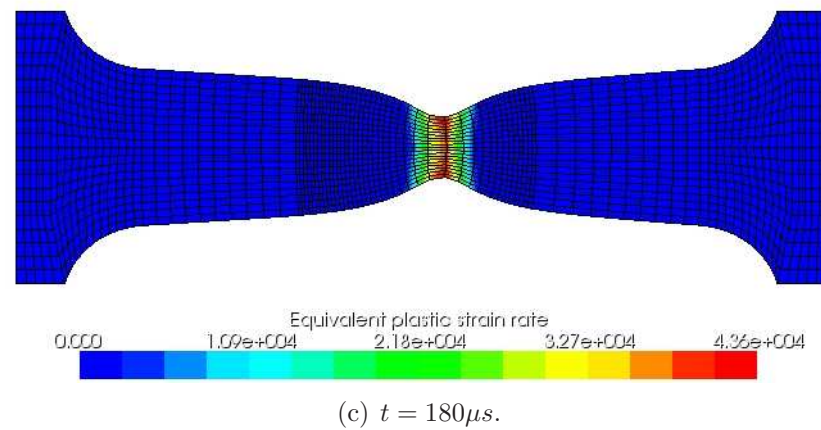
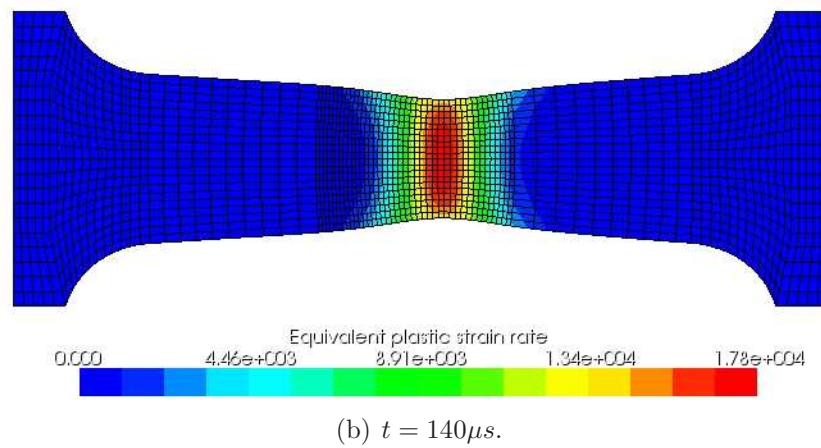
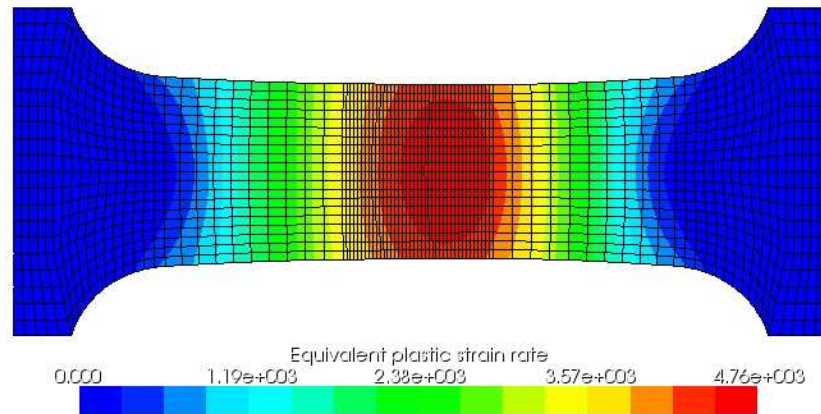


FIG. 4.12 – Cartes des vitesses de déformation plastique équivalente pour deux configurations intermédiaires et la déformée finale.

La loi de Johnson-Cook est, quant à elle, apparemment insuffisante pour décrire la réduction de section au-delà d'une déformation de 20%, à moins d'effectuer une réadaptation des paramètres matériau (voir section 4.3.5).

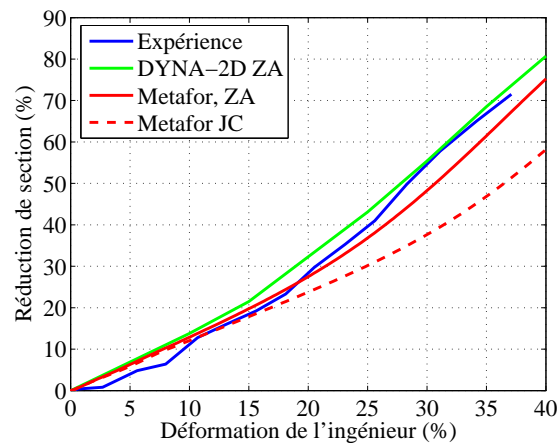


FIG. 4.13 – Comparaison de la réduction de section, mesurée expérimentalement et prédite numériquement.

Une deuxième comparaison concerne l'évolution de la force transmise dans la barre, prédite numériquement et mesurée expérimentalement. Dans notre cas, il s'agit de la force de réaction horizontale sur la partie gauche de la barre. Les résultats sont présentés à la figure 4.14. La force prédite par Metafor surestime la force réelle. La loi de Johnson-Cook est, une nouvelle fois, incapable de traduire correctement l'évolution de la force transmise au barreau, vu la mauvaise corrélation des paramètres.

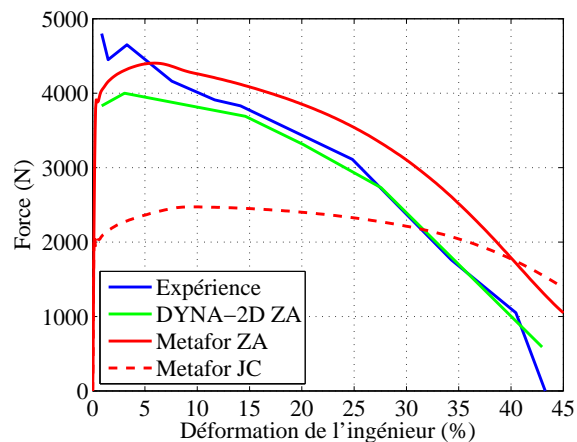


FIG. 4.14 – Comparaison de la force transmise au cours de la déformation, mesurée expérimentalement et prédite numériquement.

La dernière comparaison concerne la température à la surface du spécimen au moment de la rupture. Les résultats sont présentés à la figure 4.15. La difficulté de l'obtention des données expérimentales réside dans le fait que l'acquisition de ces données ne peut être effectuée qu'après  $2ms$  suivant la rupture du spécimen. Ceci est dû à la sensibilité des appareils de mesure, incapables de mesurer des variations de température si fortes dans un intervalle de temps si court (voir Noble et al. [194] pour plus de détails). C'est pourquoi un début de redistribution de la température est déjà observé au niveau expérimental. Metafor surestime légèrement l'augmentation de température par rapport à DYNA-2D (autour de 5%) à l'endroit de la rupture, puis rejoint la courbe prédite par DYNA-2D. Cependant, si l'aire sous la courbe de température est calculée, ce qui correspond à la quantité de chaleur générée dans le matériau au moment de l'impact (moyennant le fait de négliger les échanges avec l'extérieur), nous obtenons les résultats repris au tableau 4.11. Nous constatons alors que le résultat obtenu par Metafor est plus proche en moyenne du résultat expérimental que celui obtenu par DYNA-2D. Nous creuserons plus avant cette étude thermique dans la section 4.3.7.

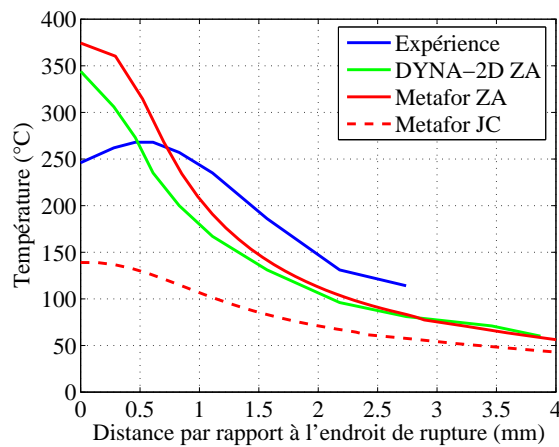


FIG. 4.15 – Comparaison de la température le long du spécimen à la rupture, mesurée expérimentalement et prédite numériquement.

	Expérience	DYNA-2D	Metafor
Aire sous la courbe ( $^{\circ}C.mm$ )	547.7650	467.7750	531.9514

TAB. 4.11 – Comparaison de l'aire sous la courbe de température à la rupture.

### 4.3.5 Recalibrage de la loi de Johnson-Cook

Comme illustré sur les figures 4.13 à 4.15, la loi de Johnson-Cook se révèle inadaptée à décrire le phénomène étudié. Cela résulte d'une mauvaise adéquation des paramètres matériau. Nous avons donc effectué une nouvelle identification des paramètres de la loi de Johnson-Cook par une analyse inverse utilisant un algorithme d'optimisation de Newton-Gauss (voir Kleiner mann [134]). La courbe expérimentale grâce à laquelle les paramètres sont recalibrés est la courbe force-déplacement présentée dans Noble et al. [194]. Nous ne détaillons pas ici les détails de l'algorithme d'optimisation. Le lecteur intéressé peut se reporter à Kleiner mann [134].

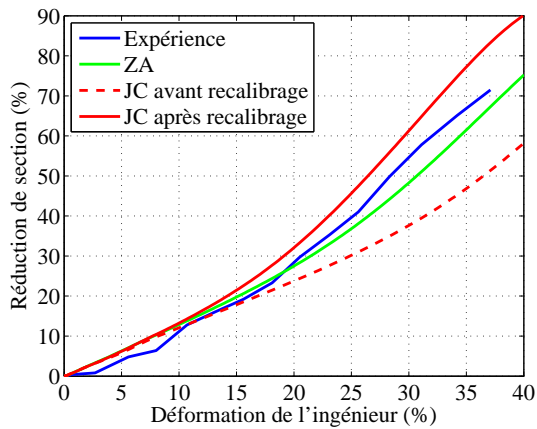
Seuls les paramètres de la loi d'érouissage de Johnson-Cook ont été identifiés. Les autres paramètres matériau sont supposés connus (module de Young, coefficient de Poisson,...). Nous avons également gardé constante la vitesse de déformation plastique de référence  $\dot{\epsilon}_0 = 1s^{-1}$ . Les paramètres matériau obtenus par l'algorithme d'optimisation sont résumés dans le tableau 4.12.

$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\epsilon}^{pl})^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{\dot{\epsilon}_0}\right) \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m\right)$		
	Anciens paramètres	Nouveaux paramètres
$A (Mpa)$	175.0	264.0
$B (Mpa)$	380.0	375.0
$n$	0.55	0.28
$C$	0.06	0.0607
$m$	0.32	0.49

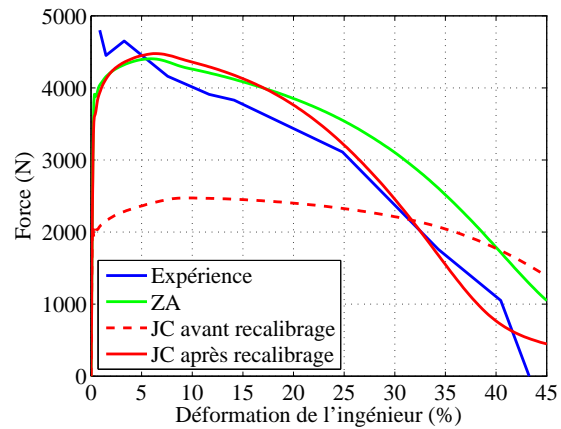
TAB. 4.12 – Paramètres de la loi Johnson-Cook après recalibrage de la loi constitutive.

Si nous retraçons les courbes de réduction de section, les courbes force-déplacement et les courbes de température de la même façon qu'à la section précédente 4.3.4, nous obtenons les résultats présentés à la figure 4.16. L'amélioration de la qualité des résultats est très nette. Cependant, nous constatons une surestimation de la température par rapport à la loi de Zerilli-Armstrong. Une étude plus détaillée de l'influence du facteur de Taylor-Quinney,  $\beta^1$ , est réalisée à la section 4.3.7.

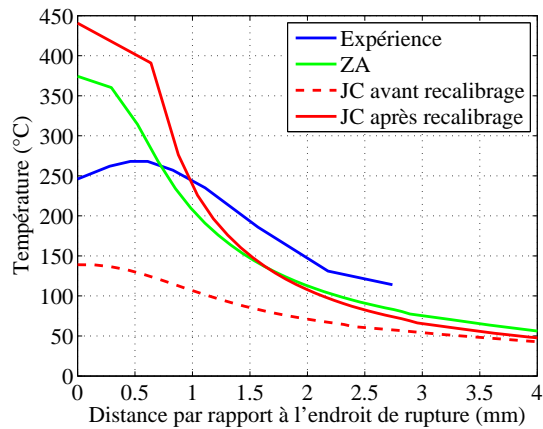
<sup>1</sup>Rappelons que  $\beta$  détermine la quantité de chaleur générée dans le spécimen par la viscoplasticité.



(a) Réduction de section.



(b) Force transmise.



(c) Température au moment de la rupture.

FIG. 4.16 – Comparaison des résultats expérimentaux et numériques après recalage de la loi de Johnson-Cook.

### 4.3.6 Mise en évidence des effets dynamiques

Cette application permet de mettre en évidence l'intérêt d'utiliser une méthode d'intégration des équations de conservation de la quantité de mouvement prenant en compte les forces d'inertie. En effet, si celles-ci ne sont pas considérées, nous obtenons une distribution de déformation symétrique par rapport au centre de l'éprouvette, alors que le chargement ne l'est pas (les déplacements des extrémités gauche et droite de la barre sont différents). Ce fait est illustré sur la figure 4.17. Dans le cas quasi-statique (figure 4.17(a)), la prédiction de l'endroit de rupture de l'éprouvette est mauvaise, tandis que, dans le cas dynamique, l'endroit de rupture est décalé vers la droite de l'éprouvette. Cette asymétrie est observée expérimentalement (cf. Noble et al. [194]).

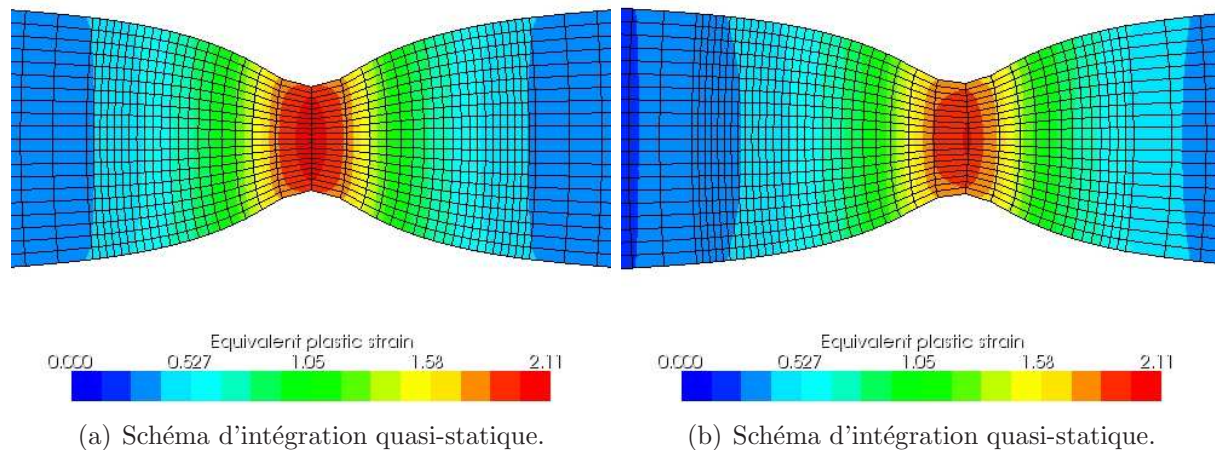


FIG. 4.17 – Comparaison de la position du point de rupture.

Pour tenter de quantifier cet écart, nous mesurons l'écart entre le milieu de l'éprouvette (correspondant à l'endroit de rupture prédit par l'utilisation d'un algorithme quasi-statique) et l'endroit de la rupture prédit par l'utilisation d'un algorithme dynamique. En vue d'obtenir une mesure relative, nous divisons cet écart par la longueur de l'éprouvette. L'écart relatif atteint 7% au moment de la rupture.

La figure 4.18 illustre cet écart. La position des points sur l'axe horizontal correspond à la position horizontale des nœuds situés sur le bord extérieur de l'éprouvette. Les données sur l'axe vertical sont une image de la configuration radiale des nœuds extérieurs de l'éprouvette tout au long de la traction. L'écart est bien marqué entre l'endroit de la striction prédit par l'algorithme quasi-statique (courbes en traits interrompus) et dynamique (courbes en traits continus).

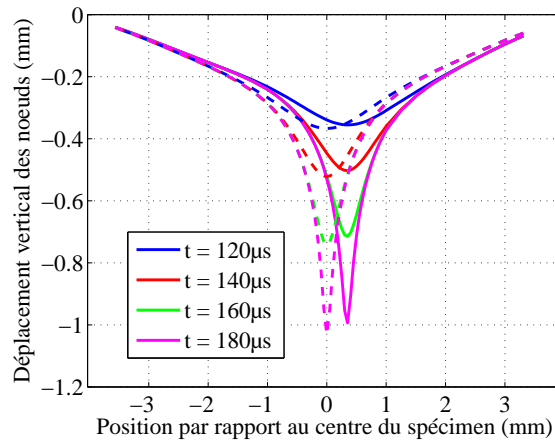


FIG. 4.18 – Influence des effets d’inertie. En traits continus : algorithme dynamique.  
En traits interrompus : algorithme quasi-statique.

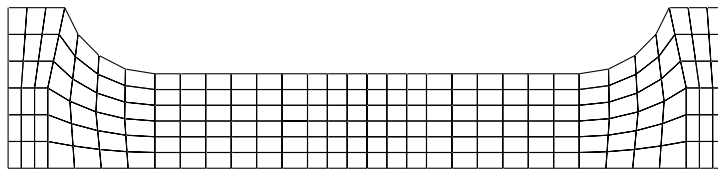
Malheureusement, nous ne disposons pas de données expérimentales chiffrées qui nous permettraient de quantifier cet écart et de corroborer les résultats obtenus avec Metafor.

### 4.3.7 Etude numérique

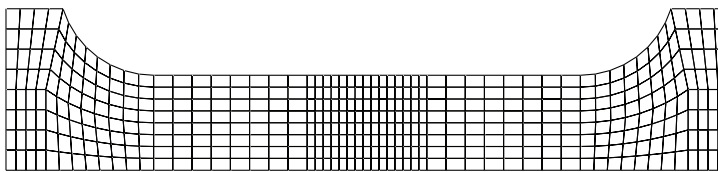
Dans cette section, nous examinons tout d’abord l’influence du maillage sur la précision de la solution obtenue. Pour ce faire, nous envisageons quatre maillages de plus en plus raffinés. Ces quatre maillages sont illustrés à la figure 4.19. Le maillage grossier comporte 192 éléments, le maillage intermédiaire 440, le maillage fin 940 et le maillage très fin 2560 éléments. Nous utilisons pour ces comparaisons la loi de Zerilli-Armstrong vu que ce modèle s’est montré plus à même de reproduire le phénomène étudié.

La figure 4.20 montre l’influence du maillage sur la striction dans le matériau, la force transmise dans la barre et la température au moment de la rupture. Les maillages grossier et intermédiaire sont suffisants pour décrire le phénomène étudié pour les déformations faibles. Les divergences apparaissent pour des déformations supérieures à 30%.

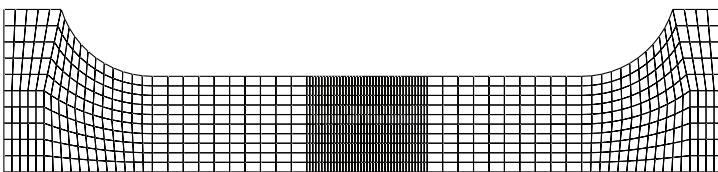
Etudions à présent l’influence du facteur de Taylor-Quinney,  $\beta$ , représentant le pourcentage de puissance viscoplastique dissipé en chaleur. Il est habituellement de l’ordre de 0.9. Nous donnons au facteur de Taylor-Quinney,  $\beta$ , les valeurs 0.5, 0.8 et 1.0. La figure 4.21 montre la distribution de température dans le barreau au moment de la rupture, pour ces différentes valeurs de  $\beta$ . Nous constatons qu’aucune valeur ne permet d’approcher au mieux l’évolution de température pour des distances s’éloignant du point de rupture. Un remède pourrait être de considérer un facteur de Taylor-Quinney variable, par exemple en fonction du temps, de la température ou de la vitesse de déformation.



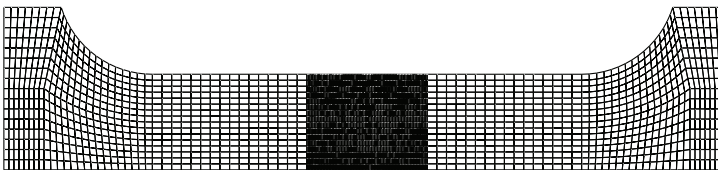
(a) Maillage grossier ( $6 \times 6$  éléments sur la zone de striction).



(b) Maillage intermédiaire ( $15 \times 8$  éléments sur la zone de striction).



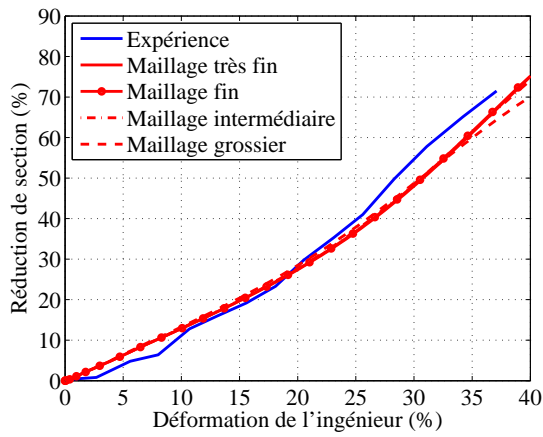
(c) Maillage fin ( $40 \times 10$  éléments sur la zone de striction).



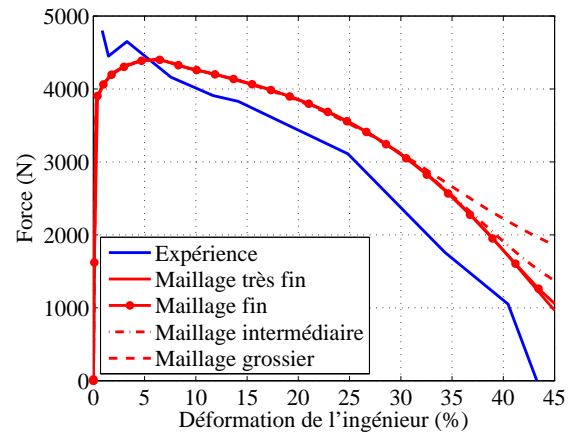
(d) Maillage très fin ( $80 \times 16$  éléments sur la zone de striction).

FIG. 4.19 – Maillages considérés.

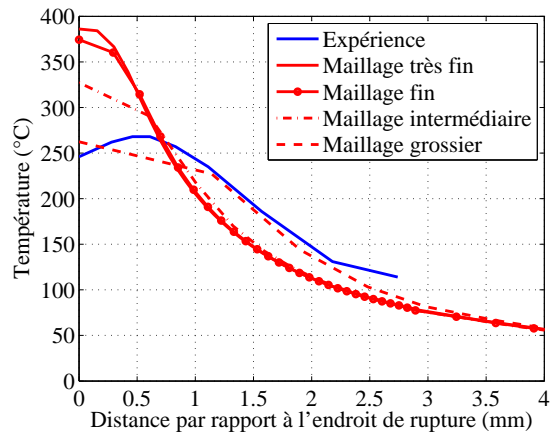




(a) Réduction de section.



(b) Force transmise.



(c) Température au moment de la rupture.

FIG. 4.20 – Influence du maillage sur la prédiction des résultats.

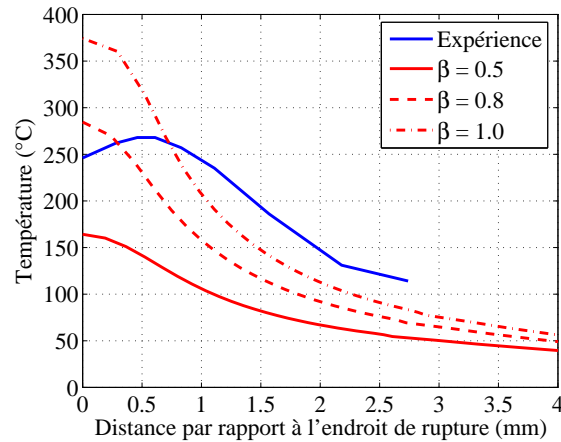


FIG. 4.21 – Effet du facteur de Taylor-Quinney.

## 4.4 Application 3 : Test de traction à grande vitesse

### 4.4.1 Introduction

La troisième application proposée est une application réalisée en collaboration avec Madame S. Bouvier<sup>1</sup> du Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux l'Université Paris 13<sup>2</sup>. Des tests expérimentaux de traction à grande vitesse ont été menés en laboratoire sur deux aciers haute résistance de type TRIP800 (Transformation Induced Plasticity) et DP800 (acier dual phase), deux matériaux fréquemment utilisés dans l'industrie automobile pour leur bonne ductilité et leur résistance au crash. Des simulations par éléments finis ont été menées sur base de ces essais de traction à l'aide du logiciel commercial MSC-MARC (MSC Corporation, Santa Ana, CA, USA<sup>3</sup>). Le même problème a ensuite été étudié avec Metafor. Il constitue dès lors une comparaison de premier plan pour la validation de l'implémentation numérique des lois constitutives et des algorithmes d'intégration.

### 4.4.2 Données du problème

Le schéma du test de traction est présenté à la figure 4.22. La zone utile de traction est la zone centrale de l'éprouvette. Le montage expérimental est composé du spécimen proprement dit, ainsi que d'un renforcement percé d'un trou. Un anneau est glissé dans ce trou et le déplacement de celui-ci pilote le processus.

La géométrie du problème étudié, ainsi que les fixations et le chargement, sont représentés à la figure 4.23. Les données géométriques de la structure sont résumées dans le

<sup>1</sup>[http://www-lpmtm.univ-paris13.fr/Pages\\_Perso/CMSH/Salima\\_fr.htm](http://www-lpmtm.univ-paris13.fr/Pages_Perso/CMSH/Salima_fr.htm)

<sup>2</sup><http://www-lpmtm.univ-paris13.fr/>

<sup>3</sup><http://www.mssoftware.com/products/marc.cfm>

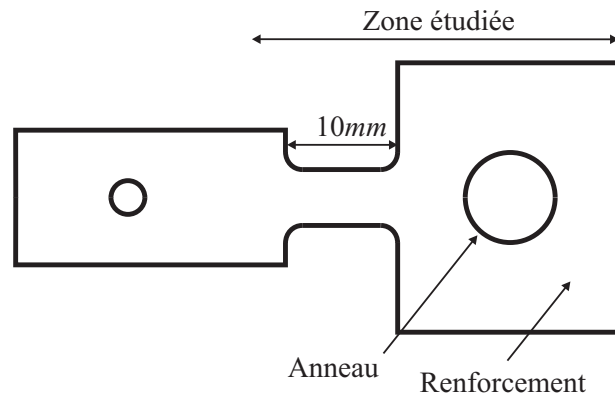


FIG. 4.22 – Schéma de l'éprouvette de traction.

tableau 4.13. L'épaisseur du spécimen est de  $0.6\text{mm}$  pour l'acier DP800 et de  $0.7\text{mm}$  pour l'acier TRIP800. Le renforcement a une épaisseur de  $0.5\text{mm}$  de part et d'autre du spécimen. L'anneau est modélisé par une surface cylindrique rigide dont le mouvement contrôle le processus. L'extrémité gauche du spécimen est fixée dans la direction de chargement.

En considérant les deux plans de symétrie du problème (dans le plan  $XoZ$  et le plan  $XoY$ ), seul un quart de la structure est modélisé. La partie gauche de l'éprouvette est fixée horizontalement. La partie inférieure de l'éprouvette est fixée verticalement pour des raisons de symétrie. Toujours pour des raisons de symétrie, le plan  $z = 0$  est fixé dans la troisième direction. La température initiale est de  $293\text{K}$ . Le temps total de simulation est de  $0.0006\text{s}$ .

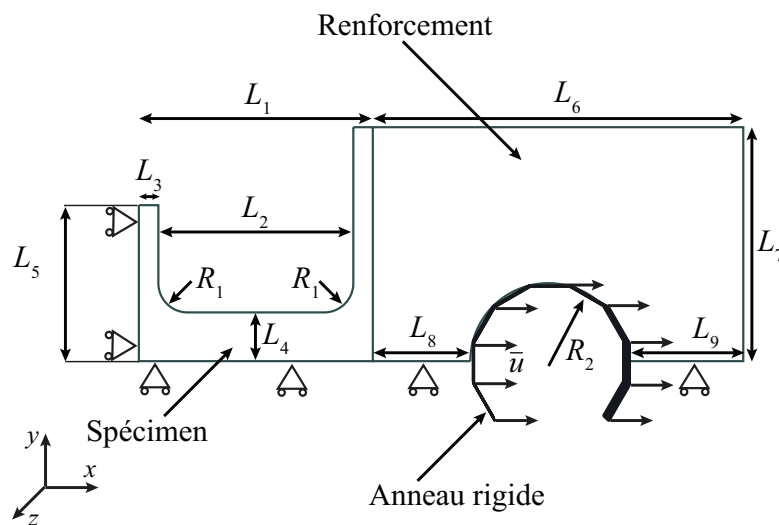


FIG. 4.23 – Géométrie et chargement (déplacement imposé à l'anneau).

Données géométriques	Valeur
Éprouvette	
Longueur du spécimen	$L_1 = 12.0mm$
Longueur de la zone utile	$L_2 = 10.0mm$
Rayon des congés de la zone utile	$R_1 = 1.5mm$
Longueur $L_3$	$L_3 = 1.0mm$
Hauteur de la zone utile	$L_4 = 2.5mm$
Hauteur du spécimen	$L_5 = 8.0mm$
Renforcement	
Longueur du renforcement	$L_6 = 17.0mm$
Hauteur du renforcement	$L_7 = 12.0mm$
Rayon de l'anneau	$R_2 = 4.0mm$
Longueur à gauche de l'anneau	$L_8 = 5.0mm$
Longueur à droite de l'anneau	$L_9 = 6.0mm$

TAB. 4.13 – Données géométriques du test.

Le comportement du matériau est modélisé par la loi de Johnson-Cook (2.2). Les paramètres de cette loi ont été identifiés à partir des données expérimentales de ces tests de traction à grande vitesse (voir Jeunechamps et al. [121]) pour les deux aciers considérés. Les données du matériau sont présentées dans le tableau 4.14.

### 4.4.3 Modélisation par le code éléments finis MSC.MARC

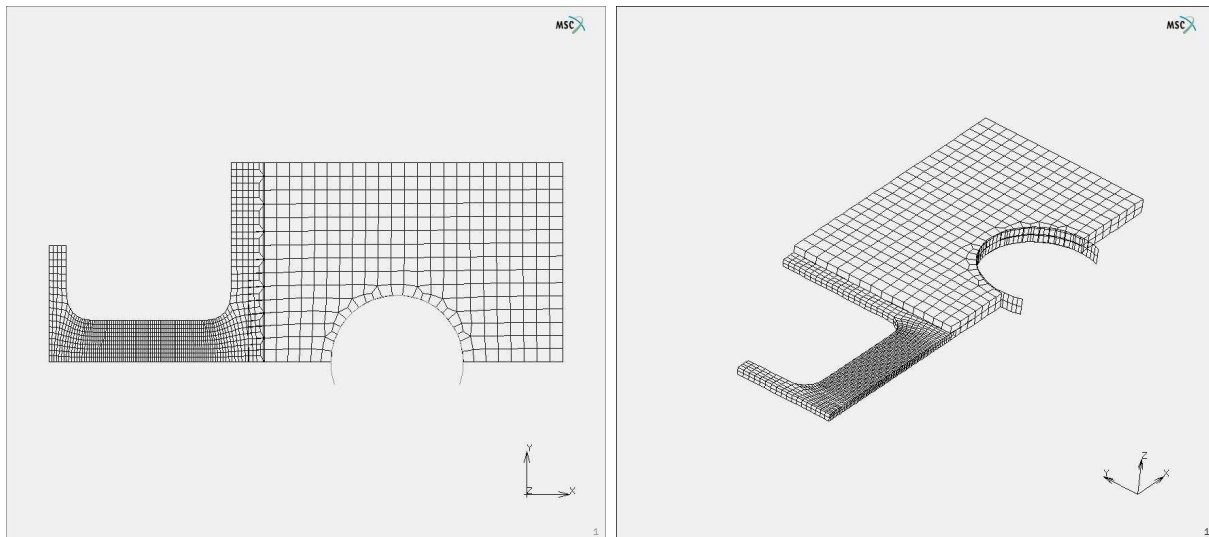
Le modèle éléments finis de la barre est présenté à la figure 4.24. Il consiste en deux parties : le spécimen proprement dit et le renforcement percé d'un trou. Le modèle éléments finis MARC compte 2730 éléments volumiques à huit points d'intégration avec intégration réduite de la partie volumique de la déformation (éléments de type SRI). Deux éléments sont placés selon l'épaisseur de l'échantillon.

### 4.4.4 Modélisation par Metafor

Le modèle Metafor compte 2810 éléments finis thermomécaniques tridimensionnels, également de type SRI. Le maillage est conçu pour coller le plus possible au maillage utilisé dans MSC.MARC. La précision d'intégration temporelle est de  $10^{-6}$ , tant pour la résolution du problème mécanique (expression (3.10)) que du problème thermique (expression (3.25)). Le maillage initial est présenté à la figure 4.25. Comme dans le cas de la modélisation réalisée avec MSC.MARC, le contact entre l'anneau rigide et le renforcement est supposé sans frottement.

Paramètres mécaniques et thermiques	Valeur	
Module de Young $E$ (Mpa)	210000.0	
Coefficient de Poisson $\nu$	0.3	
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	7874.0	
Conductivité thermique $k$ (W/mK)	45.0	
Chaleur spécifique $c$ (J/KgK)	451.8	
Coefficient d'expansion thermique $\alpha$ (K <sup>-1</sup> )	1.0e - 5	
Facteur de Taylor-Quinney $\beta$	1.0	
Paramètres de la loi de Johnson-Cook		
$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right) \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m\right)$		
	Acier DP800	Acier TRIP800
$A$ (Mpa)	205.0	190.0
$B$ (Mpa)	1610.0	1590.0
$n$	0.223	0.275
$C$	0.006409	0.001837
$\dot{\varepsilon}_0$ (s <sup>-1</sup> )	1.0	1.0
$m$	0.37	0.54
$T_{room}$ (K)	293.0	293.0
$T_{melt}$ (K)	1809.0	1809.0

TAB. 4.14 – Paramètres matériau des aciers TRIP800 et DP800.



(a) Vue de face.

(b) Vue en plan.

FIG. 4.24 – Modèle éléments finis MARC.

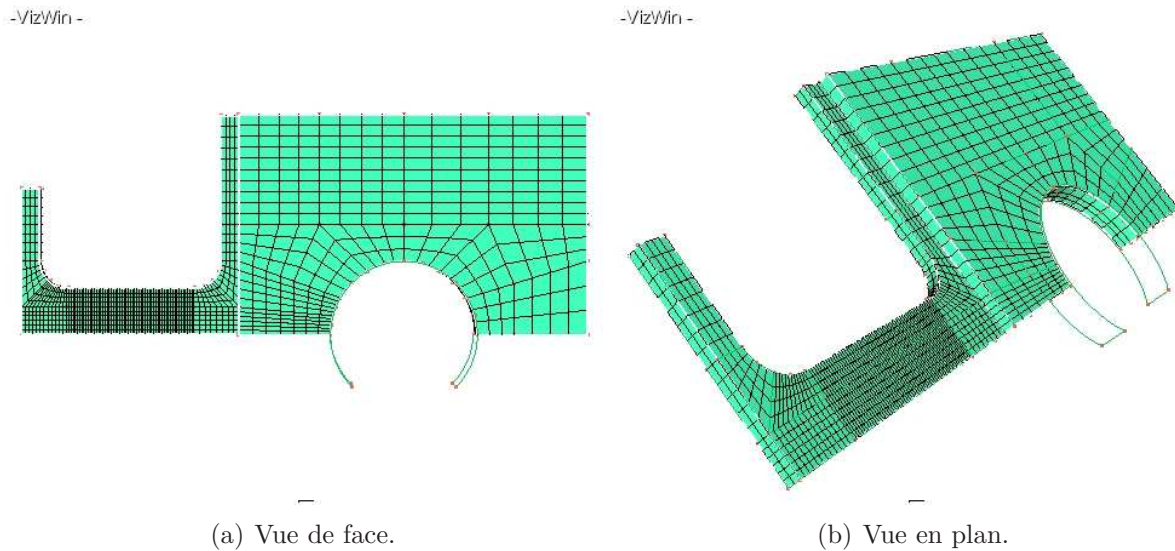


FIG. 4.25 – Modèle éléments finis Metafor.

#### 4.4.5 Résultats et comparaisons

Les distributions finales de vitesse de déformation plastique équivalente et de température sont présentées à la figure 4.26 dans le cas de l'acier TRIP800, en zoomant sur la zone utile de l'éprouvette. A ce moment du test, le spécimen est rompu. C'est pourquoi nous examinons également la configuration de ces deux grandeurs juste avant le début de la striction (figure 4.27). A cet instant, la température et la vitesse de déformation plastique sont pratiquement uniformes au centre de la zone utile. Nous sommes dans une configuration où l'hypothèse de traction uniaxiale est d'application. Cette hypothèse de traction uniaxiale a été étudiée en détails par l'auteur [121] et nous n'y revenons pas ici, le but du travail étant de valider les tests dans Metafor.

Une première comparaison entre les résultats obtenus avec les deux logiciels est effectuée sur les courbes de traction contrainte-déformation. La contrainte calculée par éléments finis est simplement la contrainte de Cauchy prise dans l'élément central de la zone utile tandis que la déformation vraie est la déformation vraie calculée au centre de cet élément dans la direction de sollicitation (moyennant les hypothèses de traction uniaxiale et d'homogénéité de la déformation, voir Jeunechamps et al. [121]).

Les résultats sont présentés sur la figure 4.28 pour les deux aciers. L'accord entre les deux courbes numériques est très bon, ce qui valide l'implémentation des lois constitutives thermomécaniques. Dans le cas de l'acier TRIP800, la loi constitutive est trop pauvre pour capter le pic de la contrainte en début de plastification.

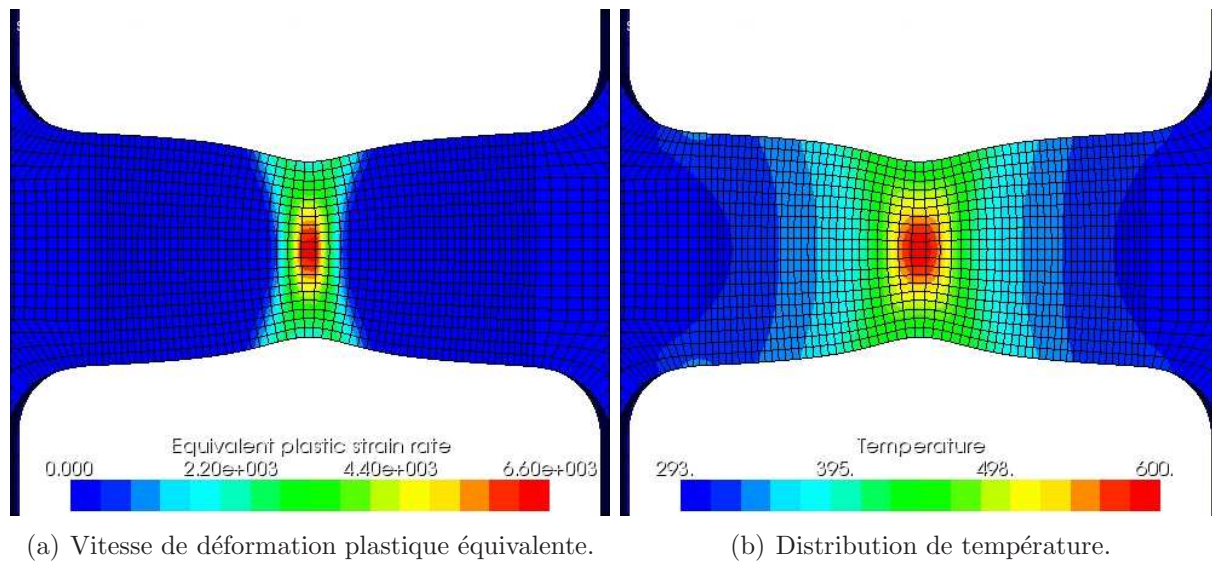


FIG. 4.26 – Acier TRIP800. Configuration finale.

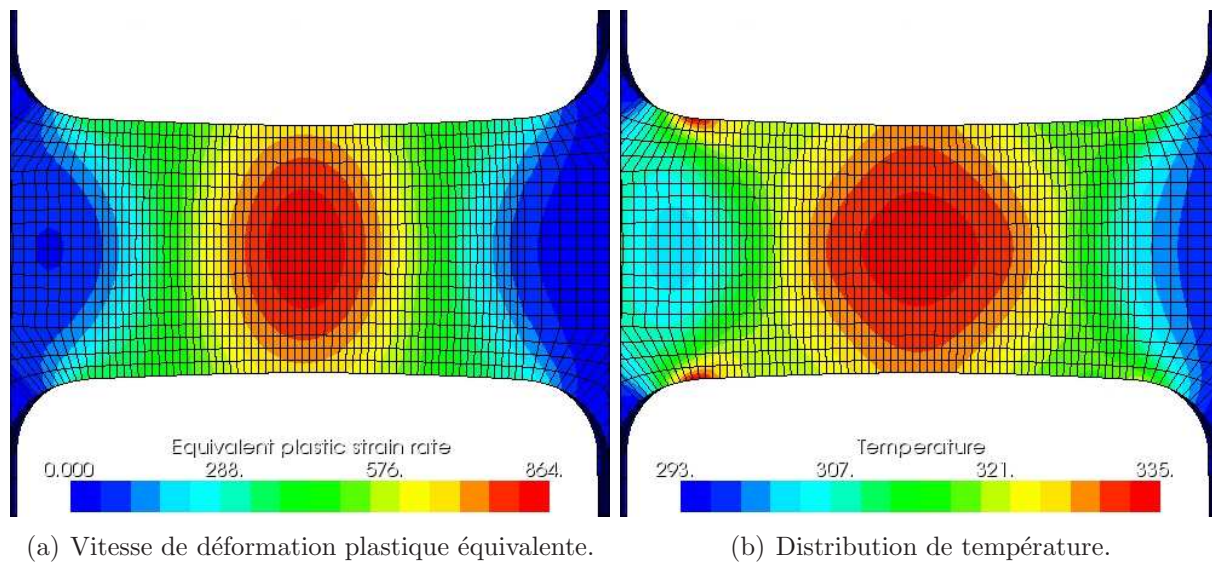


FIG. 4.27 – Acier TRIP800. Configuration avant striction.

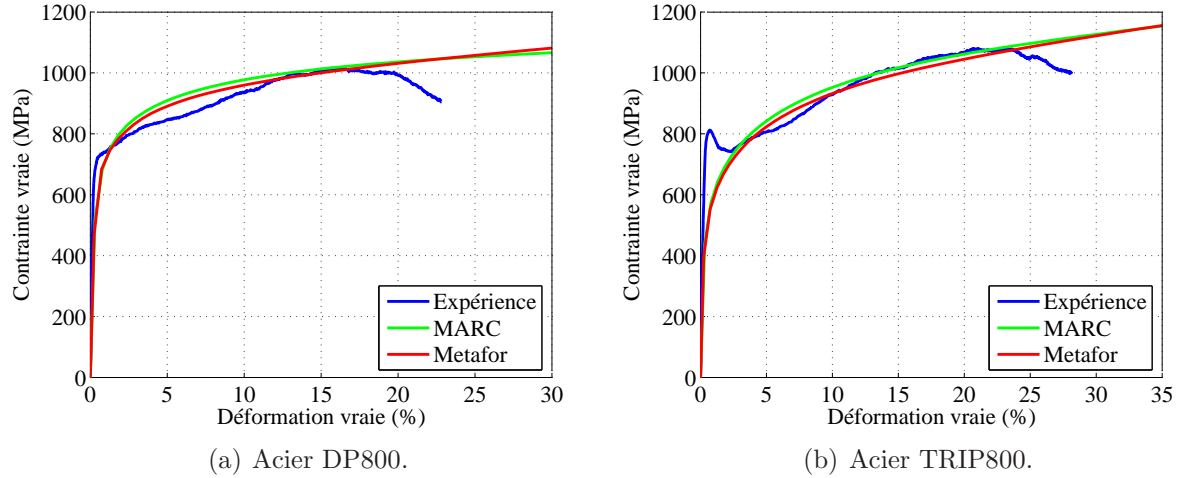


FIG. 4.28 – Courbe contrainte-déformation.

Une seconde comparaison est réalisée sur l'évolution de la température au centre du spécimen, entre les températures calculées "expérimentalement"<sup>1</sup> et numériquement. L'incrément de "température expérimentale" est déterminé en faisant l'hypothèse d'un phénomène adiabatique et en négligeant la partie élastique de la déformation. Il est alors déterminé à partir de la contrainte et de l'incrément de la déformation expérimentale :

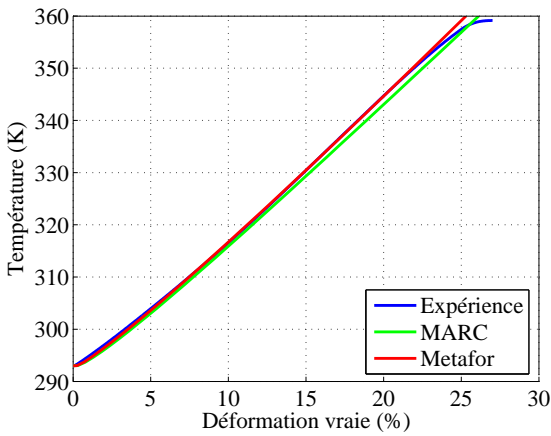
$$\Delta T_{i+1}^{exp} = \frac{\beta}{\rho c} \frac{\sigma_{i+1}^{exp} + \sigma_i^{exp}}{2} (\varepsilon_{i+1}^{exp} - \varepsilon_i^{exp}) \quad (4.6)$$

où la valeur de la contrainte  $\sigma$  est moyennée sur l'incrément de déformation. L'indice  $i$  correspond à la mesure expérimentale  $i$  de la déformation et de la contrainte.

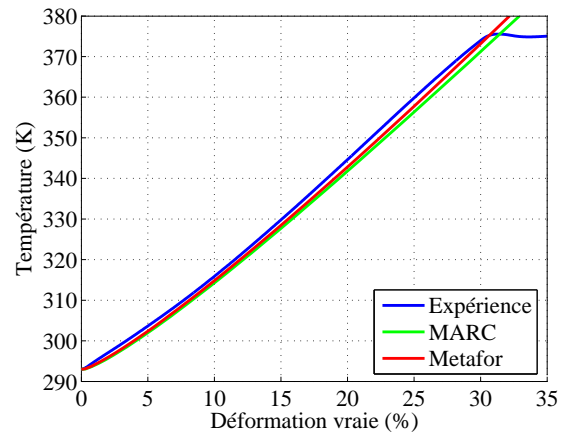
Les résultats de cette comparaison sont présentés à la figure 4.29 pour les deux aciers. Encore une fois, l'accord est très bon entre les résultats obtenus avec MSC.MARC et avec Metafor. Cela permet également de justifier l'hypothèse adiabatique choisie pour calculer l'élévation de température à l'intérieur du spécimen à partir des contraintes et des déformations expérimentales. Pour des déformations vraies supérieures à 25% pour l'acier DP800, et à 30% pour l'acier TRIP800, la température calculée à partir des données expérimentales atteint un palier. Ce palier correspond à la rupture du matériau.

<sup>1</sup>Nous n'avons pas de mesure expérimentale de la température tout au long du processus de traction. Le terme "température expérimentale" est utilisé dans le sens où celle-ci est calculée à partir d'autres résultats expérimentaux.





(a) Acier DP800.



(b) Acier TRIP800.

FIG. 4.29 – Evolution de la température au centre de l'éprouvette.

## 4.5 Conclusions

Par les trois applications présentées dans ce chapitre, nous avons montré le bon accord obtenu entre, d'une part, les résultats expérimentaux, et d'autre part, les résultats provenant de codes de calcul commerciaux. En ce qui concerne les lois constitutives, nous avons également montré l'intérêt d'utiliser de tels modèles de comportement du matériau. Les algorithmes  $\alpha$ -généralisés se sont également montrés tout à fait efficaces pour décrire les phénomènes étudiés. Nous avons illustré l'avantage d'introduire de la dissipation numérique dans l'intégration mécanique des équations du mouvement au niveau du gain réalisé sur le temps de calcul sans pour autant affecter la qualité de la solution.



# Conclusions de la première partie

Dans le chapitre 2, nous avons tout d'abord décrit les principales lois constitutives utilisées dans le cadre des grandes vitesses de déformation. Les lois de Johnson-Cook, Zerilli-Armstrong et Cowper-Symonds ont été testées et validées dans Metafor par des comparaisons avec des codes de calcul commerciaux et des résultats expérimentaux.

Un algorithme général d'intégration de ces lois a été proposée via une formulation de l'intégration par la méthode du retour radial étendu et le calcul de la matrice de raideur tangente matérielle dans le cadre de la formulation hypoélastique des modèles matériau. Cette formulation générale présente le grand avantage de permettre l'implémentation de nouvelles lois, moyennant un effort minimal de programmation. De plus, cette méthode d'intégration a été implémentée dans le cadre thermomécanique étendu qui permet de prendre en compte la variation des paramètres matériau avec la température, variation rendue nécessaire par l'augmentation non négligeable de la température aux endroits critiques.

Dans le chapitre 3, une généralisation thermomécanique des algorithmes implicites de la famille  $\alpha$ -généralisée a été proposée par l'utilisation d'un schéma de résolution thermomécanique de type étagé. Cette méthode numérique permet de coupler les effets d'inertie mécanique et la résolution générale du problème thermique (équation de la chaleur), et de passer outre l'hypothèse d'adiabaticité utilisée généralement dans les codes de calcul explicites pour résoudre le problème thermique en dynamique rapide. L'influence de ces effets d'inertie a été mise en évidence notamment pour le test de la barre d'Hopkinson (section 4.3).

L'utilisation de tels algorithmes a encore une fois été validée par la comparaison entre les résultats obtenus par Metafor et ceux provenant de l'utilisation de codes commerciaux. Dans cette comparaison, nous avons mis l'accent sur les aspects thermomécaniques, notamment dans le test de la barre d'Hopkinson (section 4.3) et le test de traction à grande vitesse (section 4.4).

Dans toute cette première partie, nous n'avons pas tenu compte de la dégradation des propriétés du matériau lors de la sollicitation. En effet, les matériaux modélisés par les modèles constitutifs décrits à la section 2.3 peuvent être, en théorie, soumis à des déformations infinies sans perdre leur capacité de résistance. Dans la deuxième partie de ce travail, nous envisagerons l'utilisation de modèles permettant de passer outre cette limitation.



# Chapitre 5

## Endommagement des matériaux à comportement ductile

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons décrire une méthode d'évaluation de la dégradation irréversible des propriétés du matériau sous l'effet de la sollicitation, dégradation qui n'a pas été considérée jusqu'à présent. C'est le phénomène d'endommagement.

Un grand nombre de modèles d'endommagement est proposé dans la littérature. Ces modèles peuvent être classés en trois grandes catégories :

1. les critères de rupture abrupt ;
2. les modèles de plasticité tenant compte des vides microscopiques dans la structure ;
3. les modèles de la mécanique de l'endommagement continu.

Dans la première catégorie, la rupture a lieu lorsqu'une variable liée à l'état du matériau (fonction par exemple de la déformation plastique équivalente, de la pression, de la limite élastique et du niveau de la triaxialité des contraintes) atteint une valeur critique. Dans la deuxième catégorie, l'effet de l'endommagement ductile est pris en compte dans l'évolution de la surface de plasticité par un terme de porosité (voir section 5.2). Dans la troisième approche, l'endommagement est supposé faire partie de l'ensemble des variables internes du modèle constitutif du matériau.

On a coutume de distinguer plusieurs types d'endommagement, selon l'application étudiées. Les principaux domaines d'application de l'endommagement sont liés au fluage, à la fatigue et à la rupture fragile ou ductile des matériaux. Vu le type d'applications considérées dans ce travail, nous laisserons de côté les lois d'endommagement dû au fluage, à la fatigue et les lois d'endommagement de matériaux fragiles pour nous concentrer exclusivement sur les modèles d'endommagement de matériaux ductiles, éventuellement soumis à des sollicitations dynamiques.

L'endommagement résultant des déformations plastiques pour les matériaux ductiles est essentiellement dû à la formation de microcavités qui s'initient principalement à cause de ruptures à l'échelle microscopique. La croissance de ces microcavités réduit progressivement la capacité du matériau à supporter un chargement donné et peut aboutir à la ruine du matériau. Une modélisation adéquate de ces micro-mécanismes à l'échelle mésoscopique est la base d'une prédiction précise de la rupture ductile des structures macroscopiques.

Dans le cadre de notre approche pragmatique, nous n'utiliserons pas ce type de modèles, mais bien des lois d'endommagement macroscopiques éventuellement basées sur ces modèles microscopiques. Cependant, vu le développement important de modèles multi-échelles, nous attacherons une grande importance à la généralité de la programmation de l'endommagement des matériaux. Nous établirons ainsi dans le code de calcul Metafor une plate-forme susceptible d'accueillir de tels modèles micro-macroscopiques.

Une différence fondamentale par rapport à la plasticité sans endommagement est le fait qu'il faut tenir compte de la pression hydrostatique dans la loi de comportement : la limite élastique dépend non seulement de la déformation plastique équivalente  $\bar{\varepsilon}^{pl}$  mais, également de la pression  $p$ .

Le but de ce chapitre est d'établir le formalisme mathématique nécessaire à l'intégration des lois constitutives avec endommagement selon une approche d'endommagement continu. Les principales hypothèses de travail sont les suivantes :

- le critère de plasticité est de type  $J_2$  ;
- l'écrouissage est isotrope (éventuellement avec des effets visqueux) ;
- l'endommagement est isotrope et est donc représenté par une variable scalaire.

La théorie de l'endommagement adoptée ici (voir section 5.3) est celle de l'endommagement continu (voir entre autres Lemaitre [149]) dans laquelle l'intégration du modèle d'endommagement est couplée à celle de la loi constitutive. Ainsi, l'endommagement influence directement la résistance du matériau durant le processus de déformation plastique. Notons cependant que la formulation proposée dans ce chapitre n'est pas limitée aux lois d'endommagement couplées à la plasticité : l'évolution de l'endommagement peut être couplée aux autres éléments de la loi constitutive (par exemple dans des modèles d'endommagement biomédicaux, l'endommagement est seulement fonction de la pression et de la contrainte équivalente de Von Mises).

Comme pour les lois constitutives (voir section 2.3), nous mettons l'accent sur les modèles d'endommagement que nous appelons "dynamiques", c'est-à-dire où l'évolution de la variable d'endommagement est fonction à la fois du niveau et de la vitesse de déformation.

Nous attachons également une grande importance à nous placer dans le cadre le plus général possible pour l'intégration des lois d'évolution d'endommagement, afin de rendre aisé et immédiat le couplage de ces lois avec les lois constitutives décrites au chapitre 2.

Le chapitre est structuré de la manière suivante. Dans un premier temps (section 5.3), nous décrivons la formulation dans le cadre des petites déformations, et les principaux modèles d'endommagement continu de la littérature (section 5.4). Dans un deuxième temps, nous étendons cette formulation pour les problèmes de grandes transformations (section 5.5), dans le cadre thermomécanique. Enfin, nous proposons une méthode unifiée de calcul de la matrice de raideur matérielle pour un modèle matériau hypoélastique avec endommagement (section 5.6).

## 5.2 Modèle d'endommagement de type Gurson

### 5.2.1 Introduction

Ce modèle d'endommagement est largement présent dans la littérature (voir entre autres [2, 16, 67, 102, 167, 252, 260, 274]). Il est utilisé aussi bien dans le cadre d'applications quasi-statiques dans Adam [2] ou Stainier [252] que dynamiques dans Markiewicz et Langrand [167], Barton [16] ou Williams et al. [274], et ce, même s'il n'est pas un modèle d'endommagement dynamique. Markiewicz et Langrand [167], ainsi que Barton [16], couplent ce modèle avec une loi constitutive de Johnson-Cook. Williams et al. [274] simulent des écrasements de longerons en utilisant cette formulation. Nous ne reprenons ici que les principes de base de ce modèle. En effet, nous n'utilisons pas ce type de modélisation de l'endommagement dans nos développements. Nous le présentons uniquement par souci d'exhaustivité. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur entre autres à Stainier [252] ou Habraken [103].

Le modèle, proposé initialement par Gurson [102] et amélioré par Tvergaard et Needleman [259–261], définit la variable d'endommagement comme la fraction volumique de vides (porosité) :

$$D = \frac{V_A - V_M}{V_A}$$

où  $V_A$  est le volume élémentaire apparent du matériau, et  $V_M$  le volume élémentaire réellement occupé par la matière.

D'autres auteurs ont étendu ce modèle d'endommagement. Citons simplement pour mémoire les extensions de Mathur et al. [172] ou Croix et al. [62] qui proposent une formulation anisotrope de l'endommagement basée sur le modèle de Gurson. Dans le même ordre d'idées, Molinari [183, 184] propose également des lois de croissance dynamiques des vides.

### 5.2.2 Evolution de l'endommagement

L'évolution de l'endommagement est calculée de façon incrémentale en supposant une contribution additive de trois phases d'endommagement menant à la rupture du matériau :

$$\dot{D} = \dot{D}_n + \dot{D}_g + \dot{D}_c$$

où

- $\dot{D}_n$  est la nucléation de nouveaux vides dans la matière ;
- $\dot{D}_g$  est la croissance des vides existants ;
- $\dot{D}_c$  est la coalescence de vides voisins (fusion de deux vides en un seul).

L'endommagement scalaire en un point matériel à l'instant  $t + \Delta t$  est donné, à partir de l'endommagement à l'instant  $t$  par :

$$D(t + \Delta t) = D(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{D} d\tau$$

L'augmentation de la fraction volumique de vides par nucléation,  $\dot{D}_n$ , est fonction de l'évolution de la déformation plastique équivalente. Elle peut, par exemple, être décrite par une expression gaussienne selon la déformation plastique équivalente, de variance  $S_n$  et de valeur moyenne  $\varepsilon_n$  :

$$\dot{D}_n = \frac{D_n^{max}}{S_n \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^{pl} - \varepsilon_n}{S_n}\right)^2\right) \dot{\varepsilon}^{pl}$$

où  $D_n^{max}$  est la fraction volumique totale de particules donnant naissance à des vides. La loi de nucléation des vides prend cependant plus souvent la forme simple suivante (voir Leblond [142]) :

$$\dot{D}_n = A \dot{\varepsilon}^{pl}$$

où  $A$  est un paramètre matériau.

Ensuite, la croissance des micro cavités existantes,  $\dot{D}_g$ , est décrite par l'expression suivante qui provient du changement de volume apparent, de la conservation de la masse et de l'hypothèse d'incompressibilité des déformations plastiques (en supposant que  $\dot{\varepsilon} \simeq \dot{\varepsilon}^{pl}$ ) :

$$\dot{D}_g = (1 - D) \operatorname{tr}(\dot{\varepsilon}^{pl})$$

Enfin, en fonction du seuil de coalescence des vides (l'endommagement franchit une valeur seuil  $D_c$  au-delà de laquelle il y a coalescence), l'endommagement total  $D^*$  est finalement donné par :

$$D^* = \begin{cases} D & \text{si } D \leq D_c \\ D_c + \frac{D_u - D_c}{D_f - D_c} (D - D_c) & \text{si } D > D_c \end{cases}$$

où  $D_u$  est la valeur ultime de l'endommagement au-delà de laquelle il y a rupture du matériau ;  $D_f$  est un paramètre matériau (porosité à la rupture du matériau).



### 5.2.3 Critère de plasticité

Le critère de Von Mises est modifié (voir Tvergaard [259]) et s'écrit maintenant :

$$F = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_{crit}^2} + 2q_1 D^* \cosh\left(\frac{3}{2}q_2 \frac{p}{\sigma_{crit}}\right) - (1 + q_3 D^{*2}) \quad (5.1)$$

où  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  sont des paramètres matériau.

Comme on le voit dans l'expression (5.1), la plasticité devient dépendante de la pression et n'est donc plus de type purement déviatorique. La dépendance selon la triaxialité est exponentielle.

### 5.2.4 Prise en compte de la dégradation des paramètres élastiques

L'approche classique de Gurson néglige l'adoucissement des paramètres élastiques dû à l'endommagement (le module de compressibilité cubique  $K$  et le module de cisaillement  $G$ ). Perzyna [214], Eftis [79] ou encore Stainier [252] (repris dans Adam [2]) utilisent une modification du modèle de Gurson pour considérer cet adoucissement selon les relations de Mackenzie [161] :

$$K_D = \frac{4K_0 G_0 (1 - D)}{4G_0 + 3K_0 D}$$

$$G_D = \frac{G_0 (1 - D)}{1 + \frac{6K_0 + 12G_0}{9K_0 + 8G_0} D}$$

où  $K_0$  et  $G_0$  sont respectivement les modules de compressibilité cubique et de cisaillement du matériau vierge de tout endommagement. Bodner [46] et Zhu [283] tiennent aussi compte de l'adoucissement des paramètres élastiques, mais ils utilisent un modèle d'endommagement anisotrope que nous n'abordons pas ici.

## 5.3 Modèle d'endommagement continu

### 5.3.1 Introduction et généralités sur la théorie de l'endommagement continu

La notion d'endommagement a été introduite pour la première fois par Kachanov [127] en 1958. La théorie de l'endommagement continu a été émise par Chaboche [45, 147] en 1978. C'est une approche macroscopique de l'endommagement. Le champ d'application de la théorie de l'endommagement continu est très large. Ainsi, Lemaitre et Chaboche [146] l'ont utilisée pour la première fois pour décrire la rupture fragile d'un béton dans le cadre de cycles de fatigue. Elle est actuellement utilisée, non seulement pour des problèmes de fatigue, mais également pour des problèmes de fluage ou encore d'endommagement ductile.

La théorie de l'endommagement continu de Lemaitre et Chaboche est une théorie phénoménologique de l'endommagement, en comparaison avec l'endommagement de type Gurson (voir section 5.2), qui est un modèle d'endommagement micro-macroscopique. Le lecteur intéressé par la comparaison des modèles d'endommagement micro-macro et des modèles phénoménologiques peut se reporter à Stainier [252] ou à Habraken [103] et aux références tirées de ces ouvrages.

Nous avons choisi de considérer la théorie de l'endommagement continu pour deux raisons principales. La première raison est que cette approche est établie dans le cadre thermomécanique dont nous avons mis en évidence l'intérêt aux chapitres précédents. De plus, comme nous le verrons dans la section 5.4, les types de lois d'évolution de la variable d'endommagement utilisant la théorie de l'endommagement continu peuvent revêtir des formes très diverses. En effet, ces lois d'évolution sont chacune adaptées au type d'application étudiée. En particulier, il existe des modèles d'endommagement continu spécifiquement élaborés pour des applications telles que celles étudiées dans le cadre de ce travail, à savoir la description thermomécanique de phénomènes à dynamique rapide.

### 5.3.2 Définition de la variable d'endommagement isotrope

Considérons un solide endommagé dans lequel est isolé un élément de volume fini, d'une taille suffisamment grande par rapport à l'hétérogénéité du milieu. Soit  $S$  l'aire d'une section de ce volume, repérée par sa normale  $\vec{n}$ . Dans cette section, les fissures et les cavités constituant l'endommagement laissent des traces de formes diverses (vides, concentrations de contraintes...). Soit  $\tilde{S}$  l'aire résistante effective ( $\tilde{S} \leq S$ ) tenant compte de l'aire de ces traces, des concentrations de contraintes au voisinage des discontinuités géométriques et des interactions entre défauts voisins. La mesure mécanique de l'endommagement local relatif à la direction  $\vec{n}$  est alors définie par :

$$D_{\vec{n}} = \frac{S - \tilde{S}}{S}$$

D'un point de vue physique, la variable d'endommagement  $D_{\vec{n}}$  est donc l'aire relative des fissures et cavités coupées par le plan normal à la direction  $\vec{n}$ . D'un point de vue mathématique, en faisant tendre  $S$  vers 0, la variable  $D_{\vec{n}}$  est la densité surfacique des discontinuités de la matière dans le plan normal à  $\vec{n}$ . On a :

- $D_{\vec{n}} = 0$  pour un solide non endommagé ou vierge ;
- $D_{\vec{n}} = 1$  pour un élément de volume du solide, rompu en deux parties selon un plan normal à  $\vec{n}$  ;
- $0 \leq D_{\vec{n}} < 1$  pour un solide dans un état endommagé.

Dans le cas d'un endommagement anisotrope, constitué de fissures et de cavités d'orientations privilégiées, la valeur de la variable scalaire  $D_{\vec{n}}$  dépend de l'orientation de la normale  $\vec{n}$ . La variable intrinsèque correspondante est alors représentée par un tenseur du quatrième ordre dans le cas le plus général.

Dans l'hypothèse de l'endommagement isotrope<sup>1</sup>, l'orientation des fissures et cavités est distribuée uniformément dans toutes les directions. Dans ce cas, la valeur de la variable  $D_{\vec{n}}$  ne dépend pas de l'orientation de  $\vec{n}$  et le scalaire  $D$  caractérise l'état d'endommagement :

$$D_{\vec{n}} = D \quad \forall \vec{n}$$

Nous faisons également l'hypothèse que l'endommagement est de type cumulatif : l'endommagement total en un point de la structure est la somme des dommages subis en ce point au cours du temps. Il vient donc :

$$D(t + \Delta t) = D(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{D} d\tau \quad (5.2)$$

où  $\dot{D}$  représente la vitesse d'évolution de l'endommagement.

### 5.3.3 Modèle thermodynamique de Lemaitre

#### 5.3.3.1 Introduction

Nous ne rappelons ici que les grands principes de la théorie. Pour plus de détails, le lecteur intéressé peut consulter les ouvrages de Lemaitre [147, 149]. Nous nous limitons dans ce travail au cas des matériaux endommageables présentant un comportement élastique, élastoplastique ou élasto-viscoplastique. Les matériaux au comportement viscoélastique ne sont pas étudiés ici. Rappelons que l'endommagement est supposé isotrope.

#### 5.3.3.2 Notion de contraintes effectives

On appelle contrainte effective, la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts. Dans le cas unidimensionnel, si  $F$  est la force appliquée sur une section  $S$  de l'élément de volume représentatif,  $\sigma = \frac{F}{S}$  est la contrainte usuelle qui satisfait les équations d'équilibre. En présence d'endommagement isotrope  $D$ , la section résistante effective est donnée par (cf. expression (5.2)) :

$$\tilde{S} = S(1 - D)$$

et la contrainte effective  $\tilde{\sigma}$  est définie par :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{\sigma}{1 - D}$$

On a évidemment  $\tilde{\sigma} \geq \sigma$  ; pour un matériau vierge,  $\tilde{\sigma} = \sigma$  et  $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$  au moment de la rupture.

---

<sup>1</sup>Nous nous limitons à ce cas dans ce travail.

Dans le cas tridimensionnel d'un endommagement isotrope, le tenseur des contraintes effectives  $\tilde{\sigma}$  s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (5.3)$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes réelles de Cauchy<sup>1</sup>.

### 5.3.3.3 Principe d'équivalence en déformations

Le principe repose sur l'hypothèse que le comportement à la déformation de la matière n'est affecté par l'endommagement que sous la seule forme des contraintes effectives. On en déduit le principe d'équivalence en déformations (voir Lemaitre [146]) : *"Tout comportement à la déformation, unidimensionnel ou tridimensionnel, d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles les contraintes usuelles sont remplacées par les contraintes effectives."*

Ainsi la loi d'élasticité linéaire du matériau endommagé s'écrit :

$$\epsilon^{el} = \frac{1}{1 - D} \mathbf{C}^{-1} : \sigma$$

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur d'élasticité d'ordre 4.

Notons, par souci de complétude, qu'il est également possible de travailler selon l'hypothèse d'équivalence en contraintes (voir Simo et Wu [245, 246]), associée à des déformations effectives, ou en énergie élastique (voir Cordebois [59, 60] ou Zhu et al. [284, 285]), associée à des contraintes et des déformations effectives. Nous ne détaillons pas les méthodes liées à ces deux dernières hypothèses. Le lecteur intéressé par une comparaison des trois hypothèses d'équivalence peut consulter le travail de Zhu [283]. Nous choisissons de travailler selon le principe d'équivalence en déformations, vu sa plus grande utilisation dans la littérature.

### 5.3.3.4 Formulation thermodynamique pour l'endommagement isotrope

#### Thermodynamique de l'endommagement

La théorie thermodynamique de l'endommagement pour la description de l'évolution de phénomènes irréversibles comporte trois étapes<sup>2</sup> :

---

<sup>1</sup>Il faut noter que, dans le cas le plus général d'un endommagement non isotrope, l'endommagement est représenté par un tenseur  $\mathbf{D}$  d'ordre 4 tel que les contraintes effectives s'écrivent :

$$\tilde{\sigma} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} : \sigma$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité du quatrième ordre.

<sup>2</sup>Rappelons que la théorie thermodynamique de l'endommagement continu présentée dans cette section est effectuée dans le cadre des petites déformations. L'extension pour les grandes déformations est présentée à la section 5.5.

- définition de variables d'état dont les valeurs à l'instant  $t$  définissent l'état présent des mécanismes décrits par ces variables ;
- définition d'un potentiel d'état dont dérivent des équations d'état et définition de forces thermodynamiques associées aux variables d'état ;
- définition d'un potentiel de dissipation dont dérivent les lois d'évolution des variables associées aux mécanismes de dissipation.

Ces trois étapes offrent plusieurs choix pour les définitions des variables et des potentiels. Une fois ce choix effectué, le second principe de thermodynamique doit être vérifié. Les deux potentiels introduisent une série de paramètres qui dépendent du matériau utilisé et de la température. Ils doivent bien entendu être identifiés. Nous n'abordons pas les techniques d'identification des paramètres matériau des lois d'endommagement dans ce travail. Le lecteur intéressé par ces techniques pourra consulter de manière générale Kleinermann et Ponthot [134, 219], Mahnken et Stein [162, 163] ou Nistor [193], ou Børvik et al. [36] et Lemaitre [148] pour des techniques d'identification spécifiques à l'endommagement.

### Variables thermodynamiques

Les variables d'état sont divisées en deux catégories : les variables observables et les variables internes. Les *variables observables* sont :

- le tenseur des déformations totales  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , associé au tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  ;
- la température  $T$ , associée à l'entropie spécifique  $s$ .

D'autre part, les *variables internes* sont :

- le tenseur des déformations plastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ , associé au tenseur des contraintes de Cauchy  $-\boldsymbol{\sigma}$  (voir ci-dessous) ;
- l'endommagement  $D$ , associé à la variable  $Y$  définie à l'aide du potentiel d'état ;
- les variables internes relatives à l'écrouissage  $V_k$ , associées aux forces thermodynamiques  $A_k$ .

### Potentiel d'état thermodynamique

Lemaitre [149] choisit d'utiliser comme potentiel d'état thermodynamique, l'énergie libre de Helmholtz  $\Psi$ . Ce potentiel thermodynamique  $\Psi$  est une fonction convexe de toutes les variables d'état observables et des variables internes :

$$\Psi = \Psi (\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, D, V_k)$$

En élasto-viscoplasticité et en petites déformations, les déformations agissent seulement à travers la différence  $\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ . On a dès lors :

$$\Psi = \Psi (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, T, D, V_k) = \Psi (\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, T, D, V_k)$$

d'où on déduit que la force thermodynamique associée au tenseur des déformations plastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  est bien l'opposé du tenseur des contraintes  $-\boldsymbol{\sigma}$ .

Il vient alors :

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \quad (5.4)$$

D'autre part, l'inégalité de Clausius-Duhem (second principe de la thermodynamique) s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \left( \dot{\Psi} + s\dot{T} \right) - \vec{q} \cdot \frac{\vec{g}}{T} \geq 0$$

où

- $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$  est le tenseur des vitesses de déformation totale ;
- $\rho$  est la masse volumique ;
- $s$  est l'entropie spécifique ;
- $\vec{q}$  est le vecteur des flux thermiques ;
- $\vec{g} = \nabla T$  est le gradient de température.

En introduisant (5.4) dans l'inégalité de Clausius-Duhem, il vient :

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} - \rho \left( s + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \vec{q} \cdot \frac{\vec{g}}{T} \geq 0$$

Pour une transformation élastique à température constante ( $\dot{T} = 0$ ) et uniforme ( $\vec{g} = \vec{0}$ ) qui, par définition, ne modifie pas les variables internes ( $\dot{V}_k = 0$ ), ni le tenseur des vitesses de déformation plastique ( $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = 0$ ), l'inégalité de Clausius doit être vérifiée quel que soit  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el}$ . On peut donc écrire, vu l'hypothèse d'additivité des déformations élastiques et plastiques  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}} \quad (5.5)$$

Cette égalité étant vérifiée, une transformation thermique uniforme ( $\vec{g} = 0$ ) peut être imaginée, telle que  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = 0$  et  $\dot{V}_k = 0$ . Celle-ci impose dès lors :

$$s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (5.6)$$

Les expressions (5.5) et (5.6) constituent les lois de la thermo-élasticité.

Par analogie avec les relations précédentes, les variables forces thermodynamiques, associées aux variables internes et à l'endommagement, sont définies par :

$$\begin{aligned} A_k &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \\ Y &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} \end{aligned}$$

Lemaitre [149] montre que la variable  $Y$  s'identifie, pour ce choix spécifique du potentiel  $\Psi$ , à la variation d'énergie élastique engendrée par une variation d'endommagement

à contraintes, température et variables internes  $V_k$  constantes. Son expression est donnée par :

$$Y = \frac{-1}{(1-D)^2} \left( \frac{\sigma_{eq}^2}{6G} + \frac{p^2}{2K} \right) \quad (5.7)$$

où  $K$  et  $G$  sont respectivement les modules de compressibilité cubique et de cisaillement du matériau.

### Potentiel de dissipation

Le potentiel thermodynamique  $\Psi$  permet d'écrire les relations d'état entre les variables observables et leurs forces thermodynamiques associées (ici  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $T$ , associées respectivement à  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $s$ ). Pour les variables internes, il ne permet la définition que de leurs variables associées. C'est l'objet du potentiel de dissipation qui décrit les processus dissipatifs et qui donne les relations entre les variables internes et leurs forces thermodynamiques associées.

Vu les relations (5.5) et (5.6), l'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} - Y\dot{D} - A_k \dot{V}_k - \vec{g} \cdot \frac{\vec{q}}{T} \geq 0$$

Cette inégalité est constituée d'une somme des produits de variables forces (ou variables duales),  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $Y$ ,  $A_k$  et  $\vec{g}$ , respectivement par les variables flux,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$ ,  $\dot{D}$ ,  $\dot{V}_k$  et  $-\frac{\vec{q}}{T}$ . La somme des trois premiers termes est appelé dissipation intrinsèque (ou dissipation mécanique). C'est la dissipation plastique augmentée des dissipations associées à l'évolution des autres variables internes et de l'endommagement. Elle est généralement dissipée sous forme de chaleur ou indirectement consommée sous forme de réorganisation au niveau microscopique. Le dernier terme représente la dissipation thermique par conduction.

Sous l'hypothèse du découplage entre dissipations thermique et mécanique, le second principe de la thermodynamique impose que la dissipation mécanique soit positive :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} - Y\dot{D} - A_k \dot{V}_k \geq 0 \quad (5.8)$$

Pour définir les lois complémentaires relatives aux processus dissipatifs, on postule l'existence d'un potentiel de dissipation (ou pseudo-potentiel), s'exprimant comme une fonction scalaire, continue et convexe par rapport aux variables flux  $\left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}, \dot{D}, \dot{V}_k, \frac{\vec{q}}{T} \right)$ , les variables d'état  $(\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, T, V_k, D)$  pouvant intervenir comme paramètres :

$$\varphi \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}, \dot{D}, \dot{V}_k, \frac{\vec{q}}{T}; \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, D, V_k, T \right)$$

Ce potentiel est une fonction convexe, positive, nulle à l'origine dans l'espace des variables flux  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$ ,  $\dot{D}$ ,  $\dot{V}_k$ ,  $\frac{\vec{q}}{T}$ . Cette condition de convexité du potentiel de dissipation garantit la

positivité de la dissipation mécanique (5.8). Les lois complémentaires s'expriment alors par la propriété de normalité :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}}, \quad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{D}}, \quad A_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}_k}, \quad \vec{g} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \left(\frac{\dot{q}}{T}\right)}$$

Par une transformation de Legendre-Fenchel (voir Debnath et Mikusinski [71]), on peut construire un potentiel dual équivalent qui permet d'exprimer les lois complémentaires sous la forme de lois d'évolution des variables flux en fonction des variables duales plutôt que l'inverse. On définit alors le potentiel  $\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, Y, A_k, \vec{g}; \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, D, V_k, T)$ , dual de  $\varphi$  par rapport aux variables  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$ ,  $\dot{D}$ ,  $\dot{V}_k$ ,  $\frac{\dot{q}}{T}$ . Si  $\varphi^*$  est dérivable, la propriété de normalité est conservée et il vient (voir Lemaitre [147]) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{D} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial Y}, \quad \dot{V}_k = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial A_k}, \quad \frac{\dot{q}}{T} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \vec{g}}$$

Alternativement à la définition du potentiel de dissipation, la pratique courante consiste à définir directement l'expression de la loi d'évolution de l'endommagement  $\dot{D}$  et des variables internes, et de vérifier, au cas par cas, que la dissipation mécanique (5.8) reste positive (voir section 5.4.2.1).

### 5.3.3.5 Particularisation à l'érouissage isotrope associé au critère de Von Mises

Nous nous restreignons à présent au cas du critère de Von Mises sans érouissage cinématique. Ce choix est justifié par le type d'applications considérées dans ce travail où il n'y a pas de phénomène de charge-décharge. L'emploi du critère de Von Mises se justifie quant à lui par le fait que nous considérons des matériaux métalliques isotropes. De plus, l'absence de phénomènes de chargement et déchargement dans les applications considérées nous permet de ne pas tenir compte de l'érouissage cinématique.

#### Choix des variables thermodynamiques

Les variables d'état sont les variables observables (tenseur des déformations totales et température) et les variables internes (tenseur des déformations plastiques, endommagement et les variables  $V_k$ ). Les variables  $V_k$ , de nature scalaire ou tensorielle représentent l'état d'érouissage de la matière. Dans notre cas, l'ensemble des variables  $V_k$  se réduit à  $r$ , la déformation plastique équivalente endommagée<sup>1</sup>. Nous utilisons donc comme ensemble de variables d'état :

- $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ , le tenseur des déformations plastiques associé  $-\boldsymbol{\sigma}$ , le tenseur des contraintes de Cauchy ;

<sup>1</sup>Dans le cas où on considère l'érouissage cinématique, les variables  $V_k$  comprennent également les variables internes liées à celui-ci (les *backstresses*).



- $D$ , la variable d'endommagement associée à  $Y$ , la variable définie à l'aide du potentiel d'état.
- $r$ , la déformation plastique équivalente endommagée associée à  $R$ , la limite élastique du matériau<sup>1</sup> ;

Les variables forces thermodynamiques associées s'en déduisent par :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}} \\ Y &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} \\ R &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial r}\end{aligned}$$

Le choix d'un découplage entre comportement élastique et écrouissage impose d'écrire l'énergie libre sous la forme :

$$\Psi = \Psi^{el}(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, D, T) + \Psi^{pl}(r, T)$$

Dans le cadre du découplage entre dissipations mécanique et thermique, l'inégalité de Clausius s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} - Y\dot{D} - R\dot{r} \geq 0 \quad \text{et} \quad -\vec{g} \cdot \frac{\vec{q}}{T} \geq 0$$

Le tableau 5.1 synthétise les variables d'état et les forces thermodynamiques qui y sont associées.

### Loi de normalité et particularisation du potentiel de dissipation

Le potentiel de dissipation<sup>2</sup> s'exprime sous la forme duale selon :

$$\varphi^* = \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, Y, R; \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, D, r, T)$$

où les variables  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ ,  $r$ ,  $D$  et  $T$  jouent le rôle de paramètres. On en déduit les lois de normalité des matériaux standards généralisés (plasticité associée) :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} &= \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{D} &= -\frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} \\ \dot{r} &= -\frac{\partial \varphi^*}{\partial R}\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Dans le cas sans endommagement et sans écrouissage visqueux, la variable  $r$  correspond à la déformation plastique cumulée (ou déformation plastique équivalente) qui s'exprime par :

$$r = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \int_0^t \left[ \frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}(\tau) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}(\tau) \right]^{\frac{1}{2}} d\tau$$

<sup>2</sup>Le découplage mécanique et thermique a déjà été pris en compte.

Mécanismes	Type	Variables d'état		Forces thermodynamiques
		Observables	Internes	
Thermo-élasticité Entropie	Tenseur Scalaire	$\boldsymbol{\varepsilon}$ $T$		$\boldsymbol{\sigma}$ $s$
Plasticité Ecrouissage isotrope	Tenseur Scalaire		$\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ $r$	$-\boldsymbol{\sigma}$ $R$
Endommagement	Scalaire		$D$	$Y$

TAB. 5.1 – Variables d'état et variables associées.

La dissipation intrinsèque s'exprime à présent par :

$$\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + Y \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} + R \frac{\partial \varphi^*}{\partial R} \geq 0$$

Dans la pratique, les lois de viscoplasticité avec endommagement, qui comprennent éventuellement des effets de restauration, font intervenir un potentiel de dissipation qui se décompose en un potentiel de dissipation plastique  $\varphi_p^*$  et un potentiel de dissipation lié à l'endommagement  $\varphi_D^*$ <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \varphi_p^* + \varphi_D^* \\ \varphi_p^* &= \varphi_p^*(J_2 - \sigma_{crit}, R; D, r, T) \\ \varphi_D^* &= \varphi_D^*(Y; D, r, T) \end{aligned}$$

où  $\sigma_{crit}$  est défini de la même façon qu'à la section 2.4.4 et peut se composer d'une contrainte visqueuse;  $J_2$  est la contrainte équivalente de Von Mises dans l'espace des contraintes effectives :

$$J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{\mathbf{S}}{1-D} \right) : \left( \frac{\mathbf{S}}{1-D} \right)} = \tilde{\sigma}_{eq}$$

<sup>1</sup>Dans le cas où l'écrouissage cinématique est considéré, le potentiel de dissipation comprend également un potentiel de restauration  $\varphi_R^*$ .

Pour traduire le comportement du matériau viscoplastique écouissable et endommageable, le principe d'équivalence en déformations est appliqué en remplaçant, dans le potentiel de dissipation plastique  $\varphi_p^*$ , les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  par les contraintes effectives  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ , les autres variables restant inchangées :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &\rightarrow \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-D} \\ R &\rightarrow R\end{aligned}$$

Le domaine d'élasticité s'exprime alors par l'expression :

$$f = \tilde{\sigma}_{eq} - \sigma_{crit} \leq 0 \quad (5.9)$$

où  $\sigma_{crit} = \sigma_0 + R + \sigma_{visq}$ ;  $\sigma_0$  est la limite élastique initiale. Le potentiel de dissipation  $\varphi^*$  se décompose dès lors en :

$$f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, R; D, r, T) \text{ et } \varphi_D^*(Y; \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, D, r, T)$$

Le premier terme  $f$  correspond à la dissipation viscoplastique, le second à la dissipation par endommagement, supposée découplée de la première.

La règle de normalité dans le cadre de la plasticité associée fournit la loi d'écoulement et les évolutions des variables internes :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{\mathbf{S}}{1-D} \right) : \left( \frac{\mathbf{S}}{1-D} \right) \right) \\ &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{(1-D)\tilde{\sigma}_{eq}} \left( \frac{\mathbf{S}}{1-D} \right) : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{(1-D)\tilde{\sigma}_{eq}} \left( \frac{\mathbf{S}}{1-D} \right) \quad (5.10)$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} = \dot{\lambda} \quad (5.11)$$

$$\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y} \quad (5.12)$$

Le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  est donné par l'annulation de la fonction  $f$  et de sa dérivée  $\dot{f}$  :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial f}{\partial D} \dot{D} = 0$$

D'autre part, en utilisant (5.10) et (5.11), on a pour la vitesse de déformation plastique équivalente :

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\epsilon}}^{pl} &= \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^{pl} : \dot{\epsilon}^{pl}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{3} \left( \frac{3}{2(1-D)} \frac{\dot{\lambda}}{\tilde{\sigma}_{eq}} \right)^2 \left( \frac{\mathbf{S}}{1-D} \right) : \left( \frac{\mathbf{S}}{1-D} \right)} \\
&= \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{\mathbf{S}}{1-D} \right) : \left( \frac{\mathbf{S}}{1-D} \right)}}{\tilde{\sigma}_{eq}} \\
&= \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \\
\dot{\tilde{\epsilon}}^{pl} &= \frac{\dot{r}}{1-D} \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Le tableau 5.2 résume les grandeurs mises en jeu dans le cadre du couplage élasto-viscoplastique et de l'endommagement.

## 5.4 Revue bibliographique des modèles d'endommagement continu

### 5.4.1 Introduction

Dans la section 5.3.3, nous avons exposé les grands principes de la formulation de l'endommagement continu. Comme nous allons le voir dans cette section, cette formulation est largement utilisée dans la littérature, tant pour des applications de mises à forme que pour des applications dynamiques de type crash ou impact. Dans le cas d'applications de dynamique rapide, ces formulations peuvent être couplées à un critère de rupture correspondant à une valeur critique d'endommagement, que nous envisagerons au chapitre 6.

Les modèles d'endommagement décrits ci-après diffèrent les uns des autres par la loi d'évolution de l'endommagement  $\dot{D}$  de l'équation (5.2). Comme précisé dans l'introduction 5.1 de ce chapitre, nous distinguons les lois d'évolution quasi-statiques et dynamiques de l'endommagement. Rappelons que ces dernières sont fonctions à la fois de la déformation plastique équivalente et de sa vitesse.

Vu le type d'application de ce travail, nous omettrons volontairement dans cette section les lois d'endommagement de fatigue et de fluage pour mettre l'accent sur les lois d'endommagement ductile. Dans ces modèles, la variable d'endommagement  $D$  représente la réduction progressive de la limite élastique sous déformation plastique croissante du matériau.

Décomposition du tenseur des déformations	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$
Elasticité	$\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \frac{1 + \nu}{E} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} tr(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{I}$
Viscoplasticité	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \frac{3}{2} \frac{\dot{r}}{(1 - D) \tilde{\sigma}_{eq}} \frac{\mathbf{S}}{1 - D}$ $\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pl} = \frac{\dot{r}}{1 - D}$ $R = R(r, \dot{r}, T)$
Endommagement	$\dot{D} = \dot{D}(D, T, r, Y, \dot{r})$ $Y = Y(\boldsymbol{\sigma}, D, T)$
Multiplicateur plastique	$\dot{r} = \dot{\lambda}$ Conditions $f = 0$ et $\dot{f} = 0$
Multiplicateur viscoplastique	$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pl} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pl}(r, \dot{r}, D, T)$

TAB. 5.2 – Couplage élasto-viscoplastique avec l'endommagement.

## 5.4.2 Modèles d'endommagement quasi-statiques

Nous présentons dans cette section quelques exemples de modèles quasi-statiques d'endommagement ductile qui s'appuient sur la théorie de l'endommagement continu présentée à la section 5.3.3.

### 5.4.2.1 Le modèle de Lemaitre et Chaboche

Ce modèle n'est pas un modèle d'endommagement dynamique, mais il est largement utilisé dans la littérature (voir par exemple Lemaitre et Chaboche [147, 149], Penner et al. [211] ou Daudonnet et al. [67]), y compris dans des problèmes de dynamique rapide [67, 211]. C'est le modèle original autour duquel a été construite la théorie de l'endommagement continu (voir section 5.3.3).

La loi d'évolution de l'endommagement s'écrit :

$$\dot{D} = \left( \frac{\sigma_{eq} R_\nu}{2ES(1-D)^2} \right)^s \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} \quad (5.14)$$

où  $s$ ,  $S$  sont des paramètres matériau et  $E$  est le module de Young ;  $R_\nu$  est la fonction de triaxialité (voir Lemaitre [149]) donnée par l'expression :

$$R_\nu = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)(\sigma^*)^2$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau. Rappelons que  $\sigma^* = \frac{p}{\sigma_{eq}}$  est le rapport de triaxialité des contraintes. L'expression (5.14) montre que, si  $S > 0$ , la variation d'endommagement est toujours positive ( $R_\nu > 0$ ). La dissipation mécanique (5.8) est donc toujours bien positive.

En intégrant la relation (5.14), il vient :

$$D(\bar{\varepsilon}^{pl}) = 1 - \left( 1 - (\bar{\varepsilon}^{pl} - \bar{\varepsilon}_d^{pl}) (1 + 2s) \left( \frac{2ES}{R_\nu \sigma_{eq}^2} \right)^{-s} \right)^{\frac{1}{2s+1}}$$

où  $\bar{\varepsilon}_d^{pl}$  est la déformation plastique équivalente seuil éventuelle (l'endommagement commence à croître si  $\bar{\varepsilon}^{pl} \geq \bar{\varepsilon}_d^{pl}$ ).

### 5.4.2.2 Le modèle de Driemeier

Ce modèle est décrit dans Driemeier et al. [78]. Il ne prend pas en compte de critère de rupture. Ce modèle est, en réalité, un cas particulier du modèle original d'endommagement de Lemaitre et Chaboche [147, 149] dans le cas unidimensionnel. Cependant, le modèle d'érouissage du matériau est général<sup>1</sup> et peut s'étendre sans difficulté à des lois d'érouissage viscoplastiques.

L'évolution de la variable d'endommagement  $D$  est décrite, dans le cas unidimensionnel, par l'équation (5.15) :

$$\dot{D} = \frac{\sigma^2}{2ES(1-D)^2} \dot{\varepsilon}^{pl} \quad (5.15)$$

où  $S$  est un paramètre matériau. Ces expressions sont identiques aux équations d'évolution du modèle original de Lemaitre et Chaboche pour une valeur du paramètre  $s$  égale à 1.

Pour ce modèle, nous possédons une expression analytique de la matrice de raideur tangente matérielle est proposée pour un problème unidimensionnel. L'expression de la relation taux de variation de contrainte-taux de déformation est donnée par :

$$\dot{\sigma} = \frac{(1-D)E}{H} \left( h - \frac{\sigma Y}{S(1-D)^2} \right) \dot{\varepsilon}^{pl}$$

où  $h = \frac{d\sigma_{crit}}{d\varepsilon^{pl}}$  est le module d'érouissage tangent et  $H = \frac{E}{1-D} + h$ . Par suite, l'expression analytique du module tangent élastoplastique avec endommagement  $H^{epd}$  s'exprime de la façon suivante :

$$H^{epd} = \begin{cases} (1-D)E & \text{si le comportement est élastique} \\ \frac{(1-D)E}{H} \left( h - \frac{\sigma Y}{S(1-D)^2} \right) & \text{si le comportement est viscoplastique} \end{cases}$$

Nous étendrons dans la section 5.6 cette expression de la matrice de raideur tangente au cas tridimensionnel, et pour une loi d'évolution de l'endommagement quelconque.

<sup>1</sup>Le modèle original de Lemaitre et Chaboche suppose une loi d'érouissage à saturation du type :

$$\sigma_{yield} = \sigma_0 + Q(1 - \exp(-br))$$

où  $\sigma_0$ ,  $Q$  et  $b$  sont des paramètres matériau. L'expression de  $R$  est donc  $Q(1 - \exp(-br))$ . Cette loi d'érouissage peut être combinée avec une loi de viscosité de type puissance ou à saturation :

$$\begin{aligned} \sigma_{visq}^{pow} &= K(\dot{\varepsilon}^{pl})^{\frac{1}{N}} \\ \sigma_{visq}^{sat} &= K \left( 1 - \exp\left(-\frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{N}\right) \right) \end{aligned}$$

où  $K$  et  $N$  sont des paramètres matériau.

### 5.4.2.3 Le modèle de Goldthorpe

Ce modèle est présenté par Goldthorpe [98]. Barton [16] et Church [53] utilisent ce modèle d'endommagement couplé à la loi constitutive de Zerilli-Armstrong (2.12). L'évolution de la variable d'endommagement  $D$  est donnée par l'expression :

$$D = \int_0^{\varepsilon} 0.67 \exp(1.5\sigma^* - 0.04(\sigma^*)^{-1.5}) d\varepsilon$$

Dans Church [53], un terme dépendant de la contrainte de cisaillement est ajouté à l'intégrale et l'expression de l'endommagement s'écrit dès lors :

$$D = \int_0^{\varepsilon} [0.67 \exp(1.5\sigma^* - 0.04(\sigma^*)^{-1.5}) + A\varepsilon_s] d\varepsilon$$

où  $\varepsilon_s$  est la déformation principale maximale de cisaillement (sic), et  $A$  est un paramètre matériau.

Goldthorpe [98] réalise une brève étude de l'influence de la triaxialité.

### 5.4.2.4 Le modèle de Geers

Le type d'endommagement décrit dans cette section est utilisé dans des applications de mise à forme. La variable  $D$  est couplée à l'histoire de la déformation du matériau au travers d'une variable interne  $\kappa$ . L'équation couplant  $D$  et  $\kappa$  fournit l'équation d'évolution de l'endommagement. Des exemples d'évolution sont donnés dans Boers et al. [27], Engelen et al. [82] ou Geers et al. [89, 91] :

$$\begin{aligned} D &= 1 - \frac{\kappa_c - \kappa}{\kappa_c - \kappa_i} \\ D &= 1 - \exp(-\beta(\kappa - \kappa_i)) \\ D &= 1 - \left(\frac{\kappa_i}{\kappa}\right)^{n_1} \left(\frac{\kappa_c - \kappa}{\kappa_c - \kappa_i}\right)^{n_2} \\ D &= \frac{1}{2 \tanh(3)} \left( \tanh\left(6 \frac{\kappa - \kappa_i}{\kappa_c - \kappa_i} - 3\right) + \tanh(3) \right) \end{aligned}$$

où  $\kappa_c$  représente la valeur critique de  $\kappa$  pour laquelle  $D = 1$  ;  $\kappa_i$  est une valeur seuil de  $\kappa$  en deçà de laquelle l'endommagement est nul ;  $\beta$ ,  $n_1$  et  $n_2$  sont des paramètres matériau.

Pour atténuer la dépendance au maillage, le paramètre  $\kappa$  est une mesure représentative de l'histoire de la déformation d'un volume fini de matériau entourant le point matériel considéré. Dès lors, on définit pour  $\kappa$ , une valeur d'une variable cinématique non-locale (notée  $\bar{z}$ ) dans l'histoire de déformation du matériau. Le couplage entre  $\kappa$  et  $\bar{z}$  s'exprime mathématiquement par un ensemble de relations de Kuhn-Tucker :

$$\dot{\kappa} \geq 0, \quad \bar{z} - \kappa \leq 0, \quad \dot{\kappa}(\bar{z} - \kappa) = 0$$



La non-localité est intégrée dans le modèle par la relation établie entre les variables non-locales  $\bar{z}$  et locales  $z$ . Ce moyennement des variables locales est réalisé par la résolution d'une équation différentielle du second ordre, comme proposé pour la première fois dans Peerlings et al. [207] :

$$\bar{z} - \ell^2 \nabla^2 \bar{z} = z \quad (5.16)$$

où  $\ell$  est un paramètre matériau, appelée longueur intrinsèque ou interne. La détermination de  $\ell$  est basée sur des méthodes expérimentales indirectes (voir Geers et al. [90]).

La variable locale  $z$  (terme source de l'équation (5.16)) peut être une fonction de plusieurs quantités cinématiques, par exemple la déformation plastique équivalente et le taux de variation de volume plastique si on considère un critère de plasticité dépendant de la pression. Dans le cas du critère de Von Mises,  $z$  n'est fonction que de la déformation plastique équivalente. La solution de l'équation (5.16) requiert une condition aux limites. Celle-ci est de type Neumann :

$$\nabla \bar{z} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur la frontière courante } \Gamma \text{ de normale extérieure } \mathbf{n}.$$

Le type de condition aux limites est discuté dans Peerlings et al. [208].

#### 5.4.2.5 Le modèle de Hancock et Mackenzie

Hancock et Mackenzie [109, 160] ont été parmi les premiers à quantifier l'importance de la triaxialité des contraintes pour l'évaluation de l'endommagement et de la déformation plastique de rupture. Soit  $\varepsilon_f$ , la déformation plastique de rupture dont l'expression est donnée par :

$$\varepsilon_f = D_1 + D_2 \exp(D_3 \sigma^*)$$

L'évolution de l'endommagement du matériau est défini par :

$$\dot{D} = \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\varepsilon_f}$$

où  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  sont trois constantes du matériau.

Ce modèle ne prend pas en compte la vitesse de déformation, mais a été étendu, notamment par Johnson et Cook [124], puis par Børvik et al. [36, 37] pour prendre en compte les effets dynamiques et thermiques (voir section 5.4.3).

### 5.4.2.6 Le modèle de Cochran et Banner

Ce modèle d'endommagement a été présenté par Cochran et Banner [57]. Il a été enrichi par Danian et al. [65] et De Vuyst et al. [70]. Ces derniers l'utilisent avec la loi de Zerilli-Armstrong (2.11-2.12). Ce modèle est décrit en trois parties :

1. La variable d'endommagement  $D$  est calculée selon l'expression suivante (sic) :

$$D(x, t) = \frac{V_c}{A}$$

où  $x$  est la position dans la structure,  $t$  est le temps,  $V_c$  est la fraction volumique de vides,  $A$  est l'aire normale à la déformation dans un élément donné.

2. Une simplification est opérée pour le calcul de l'endommagement. L'expansion de volume due à l'endommagement est calculée à partir du volume des microfissures :

$$D(x, t) = \int_0^t \frac{dV}{A}, \quad (dV > 0)$$

3. Une fonction d'adoucissement des contraintes  $f$  due à l'endommagement est définie :

$$f = 1 - \left( \frac{D}{D_{cr}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.17)$$

où  $D_{cr}$  est la valeur ultime de l'endommagement au-delà de laquelle la rupture apparaît.

Lorsque l'endommagement se propage, la contrainte normale à la section droite est donnée par :

$$\sigma = f\tilde{\sigma}$$

Dans Danian [65], une extension de ce modèle est proposée pour, d'une part, mieux correspondre aux définitions habituelles de l'endommagement et, d'autre part, pour passer outre l'hypothèse simplificatrice 2. Pour cela, l'expression de l'endommagement est redéfinie comme suit :

$$D(x, t) = \frac{V_v(x, t)}{\bar{V}(x, t)} \quad (5.18)$$

où  $V_v(x, t)$  est le volume spécifique de vides à l'intérieur d'une cellule de matière, et  $\bar{V}(x, t)$  est le volume spécifique total de la cellule de matière. Par conséquent,  $D$  et  $D_{cr}$  sont convertis en variables adimensionnelles, ce qui n'est pas le cas du modèle original de Cochran et Banner. L'expression (5.17) de la fonction d'endommagement  $f$  est maintenue et l'expression de la contrainte est donnée par l'expression (5.4.2.6).

Le volume spécifique total des cellules du matériau  $\bar{V}(x, t)$  est calculé de la manière suivante :

$$\bar{V}(x, t) = V_v(x, t) + V_s(x, t)$$

où  $V_s(x, t)$  est le volume spécifique intact de la cellule. Les équations d'évolution de la variable d'endommagement  $V_v(x, t)$  sont décrites en détails dans Danian et al. [65].

### 5.4.2.7 Le modèle de Bonora

Ce modèle est présenté dans Bonora et al. [30, 31]. L'évolution de la variable d'endommagement est donnée par l'expression :

$$\dot{D} = \alpha \frac{(D_{cr} - D_0)^{\frac{1}{\alpha}}}{\ln\left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_d}\right)} f(\sigma^*) (D_{cr} - D)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{\dot{r}}{r} \quad (5.19)$$

où  $D_{cr}$  est la valeur critique d'endommagement au-delà de laquelle il y a rupture ;  $D_0$  est l'endommagement initial ;  $\alpha$  est un paramètre matériau ;  $\varepsilon_f$  est la déformation plastique de rupture ;  $\varepsilon_d$  est la déformation plastique en deçà de laquelle l'endommagement reste nul. L'effet de la triaxialité des contraintes est représenté par la fonction  $f(\sigma^*)$  donnée par l'expression :

$$f(\sigma^*) = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu)\sigma^*$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau.

Ce modèle comporte donc 4 paramètres matériau ( $D_{cr}$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon_f$  et  $\varepsilon_d$ ) liés à la loi d'endommagement. La déformation plastique de rupture est donc considérée comme constante, ce qui peut constituer une limitation du modèle. Une méthode d'identification de ces paramètres est présentée dans Bonora et al. [30].

### 5.4.2.8 Les modèles d'endommagement anisotrope

Dans cette section sont brièvement décrits quelques exemples de modèles d'endommagement anisotrope, i.e. dont la variable d'endommagement n'est plus une grandeur scalaire  $D$ , mais, dans le cas le plus général, une grandeur tensorielle du quatrième ordre  $\mathbf{D}$ .

Rouquandt et Pontiroli [228] proposent un modèle d'endommagement à deux variables scalaires, pour des matériaux fragiles comme les bétons et les roches. L'endommagement est différent selon que la sollicitation a lieu en traction (à laquelle on associe la variable d'endommagement  $D_t$ ) ou en compression (à laquelle la variable d'endommagement  $D_c$  est associée). Dans ce modèle, la relation entre le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et le tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \alpha_t (1 - D_t) (\lambda_0 (\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ft})) \mathbf{I} + 2\mu_0 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ft})) \\ &+ \alpha_c (1 - D_c) (\lambda_0 (\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ft})) \mathbf{I} + 2\mu_0 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ft})) + \boldsymbol{\sigma}_{ft} \end{aligned}$$

où

- $D_t$  et  $D_c$  représentent respectivement la perte de raideur pour un chargement en traction et en compression ;
- $\alpha_t$  et  $\alpha_c$  donnent respectivement la pondération en traction et en compression de la sollicitation ( $\alpha_t + \alpha_c = 1$ ) ;
- $\lambda_0$  et  $\mu_0$  sont les coefficients de Lamé du matériau ;

- $\boldsymbol{\varepsilon}_{ft}$  et  $\boldsymbol{\sigma}_{ft}$  sont les tenseurs des déformations et des contraintes de fermeture. Lorsqu'un test de traction est effectué sur un échantillon, des fissures apparaissent dans le matériau. Si l'échantillon est ensuite comprimé, ces fissures se referment progressivement. Les contraintes de fermeture sont les contraintes pour lesquelles toutes les fissures sont fermées.

Citons dans le même ordre d'idées le modèle d'endommagement à deux paramètres de Bodner-Partom [46, 47], qui distingue également l'endommagement en traction et en compression pour des matériaux fragiles tels que les roches ou les bétons.

Longère et al. [155, 156] considèrent la formation de bandes de cisaillement comme un processus d'endommagement anisotrope. La dégradation anisotrope du matériau est décrite au travers d'un tenseur du second ordre  $\mathbf{D}$  dont l'expression est donnée par :

$$\mathbf{D} = \sum_{\alpha} d^{\alpha} \vec{n}^{\alpha} \otimes \vec{n}^{\alpha}$$

où  $d^{\alpha}$  est l'endommagement associé à la bande de cisaillement  $\alpha$  et  $\vec{n}^{\alpha}$  est la normale au plan de cisaillement  $\alpha$ .

Omerspahic et Mattiasson [200] proposent un endommagement orthotrope sous la forme d'un tenseur  $\mathbf{D}$  du quatrième ordre. Le tenseur des contraintes effectives  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  est défini par :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$$

Le tenseur  $\mathbf{D}$  possède des composantes selon les directions principales du matériau (axes d'orthotropie) et est tel qu'il se réduit à un scalaire dans le cas isotrope.

Terminons par une brève description du modèle d'endommagement anisotrope proposé par Zhu et al. [283–285]. Dans ce modèle, l'idée est de séparer l'endommagement sur les parties déviatorique et volumique du tenseur des contraintes. On définit donc la pression effective et le tenseur des contraintes déviatoriques effectives par :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}} &= \frac{\mathbf{S}}{1-d} \\ \tilde{p} &= \frac{p}{1-\delta} \end{aligned}$$

où  $d$  et  $\delta$  sont respectivement les variables d'endommagement associées à la pression et aux contraintes déviatoriques<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Dans ce modèle, l'hypothèse d'équivalence en énergie élastique est adoptée (voir section 5.3.3.3) et on a donc également des déformations élastiques effectives définies par :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} &= (1-d) \boldsymbol{\varepsilon}^{el} \\ tr(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) &= (1-\delta) tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{aligned}$$

### 5.4.3 Modèles d'endommagement dynamiques

#### 5.4.3.1 Le modèle de Johnson-Cook

Le modèle d'endommagement proposé par Johnson et Cook [124], utilisé entre autres dans Pantalé et al. [204] et Singh et al. [249], définit la variable d'endommagement  $D$  variant de 0 à 1, avec  $D = 0$  pour le matériau vierge et  $D = 1$  pour le matériau rompu. Le critère de rupture est donc :

$$D = D_C = 1$$

L'évolution de la variable d'endommagement  $D$  est décrite par l'équation suivante :

$$\dot{D} = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\varepsilon_f}$$

où  $\varepsilon_f$  est la valeur de la déformation plastique de rupture. Johnson et Cook [124] ont proposé l'expression suivante pour la déformation plastique de rupture :

$$\varepsilon_f = (D_1 + D_2 \exp(D_3 \sigma^*)) \left( 1 + D_4 \ln \left( \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\varepsilon}}_0} \right) \right) \left( 1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}} \right)$$

où  $D_1$  à  $D_5$  sont les constantes du matériau liées à l'endommagement.

#### 5.4.3.2 Le modèle de Langseth

Ce modèle a été proposé par Børvik et al. [35, 39–41, 54]. Il est également utilisé dans Abdel-Malek et al. [1]. Il est basé sur la loi constitutive de Johnson-Cook (cf. Johnson et Cook [123], à ne pas confondre avec le modèle d'endommagement éponyme [124], décrit à la section 5.4.3.1), éventuellement modifiée (voir Børvik et al. [34, 36]).

Comme signalé dans la section 5.3.2, la variable d'endommagement  $D$  varie théoriquement de 0 à 1, avec  $D = 0$  pour le matériau vierge et  $D = 1$  pour le matériau rompu. Cependant, en général, la rupture apparaît pour une valeur critique de la variable d'endommagement  $D_C \leq 1$ . Le critère de rupture devient donc :

$$D = D_C \leq 1$$

L'évolution de la variable d'endommagement est reliée aux déformations plastiques. De plus, l'expérience montre que l'endommagement reste nul au début de la déformation plastique. Il existe donc une valeur seuil de la déformation plastique équivalente  $\varepsilon_d$  au-delà de laquelle l'endommagement est initié. L'évolution de la variable d'endommagement prend alors la forme :

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} < \varepsilon_d \\ \frac{D_C}{\varepsilon_f - \varepsilon_d} \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} \geq \varepsilon_d \end{cases}$$

où  $D_C$  est la valeur critique d'endommagement,  $\varepsilon_d$  est le seuil d'endommagement et  $\varepsilon_f$  est une déformation de rupture dépendant de la triaxialité des contraintes, de la vitesse de déformation et de la température. L'expression de la valeur de la déformation plastique de rupture est une variante de la loi proposée par Johnson et Cook [124] :

$$\varepsilon_f = (D_1 + D_2 \exp D_3 (\sigma^*)) \left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{D_4} \left(1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)$$

où  $D_1$  à  $D_5$  sont des paramètres matériau liés à l'endommagement.

Signalons, pour être complet, qu'Abdel-Malek et al. [1] utilisent le modèle de Langseth associé à une loi constitutive de type Zerilli-Armstrong (2.12), alors que c'est classiquement la loi de Johnson-Cook qui est associée à ce modèle<sup>1</sup>.

### 5.4.3.3 Le modèle à effet retard de Suffis et Combescure

Ce modèle a été présenté par Allix et Deü [5] pour des matériaux composites sous sollicitations dynamiques. Il est essentiellement utilisé pour des matériaux au comportement élastique (voir entre autres Ladevèze et al. [139], Suffis et Combescure [255] ou encore Allix et al. [6]) mais il a été étendu aux matériaux au comportement viscoplastique dans Suffis et Combescure [254].

Dans ce modèle, la loi d'évolution de la variable d'endommagement  $D$  est définie à partir du taux de restitution d'énergie élastique  $Y$  (dont l'expression est donnée par l'équation (5.7)) et est linéaire entre une valeur seuil  $Y_d$  et une valeur critique  $Y_c$ . L'endommagement est supposé évoluer seulement en traction. La loi d'évolution de l'endommagement est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{D} &= \frac{1}{\tau_c} (1 - \exp(-a \langle f(Y) - D \rangle)) \text{ si } D < 1 \\ D &= 1 \text{ sinon} \end{aligned}$$

où  $a$  et  $\tau_c$  sont des paramètres matériau ;  $\tau_c$  est le temps caractéristique du modèle (de l'ordre de 1 à  $20\mu s$ )<sup>2</sup>. De cette manière, une variation du taux de restitution d'énergie  $Y$  n'entraîne pas une variation instantanée de l'endommagement. Celui-ci évolue avec un certain retard défini par le temps caractéristique  $\tau_c$ .

La fonction  $f$  prend la forme suivante selon que l'on considère un modèle élastique ou

<sup>1</sup>Nous verrons à la section 5.5 que la formulation que nous proposons permet d'utiliser sans difficulté l'une ou l'autre loi constitutive.

<sup>2</sup>Rappelons que le symbole  $\langle x \rangle$  représente les crochets de MacCaulay :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} (x + |x|)$$

élastoplastique :

$$f(Y) = \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_d}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_d}} \quad \text{pour un matériau élastique}$$

$$f(\bar{\varepsilon}^{pl}) = \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}^{pl}} - \sqrt{\bar{\varepsilon}_d^{pl}}}{\sqrt{\bar{\varepsilon}_c^{pl}} - \sqrt{\bar{\varepsilon}_d^{pl}}} \quad \text{pour un matériau élastoplastique}$$

où  $\bar{\varepsilon}_d^{pl}$  et  $\bar{\varepsilon}_c^{pl}$  sont respectivement les déformations plastiques équivalentes seuil et limite. Dans le cas élastoplastique, tout se passe comme si on avait affaire à un matériau élastique endommageable : le module de Young est alors égal au module tangent  $E_t$  et le taux de restitution d'énergie seuil (respectivement critique) est égal à celui correspondant à une déformation égale à la déformation plastique équivalente seuil (respectivement critique).

#### 5.4.4 Conclusions

Les lois présentées dans cette section s'appuient toutes sur la formulation de Lemaitre et Chaboche décrite à la section 5.3. Elles diffèrent l'une de l'autre par la loi d'évolution de la variable d'endommagement  $D$ . Ces lois d'endommagement peuvent être de formes très diverses, mais peuvent se ramener à une expression générale de type :

$$\dot{D} = g(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{S}, p, r, \dot{r}, D, T) \quad (5.20)$$

Dans le cadre de ce travail, nous privilégierons les lois d'évolution d'endommagement dynamiques telles que celles proposées à la section 5.4.3. Cependant, nous ne pouvons pas négliger les autres modèles vu que ceux-ci sont parfois utilisés dans le cadre d'applications de dynamique rapide.

## 5.5 Adaptation du modèle d'endommagement continu

### 5.5.1 Introduction

La formulation thermodynamique proposée par Lemaitre et Chaboche comporte plusieurs limitations :

- elle ne s'applique facilement qu'en petites déformations ;
- elle a été établie pour des matériaux fragiles (béton) pour lesquels les déformations plastiques restent faibles et l'endommagement provient surtout de la partie élastique des déformations ;
- elle a été établie initialement pour des matériaux subissant des cycles de fatigue (voir Chaboche [45]).

Ces trois limitations sont à lever pour les problèmes étudiés dans ce travail. En effet, dans les problèmes d'impact concernant des matériaux métalliques, les déformations plastiques peuvent devenir importantes et sont très souvent plus importantes que les déformations élastiques. L'endommagement du matériau est donc essentiellement ductile. Or, l'extension pour des déformations plastiques importantes n'est pas immédiate.

Dans cette section, nous proposons d'étendre la théorie proposée par Lemaitre et Chaboche, pour l'adapter à l'étude du comportement des matériaux subissant de grandes déformations dans le cadre de phénomènes à dynamique rapide, en utilisant une formulation hypoélastique. Nous mettons l'accent sur la possibilité de coupler une telle formulation à l'utilisation de lois constitutives adaptées aux grandes vitesses de déformation telles que celles décrites à la section 2.3. Nous nous plaçons également dans le cadre thermomécanique vu l'importance de la dissipation de chaleur lors de phénomènes rapides. Rappelons que l'endommagement est supposé isotrope et que le critère de plasticité utilisé est celui de Von Mises sans écrouissage cinématique.

Nous accordons encore une grande importance à la généralité de la méthode proposée : le but est de pouvoir coupler une loi d'écrouissage quelconque (éventuellement viscoplastique) avec un modèle d'endommagement qui s'appuie sur la formulation de Lemaitre et Chaboche tel que ceux décrits dans la section 5.4 et qui s'écrit sous la forme canonique (5.20).

### 5.5.2 Hypothèse hypoélastique : décomposition des déformations

Dans une formulation hypoélastique en grandes déformations, la relation entre les tenseurs des déformations et des contraintes ne s'exprime plus en fonction des grandeurs totales, mais sous la forme du taux des déformations et du taux des contraintes. Nous adoptons dans cette section la même démarche que celle utilisée dans la section 2.4.

Pour formuler la loi de comportement recherchée, nous partons de la loi de comportement thermomécanique d'un solide en petites déformations, pour laquelle le tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se décompose en l'addition de trois termes :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} + \boldsymbol{\varepsilon}^{th} \quad (5.21)$$

Ces trois termes représentent respectivement les parties élastique, viscoplastique et thermique du tenseur des déformations. La loi de comportement du matériau endommagé s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) \quad (5.22)$$

ou, en écrivant la loi d'élasticité dans l'espace des contraintes effectives :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) \quad (5.23)$$

L'hypothèse de base des modèles matériau hypoélastiques en grandes transformations consiste en la décomposition additive du tenseur des vitesses de déformations  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  en une



partie élastique  $\dot{\epsilon}^{el}$ , une partie viscoplastique  $\dot{\epsilon}^{vp}$  et une partie thermique  $\dot{\epsilon}^{th}$  :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{vp} + \dot{\epsilon}^{th} \quad (5.24)$$

où

- $\dot{\epsilon}^{el}$  est la partie élastique du tenseur des vitesses de déformation ;
- $\dot{\epsilon}^{vp}$  est la partie viscoplastique du tenseur des vitesses de déformations ;
- $\dot{\epsilon}^{th}$  est la partie thermique (expansion thermique) du tenseur des vitesses de déformation.

Comme dans le cas sans endommagement (section 2.4.3), le taux de variation des contraintes est proportionnel à la vitesse de déformation élastique. C'est pourquoi la loi de Hooke est appliquée sur les déformations élastiques uniquement<sup>1</sup>. La dérivée objective de Jaumann du tenseur des contraintes effectives est donnée par :

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\sigma} &= \mathbf{C} : \dot{\epsilon}^{el} + \overset{\nabla}{\mathbf{C}} : \epsilon^{el} \\ &= \mathbf{C} : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{vp} - \dot{\epsilon}^{th}) + \overset{\nabla}{\mathbf{C}} : (\epsilon - \epsilon^{vp} - \epsilon^{th}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

En prenant le soin d'introduire une dérivée objective adaptée à l'utilisation de cette dernière équation dans une analyse de solides soumis à de grandes déformations (voir entre autres Adam [2] ou Ponthot [217, 218]), et si nous exprimons toutes les grandeurs intervenant dans (5.25) dans un système d'axes corotationnels, nous pouvons écrire :

$$\overset{\dot{\sim}}{\sigma}^c = \mathbf{C}^c : (\dot{\epsilon}^c - \dot{\epsilon}^{vp,c} - \dot{\epsilon}^{th,c}) + \overset{\dot{\sim}}{\mathbf{C}}^c : (\epsilon^c - \epsilon^{vp,c} - \epsilon^{th,c})$$

où l'exposant  $c$  indique une grandeur corotationnelle. Comme dans le cas sans endommagement, dans le cadre d'un tenseur d'élasticité de Hooke isotrope, le tenseur dans l'espace corotationnel est identique au tenseur dans l'espace cartésien. C'est pourquoi l'exposant  $c$  sera dorénavant sous-entendu.

### 5.5.3 Définition du critère de plasticité

Le comportement viscoplastique avec endommagement d'un solide est régi par le critère de plasticité étendu de Ponthot [217, 218] dans l'espace des contraintes effectives (voir section 5.3.3.5). La fonction  $f$  évolue au travers des variables d'hérédité.

La valeur du critère permet de définir le comportement du matériau :

- si  $f < 0$  le matériau est élastique ;
- si  $f = 0$  le matériau est plastique ;
- si  $f > 0$  le comportement est non physique (zone interdite).

<sup>1</sup>Contrairement à Lemaitre, nous n'incluons pas les déformations dues à l'expansion thermique du matériau dans la loi d'élasticité linéaire.

Comme dans la formulation sans endommagement, la fonction  $f$  est la différence entre deux grandeurs :

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, r, \dot{r}, T, D) = \tilde{\sigma}_{eq} - \sigma_{crit} = \tilde{\sigma}_{eq} - (\sigma_{yield} + \sigma_{visq}) \quad (5.26)$$

où

- $\tilde{\sigma}_{eq}(\boldsymbol{\sigma}, D) = \frac{1}{1-D} \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}}$  :  $\mathbf{S}$  est la représentation scalaire de l'état de contraintes du matériau (ici la contrainte effective équivalente de Von Mises ( $J_2(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ ));
- $\sigma_{crit}$  est la limite que la contrainte équivalente ne peut pas dépasser. Elle est composée selon le modèle de :
  - $\sigma_{yield}(r)$ , la contrainte de plasticité, mise à jour en fonction de l'écouissage isotope;
  - $\sigma_{visq}(r, \dot{r})$ , la contrainte visqueuse (effet de la vitesse de déformation plastique).

## 5.5.4 Intégration temporelle des lois constitutives

### 5.5.4.1 Introduction

Dans cette section, nous décrivons la méthode utilisée pour passer d'un état initial 0 du problème où toutes les grandeurs sont connues, à un état final 1 où les différentes grandeurs du problème doivent être mises à jour<sup>1</sup>.

Ainsi, à partir d'un état de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_0$ , de déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ , de déformation plastique équivalente endommagée  $r_0$  et d'endommagement  $D_0$  initiaux, nous proposons d'établir le formalisme nécessaire à l'évaluation des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_1$ , des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ , de la déformation plastique endommagée équivalente  $r_1$  et de l'endommagement  $D_1$ , pour un incrément de chargement donné (vecteurs déplacements  $\vec{x}_1$ , vitesses  $\vec{x}_1$  et températures  $\vec{T}_1$ , forces externes imposées)<sup>2</sup>.

Dans le cas de chargements complexes, une intégration couplée des contraintes et de l'endommagement est nécessaire. En effet, un incrément de déformation entraîne une variation des contraintes, qui elle-même, engendre une modification de l'endommagement. Or, le critère de plasticité dépend de la valeur de l'endommagement. Une variation de la valeur de celui-ci entraîne par conséquent une modification de la limite élastique et des déformations plastiques, donc des contraintes.

Une méthode d'intégration totalement couplée présente l'inconvénient d'être assez lourde à mettre en œuvre et d'être coûteuse en temps de calcul. En effet, elle consiste en la résolution d'un système non linéaire de trois équations à trois inconnues (voir section suivante). Ce système doit être résolu à chaque point de Gauss de chaque itération de la

<sup>1</sup>Les indices 0 et 1 représentent respectivement l'état initial (le début du pas de temps) et final (fin du pas de temps), mais en aucun cas les temps  $t = 0$  et  $t = 1$ .

<sup>2</sup>Nous sommes dans le cadre d'un schéma de résolution thermomécanique étagé (section 3.4); c'est pourquoi nous considérons les températures à l'instant 1.

résolution de l'équilibre mécanique (3.1). De plus, le calcul de l'opérateur tangent consistant est lourd à développer. Ajoutons encore que le système d'équations à résoudre fait intervenir des grandeurs de types différents (contraintes, vitesses de déformation et variation d'endommagement), ce qui peut nuire à la robustesse du processus de résolution du système, même si celui-ci est normé.

#### 5.5.4.2 Grandeurs mises en jeu et système d'équations à résoudre

Avant de présenter la méthode d'intégration proposée dans ce travail, il nous paraît opportun de résumer les différentes données du problème de thermo-élasto-viscoplasticité couplé à une loi d'endommagement. Celles-ci sont résumées dans le tableau 5.3.

La résolution du problème d'endommagement couplé à la viscoplasticité peut se ramener à un système de deux équations scalaires et une équation tensorielle à deux inconnues scalaires et une inconnue tensorielle indépendantes, à savoir la vitesse de la déformation plastique endommagée  $\dot{r}$ , la vitesse d'évolution de l'endommagement  $\dot{D}$  et le tenseur des vitesses de déformation élastique  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el}$ . En tenant compte de la symétrie de ce dernier tenseur, nous devons donc résoudre un système de 8 équations à 8 inconnues. Ce système non linéaire est obtenu en écrivant l'équation de décomposition des vitesses de déformation (5.24), le critère de plasticité à respecter ainsi que la loi d'évolution de l'endommagement :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = 0 \\ \frac{1}{1-D} \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{S} : \mathbf{S} - \sigma_{crit}(r, \dot{r}) = 0 \\ \dot{D} - g(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, r, \dot{r}, D, T) = 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

Dans ce système, le tenseur des déformations plastiques  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$  peut être calculé en fonction de l'endommagement et de la vitesse de déformation plastique équivalente endommagée  $\dot{r}$  (voir ci-après).

Une fois le système (5.27) résolu, toutes les grandeurs thermodynamiques peuvent être déduites à partir des valeurs de ces trois inconnues : tenseur des déformations élastiques et plastiques, déformation plastique équivalente, tenseur des contraintes... :

Tenseur des déformations élastiques	$\boldsymbol{\varepsilon}_1^{el} = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{el} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{el}$
Déformation plastique endommagée	$r_1 = r_0 + \Delta r$
Endommagement	$D_1 = D_0 + \Delta D$
Tenseur des contraintes effectives	$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_1^{el}$
Tenseur des déformations plastiques	$\boldsymbol{\varepsilon}_1^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{el}$
Déformation plastique équivalente	$\tilde{\varepsilon}_1^{pl} = \tilde{\varepsilon}_0^{pl} + \frac{\Delta r}{1-D_1}$
Tenseur des contraintes	$\boldsymbol{\sigma}_1 = (1 - D_1) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1$

Décomposition des vitesses de déformation	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}$
Tenseur des vitesses de déformation thermique	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = \alpha \dot{T} \mathbf{I}$ <sup>a</sup>
Loi d'élasticité de Hooke	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el}$
Tenseur d'élasticité isotrope <sup>b</sup>	$\mathbf{C}_{ijkl} = K \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl})$ <sup>c</sup>
Décomposition du tenseur des déformations :	
Partie volumique	$J = tr(\boldsymbol{\varepsilon})$
Partie déviatorique	$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{J}{3} \mathbf{I}$
Décomposition du tenseur des contraintes :	
Partie volumique	$p = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma})$
Partie déviatorique	$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{I}$
Critère de plasticité	$f = \frac{1}{1-D} \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} - \sigma_{crit} = 0$
Evolution de l'endommagement <sup>d</sup>	$\dot{D} = g(\boldsymbol{\varepsilon}, p, \mathbf{S}, r, \dot{r}, D, T)$

TAB. 5.3 – Données du problème d'élasto-viscoplasticité couplé à l'endommagement.

<sup>a</sup>Nous considérons que la dilatation thermique a la forme (voir Adam [2]) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = \alpha \dot{T} \mathbf{I} \rightarrow tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})^{th} = 3\alpha \dot{T}$$

où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique du matériau ( $K^{-1}$ ).

<sup>b</sup>Nous n'envisageons que ce cas dans cette étude.

<sup>c</sup>Comme nous nous plaçons dans le cadre thermomécanique, les paramètres  $K$  et  $G$  peuvent dépendre de la température.

<sup>d</sup>Nous considérons une loi d'évolution de l'endommagement  $g$  la plus générale possible en la faisant dépendre explicitement de toutes les variables, cf. expression (5.20).

### Calcul du tenseur des vitesses de déformation plastique et de la normale à la surface de plasticité

Dans le système (5.27) apparaît le tenseur des vitesses de déformation plastique  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}$ . Vu que nous nous plaçons dans l'hypothèse de plasticité associée, les vitesses de déformation plastique sont normales à la surface de plasticité. Elles s'écrivent d'après (5.10) :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{(1-D)\tilde{\sigma}_{eq}} \left( \frac{\mathbf{S}}{1-D} \right) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{r}}{1-D} \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{\mathbf{S}:\mathbf{S}}}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (5.11) et la définition de la contrainte équivalente effective  $\tilde{\sigma}_{eq}$  (cf. page 130).

Nous définissons ensuite la normale unitaire extérieure à la surface de plasticité par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\|} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-D} \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{\mathbf{S}:\mathbf{S}}}}{\left\| \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-D} \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{\mathbf{S}:\mathbf{S}}} \right\|} \\ &= \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{\mathbf{S}:\mathbf{S}}}\end{aligned}\tag{5.28}$$

Cette expression est identique à l'expression de la normale  $\widetilde{\mathbf{N}}$  définie par rapport à la surface de plasticité dans l'espace des contraintes effectives :

$$\widetilde{\mathbf{N}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\|}\tag{5.29}$$

C'est pourquoi, dorénavant, nous mentionnerons indifféremment l'une ou l'autre expression<sup>1</sup>. Le tenseur des vitesses de déformation plastique s'écrit en fonction de la normale à la surface de plasticité (5.28) :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{r}}{1-D} \mathbf{N}\tag{5.32}$$

---

<sup>1</sup>comme dans le cas sans endommagement, les expressions suivantes sont vérifiées, par construction de la normale à la surface de plasticité :

$$\mathbf{N} : \mathbf{N} = 1\tag{5.30}$$

$$\mathbf{N} : d\mathbf{N} = 0\tag{5.31}$$

Enfin, la vitesse de déformation plastique équivalente est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\epsilon}}^{pl} &= \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^{pl} : \dot{\epsilon}^{pl}} \\ &= \frac{\dot{\epsilon}}{1-D}\end{aligned}\tag{5.33}$$

Nous pouvons donc écrire le tenseur des vitesses de déformation plastique en fonction de  $D$ ,  $\dot{\epsilon}$  et du critère de plasticité. Le tenseur des vitesses de déformation totale  $\dot{\epsilon}$  est quant à lui connu par les valeurs des vitesses à l'instant 1. La seule inconnue dans l'équation tensorielle du système (5.27) est donc bien l'expression du tenseur des vitesses de déformation élastique  $\dot{\epsilon}^{el}$ .

### 5.5.4.3 Travail plastique

Le travail plastique s'écrit, en utilisant (5.32), (5.28) et (5.33) :

$$\begin{aligned}D^{pl} &= \mathbf{S} : \dot{\epsilon}^{pl} \\ &= \mathbf{S} : \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\epsilon}}{1-D} \mathbf{N} \right) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\epsilon}}{1-D} \mathbf{S} : \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}} \\ D^{pl} &= \sigma_{eq} \dot{\bar{\epsilon}}^{pl}\end{aligned}$$

Cette expression est identique à celle trouvée pour les lois constitutives sans endommagement.

### 5.5.4.4 Algorithmes d'intégration des lois viscoplastiques avec endommagement

Dans cette section, nous étudions différentes méthodes pour résoudre le système d'équations (5.27). Dans tous les cas, nous utilisons une méthode de résolution implicite basée sur un schéma prédictor-correcteur. Quatre algorithmes sont présentés : le schéma original de résolution proposé par Lemaitre [149], un schéma simplifié de résolution du système (5.27), le schéma de résolution proposé par de Souza Neto [68]. Enfin, le dernier algorithme de résolution présente une méthode d'intégration originale des lois d'intégration avec endommagement.

Insistons également sur le fait que les algorithmes de Lemaitre et de Souza Neto ont été étudiés uniquement pour la loi d'endommagement de Lemaitre (voir section 5.4.2.1). Nous nous proposons d'étendre ces algorithmes aux lois d'endommagement dont l'expression générale est donnée par l'expression canonique (5.20) dans le cadre thermomécanique décrit ci-avant.

### Algorithme de Lemaitre original

Rappelons tout d'abord l'algorithme proposé par Lemaitre [149]. Les deux équations différentielles du système (5.27) sont discrétisées temporellement entre les instants 0 et 1 par une méthode du point milieu généralisé : les deux expressions différentielles de (5.27) sont résolues à l'instant  $t_\vartheta = t_0 + \vartheta\Delta t$ ,  $0 < \vartheta \leq 1$ . Pour le critère de plasticité, la valeur  $\vartheta = 1$  est obligatoire pour assurer la validité du critère de plasticité en fin de pas de temps  $t_1$ . Le résidu  $\vec{R} = \left\{ \vec{R}_{\varepsilon^{el}}, R_r, R_D \right\}^T$  des équations du système (5.27) s'écrit<sup>1</sup> :

$$\begin{cases} \vec{R}_{\varepsilon^{el}}(t_\vartheta) = \Delta\varepsilon^{el} - \Delta\vec{\varepsilon} - \Delta\varepsilon^{th} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta r}{1 - D_\vartheta} \vec{N}_\vartheta \\ R_r(t_1) = \frac{1}{1 - D_1} \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{S}_1 : \mathbf{S}_1 - \sigma_{crit}(r_1, \Delta r) \\ R_D(t_\vartheta) = \Delta D - g(\varepsilon_\vartheta^{el}, r_\vartheta, \Delta r, D_\vartheta, T) \end{cases} \quad (5.34)$$

L'indice  $\vartheta$  signifie que l'on considère la valeur de l'inconnue en  $t_0 + \vartheta\Delta t$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_\vartheta^{el} &= \varepsilon_0^{el} + \vartheta\Delta\varepsilon^{el} \\ r_\vartheta &= r_0 + \vartheta\Delta r \\ D_\vartheta &= D_0 + \vartheta\Delta D \end{aligned}$$

Le système (5.34) est résolu au moyen d'une méthode itérative de Newton-Raphson classique nécessitant, à chaque itération, le calcul des dérivées des expressions du système (5.34) par rapport à l'ensemble des incréments des variables  $\Delta\vec{X} = \{\Delta\varepsilon^{el}, \Delta r, \Delta D\}$ , soit une matrice jacobienne des dérivées de dimensions  $8 \times 8$ . A l'itération  $i$ , on a l'équation d'équilibre suivante :

$$\vec{R}_1^{(i)} + \left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \Delta\vec{X}} \right]_1^{(i)} \cdot (\Delta\vec{X}_1^{(i+1)} - \Delta\vec{X}_1^{(i)})$$

où  $\left[ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \Delta\vec{X}} \right]_1^{(i)}$  est la matrice jacobienne du système (5.34). La convergence du système est obtenue pour  $\|\vec{R}\| < PREC$  où  $PREC$  est la précision sur le calcul du résidu (typiquement de l'ordre de  $10^{-8}$ ).

La résolution d'un tel système (évaluation des dérivées et inversion de la matrice jacobienne) est donc assez lourde, d'autant que la convergence du processus itératif n'est pas garantie (cf. Lemaitre [149]).

<sup>1</sup>Par convention d'écriture d'un système d'équations, les tenseurs  $\Delta\varepsilon^{el}$ ,  $\Delta\varepsilon$ ,  $\Delta\varepsilon^{th}$  et  $\mathbf{N}_\vartheta$  sont écrits sous forme vectorielle (vecteurs de taille 6).

### Algorithme de Lemaitre simplifié

L'algorithme proposé par Lemaitre [149] nécessite l'évaluation des dérivées des expressions (5.34) par rapport à chacune des trois inconnues (dont l'inconnue tensorielle  $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ ), ce qui s'avère coûteux en termes de temps de calcul. Nous allons montrer que, dans le cas présent (endommagement isotrope, pas d'érouissage cinématique), ce système peut se ramener à un système de deux équations à deux inconnues scalaires  $r$  et  $D$ . Cet algorithme a été proposé par Vaz et Owen [268]. Cependant, Vaz et Owen [268] se limitent à la loi d'endommagement de Lemaitre 5.4.2.1 et à une loi d'érouissage non visqueuse. Steinmann et al. [253] proposent également un algorithme semblable pour un modèle de Lemaitre simplifié.

Nous proposons d'étendre la formulation proposée par Vaz et Owen [268] aux lois d'érouissage viscoplastique, couplées à des lois d'endommagement quelconques telles que celles présentées à la section 5.4.

Pour ce faire, nous procédons de la même façon que pour l'intégration des contraintes sans endommagement (voir section 2.4.5). Nous décomposons les tenseurs des contraintes effectives et des déformations en leurs parties volumique et déviatorique (voir tableau 5.3). La loi d'élasticité s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{p}} &= K \left( \dot{J} - 3\alpha\dot{T} \right) + \dot{K} (J - 3\alpha\Delta T) \\ &= K \left( \dot{J} - 3\alpha\dot{T} \right) + \frac{\dot{K}}{K} \tilde{p}\end{aligned}\quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{S}}} &= 2G \left( \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pl} \right) + 2\dot{G} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}) \\ &= 2G \left( \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pl} \right) + \frac{\dot{G}}{G} \tilde{\mathbf{S}}\end{aligned}\quad (5.36)$$

Nous définissons le prédicteur élastique des déformations par l'expression :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{el} &= \boldsymbol{\varepsilon}_0^{el} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{th} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ J^{el} &= J_0^{el} + \Delta J - 3\alpha_1\Delta T \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^{el} + \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\end{aligned}\quad (5.37)$$

De façon équivalente, vu la loi de Hooke, le prédicteur élastique des contraintes effectives peut être défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{el} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_0 + \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_0}{1 - D_0} + \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \tilde{p}^{el} &= \tilde{p}_0 + K (\Delta J - 3\alpha_1\Delta T) = \frac{p_0}{1 - D_0} + K (\Delta J - 3\alpha_1\Delta T) \\ \tilde{\mathbf{S}}^{el} &= \tilde{\mathbf{S}}_0 + 2G_1\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\mathbf{S}_0}{1 - D_0} + 2G_1\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned}\quad (5.38)$$



L'intégration des équations (5.35) et (5.36) donne en utilisant (5.32)<sup>1</sup> :

$$\tilde{\mathbf{S}}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{S}}_0 + 2G_1\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Delta r}{1-D_1}\mathbf{N}_1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} \quad (5.39)$$

$$\tilde{p}_1 = \frac{\tilde{p}_0 + K_1(\Delta J - 3\alpha\Delta T)}{1 - \frac{\Delta K}{K_1}} \quad (5.40)$$

ou encore, en tenant compte de la définition du prédicteur élastique (5.38), il vient pour ces deux dernières expressions :

$$\tilde{\mathbf{S}}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{S}}^{el} - 2G_1\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Delta r}{1-D_1}\mathbf{N}_1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} \quad (5.41)$$

$$\tilde{p}_1 = \frac{\tilde{p}^{el}}{1 - \frac{\Delta K}{K_1}} \quad (5.42)$$

Nous constatons que, comme dans le cas sans endommagement, la plasticité dans l'espace des contraintes effectives est purement déviatorique, la pression n'intervenant pas dans les déformations plastiques vu le caractère purement déviatorique de  $\mathbf{N}$ .

De manière analogue au cas sans endommagement, on montre que la normale à la surface de plasticité, calculée sur base des contraintes  $\tilde{\mathbf{S}}_1$ , est identique à la normale à la surface de plasticité, calculée sur base du prédicteur élastique  $\tilde{\mathbf{S}}^{el}$  (voir annexe A.1.4). Dès lors, la mise à jour des contraintes effectives est simplement une mise à échelle du prédicteur élastique :

$$\tilde{\mathbf{S}}_1 = \left( 1 - 2G_1\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Delta r}{1-D_1}\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} \right) \tilde{\mathbf{S}}^{el} \quad (5.43)$$

De plus, nous avons montré (expressions (5.28) et (5.29)) que la normale à la surface de plasticité définie à partir des contraintes effectives  $\tilde{\mathbf{N}}$  est identique à la normale à la surface de plasticité définie à partir des contraintes réelles  $\mathbf{N}$ . Il vient alors :

$$\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{N}} = \tilde{\mathbf{N}}^{el} = \frac{\tilde{\mathbf{S}}^{el}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} \quad (5.44)$$

Les contraintes ne dépendent donc que de la déformation plastique endommagée  $r$  et de l'endommagement  $D$ . Le système couplé à résoudre s'écrit donc :

$$\begin{cases} R_r = \frac{1}{1-D_1}\sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{S}_1(D_1, \Delta r) : \mathbf{S}_1(D_1, \Delta r) - \sigma_{crit}(r_1, \Delta r) \\ R_D = \Delta D - g(p_1(D_1), \mathbf{S}_1(D_1, \Delta r), r_1, \Delta r, D_1, T) \end{cases} \quad (5.45)$$

<sup>1</sup>Nous utilisons un schéma de résolution de type retour radial. C'est pourquoi la normale à la surface de plasticité est prise en fin de pas de temps.

Ce système est résolu par une procédure itérative de Newton-Raphson. Il nécessite le calcul des dérivées de ces deux équations par rapport à  $r$  et  $D$ . Pour des raisons de bon conditionnement du système (5.45), nous normalisons le critère de plasticité (première équation de (5.45)) par un facteur  $2G$ .

A chaque itération de Newton-Raphson, les contraintes effectives sont mises à jour par les expressions (5.42) et (5.43). Les contraintes réelles, l'endommagement et la déformation plastique équivalente sont quant à elles mises à jour par les expressions :

$$\begin{aligned}
 D_1^{(i+1)} &= D_0 + \Delta D^{(i+1)} \\
 p_1^{(i+1)} &= \left(1 - D_1^{(i+1)}\right) \tilde{p}_1^{(i+1)} \\
 \mathbf{S}_1^{(i+1)} &= \left(1 - D_1^{(i+1)}\right) \tilde{\mathbf{S}}_1^{(i+1)} \\
 \bar{\varepsilon}_1^{pl,(i+1)} &= \bar{\varepsilon}_0^{pl} + \frac{\Delta r^{(i+1)}}{1 - D_1^{(i+1)}}
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

L'algorithme proposé ici se réduit ainsi à la résolution d'un système de deux équations scalaires à résoudre. Il nécessite le calcul de quatre dérivées partielles à chaque itération pour calculer la matrice jacobienne du système.

#### Algorithme proposé par de Souza Neto [68]

Cet algorithme est une simplification du système de deux équations à deux inconnues présenté par Vaz et Owen [268]. Il est également utilisé dans Mashayekhi et al. [169, 170]. De Souza Neto [68] montre que le système (5.45) peut se réduire à la résolution d'une équation à une inconnue  $\Delta r$ . Cette méthode est appliquée pour la loi d'endommagement de Lemaitre 5.4.2.1 sans écrouissage visqueux.

Comme pour la méthode à deux inconnues, nous étendons cet algorithme aux lois viscoplastiques et aux lois quelconques d'endommagement continu.

Dans ce modèle, le prédicteur élastique des déformations et des contraintes est défini de façon identique à (5.37) et (5.38). La mise à jour des contraintes effectives est donc donnée par l'expression (5.43). En calculant la norme de cette expression des contraintes effectives, il vient :

$$\left\| \tilde{\mathbf{S}}_1 \right\| = \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}_1 : \tilde{\mathbf{S}}_1} = \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}} - 2G \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\Delta r}{1 - D_1}}$$

A l'instant 1, le critère de plasticité est vérifié. On a donc :

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}_1 : \tilde{\mathbf{S}}_1} - \sigma_{crit} = 0$$

En insérant l'expression de la norme des contraintes effectives dans cette dernière expression, il vient :

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}} - 2G \frac{3}{2} \frac{\Delta r}{1 - D_1} - \sigma_{crit} = 0$$

d'où on tire l'expression de l'endommagement en fonction de l'incrément de déformation plastique endommagée  $\Delta r$  :

$$D_1(\Delta r) = 1 - \frac{3G_1 \Delta r}{\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}} - \sigma_{crit}} \quad (5.47)$$

A l'instant 1, l'équation de mise à jour de l'endommagement est vérifiée et on a :

$$D_1(\Delta r) - D_0 - g(p_1(D_1(\Delta r)), \mathbf{S}_1(D_1(\Delta r), \Delta r), \Delta r, D_1(\Delta r)) = 0 \quad (5.48)$$

Nous obtenons donc une nouvelle équation d'équilibre à l'instant 1, dépendant uniquement de  $\Delta r$ . Cette équation est résolue de manière classique par une procédure de Newton-Raphson et nécessite donc l'évaluation de la dérivée totale de la loi d'évolution de l'endommagement par rapport à  $\Delta r$ . Nous entendons par dérivée totale la dérivée explicite de la loi d'endommagement  $g$  par rapport à  $\Delta r$  et les dérivées des contraintes par rapport à  $\Delta r$  :

$$\frac{dg}{d\Delta r} = \frac{\partial g}{\partial \Delta r} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \Delta r} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \Delta r} + \frac{\partial g}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \Delta r}$$

L'expression  $\frac{\partial D}{\partial \Delta r}$  est donnée par la dérivée de l'expression (5.47) par rapport à  $\Delta r$ .

Comme pour le système à deux inconnues, les contraintes effectives sont mises à jour à chaque itération de Newton-Raphson par les expressions (5.42) et (5.43). Les contraintes réelles et la déformation plastique équivalente sont quant à elles mises à jour via les expressions (5.46). Dans l'algorithme original proposé par de Souza Neto, les contraintes ne sont mises à jour qu'à la fin de l'intégration parce que la loi d'intégration de Lemaitre peut s'exprimer seulement en fonction des contraintes effectives, ce qui ne s'applique pas dans le cas général des lois d'endommagement.

### Algorithme proposé

L'algorithme original de Lemaitre nécessite la résolution par une méthode de Newton-Raphson d'un système couplé de trois équations à trois inconnues, dont une des inconnues est un tenseur à 6 composantes (on a tenu compte de la symétrie du tenseur des déformations). C'est donc un système de 8 équations scalaires à 8 inconnues. Il faut dès lors calculer les dérivées de chacune de ces 8 équations par rapport aux 8 inconnues, soit 64 dérivées. Le coût d'une telle méthode est de ce fait très pénalisant.

L'algorithme proposé par Vaz et Owen [268] simplifie ce système en le réduisant à un système de deux équations à deux inconnues. Le coût de la méthode est donc fortement

réduit car il ne nécessite plus que l'évaluation de 4 dérivées. Cependant, d'après de Souza Neto et al. [69], cette méthode peut présenter des problèmes de convergence. Le remède consiste à introduire une procédure de *line-search* pour améliorer celle-ci.

L'algorithme proposé par de Souza Neto [68] ne contient plus qu'une seule équation en la variable  $\Delta r$ . Cette équation est résolue par une procédure de Newton-Raphson classique. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite l'évaluation des dérivées de la loi d'endommagement par rapport aux contraintes  $p$  et  $\mathbf{S}$ , à la déformation plastique endommagée  $r$  et à l'endommagement  $D$  pour obtenir la dérivée totale de la loi d'évolution d'endommagement par rapport à  $\Delta r$ .

L'algorithme que nous proposons pour résoudre le problème de viscoplasticité couplé à l'endommagement est un processus de type étagé : à partir d'un trio initial de valeurs  $(p_0, \mathbf{S}_0, D_0)$ , on détermine l'évolution de la plasticité et, partant, les contraintes effectives  $(\tilde{p}_1, \tilde{\mathbf{S}}_1)$  et l'évolution des déformations plastiques, à endommagement constant. A partir de ces valeurs, l'équation d'évolution de l'endommagement est mise à jour pour obtenir une nouvelle valeur de l'endommagement  $D_1$ . Le calcul des contraintes effectives et des déformations plastiques est alors répété pour donner une nouvelle valeur de l'endommagement. Et ainsi de suite jusqu'à convergence du processus. Cette convergence est mesurée par la différence entre deux valeurs successives de l'endommagement :

$$|D^{(i+1)} - D^{(i)}| \leq PREC \quad (5.49)$$

où  $PREC$  est la précision d'intégration souhaitée et  $i$  le numéro de l'itération dans le processus. Dans ce travail, nous avons choisi comme valeur de  $PREC$ , la même valeur que celle utilisée pour résoudre le problème de plasticité, soit  $10^{-8}$ . Le critère de convergence sur la valeur d'endommagement est suffisant pour la convergence globale du processus. En effet, au moment de la convergence, la valeur trouvée pour  $\Delta r$  satisfait au critère de plasticité pour la valeur d'endommagement courante. La figure 5.1 présente l'algorithme d'intégration proposé.

Notons que Boers et al. [27] repris dans Mediavilla et al. [174, 175] proposent également une méthode d'intégration découplée de la plasticité et de la mise à jour de la variable d'endommagement, mais ils ne considèrent pas un processus itératif. Cela est possible à condition de ne considérer que de petits pas de temps. Mediavilla [174] mentionne d'ailleurs que cet algorithme est conditionnellement stable. Or, nous n'avons pas rencontré de problème de stabilité lors de l'utilisation d'un tel algorithme par rapport à l'utilisation d'un algorithme couplé tel que décrit précédemment (voir section 7.2).

L'inconnue  $\Delta r$  à l'itération  $i$  est, quant à elle, déterminée à l'aide du critère de plasticité (5.26) via une procédure de retour radial classique tout à fait semblable à celle présentée pour le cas sans endommagement dans l'annexe A.1.5. La mise à jour de  $\Delta r^{(i)}$

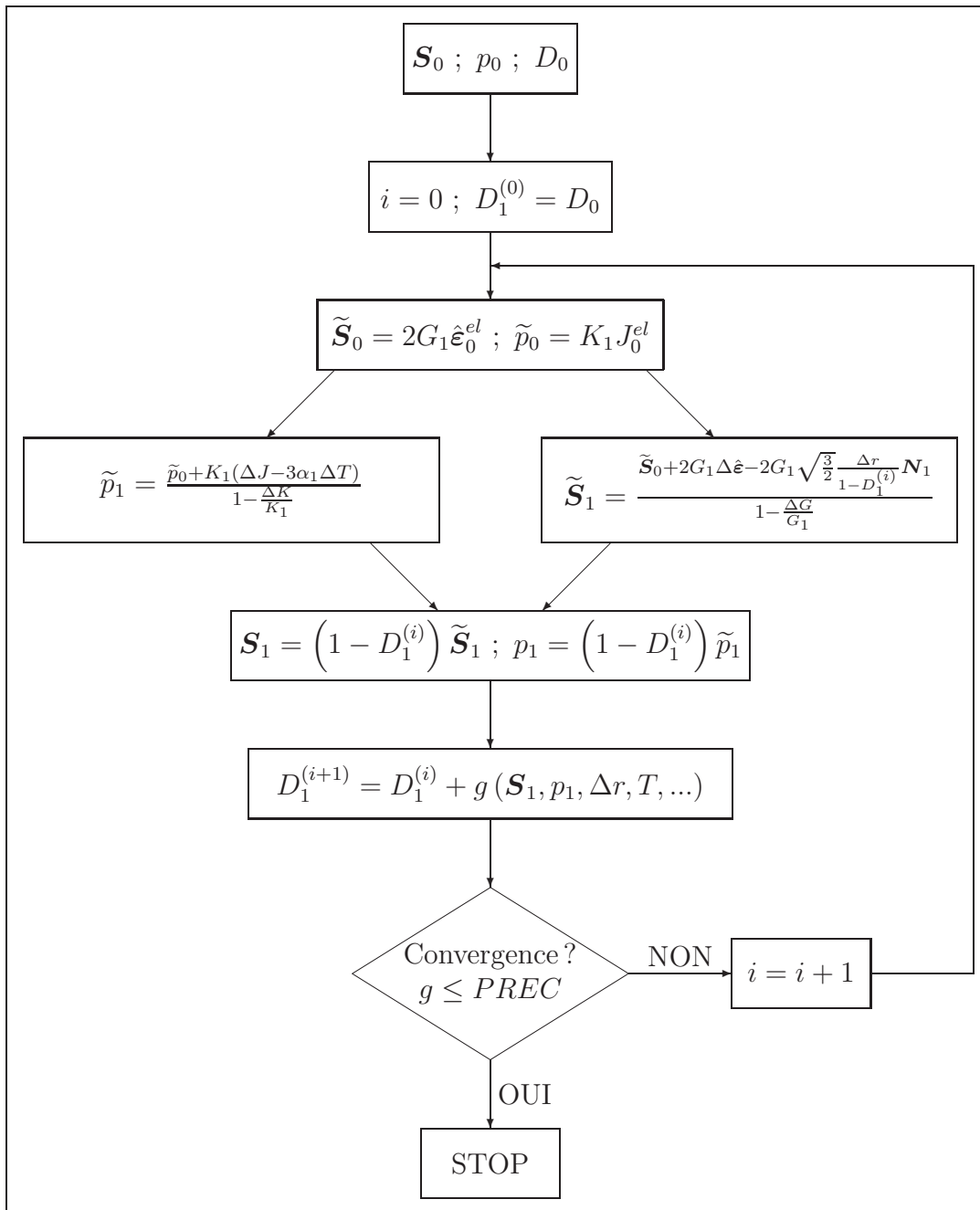


FIG. 5.1 – Schéma d'intégration de la loi constitutive avec endommagement.

par la procédure de Newton-Raphson est calculée par :

$$\Delta r^{(i)} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\mathbf{S}}_1^{(i)} : \tilde{\mathbf{S}}_1^{(i)} - \sigma_{crit}}}{\frac{3G_1}{1-D^{(i)}} + \tilde{h}(r^{(i)}, \dot{r}^{(i)})} \quad (5.50)$$

où  $\tilde{h} = \frac{d\sigma_{crit}}{dr}$  est le taux d'érouissage.

Une fois le calcul de  $\Delta r^{(i)}$  effectué, les expressions du tenseur des contraintes et de la déformation plastique équivalente sont aisément obtenues. A partir de ces valeurs, l'équation d'évolution de la variable d'endommagement est mise à jour<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} p_1^{(i)} &= (1 - D_1^{(i)}) \tilde{p}_1^{(i)} \\ &= (1 - D_1^{(i)}) \frac{\tilde{p}_0 + K_1 (\Delta J - 3\alpha_1 \Delta T)}{1 - \frac{\Delta K}{K_1}} \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1^{(i)} &= (1 - D_1^{(i)}) \tilde{\mathbf{S}}_1^{(i)} \\ &= (1 - D_1^{(i)}) \frac{\tilde{\mathbf{S}}_0 + 2G_1 \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G_1 \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\Delta r^{(i)}}{1-D_1^{(i)}}} \mathbf{N}_1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\bar{\varepsilon}_1^{pl,(i)} = \bar{\varepsilon}_0^{pl} + \frac{\Delta r^{(i)}}{1 - D_1^{(i)}} \quad (5.53)$$

$$D^{(i+1)} = D_0 + g(p_1^{(i)}, \mathbf{S}_1^{(i)}, r_1^{(i)}, \Delta r_1^{(i)}, D_1^{(i)}, T_1) \quad (5.54)$$

L'algorithme proposé nécessite l'évaluation d'une seule dérivée : la dérivée du critère de plasticité par rapport à la déformation plastique endommagée. Cela n'implique que la connaissance du taux d'érouissage  $\tilde{h}$ , qui est indépendant de la loi d'évolution d'endommagement. Ici, les dérivées de la loi d'endommagement ne sont pas nécessaires, contrairement à l'algorithme proposé par de Souza Neto.

## 5.6 Modèle unifié du calcul de la matrice de raideur tangente consistante

Comme dans le cas sans endommagement, nous présentons ici une méthode générale de calcul de la matrice de raideur tangente matérielle pour un matériau thermo-élasto-viscoplastique avec endommagement continu. Cette méthode est indépendante de l'expression de la loi d'endommagement considérée ainsi que de celle de la loi d'érouissage (visqueux ou non). Pour rappel, les différents calculs sont effectués dans un système d'axes corotationnels et donc objectif (voir Ponthot [217, 218]).

<sup>1</sup>Rappelons que les variations des paramètres élastiques  $G$  et  $K$  sont dues à la variation de température.

Dans ce système d'axes corotationnels, la matrice de raideur tangente matérielle s'exprime comme la variation du tenseur des contraintes en fonction de la variation du tenseur des déformations :

$$\mathbf{H} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.55)$$

Rappelons les expressions des différentes grandeurs intervenant dans l'intégration des contraintes et de l'endommagement. Nous avons les relations suivantes pour la mise à jour des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(p, \mathbf{S}) = p\mathbf{I} + \mathbf{S} \quad (5.56)$$

$$p = p(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = (1 - D)\tilde{p}_0^* + K^*(1 - D)(\Delta J - 3\alpha\Delta T) \quad (5.57)$$

$$= (1 - D)\tilde{p}^{el,*} \quad (5.58)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}, D, \Delta r, \mathbf{N}) = (1 - D)\tilde{\mathbf{S}}_0^* + 2G^*(1 - D)\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G^*\sqrt{\frac{3}{2}}\Delta r\mathbf{N} \quad (5.59)$$

$$= (1 - D)\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} - 2G^*\sqrt{\frac{3}{2}}\Delta r\mathbf{N} \quad (5.60)$$

où :

- $K^* = \frac{K_1}{1 - \frac{\Delta K}{K_1}}$
- $G^* = \frac{G_1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}}$
- $\tilde{p}^{el,*} = \frac{\tilde{p}^{el}}{1 - \frac{\Delta K}{K}}$
- $\tilde{p}_0^* = \frac{p_0}{(1 - D_0)\left(1 - \frac{\Delta K}{K_1}\right)}$
- $\tilde{\mathbf{S}}_0^* = \frac{\mathbf{S}_0}{(1 - D_0)\left(1 - \frac{\Delta G}{G_1}\right)}$
- $\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} = \frac{\tilde{\mathbf{S}}^{el}}{1 - \frac{\Delta G}{G}}$

La normale à la surface de plasticité  $\mathbf{N}$  s'écrit :

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\tilde{\mathbf{S}}_0^* + 2G^*\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\left\|\tilde{\mathbf{S}}_0^* + 2G^*\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\|} = \frac{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*}}{\left\|\tilde{\mathbf{S}}^{el,*}\right\|} = \frac{\tilde{\mathbf{S}}^{el}}{\left\|\tilde{\mathbf{S}}^{el}\right\|} \quad (5.61)$$

Les deux variables d'incrément de déformation plastique équivalente endommagée  $\Delta r$  et d'endommagement  $D$  sont quant à elles fonctions du tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Leurs

lois d'évolution sont déterminées par le critère de plasticité d'une part, et par la loi d'évolution de l'endommagement  $g$  d'autre part. Pour la définition de la fonction d'évolution de l'endommagement  $g$ , nous considérons le cas assez général où cette relation est fonction explicite du tenseur des déformations, du tenseur des contraintes, de la déformation plastique endommagée ou encore de l'endommagement<sup>1</sup>. Dès lors, leurs dérivées respectives sont calculées par la dérivée du critère de plasticité et de la loi d'endommagement :

$$f = f(D, \mathbf{S}, \Delta r) = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}}{1 - D}} - \sigma_{crit}(\Delta r) \quad (5.62)$$

$$D = D(\boldsymbol{\varepsilon}) = D_0 + g(\boldsymbol{\varepsilon}, p, \mathbf{S}, \Delta r, D) \quad (5.63)$$

Comme l'intégration des contraintes (pression et contraintes déviatoriques) est couplée à l'endommagement, la matrice de raideur l'est également : la pression (respectivement la plasticité) intervient dans la partie déviatorique (respectivement volumique) de la matrice de raideur. Ceci diffère de la formulation proposée au chapitre 2 où le calcul des contraintes déviatoriques et volumiques était totalement dissocié, tout comme celui de la matrice de raideur. Nous avons donc aux points de Gauss volumiques une composante de plasticité tandis que la pression intervient également aux points de Gauss déviatoriques (en plus de la composante de plasticité)<sup>2</sup>.

Comme présenté dans l'annexe B.6, la matrice de raideur est décomposée en une partie volumique  $\mathbf{H}^{vol}$  prise en compte aux points de Gauss volumiques et une partie déviatorique  $\mathbf{H}^{dev}$  prise en compte aux points de Gauss déviatoriques. Suite aux développements présentés dans l'annexe B, la partie volumique de la matrice de raideur tangente matérielle s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{H}^{vol} = K^* (1 - D) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dD} \otimes \left( \frac{\partial D}{\partial J} \mathbf{I} \right)} \quad (5.64)$$

D'autre part, la partie déviatorique de la matrice de raideur tangente matérielle s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{H}^{dev} = 2G^* (1 - D) \left( \beta \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \left( \frac{1}{\kappa} + \beta - 1 \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right) + \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dD} \otimes \left( \frac{\partial D}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)} \quad (5.65)$$

<sup>1</sup>En effet, l'incrément d'endommagement peut être couplé à la valeur courante de l'endommagement (voir les lois d'évolution des modèles référencés dans la section 5.4, et en particulier la loi d'endommagement originale de Lemaitre 5.4.2.1).

<sup>2</sup>Afin d'éviter tout phénomène de *locking*, nous utilisons une méthode de sous-intégration sélective : la partie déviatorique est intégrée avec un nombre standard de points de Gauss ( $2 \times 2 \times 2$  pour un problème tridimensionnel), tandis que la partie volumique est intégrée avec un seul point de Gauss. De plus, la déformation volumique, calculée au point de Gauss volumique, est ensuite reportée aux points de Gauss déviatoriques.



où nous avons défini les expressions suivantes :

- La dérivée totale du tenseur des contraintes par rapport à l'endommagement :

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dD} = -\tilde{p}^{el,*} \mathbf{I} - \left(1 + \frac{\beta - 1}{\kappa}\right) \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}} \quad (5.66)$$

- La dérivée de l'endommagement par rapport aux déformations volumique et déviatoriques :

$$\boxed{\frac{\partial D}{\partial J} = \frac{1}{\zeta} \left( \frac{\partial g}{\partial J} + K^* (1 - D) \frac{\partial g}{\partial p} \right)} \quad (5.67)$$

$$\boxed{\frac{\partial D}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{\zeta} \left[ \frac{\partial g}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1 - D}{\kappa} \mathbf{N} + 2G^* (1 - D) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \left( \beta \boldsymbol{\Delta} - \left( \frac{1}{\kappa} + \beta - 1 \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right) \right]} \quad (5.68)$$

- Le dénominateur  $\zeta$  de ces deux dernières expressions :

$$\boxed{\zeta = 1 - \frac{\partial g}{\partial D} + \frac{\partial g}{\partial p} \tilde{p}^{el,*} + \left( \frac{\beta - 1}{\kappa} + 1 \right) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*} - \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\beta - 1}{3G^* \kappa} \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*}} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}} \quad (5.69)$$

- Le rapport  $\beta$  des normes des contraintes effectives et du prédicteur élastique des contraintes effectives :

$$\boxed{\beta = 1 - \frac{2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta r}{1 - D}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el}} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}} = \frac{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{S}}}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}}} \quad (5.70)$$

- La grandeur  $\kappa$  mesurant l'influence de la loi d'écroutissage :

$$\boxed{\kappa = 1 + \frac{\tilde{h} (1 - D)}{3G^*}} \quad (5.71)$$

- Le tenseur d'ordre 4  $\boldsymbol{\Delta}$  représentant la dérivée d'un tenseur symétrique et déviatorique d'ordre 2 par rapport à lui-même :

$$\boxed{\Delta_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})} \quad (5.72)$$

En examinant l'expression de la matrice de raideur volumique (5.64) (respectivement déviatorique (5.65)), nous pouvons constater que nous obtenons un terme correspondant au terme volumique (respectivement déviatorique) de la matrice de raideur sans endommagement (2.40) (respectivement (2.51)) et un terme correspondant à la partie volumique (respectivement déviatorique) de la variation d'endommagement. Ce résultat est conforme à ce qui est montré dans Mediavilla [174]. Cependant, il ne l'applique qu'au modèle particulier d'endommagement de Geers [90] (section 5.4.2.4), alors qu'ici, nous généralisons cette expression au cas de lois quelconques d'endommagement.

La formulation proposée ici est applicable à toutes les lois d'endommagement présentées dans la section 5.4. De plus, toutes les lois d'écrouissage thermo-élasto-viscoplastiques présentées dans la section 2.3 peuvent être utilisées en couplage avec n'importe quelle loi d'évolution de l'endommagement. En pratique, vu la structure actuelle du logiciel Metafor, l'ajout d'une nouvelle loi d'endommagement se fait très simplement par la définition de la fonction  $g$  et le calcul de ses dérivées par rapport aux déformations volumique  $J$  et déviatoriques  $\hat{\varepsilon}$ , aux contraintes volumique  $p$  et déviatorique  $\mathbf{S}$ , à l'incrément de déformation plastique endommagée  $\Delta r$  et à l'endommagement  $D$ . Cette nouvelle loi est directement utilisable avec toutes les lois d'écrouissage implémentées dans le code Metafor sans effort de programmation supplémentaire.

A titre d'illustration de ce dernier point, dans un domaine d'application tout à fait différent de celui considéré dans ce travail (la biomécanique), un modèle de comportement d'os avec endommagement continu (voir Doblare et Garcia [77, 178]) a été implémenté dans Metafor selon la procédure explicitée ci-avant. Cette implémentation n'a nécessité aucune modification de la procédure d'intégration des lois constitutives avec endommagement. Seules les expressions de la loi d'évolution de l'endommagement et ses dérivées ont été implémentées et toutes les lois d'écrouissage existantes peuvent y être associées.

A titre d'exemple, si nous considérons le modèle original de Lemaitre et Chaboche (voir section 5.4.2.1), la fonction  $g$  s'écrit de la façon suivante :

$$g = \left[ \frac{\frac{2}{3}(1 + \nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1 - 2\nu)p^2}{2ES(1 - D)^2} \right]^s \frac{\Delta r}{1 - D}$$

où  $E$  est le module de Young du matériau,  $\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau,  $S$  et  $s$  sont des paramètres matériau de la loi d'endommagement. Il vient donc, après développement, pour les différentes expressions des dérivées partielles de  $g$  intervenant dans les

expressions (5.67) à (5.69) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial J} &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial g}{\partial p} &= \frac{6s(1-2\nu)p}{(2ES(1-D)^2)^s} \left( \frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu)p^2 \right)^{s-1} \frac{\Delta r}{1-D} \\ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} &= \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}(1+\nu)\mathbf{S}}{(2ES(1-D)^2)^s} \left( \frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu)p^2 \right)^{s-1} \frac{\Delta r}{1-D} \\ \frac{\partial g}{\partial \Delta r} &= \left( \frac{\frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu)p^2}{2ES(1-D)^2} \right)^s \frac{1}{1-D} \\ \frac{\partial g}{\partial D} &= \left( \frac{\frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu)p^2}{2ES} \right)^s \frac{(2s+1)\Delta r}{(1-D)^{2s+2}}\end{aligned}$$

Insistons sur le fait que les dérivées ci-dessus sont des dérivées explicites par rapport aux variables  $(\mathbf{S}, p, \Delta r, D, \boldsymbol{\varepsilon})$ . L'implémentation d'une nouvelle loi d'endommagement ne nécessite le calcul que de ces dérivées explicites (en plus de l'implémentation de la fonction d'évolution de l'endommagement  $g$ ).

## 5.7 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode générale d'intégration des lois constitutives avec endommagement selon la théorie de l'endommagement continu. Nous l'avons établie pour une formulation en grandes déformations dans le cadre thermomécanique, et adaptée aux grandes vitesses de déformation. La méthode proposée est donc tout à fait apte à simuler les problèmes de dynamique rapide étudiés dans ce travail.

L'algorithme d'intégration des lois avec endommagement est également original. Il se résume à la résolution d'une équation à une inconnue, à savoir l'incrément de déformation plastique endommagée  $\Delta r$ . De plus, l'algorithme proposé a été écrit de façon à être indépendant du modèle d'évolution de la variable d'endommagement  $\dot{D}$ . L'ajout d'un nouveau modèle d'endommagement peut dès lors se faire sans difficulté majeure.

Une fois la valeur critique d'endommagement atteinte, le modèle prévoit la perte totale de résistance du matériau sous l'effet d'un incrément de sollicitation. En conséquence, il faut en tenir compte pour la suite du calcul. Nous proposons dans le chapitre suivant une méthode permettant de prendre en compte la ruine du matériau.



# Chapitre 6

## Rupture des matériaux ductiles

### 6.1 Introduction

On a coutume de distinguer trois types de rupture pouvant survenir dans les matériaux : la rupture fragile, la rupture ductile et la rupture par fatigue.

Historiquement, le développement de la mécanique de la rupture a d'abord été effectué sur des matériaux dits fragiles pour lesquels le matériau reste dans un état élastique<sup>1</sup> (citons par exemple Xu et Needleman [276], Camacho et Ortiz [43] ou Belytschko et Black [21]). Cette hypothèse a permis de développer des théories analytiques de la mécanique de la rupture, basées sur les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  (cf figure 6.1). Parmi de nombreux autres, Jones [126] ou Rosakis et Ravichandran [226] ont fait un inventaire des différents types de méthodes analytiques basées sur les modes de rupture  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ . Les évolutions de ces facteurs d'intensité de contraintes permettent de modéliser l'évolution de la rupture dans le matériau et peuvent d'ailleurs être utilisés dans des codes numériques.

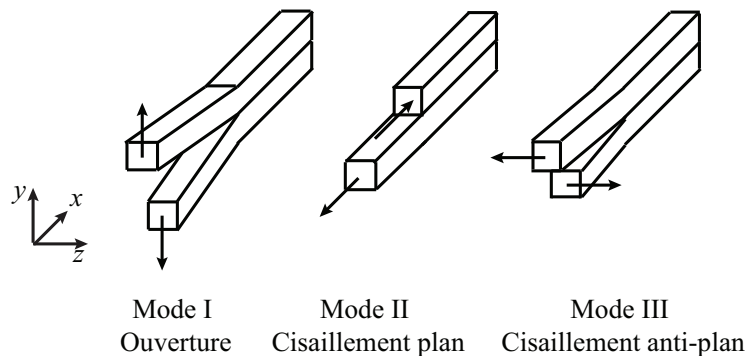


FIG. 6.1 – Modes de rupture. La direction  $x$  est la direction de propagation de la fissure.

<sup>1</sup>Les déformations plastiques n'apparaissent qu'en fond de fissure, de façon très localisée.

Dans ce travail, les phénomènes étudiés ne cadrent pas avec les hypothèses de rupture fragile : vu les déformations irréversibles importantes, les modèles analytiques de rupture fragile apparaissent vite dépassés. Il existe des modèles analytiques prenant en compte un modèle élastique parfaitement plastique (par exemple Deng et Rosakis [72]). Mais ces modèles ont également montré leurs limites (voir Rosakis et Ravichandran [226]).

La rupture par fatigue n'est pas considérée dans ce travail. En effet, le phénomène de fatigue des structures n'entre pas en ligne de compte dans les problèmes étudiés ici. Le lecteur intéressé par le sujet peut se reporter entre autres à Chapetti [48].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la modélisation numérique de la mécanique de la rupture ductile. En particulier, nous étudions les problèmes de déchirement dans les structures soumises à chargement dynamique. La modélisation de la rupture ductile des structures consiste habituellement en deux ou trois phases : (a) l'accroissement de l'endommagement (parfois non pris en compte), (b) l'initialisation de la déchirure et enfin (c) sa propagation à travers la structure.

L'aspect de l'évolution de l'endommagement ayant été traité dans le chapitre 5, deux points sont donc encore à considérer dans la modélisation des problèmes de déchirure : la naissance d'une fissure et ensuite sa propagation. La naissance de la fissure repose sur la vérification d'un critère de rupture. La section 6.2 présente un aperçu des différents critères de rupture macroscopiques utilisés dans la littérature.

Le second aspect est la modélisation de la propagation de la fissure dans la structure. Une fois l'existence d'une fissure détectée par le critère de rupture, nous devons nous assurer que sa propagation est conforme aux observations expérimentales. Différentes techniques sont utilisées pour modéliser cette propagation. Dans la section 6.3, nous nous intéressons aux méthodes utilisant les éléments finis.

Comme dans tout le travail, nous nous attelons à une description macroscopique de la rupture, sans essayer de descendre à une autre échelle.

D'autres techniques de modélisation de propagation de fissure sont utilisées dans la littérature. Sans prétentions à l'exhaustivité, citons notamment la méthode XFEM (Extended Finite Element Method) développée au départ par Moës et Belytschko (voir Moës et al. [187] ou Belytschko et Black [21]) pour la rupture fragile, et qui est utilisée fréquemment, par exemple par Sukumar et al. [256] ou Arias et al. [11]. D'autres méthodes ont été proposées, notamment par Ibrahimbegovic et Melnyk [120] qui utilisent une méthode d'enrichissement des éléments finis, alternative aux éléments XFEM. Citons encore des techniques de modélisation sans maillage (Chen et al. [49], Simkins et Li [242] ou encore Rabczuk et Belytschko [222]).

Notons que, souvent, dans le cadre de la méthode des éléments finis classique, une opération de remaillage est couplée à la mécanique de la rupture pour éviter l'apparition

d'éléments trop distordus. Cependant, nous ne considérons pas d'opération de remaillage dans ce travail, ce qui constitue clairement une limitation et un point à approfondir dans le futur.

## 6.2 Critères de rupture

Dans cette section, nous nous intéressons au déclenchement de la rupture dans le matériau. Une fois un critère vérifié, le matériau se rompt. Nous ne considérons que les critères de rupture macroscopique, fonctions par exemple des contraintes, des déformations, de la température ou encore de l'endommagement. Dans le même ordre d'idées, nous considérons seulement les critères de rupture dans le cas de rupture ductile et nous attachons une plus grande importance aux critères utilisés dans le cadre d'applications dynamiques.

Il existe deux grandes familles de critères de rupture ductile : les critères basés sur l'endommagement et les critères basés sur l'état de déformation plastique de la structure, pondéré par une fonction de l'état de contraintes du matériau.

Tous ces modèles de critères de rupture présentent un certain nombre de paramètres matériau à identifier. Hambli et Reszka [107] proposent une méthode d'identification paramétrique par méthode inverse pour les types de critères de rupture présentés ci-après.

### 6.2.1 Les critères de rupture basés sur l'endommagement

Comme pour l'endommagement (voir chapitre 5), nous distinguons les critères de rupture basés sur les modèles d'endommagement de type Gurson et sur les modèles d'endommagement continu.

Le modèle de Gurson, décrit à la section 5.2, présente une valeur critique d'endommagement  $D_u$  au-delà de laquelle le matériau est supposé rompu. Au vu de l'interprétation de l'endommagement (fraction volumique de vides), cette valeur critique correspond à une taille critique des vides dans la structure. L'inconvénient principal de ce modèle est le nombre très élevé de paramètres matériau, ce qui le rend difficile à utiliser dans la pratique vu que ces paramètres doivent être identifiés pour chaque matériau.

Le critère de rupture associé à la théorie de l'endommagement continu est également simple : le matériau est supposé rompu si l'endommagement  $D$  atteint une valeur critique  $D_c$ . C'est notamment le cas des modèles d'endommagement dynamiques de Johnson-Cook et de Børvik et Langseth exposés dans les sections 5.4.3.1 et 5.4.3.2. Il est important de noter que cette valeur critique d'endommagement n'est pas nécessairement égale à 1 (ce qui correspond à une résistance à l'effort nulle). La valeur critique de l'endommagement correspond alors à l'apparition d'une fissure macroscopique dans le matériau. Elle peut être relativement faible : pour de l'acier Weldox 460E, la valeur critique d'endommagement est de 0.3 (voir Børvik et al. [37, 39, 41]).

### 6.2.2 Les critères de rupture basés sur la déformation plastique équivalente

La seconde grande famille de critères repose sur une valeur critique de la déformation plastique. Ces critères postulent que la rupture survient en un point d'un corps lorsque la déformation plastique équivalente atteint une valeur critique :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} f(\text{état de contraintes, déformations}) d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit}$$

où  $f(\text{état de contraintes, déformations})$  est une fonction de pondération de la déformation plastique équivalente qui peut dépendre des différentes composantes des tenseurs des contraintes et des déformations, de leurs invariants ou encore de leurs composantes principales;  $\bar{\varepsilon}_f^{pl}$  est la déformation plastique équivalente de rupture et  $C_{crit}$  est un paramètre matériau. Nous présentons ci-après les critères de rupture les plus courants.

La forme la plus simple pour ce type de critère est une fonction  $f$  égale à l'unité. Le critère de rupture est donc simplement la valeur de la déformation plastique de rupture  $\bar{\varepsilon}_f^{pl}$ . Ce critère est utilisé dans Abaqus [111], notamment par Langdon et Schleyer [140], Mac Dougall et Harding [159], Rusinek et Zaera [234] ou encore Bessette et al. [25]. Ces derniers estiment cette déformation plastique équivalente comprise entre 1.5 et 3.0 selon le type de sollicitations (dont on peut tenir compte dans la fonction  $f$ ).

Freudenthal [86], repris ensuite par Clift et al. [55], introduit la contrainte équivalente comme fonction de pondération :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \sigma_{eq} d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit} (MPa)$$

LeRoy et al. [150] proposent le modèle de rupture ductile suivant, obtenu à partir de l'étude de l'évolution de la croissance des vides dans un test de traction :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} (\sigma_1 - p) d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit} (MPa)$$

Cockcroft et Latham [58] postulent que la rupture est contrôlée par la contrainte principale maximale  $\sigma_1$  intégrée sur l'histoire de la déformation plastique. Oh et al. [197] normalisent la contrainte principale par la contrainte équivalente :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}} d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit}$$



McClintock [173] a développé un critère de rupture basé sur l'analyse bidimensionnelle d'un trou cylindrique à l'intérieur d'une matrice "infinie" soumise à un chargement en contraintes dans les deux directions principales :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \left( \frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_{eq}} \right) + \frac{3}{4} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_{eq}} \right] d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit}$$

où  $n$  est un paramètre matériau ;  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes principales dans les directions 1 et 2.

Brozzo et al. [33] proposent l'expression suivante pour tenir compte explicitement de la pression hydrostatique  $p$  :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \frac{2\sigma_1}{3(\sigma_1 - p)} d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit}$$

Norris et al. [196] présentent le modèle d'initiation et de propagation de la rupture ductile suivant : la fissure naît ou grandit lorsque le critère de rupture est vérifié sur une longueur caractéristique  $r_f$  :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \frac{1}{1 - Ap} d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit}(r_f)$$

où  $A$  et  $r_f$  sont des paramètres matériau.

Le modèle d'Atkins [13] ajoute au critère de Norris une dépendance sur le rapport des incréments des déformations principales  $\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2}$  :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \frac{2 + \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2}}{2(1 - Ap)} d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit}$$

où  $A$  est un paramètre matériau.

Il a été montré, notamment dans Børvik et al. [35] ou Adam [2], l'importance de considérer la contrainte de triaxialité  $\sigma^* = \frac{p}{\sigma_{eq}}$  dans l'étude de problèmes d'endommagement et de rupture. Il est donc intéressant d'inclure dans la fonction de pondération  $f$  un terme dépendant de la triaxialité.

La forme la plus simple pour tenir compte de la triaxialité  $\sigma^*$  (voir Bao et Wierzbicki [15]) est :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \sigma^* d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit}$$

Rice et Tracey [225] introduisent une forme plus évoluée de la fonction  $f$  en fonction de la triaxialité décrivant la croissance des vides dans la structure :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \left[ 0.558 \sinh \left( \frac{3}{2} \sigma^* \right) + 0.008 \mu \cosh \left( \frac{3}{2} \sigma^* \right) \right] d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit}$$

où  $\mu = -2 \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} - \dot{\varepsilon}_3$ ,  $\dot{\varepsilon}_1 \geq \dot{\varepsilon}_2 \geq \dot{\varepsilon}_3$  sont les taux de déformations principales. Ce critère peut se simplifier en cas de forte triaxialité des contraintes ( $0.4 \leq \sigma^* \leq 0.9$ , voir Bao et Wierzbicki [15]) :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \exp \left( \frac{3}{2} \sigma^* \right) d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit}$$

Oyane [202, 203] dérive un critère de rupture ductile du matériau, basé sur la théorie des matériaux poreux en élastoplasticité :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \left( 1 + \frac{\sigma^*}{A} \right) d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit}$$

où  $A$  est un paramètre matériau.

Goijaerts et al. [95] proposent une extension tridimensionnelle du critère proposé par Oyane et al. [203]. Il s'écrit :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \frac{1}{C} \langle 1 + A\sigma^* \rangle d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit}$$

où  $A$  et  $C$  sont des paramètres matériau;  $\langle x \rangle = \frac{1}{2} (x + |x|)$  sont les parenthèses de Mac-Caulay. La rupture survient lorsque  $C_{crit} = 1$ .

Lemaitre [146] a dérivé un critère de rupture ductile basé sur la variable d'endommagement  $D$  et le concept de contrainte effective (voir section 5.3.3.2) :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \left[ \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3 (1 - 2\nu) (\sigma^*)^2 \right] d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit}$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau.

Bao et Wierzbicki [15] proposent une comparaison quantitative de différents critères de rupture<sup>1</sup>, dans le cadre de l'apparition de fissures pour des matériaux ductiles. Des tests sont effectués sur des cylindres en traction ou en compression, entaillés ou non, pour un alliage d'aluminium. Ils considèrent des valeurs de la triaxialité allant de  $-\frac{1}{3}$  à 0.9. Il y est notamment montré qu'aucun des critères envisagés ne donne de résultat satisfaisant pour tous les cas proposés. Ces critères de rupture doivent donc être utilisés avec la plus grande circonspection.

<sup>1</sup>Ces auteurs comparent les critères de Cockcroft et Latham [58], de McClintock [173], de Rice et Tracey [225], de Brozzo et al. [33], de LeRoy et al. [150], de Clift et al. [55], et enfin les critères relatifs à  $f = 1$  et  $f = \sigma^*$ .

### 6.2.3 Autres critères de rupture

Citons le critère de Hancock-Mackenzie [109] utilisé entre autres par El-Magd et Abouridouane [80]. Celui-ci donne la valeur de la déformation plastique de rupture par la formule :

$$\bar{\varepsilon}_f^{pl} = D_1 + D_2 \exp(D_3 \sigma^*)$$

où  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  sont des constantes du matériau. Notons que ce critère de rupture est identique au modèle d'endommagement décrit dans la section 5.4.2.5 où la rupture survient quand l'endommagement prend la valeur 1.

Johnson et Cook [124] ont étendu ce modèle pour prendre en compte les effets de la température et de la vitesse de déformation plastique équivalente. La déformation plastique équivalente de rupture est donnée par :

$$\bar{\varepsilon}_f^{pl} = (D_1 + D_2 \exp(D_3 \sigma^*)) \left(1 + D_4 \ln \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\varepsilon}}_0}\right) \left(1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)$$

où  $D_4$  et  $D_5$  sont de nouveaux paramètres matériau.

Ghosh [92] propose un critère de rupture basé sur les contraintes principales du matériau :

$$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right) \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) = C_{crit}$$

La constante  $C_{crit}$  a donc les dimensions du carré d'une contrainte.

Rusinek et Zaera [234], Weber et al. [272], Batra [17, 19, 273] ou encore Mason et Worswick [171] entre autres, utilisent comme critère de rupture le critère dit de Considère. Ce critère est basé sur la perte d'homogénéité de la déformation plastique sous l'effet du chargement. La structure devient instable lorsque la condition suivante est satisfaite :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma$$

Signalons encore pour mémoire, que Kim et Wierzbicki [132] proposent un calcul analytique du point de rupture dans des longerons.

Il existe également d'autres types de critères de rupture plus complexes, par exemple des critères de rupture basés sur l'endommagement anisotrope (voir par exemple Hammi et Horstemeyer [108] ou Xue [277]), mais nous ne les considérons pas dans ce travail, tout comme nous n'avons pas considéré les modèles d'endommagement anisotrope. De même, des critères impliquant des facteurs microscopiques (défauts dans la structure...) comme dans Batra et Lear [19] ne sont pas considérés ici.

## 6.3 Technique numérique de propagation de fissure

### 6.3.1 Introduction

Dans cette section, nous nous intéressons au second aspect important de la modélisation de la rupture dans une structure : la propagation de la fissure. Nous nous focalisons sur l'implémentation numérique de la rupture dans le modèle éléments finis. Le problème posé est le suivant : un critère de rupture (tel que ceux décrits à la section 6.2) est vérifié en un ou plusieurs points de Gauss d'un élément. Cet élément est alors considéré comme rompu et ne participe donc plus à la raideur globale de la structure. Nous devons en tenir compte pour la suite du calcul.

Trois grandes techniques de modélisation de propagation de fissure sont référencées dans la littérature avec les éléments finis traditionnels<sup>1</sup> : la méthode de décohésion proposée par exemple par Camacho et Ortiz [43, 201], l'approche par discontinuités (Strong Discontinuity Approach) proposée par Simo et al. [243] et la méthode par érosion [24, 25] utilisée principalement dans les codes de calcul commerciaux explicites (LS-Dyna [106] et Abaqus [111] par exemple).

### 6.3.2 Méthode de décohésion

Cette méthode a été proposée par Camacho et Ortiz [43, 201] sur base des travaux de Xu et Needleman [276]. Elle a été utilisée pour la rupture de matériaux divers comme les polymères dans Rahulkumar et al. [224], les matériaux métalliques dans Siegmund et Brocks [241], les céramiques par Camacho et Ortiz [43], les composites notamment dans Xu et Needleman [276], Arias et al. [11] ou Monerie [186], les bétons dans Ruiz et al. [229], tant en sollicitations statiques (Jin et al. [122]) que dynamiques (Camacho et Ortiz [43], Xu et Needleman [276] ou Ruiz et al. [229]) ou cycliques (Serebrinsky et Ortiz [238]). Le principe de la méthode est de découpler les lois constitutives modélisant le comportement du matériau et les caractéristiques de rupture du matériau. Ce sont ces caractéristiques de rupture qui gouvernent la séparation des éléments par une loi de décohésion irréversible qui tient éventuellement compte de processus microscopiques.

Cette technique de modélisation consiste à suivre explicitement l'initiation et la propagation de fissures multiples. Ces fissures peuvent se brancher et fusionner pour donner éventuellement naissance à des fragments. La création de nouvelles surfaces libres sur les éléments est réalisée en permettant à des frontières initialement non libres (éléments collés) de s'ouvrir selon une loi de décohésion des éléments entre eux, modélisant une perte graduelle de résistance quand la séparation de ces deux éléments grandit. La loi de décohésion détermine le travail à fournir pour séparer deux éléments, c'est-à-dire l'énergie de rupture.

---

<sup>1</sup>Pour rappel, nous n'envisageons pas dans ce travail de méthode de type XFEM, meshless ou autres méthodes différentes de la méthode des éléments finis traditionnelle.

Cette technique a prouvé son efficacité dans différents cas comme la naissance de fissure. Elle fournit également un moyen simple d'inclure des données physiques dans la description du phénomène de séparation des éléments (corrosion, propriétés chimiques,...). Son grand inconvénient est le fait que le chemin parcouru par la fissure suit la géométrie du maillage car les surfaces de décohésion peuvent seulement apparaître aux frontières des éléments. Des études (Papoulia et al. [205] ou Molinari et al. [185]) proposent des solutions quantitatives sur le niveau de raffinement du maillage pour éviter ces dépendances au maillage.

### 6.3.3 Méthode par discontinuités

Ce sont Oliver et Simo [198, 199, 243] qui sont à l'origine de cette méthode de modélisation de la propagation de fissure. Par la suite, elle a été également utilisée par Mosler [188] et Manzoli et Shing [165]. Le principe général de la méthode consiste à "inclure" une discontinuité à l'intérieur d'un maillage éléments finis. Les éléments sont donc rompus au passage de la discontinuité (contrairement à la méthode de décohésion qui sépare les éléments les uns des autres). Nous en présentons ici les principes généraux.

La figure 6.2 présente une discontinuité traversant une structure  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  discrétisée par éléments finis. Classiquement,  $\Gamma_u$  est la frontière où les déplacements sont imposés et  $\Gamma_t$  est la frontière où les tractions de surface sont imposées ;  $S$  est l'interface de discontinuité, de normale  $\mathbf{n}$ , qui traverse l'élément  $\Omega_e$ . Cet élément se décompose donc en deux parties  $\Omega_e^+$  et  $\Omega_e^-$  séparées par la surface  $S_e$  (dont la normale  $\mathbf{n}_e$  est orientée dans la direction de  $\Omega_e^+$ , voir figure 6.3).

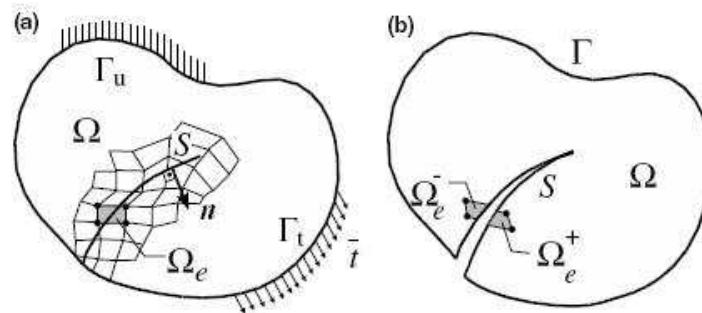


FIG. 6.2 – Solide présentant une discontinuité (figure tirée de Manzoli et Shing [165]).

L'approximation continue du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  sur l'élément  $\Omega_e$  est décomposé en une composante  $\tilde{\mathbf{u}}$  associée aux déformations de l'élément et une composante  $\hat{\mathbf{u}}$  associée à un déplacement de corps rigide entre les deux parties de l'élément, ce qui est illustré à la figure 6.3 :

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}$$

Le déplacement de corps rigide est donné par rapport à la surface du côté de la normale  $\mathbf{n}_e$ .

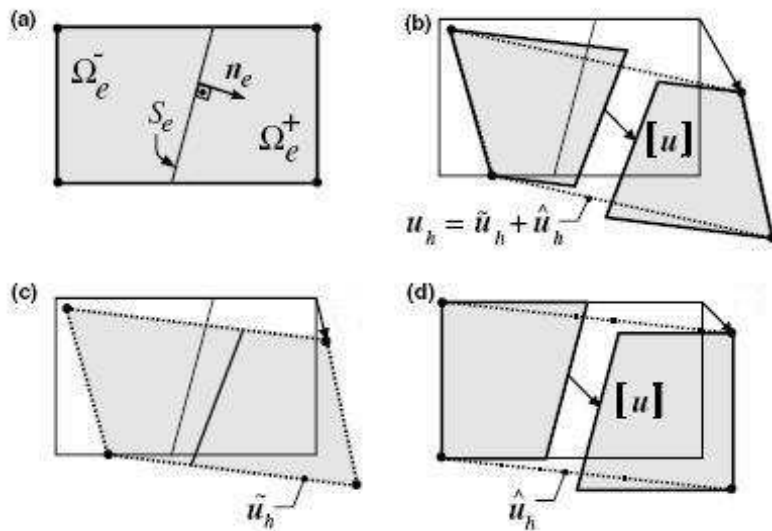


FIG. 6.3 – Décomposition du champ de déplacement élémentaire (figure tirée de Manzoli et Shing [165]).

A partir de ces champs de déplacements, on en déduit tout d'abord le tenseur des déformations  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}$$

et ensuite, le tenseur des contraintes. Dans le cas élastique, pour la simplicité des expressions où la partie des déformations correspondant au mode rigide ne contribue pas aux contraintes, la loi de Hooke s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H} : \tilde{\varepsilon} = \mathbf{H} : (\varepsilon - \hat{\varepsilon})$$

En utilisant classiquement le principe variationnel (formulation cinématiquement admissible), on obtient la forme faible des équations d'équilibre pour les déplacements. Les expressions des déplacements aux nœuds se déduisent tout aussi classiquement des approximations par les fonctions de forme, avec des formes particulières pour les déplacements et les déformations de corps rigides que nous ne détaillons pas ici. Le lecteur intéressé se rapportera aux références [165, 188, 198, 199, 243].

Manzoli et Shing [165] ont modifié cette formulation en introduisant des éléments hybrides à la surface de discontinuité pour éviter des phénomènes de *locking*.

### 6.3.4 Méthode de remaillage de la structure

Cette technique a été développée par Mediavilla et al. [174, 177]. Elle consiste, pour des problèmes quasi-statiques, en un remaillage global de la structure qui raffine, si nécessaire, le maillage à l'endroit de la fissure. L'avantage d'un remaillage global par rapport à un remaillage local (où le maillage n'est adapté qu'autour de la fissure, voir Lim et al. [153]) est la garantie d'une bonne qualité des mailles dans toute la structure tout au long du processus.

De plus, un critère d'orientation de fissure est ajouté à la formulation pour obtenir un chemin de propagation de la fissure plus réaliste au sein de la structure. Ce critère est basé sur les contraintes en fond de fissure  $\tau_{\vartheta\vartheta}$  et  $\tau_{r\vartheta}$  (en coordonnées polaires, cf. figure 6.4) :

$$\tau_m(\vartheta) = \max [(1 - \alpha) \tau_{\vartheta\vartheta}(\vartheta), \alpha \tau_{r\vartheta}(\vartheta)], \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

où  $\alpha$  est un paramètre matériau qui permet d'établir la transition entre les modes de traction (mode de rupture  $K_I$ ) et de cisaillement (mode de rupture  $K_{II}$ )<sup>1</sup>. La rupture se propage dans la direction  $\vartheta$  pour laquelle la contrainte  $\tau_m$  est maximale. Ce critère directionnel permet l'unification des deux types de croissance de fissure en tenant compte des deux mécanismes en fond de fissure. De plus, il est indépendant du type de chargement.

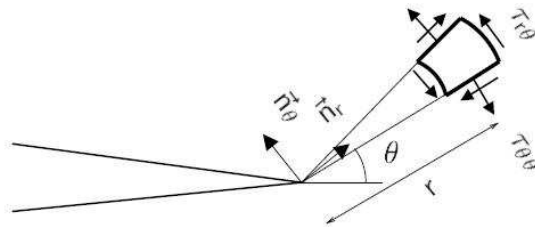


FIG. 6.4 – Système de coordonnées polaires (figure tirée de Mediavilla [174]).

L'algorithme de calcul utilisé pour simuler l'initiation et la propagation de fissure est illustré à la figure 6.5 (tirée de Mediavilla [174]). En cas de vérification du critère de rupture, trois phases se succèdent pour la modélisation de la propagation de la fissure : une phase de remaillage et de transfert des variables d'état, une phase de "rétablissement" consistant et enfin une phase de relaxation nodale.

La première phase de remaillage est effectuée sur la configuration déformée. Elle consiste à éviter une trop grande distorsion des mailles. Comme déjà signalé, elle s'applique à la structure entière et non pas seulement aux environs de la fissure. L'inconvénient de ce remaillage global est une plus grande diffusion des variables d'état. Le transfert des

<sup>1</sup>Comme cette méthode n'est implémentée que pour des cas bidimensionnels, le mode de rupture  $K_{III}$  n'intervient évidemment pas.

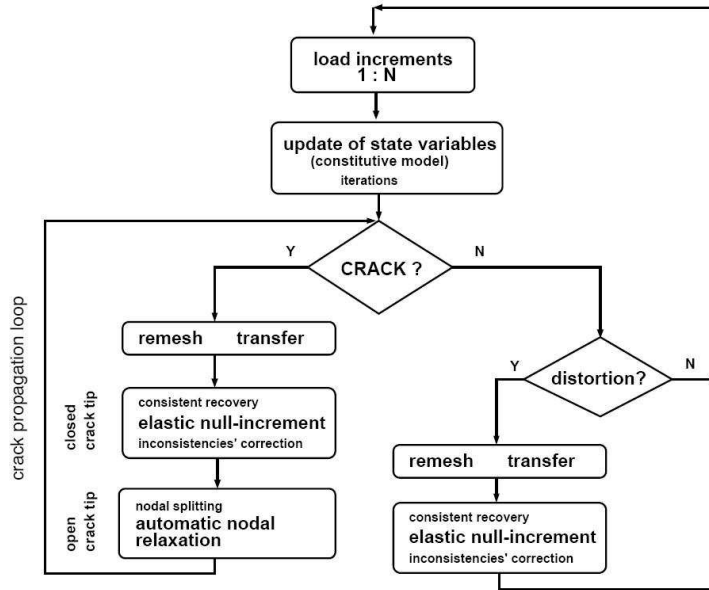


FIG. 6.5 – Algorithme de résolution du problème de propagation de fissure (figure tirée de Mediavilla [174]).

variables d'état est réalisé selon l'algorithme proposé par Peric et al. [212] et s'effectue en trois étapes :

- une extrapolation des variables d'état aux nœuds de l'ancien maillage,
- une interpolation des variables d'état aux nœuds du nouveau maillage,
- une interpolation vers les points de Gauss du nouveau maillage.

Cette phase de remaillage ne prend pas en compte les déplacements du maillage dus à l'ouverture de la fissure : les transferts des variables d'état et l'ouverture géométrique de la fissure sont dissociés afin d'augmenter la robustesse de l'algorithme (voir Mediavilla et al. [177]). Le nouveau maillage est donc généré conformément à la géométrie de la fissure mais les éléments le long de l'ouverture de la fissure restent connectés.

La deuxième phase, dite de "rétablissement" consistant, permet de conserver les relations entre les variables d'état, une fois le transfert effectué. Une fois ce rétablissement terminé, l'équilibre global de la structure est vérifié et corrigé si nécessaire. Cette correction est effectuée à pas de temps nul (pas d'incrément de chargement) et le matériau est supposé dans un état élastique (pas de changement physique dans la structure lors du rétablissement).

La troisième phase est la relaxation des nœuds fixés le long de l'ouverture de la fissure. En effet, ces nœuds sont restés connectés lors de la phase de remaillage et de transfert des variables d'état. Cette phase de relaxation des nœuds et d'ouverture de la fissure le long de



ces nœuds nécessite également une phase de rééquilibrage global de la structure, mais n'est plus nécessairement élastique (elle correspond à un changement physique de la structure).

Enfin, pour éviter des dépendances vis-à-vis du maillage, signalons que le critère de rupture en bout de fissure  $C$  (voir paragraphe 6.2) est calculé par la moyenne pondérée d'une valeur  $\hat{C}$  dans une région environnant le fond de fissure selon :

$$C = \frac{\int_{\Omega} w \hat{C} d\Omega}{\int_{\Omega} w d\Omega}$$

où  $\Omega$  est le domaine de moyennage du critère de rupture (voir figure 6.6 tirée de Mediavilla [174]). La fonction de pondération  $w$  est une gaussienne centrée en fond de fissure :

$$w(r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} R^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2R^2}\right)$$

Le rayon  $R$  du domaine  $\Omega$  est choisi de telle sorte que celui-ci contienne deux ou trois anneaux d'éléments. La valeur critique de la rupture en un nœud  $\hat{C}$  peut donc dépasser la valeur critique théorique de rupture  $C$ .

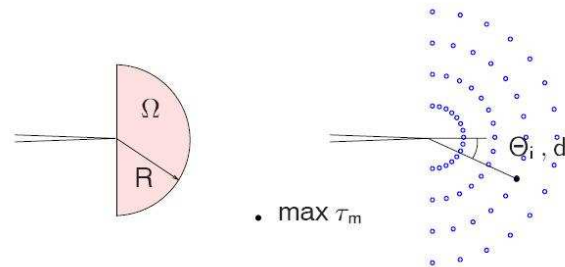


FIG. 6.6 – Domaine de moyennage du critère de rupture (figure tirée de Mediavilla [174]).

Cette technique d'implémentation de la rupture est utilisée dans des applications de type blanking et seulement pour des problèmes bidimensionnels. De plus, la technique n'est utilisée que dans le cas de problèmes quasi-statiques avec des lois d'érouissage non visqueux. Si l'extension à des lois d'érouissage visqueux peut être relativement simple (à l'exception de la correction à pas de temps nul), la méthode de remaillage de la structure en trois dimensions est beaucoup moins évidente.

Pour plus de détails concernant cette méthode de propagation de fissure, le lecteur intéressé se reportera à Mediavilla et al. [174, 177].

### 6.3.5 Méthode par érosion

C'est la méthode de propagation de fissure la plus répandue dans les codes de calcul commerciaux. Elle est notamment utilisée dans LS-DYNA [39, 106] et Abaqus [111, 258]. C'est également la méthode de propagation la plus simple à mettre en œuvre. Elle consiste à effacer l'élément rompu selon un critère de rupture tel que ceux décrits à la section 6.2. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle peut se révéler extrêmement sensible au maillage. C'est pourquoi une opération de remaillage est parfois nécessaire (voir Bessette et al. [25]). Toujours dans Bessette et al. [25] (et également dans Stainier [252]), la masse de l'élément reste aux nœuds de l'élément effacé pour conserver le moment et la masse totale. Stainier [252] compare les résultats obtenus en conservant ou non la masse au nœuds.

Dans Abaqus [111], lorsque le critère de rupture est atteint en un point de Gauss de l'élément, les composantes déviatoriques des contraintes de cet élément sont mises à zéro. L'élément est considéré comme rompu lorsque le critère de rupture est vérifié en chacun des points de Gauss de l'élément. Deux possibilités de traitement sont offertes par Abaqus pour le traitement des éléments rompus : soit les éléments perdent totalement leur capacité de résistance à l'effort, soit ils gardent leur capacité de résistance uniquement en compression (pas en traction, ni en cisaillement). Cette dernière méthode n'a guère de sens dans le cas où la théorie de l'endommagement continu est utilisée. En effet, dans ce cas, l'élément rompu perd également sa résistance en compression par la forme même des lois d'endommagement. La perte de résistance de l'élément rompu peut être brutale ou progressive (voir Macdougall et Harding [159]) : au-delà de la valeur critique de la déformation plastique équivalente, les contraintes sur l'élément sont mises à zéro entre cette valeur critique et une autre valeur de la déformation plastique équivalente choisie par l'utilisateur.

Dans LS-Dyna, une fois le critère de rupture atteint, l'élément est simplement enlevé du maillage (voir Børvik et al. [39]).

Unosson et al. [265] utilisent une méthode d'érosion pour la propagation de fissure. De plus, ils enrichissent l'élément en fond de fissure afin de diminuer la sensibilité au maillage de la méthode. La solution numérique est enrichie par une mise à l'échelle des vitesses de déformation aux points d'intégration pour mieux harmoniser l'état de la structure en fond de fissure. La fonction de mise à l'échelle est déterminée empiriquement.

Dans ce travail, nous avons choisi d'implémenter la méthode de propagation de fissure par érosion. Les raisons de ce choix s'expliquent par la simplicité d'implémentation de ce type de méthode. De plus, elle ne nécessite pas d'opération de remaillage, qui s'avère coûteuse en temps de calcul et difficile à mettre en œuvre de manière générale pour des problèmes tridimensionnels.

Trois possibilités de rupture de l'élément sont proposées dans Metafor :

- l'élément est rompu si le critère de rupture est vérifié en un point de Gauss de l'élément ;
- l'élément est rompu si le critère de rupture est vérifié en moyenne sur les points de Gauss de l'élément ;
- l'élément est rompu si le critère de rupture est vérifié à tous les points de Gauss de l'élément.

La première possibilité est adaptée aux problèmes où le dépassement de la valeur critique n'est pas possible physiquement. C'est le cas pour les problèmes d'endommagement où celui-ci ne peut dépasser la valeur 1. De plus, une valeur d'endommagement supérieure à 1 peut entraîner des instabilités numériques difficiles à gérer (et inutiles vu le non sens physique). Les deuxième et troisième possibilités sont adaptées aux problèmes où le dépassement de la valeur critique est possible physiquement, par exemple pour un critère selon la déformation plastique équivalente.

### 6.3.6 Autres méthodes

Pour être complet, citons encore un exemple d'une méthode de propagation de fissure basée sur les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  proposée par Qiu et al. [221] ou une méthode thermodynamique proposée par Soumaharo et Maigre [251] que nous ne développons pas ici. Si nous ne développons pas plus avant les critères de rupture basés sur les facteurs d'intensité de contraintes, c'est pour la simple raison que nous considérons la modélisation de la rupture ductile des matériaux.

### 6.3.7 Conclusions sur les méthodes de propagation de fissure

Les méthodes de propagation de fissure exposées aux paragraphes précédents sont les méthodes les plus répandues dans le cas des méthodes par décohésion, par discontinuités et par érosion. En ce qui concerne la méthode de remaillage global, cette méthode nous paraît très aboutie du point de vue numérique. En effet, elle permet le remaillage automatique de la structure, une correction consistante des variables d'état non transférées, un critère directionnel de propagation de la fissure et un affranchissement vis-à-vis de la dépendance au maillage par le moyennement du critère de rupture sur plusieurs couches d'éléments autour de la fissure. Cependant, il est difficile de l'étendre à des cas tests tridimensionnels vu la complexité de remaillage dans ce cas géométrique. De plus, cette méthode n'est utilisable que dans le cadre d'applications quasi-statiques, vu le rééquilibrage à pas de temps nul de la structure.

## 6.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord présenté les différents critères de rupture adaptés aux matériaux ductiles. Ceux-ci ont des expressions très diverses. Il a cependant été montré dans la littérature, l'importance de tenir compte de la triaxialité dans l'évaluation de la rupture éventuelle d'un matériau.

Le choix de la méthode de propagation de la fissure s'est porté sur la méthode la plus simple, à savoir la méthode par érosion. En effet, la méthode de remaillage, qui est très aboutie pour des cas bidimensionnels, est en pratique très difficile à généraliser dans des cas tridimensionnels et connaît des limitations pour les problèmes dynamiques. Nous avons également laissé le choix à l'utilisateur de désactiver l'élément rompu selon trois critères purement numériques aux points de Gauss : l'élément est rompu si le critère est satisfait en un point de Gauss, en moyenne sur les points de Gauss ou à tous les points de Gauss de l'élément. D'autres critères peuvent être imaginés et sont aisément intégrables dans la structure actuelle du code.

# Chapitre 7

## Applications deuxième partie

### 7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques applications de validation des modèles d'endommagement et de rupture présentés aux chapitres 5 et 6. Ces applications ont pour but de valider l'implémentation numérique proposée des lois d'endommagement et de la désactivation d'éléments par érosion. Les résultats sont comparés avec des résultats de la littérature, tant numériques qu'expérimentaux.

Ces applications peuvent se diviser de la manière suivante : tout d'abord (section 7.2), la validation de la méthode d'intégration des lois constitutives avec endommagement proposée au chapitre 5. Nous comparerons également l'efficacité des différentes méthodes d'intégration exposées à la section 5.5.4.4.

Nous étudions ensuite (section 7.3) une application de propagation de fissure destinée à valider notre implémentation de la rupture d'éléments. Cette application permettra également de comparer la méthode de désactivation d'éléments par érosion et la méthode par remaillage exposée à la section 6.3.4.

Dans un troisième temps (section 7.4), nous étudions un test de rupture standard thermomécanique couplé à un modèle d'endommagement dynamique. Nous validerons de la sorte le couplage endommagement-rupture dans le cadre d'applications dynamiques.

Enfin (section 7.5), nous réétudions deux problèmes posés au chapitre 4 en y introduisant un critère de rupture et une loi d'endommagement. Cette étude nous permettra de tester plus avant la méthode par érosion exposée à la section 6.3.5 et d'étudier ses limitations. Nous comparerons les différentes méthodes de rupture de l'élément et nous étudierons l'influence du maillage sur les résultats obtenus. Nous étudierons également la différence du point de vue numérique entre les critères de rupture basés sur la déformation plastique équivalente (section 6.2.2) et ceux basés sur la théorie de l'endommagement continu (section 6.2.1).

## 7.2 Application 1 : Test de traction avec endommagement

### 7.2.1 Introduction

Cette première application est destinée à valider l'implémentation de la formulation d'endommagement continu. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats obtenus avec Abaqus [111] dans Mashayekhi et al. [169]. Nous comparons également les trois méthodes d'intégration des lois constitutives avec endommagement présentées à la section 5.5.4.4, du point de vue de leur coût CPU.

### 7.2.2 Présentation et données du problème

Le problème présenté ici est un test classique de traction d'une barre rectangulaire. La modélisation du problème est tridimensionnelle. La géométrie et le maillage du problème, ainsi que les fixations et chargement du problème, sont présentés à la figure 7.1. Vu la symétrie du problème selon les trois axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ , seul 1/8 de la structure est modélisé. Les données géométriques du test sont résumées dans le tableau 7.1. L'épaisseur de la barre est de  $5\text{mm}$ .

Le maillage éléments finis compte 3250 éléments tridimensionnels. Il est divisé en cinq zones de maillage. L'éprouvette proprement dite (partie droite) est maillée finement dans la zone critique (longueur  $L_5$  :  $10 \times 10$  éléments), puis le maillage est déraffiné à mesure qu'on s'éloigne de cette zone critique selon deux tailles de mailles sur les longueurs  $L_3$  et  $L_4$ , comptant chacune  $10 \times 10$  éléments. L'arc de cercle est lui aussi maillé plus finement ( $2 \times 10$  éléments), tandis que la partie gauche de l'éprouvette est maillée grossièrement. Nous considérons 5 éléments sur l'épaisseur de la barre. Ainsi, notre maillage s'approche-t-il au mieux du maillage obtenu par Mashayekhi et al. [169].

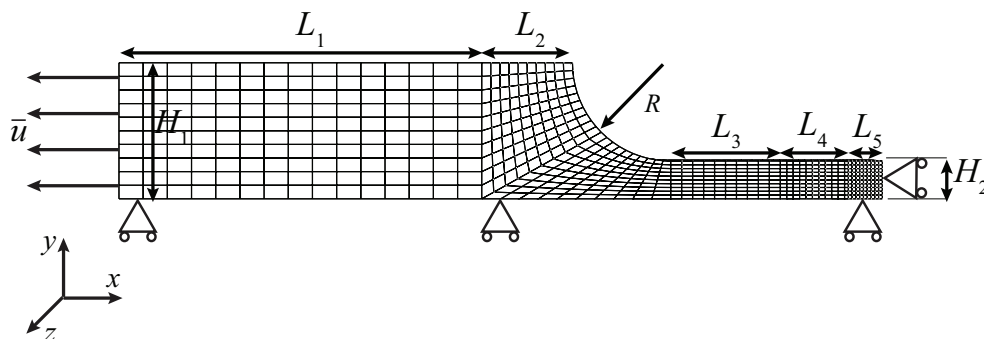


FIG. 7.1 – Géométrie, maillage, chargement et fixations.

Données géométriques	Valeur
Zone déraffinée	$L_1 = 48.0mm$
Zone autour de l'arc de cercle	$L_2 = 12.0mm$
Rayon	$R = 13.0mm$
Zone déraffinée de l'éprouvette	$L_3 = 8.5mm$
Zone intermédiaire de l'éprouvette	$L_4 = 14.5mm$
Zone raffinée de l'éprouvette	$L_5 = 5.0mm$
Hauteur de l'extrémité gauche	$H_1 = 18.0mm$
Hauteur de l'éprouvette	$H_2 = 5.0mm$

TAB. 7.1 – Données géométriques du test.

Le matériau est un acier modélisé par une loi d'érouissage à saturation et une loi d'endommagement de Lemaitre (5.14). Les paramètres matériau sont résumés dans le tableau 7.2.

Paramètres mécaniques	Valeur
Module de Young $E$ (Mpa)	210000.0
Coefficient de Poisson $\nu$	0.34
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	8950.0
Paramètres de la loi d'érouissage à saturation $\sigma_{crit} = \sigma^{el} + Q (1 - \exp(-\xi \bar{\epsilon}^{pl}))$	
$\sigma^{el}$ (Mpa)	620.0
$Q$ (Mpa)	3300.0
$\xi$	0.4
Paramètres de la loi d'endommagement de Lemaitre $\dot{D} = \left( \frac{\left( \frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu)p^2 \right)^s}{2ES(1-D)^2} \right) \dot{\epsilon}^{pl}$	
$S$ (Mpa)	3.5
$s$	1.0

TAB. 7.2 – Paramètres matériau.

Le chargement est effectué via le déplacement imposé de l'extrémité gauche de la barre. La précision d'intégration temporelle (3.10) est de  $10^{-6}$ . Le temps de simulation est de 1s (processus quasi-statique isotherme). Le processus est arrêté lorsque l'endommagement maximum dans la structure atteint la valeur de 0.99, ce qui correspond à un déplacement imposé de 5.55mm. Dans la simulation réalisée par Mashayekhi et al. [169], le calcul Abaqus est arrêté lorsque l'endommagement atteint la valeur de 0.9, correspondant à une valeur du déplacement de 5.59mm. Cette valeur de 0.9 est atteinte dans Metafor pour une valeur du déplacement de 5.54mm, soit une différence de moins de 1% par rapport à Abaqus.

### 7.2.3 Résultats et comparaisons

La configuration finale (avec la symétrie) est présentée aux figures 7.2 et 7.3 (zoom sur la partie endommagée). L'endommagement est concentré au centre de l'éprouvette. La rupture se produit donc d'abord au centre de l'éprouvette, ce qui est en accord avec les observations de Hancock et Mackenzie [109]. Ceux-ci montrent que l'initiation de la rupture d'un spécimen de traction peut se produire d'abord au centre du spécimen, et ensuite se propager vers l'extérieur de celui-ci.

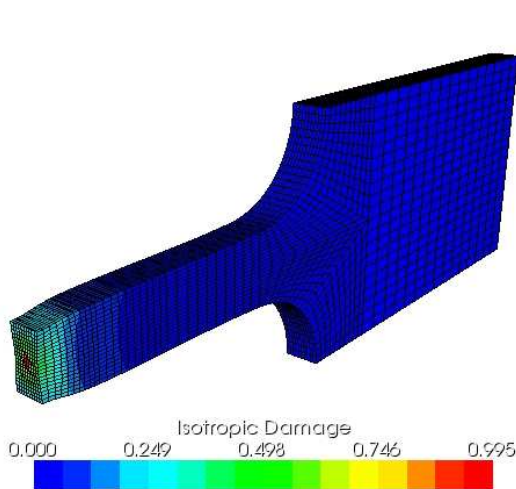


FIG. 7.2 – Configuration finale.

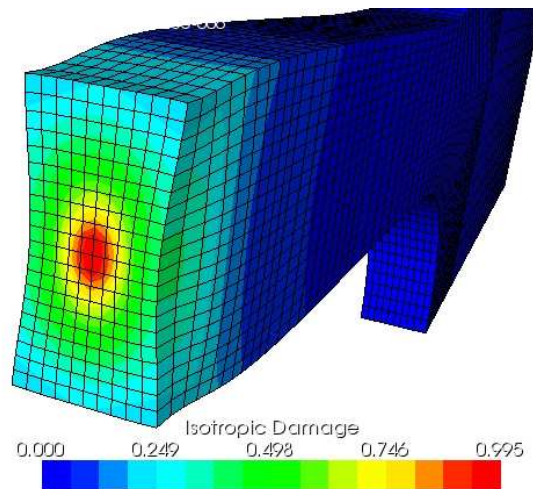


FIG. 7.3 – Zoom sur la partie endommagée.

Pour l'étude du comportement de la structure, Mashayekhi et al. [169] ont sélectionné trois points caractéristiques de la section droite au centre de l'éprouvette. Ceux-ci sont représentés à la figure 7.4. Le point  $A$  correspond à l'endroit de rupture initial de la structure. Les points  $B$  et  $C$  sont placés sur les bords extérieurs de l'éprouvette.

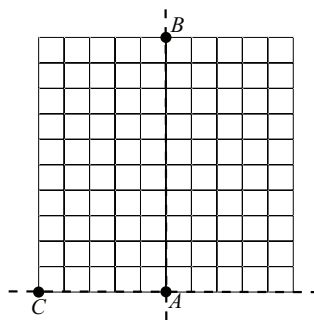


FIG. 7.4 – Points caractéristiques sur la structure (vue de la section droite).

En traits interrompus : les axes de symétrie selon les directions  $y$  et  $z$ .



La première comparaison est effectuée sur les courbes force-déplacement et contrainte-déformation. La force mesurée est la résultante des forces dans la direction  $x$  à l'extrémité droite fixée de la barre (cf. figure 7.1). Pour la courbe force-déplacement (figure 7.5), la simulation est également effectuée dans le cas d'un matériau sans endommagement. Il n'y a pas de phénomène d'adoucissement dans le cas sans endommagement, la traction étant toujours uniforme (pas d'apparition de striction). La courbe contrainte-déformation (figure 7.6) est tracée aux trois points caractéristiques  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Dans les deux cas, l'accord entre les résultats obtenus avec Metafor et Abaqus est excellent. L'adoucissement de la force de traction (respectivement de la contrainte de Von Mises) apparaît pour une même valeur du déplacement (respectivement de la déformation, pour les trois points caractéristiques).

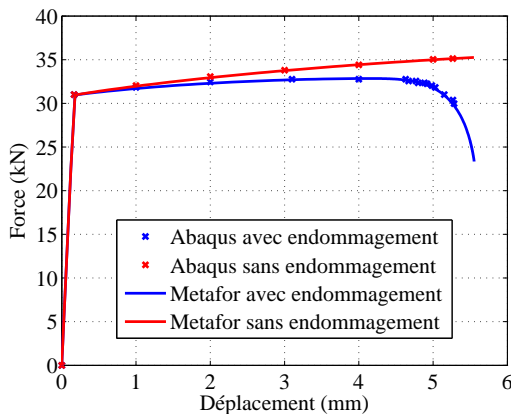


FIG. 7.5 – Comparaison des courbes force-déplacement pour un matériau avec et sans endommagement.

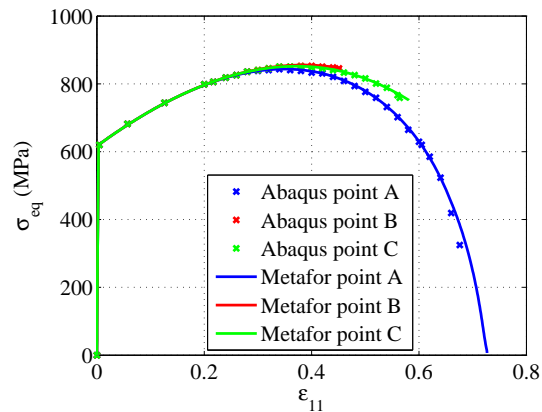


FIG. 7.6 – Courbe contrainte de Von Mises - déformation dans la direction 11 aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

Etudions à présent l'évolution de l'endommagement aux points caractéristiques  $A$ ,  $B$  et  $C$ , en suivant l'évolution de celui-ci aux trois points caractéristiques tout au long du déplacement. Les résultats sont présentés à la figure 7.7. A la figure 7.8 est représentée l'évolution de l'endommagement le long de la droite  $A - B$  pour quatre valeurs du déplacement imposé (2.3, 4.8, 5.42 et 5.53mm) de l'extrémité de la barre<sup>1</sup>. L'accord entre les résultats obtenus avec Metafor et Abaqus est toujours très bon. L'endommagement augmente d'abord lentement (jusqu'à une valeur du déplacement d'environ 5mm), puis croît de manière importante jusqu'à la valeur limite de 1. Notons que nous obtenons une valeur finale de l'endommagement au point  $A$  de 0.995, preuve de la robustesse de notre algorithme d'intégration (rappelons que les simulations Abaqus sont arrêtées dès que la valeur de l'endommagement atteint la valeur 0.9).

<sup>1</sup>Notons que Mashayekhi et al. [169] utilisent des valeurs de déplacement de 2.26, 4.5, 5.06 et 5.15mm. Or, en comparant les figures 7.7 et 7.8, on voit aisément qu'une valeur de l'endommagement d'approximativement 0.75 au point  $A$  ne correspond pas à un déplacement de 5.15mm (l'endommagement vaut approximativement 0.2 pour une telle valeur du déplacement). C'est pourquoi nous avons tenté de corriger ces valeurs à partir des figures publiées dans l'article.

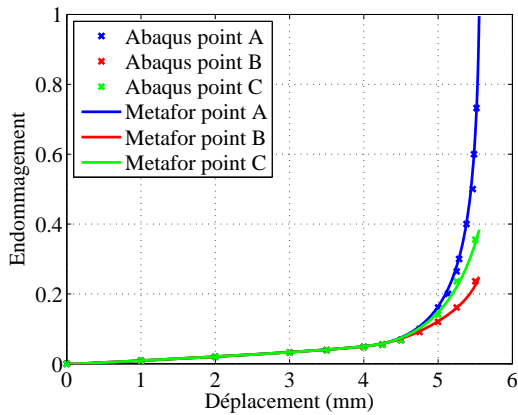


FIG. 7.7 – Evolution de l'endommagement aux points caractéristiques  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

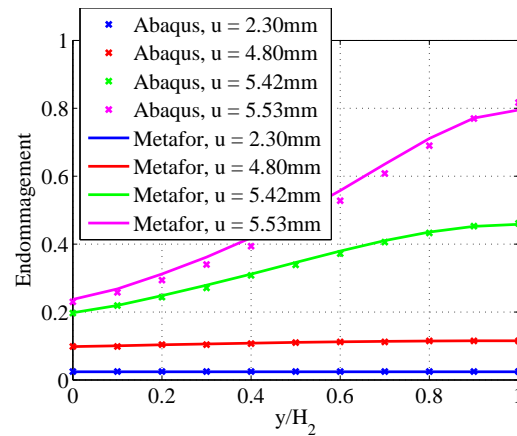


FIG. 7.8 – Evolution de l'endommagement le long de  $A - B$  durant le chargement. La hauteur  $A - B$  a été adimensionnalisée.

De la même façon, nous étudions l'influence de la triaxialité. En effet, l'endommagement dans les métaux ductiles est fortement dépendant du rapport de triaxialité  $\sigma^* = \frac{p}{\sigma_{eq}}$ . La triaxialité est maximale au centre de l'éprouvette, comme montré sur la figure 7.9 où l'évolution de la triaxialité est tracée aux trois points caractéristiques tout au long du déplacement. La figure 7.10 représente l'évolution de la triaxialité le long de la droite  $A - B$  pour quatre valeurs du déplacement (2.3, 4.8, 5.42 et 5.53mm) de l'extrémité de l'éprouvette<sup>1</sup>. Nous constatons que la triaxialité augmente fortement au point  $A$  à partir d'un déplacement de 5mm. L'accord obtenu entre les résultats Metafor et Abaqus est une nouvelle fois très bon.

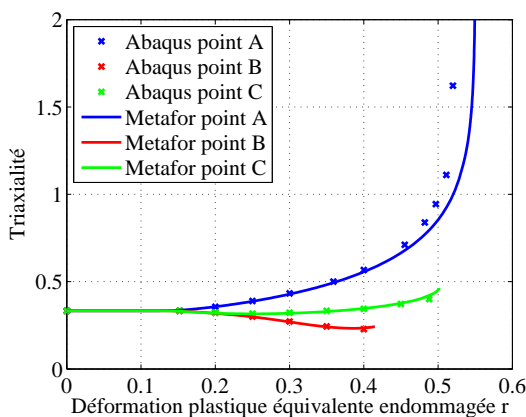


FIG. 7.9 – Evolution de la triaxialité aux points caractéristiques  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

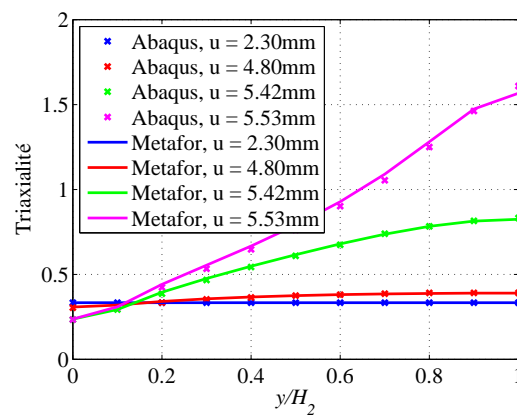


FIG. 7.10 – Evolution de la triaxialité le long de  $A - B$  durant le chargement. La hauteur  $A - B$  a été adimensionnalisée.

<sup>1</sup>La remarque concernant les valeurs du déplacement reste d'application.

### 7.2.4 Etude numérique

Dans cette section, nous étudions l'influence du type d'algorithme utilisé pour résoudre le problème couplé d'endommagement. Les trois algorithmes comparés sont l'algorithme d'intégration couplée de Lemaitre simplifié (cf. page 136), l'algorithme proposé par de Souza Neto [68] (cf. page 138) et enfin l'algorithme itératif que nous proposons (cf. page 139). Nous nous intéressons essentiellement à l'efficacité de l'algorithme, c'est-à-dire, à l'obtention d'une solution correcte dans des temps de calcul les plus courts possible. Nous quantifions également l'influence de l'utilisation d'une matrice de raideur numérique ou analytique dans la résolution du problème. Les résultats des comparaisons des algorithmes sont présentés à la figure 7.11. Nous avons normalisé les temps de calcul par rapport au temps CPU lié à l'utilisation d'une loi constitutive sans endommagement, avec un calcul analytique de la matrice de raideur tangente.

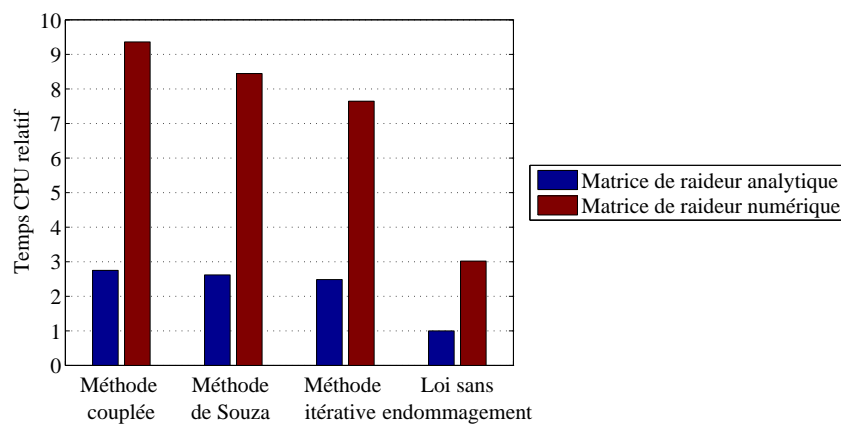


FIG. 7.11 – Comparaison des algorithmes d'intégration des lois constitutives avec endommagement.

L'algorithme itératif que nous proposons est plus efficace que les deux autres algorithmes, pour une même qualité de résultats. Dans le cadre de l'utilisation d'une matrice de raideur analytique, le gain en temps CPU est de l'ordre de 10% par rapport à l'utilisation d'une méthode d'intégration couplée. L'algorithme proposé par de Souza Neto [68] s'avère lui aussi plus efficace que l'algorithme couplé, mais dans une moindre mesure (gain de l'ordre de 5%).

Lors de l'utilisation d'une matrice de raideur numérique, le gain par rapport à l'utilisation d'une méthode d'intégration couplée s'avère plus important : il est de l'ordre de 18% pour la méthode itérative proposée par rapport à l'algorithme couplé et de 10% pour la méthode de de Souza Neto [68].

Dans tous les cas, l'utilisation d'une matrice de raideur analytique s'avère extrêmement avantageuse : le temps de calcul est divisé par 3 pour l'algorithme proposé, et par 3.5 pour

l'algorithme couplé. Rappelons que, si de Souza Neto [68] ou Mediavilla [174] proposent une expression analytique de la matrice de raideur tangente, ils se cantonnent à son expression dans le cas l'utilisation du modèle d'endommagement de Lemaitre en ce qui concerne de Souza Neto [68] ou du modèle d'endommagement de Geers [90] pour Mediavilla. Dans notre cas, l'expression analytique de la matrice de raideur tangente est tout à fait générale.

Le surcoût CPU engendré par l'utilisation d'une loi constitutive avec endommagement par rapport à l'utilisation d'une loi constitutive sans endommagement est de l'ordre de 2.5 à 3 selon l'algorithme utilisé et l'utilisation d'une matrice de raideur analytique ou numérique. Notons enfin que le rapport des temps CPU lors de l'utilisation d'une matrice de raideur analytique ou numérique reste semblable avec ou sans endommagement (soit un facteur 3).

## 7.3 Application 2 : Test de propagation de fissure

### 7.3.1 Introduction

Le but de cette application est d'étudier l'implémentation proposée de la rupture, à savoir la rupture par érosion. Nous comparons les résultats obtenus avec ceux présentés par Mediavilla et al. [174, 177] qui ont utilisé la méthode de remaillage global de la structure (voir section 6.3.4) comme technique de modélisation de la rupture. Nous étudions également l'influence du choix du type de rupture au sein de l'élément (voir section 6.3.5).

### 7.3.2 Présentation et données du problème

Le problème étudié est un problème de traction d'une plaque carrée, percée de deux encoches circulaires placées à deux coins diagonalement opposés de la plaque. La géométrie et le chargement sont présentés à la figure 7.12. Les côtés inférieur et droit de la plaque sont encastés, tandis que le côté gauche n'est fixé que dans la direction horizontale (appuis à rouleaux). Le chargement est imposé via un déplacement vertical du bord supérieur de la plaque de  $1.5mm$ . Les données géométriques du test sont résumées dans le tableau 7.3.

Données géométriques	Valeur
Longueur de la plaque	$a = 10.0mm$
Rayon des encoches	$R_c = 1.0mm$
Position de l'encoche supérieure	$R_1 = 2.0mm$
Position de l'encoche inférieure	$R_2 = 2.5mm$

TAB. 7.3 – Données géométriques du test.

Quatre maillages de plus en plus fins sont étudiés. Ces maillages sont raffinés dans la zone de déclenchement de la fissure, à savoir en haut à droite (cf. figure 7.12). Les tailles

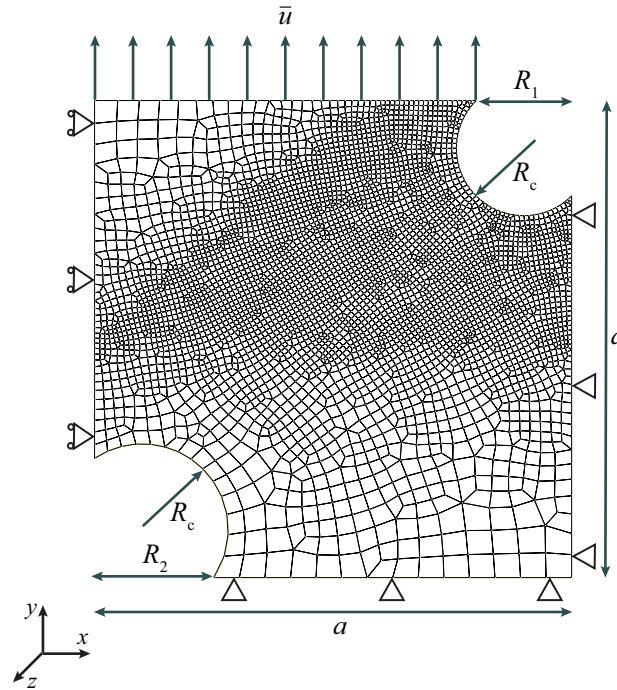


FIG. 7.12 – Géométrie, maillage 1 (4493 éléments) et chargement du test ( $a = 10\text{mm}$ ).

des mailles dans la zone critique sont de 0.1, 0.05, 0.02 et 0.01mm, soit un nombre total de 4493, 15125, 82731 et 314401 éléments respectivement. La précision d'intégration (3.11) est fixée à  $1.0e - 4$ .

Le comportement plastique est modélisé par une loi d'écrouissage linéaire :

$$\sigma_{crit} = \sigma^{el} + h\bar{\varepsilon}^{pl}$$

où  $\sigma^{el}$  et  $h$  sont des paramètres matériau. Le critère de rupture du matériau est celui de Goijaerts [95] (voir page 154). Un élément est rompu lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$\int_0^{\varepsilon_f^{pl}} \frac{1}{C} \langle 1 + A\sigma^* \rangle d\bar{\varepsilon}^{pl} = 1$$

où  $A$  et  $C$  sont des paramètres matériau. Rappelons que  $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + |x|)$  sont les parenthèses de MacCaulay. Les paramètres matériau et les paramètres du critère de rupture (tirés de Mediavilla et al. [177]) sont résumés dans le tableau 7.4.

Paramètres mécaniques	Valeur
Module de Young $E$ (Mpa)	180000.0
Coefficient de Poisson $\nu$	0.28
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2700.0
Paramètres de la loi d'érouissage linéaire $\sigma_{crit} = \sigma^{el} + h\bar{\varepsilon}^{pl}$	
$\sigma^{el}$ (Mpa)	443.0
$h$ (Mpa)	1690.0
Paramètres du critère de rupture $\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \frac{1}{C} \langle 1 + A\sigma^* \rangle d\bar{\varepsilon}^{pl} = 1$	
$A$	3.0
$C$	1.9

TAB. 7.4 – Paramètres matériau.

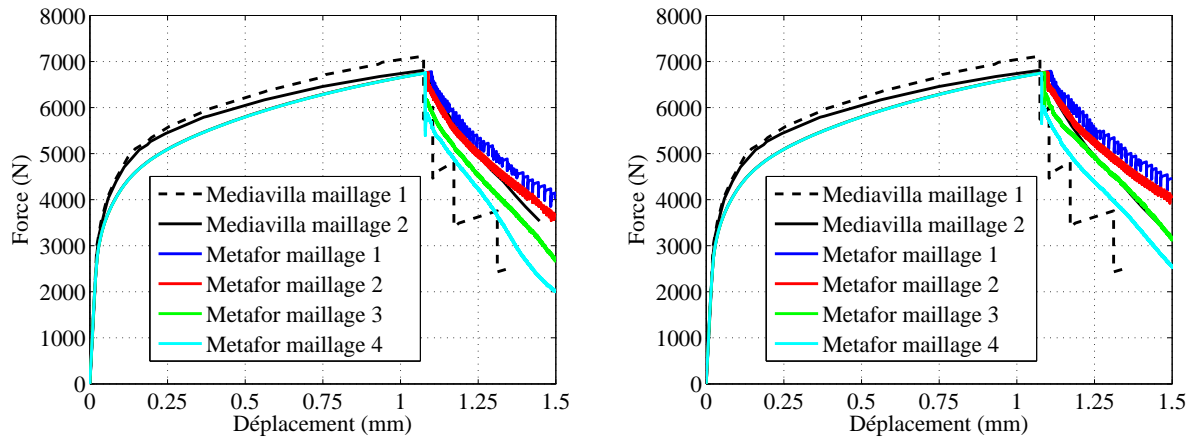
### 7.3.3 Comparaison des résultats

Nous comparons les résultats à deux points de vue : tout d'abord, nous étudions les courbes force-déplacement obtenues, d'une part, avec les maillages générés dans Mediavilla et al. [174, 177] et une méthode de propagation de fissure par remaillage et, d'autre part, avec les quatre maillages obtenus dans Metafor et la méthode de rupture par érosion. Ensuite, nous comparons qualitativement, avec les résultats obtenus par Mediavilla et al. [174, 177], la propagation de la fissure dans la structure, toujours pour les différents maillages générés dans Metafor.

Les courbes force-déplacement sont présentées aux figures 7.13 et 7.14. A la figure 7.13, nous comparons les courbes force-déplacement obtenues pour les différents maillages considérés. Les trois types de critères de désactivation d'éléments sont considérés pour chaque maillage : la rupture survient lorsque le critère est satisfait en un point de Gauss (critère 1), en moyenne sur les points de Gauss de l'élément (critère 2) ou sur tous les points de Gauss de l'élément (critère 3)<sup>1</sup>. La figure 7.14 compare quant à elle les résultats obtenus pour les différents types de critères de rupture pour un maillage donné.

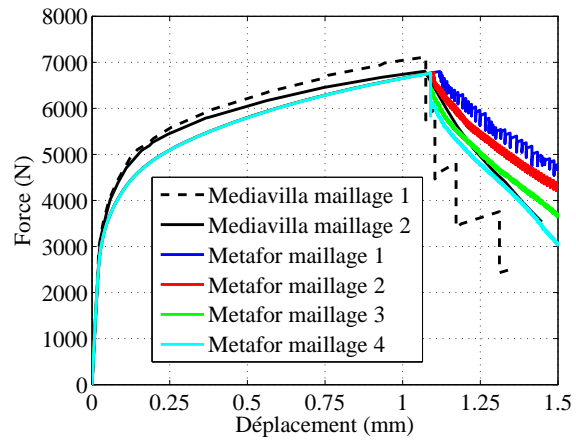
Dans tous les cas, les courbes obtenues avec Metafor ont un profil très semblable aux courbes obtenues par Mediavilla et al. [174, 177]. Cependant, dans le cas de la méthode de remaillage, l'utilisation d'un maillage grossier entraîne chez Mediavilla une sous-estimation de la force une fois la rupture entamée. Nous observons la situation inverse dans le cas de Metafor (figure 7.13) où un maillage grossier surestime la force. Cela correspond à une vitesse de propagation de la fissure plus lente pour les maillages plus grossiers. Dans le cas de l'utilisation d'un maillage grossier (maillages 1 et 2), nous observons des oscillations sur

<sup>1</sup>Nous avons utilisé 4 points de Gauss déviatoriques sur lesquels le critère de rupture de l'élément est examiné.



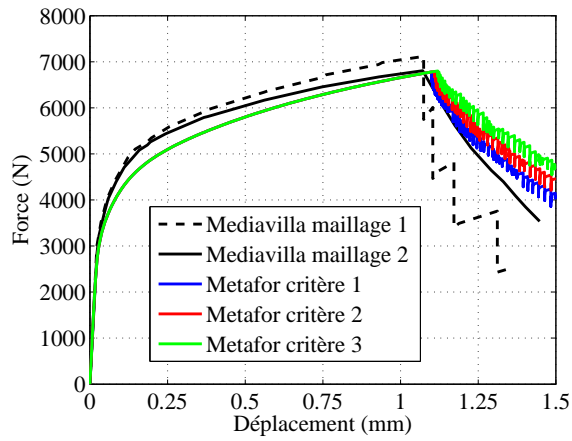
(a) Critère de rupture 1.

(b) Critère de rupture 2.

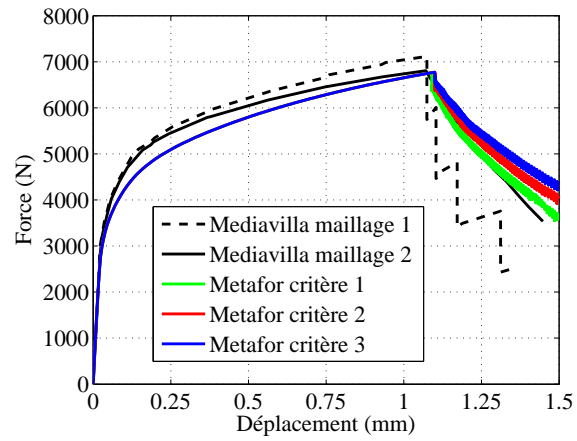


(c) Critère de rupture 3.

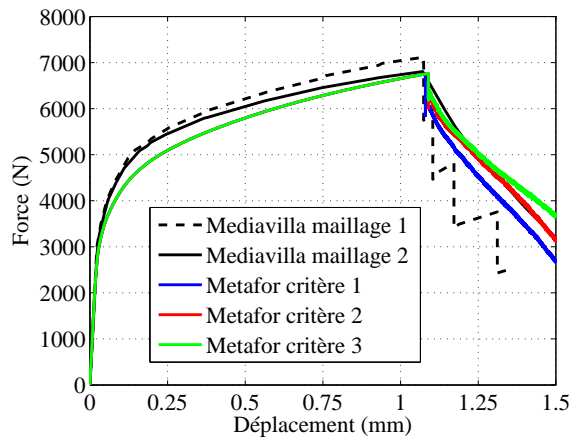
FIG. 7.13 – Courbes force-déplacement en fonction de la densité du maillage.



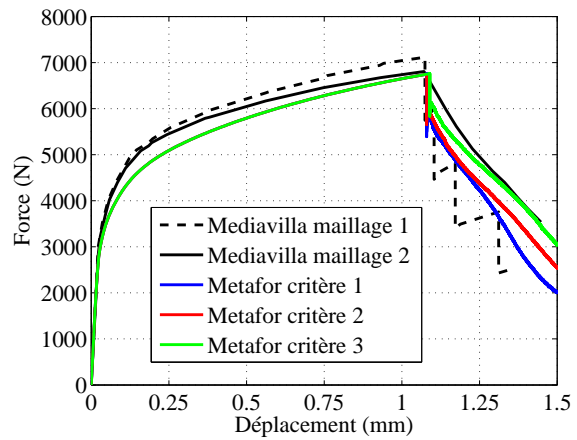
(a) Maillage 1.



(b) Maillage 2.



(c) Maillage 3.



(d) Maillage 4.

FIG. 7.14 – Courbes force-déplacement en fonction du type de critère de rupture.



la courbe force-déplacement. Ces oscillations disparaissent lorsque des maillages plus fins sont utilisés (maillages 3 et 4). Nous reviendrons sur ce dernier point dans la section 7.5.

Les différences obtenues pour les différents types de critères de rupture sont assez importantes (voir figure 7.14). En effet, si le type de critère influence peu le niveau de déclenchement de la rupture, les courbes divergent par la suite. C'est un résultat attendu vu que la vitesse de propagation de la fissure est plus lente pour les critères 2 et 3 que pour le critère 1.

En ce qui concerne le chemin de propagation de la fissure, la comparaison est simplement qualitative. Les résultats sont présentés aux figures 7.15 pour la méthode de rupture par remaillage et aux figures 7.16 à 7.19 pour la méthode par érosion. Nous présentons les résultats de la méthode par érosion en fonction de la densité de mailles croissantes pour chaque type de critère de rupture.

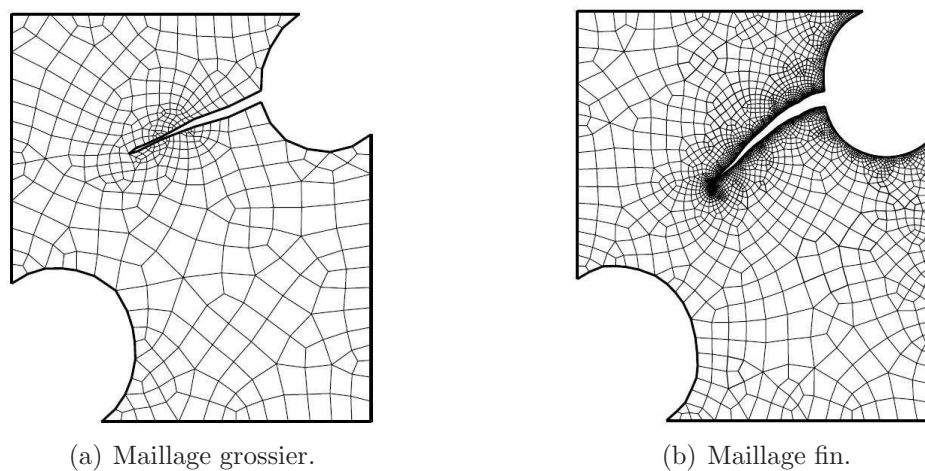


FIG. 7.15 – Méthode de rupture par remaillage, chemin de propagation de la fissure (figure tirée de Mediavilla et al. [177]).

Clairement, le maillage le plus grossier est insuffisant pour décrire le phénomène de propagation, bien qu'il soit suffisant jusqu'au moment de la rupture. La direction de la fissure est analogue pour les deux méthodes de propagation. Dans le cas de la méthode par érosion, la direction de propagation de la fissure est "plus horizontale" que pour la méthode par remaillage. Cette différence peut provenir du fait que, dans cette dernière méthode, un critère d'orientation de la fissure est ajouté (cf. page 159). Cependant, si ce critère d'orientation est séduisant à deux dimensions, son extension à des problèmes tridimensionnels est difficile (apparition du mode de rupture  $K_{III}$ ).

En ce qui concerne les trois types de critères de rupture utilisés dans la méthode par érosion, les différences sont plus marquées pour les maillages plus raffinés (maillages 3 et 4) où la longueur de la fissure est logiquement plus longue pour le critère de rupture 1.

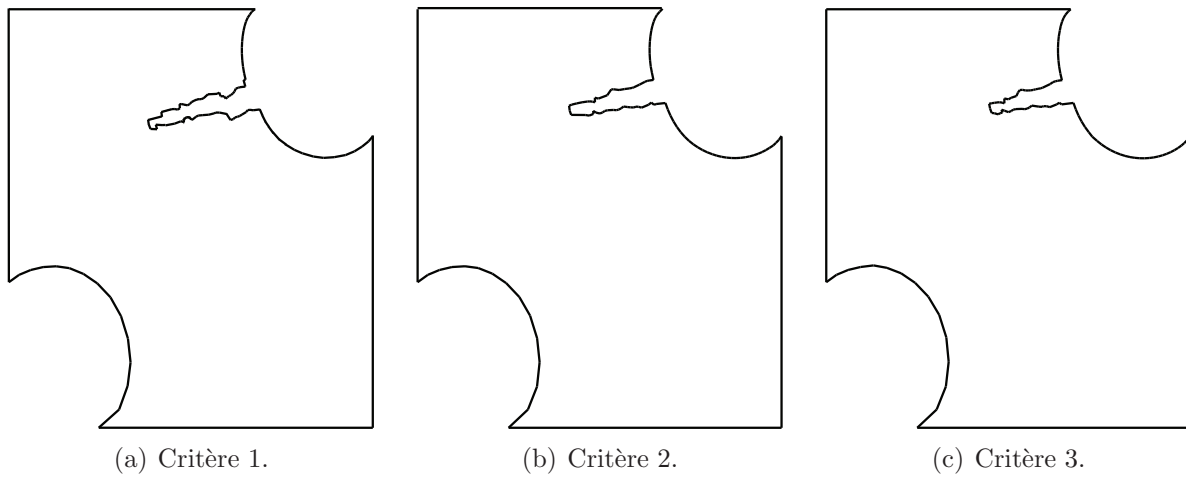


FIG. 7.16 – Méthode par érosion, chemin de propagation de la fissure, maillage 1.

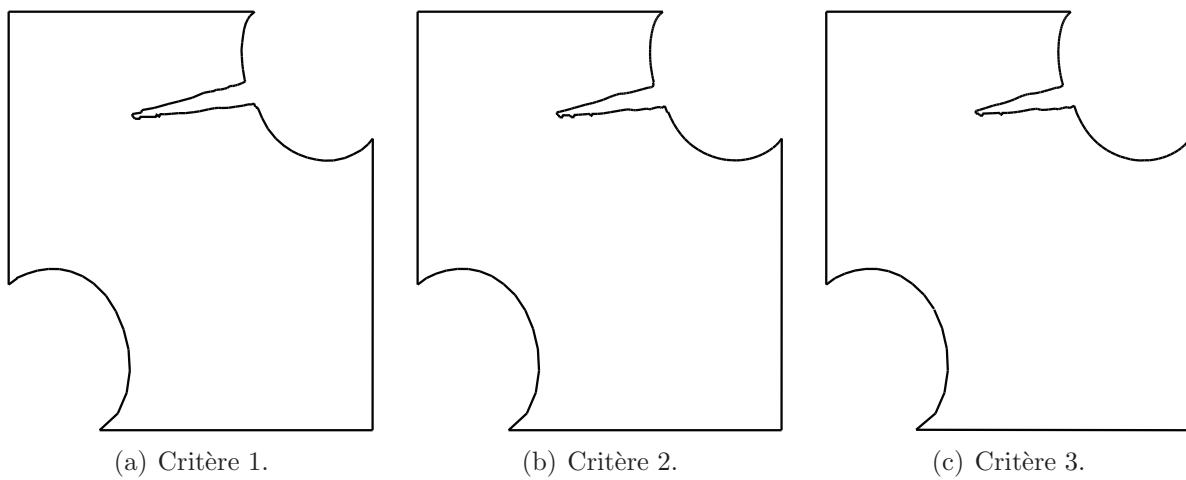


FIG. 7.17 – Méthode par érosion, chemin de propagation de la fissure, maillage 2.

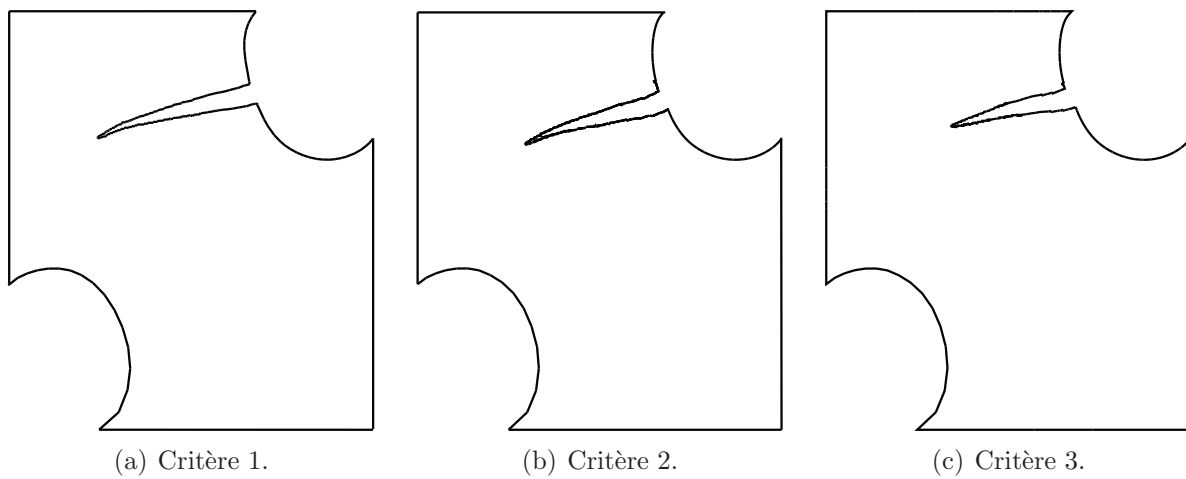


FIG. 7.18 – Méthode par érosion, chemin de propagation de la fissure, maillage 3.

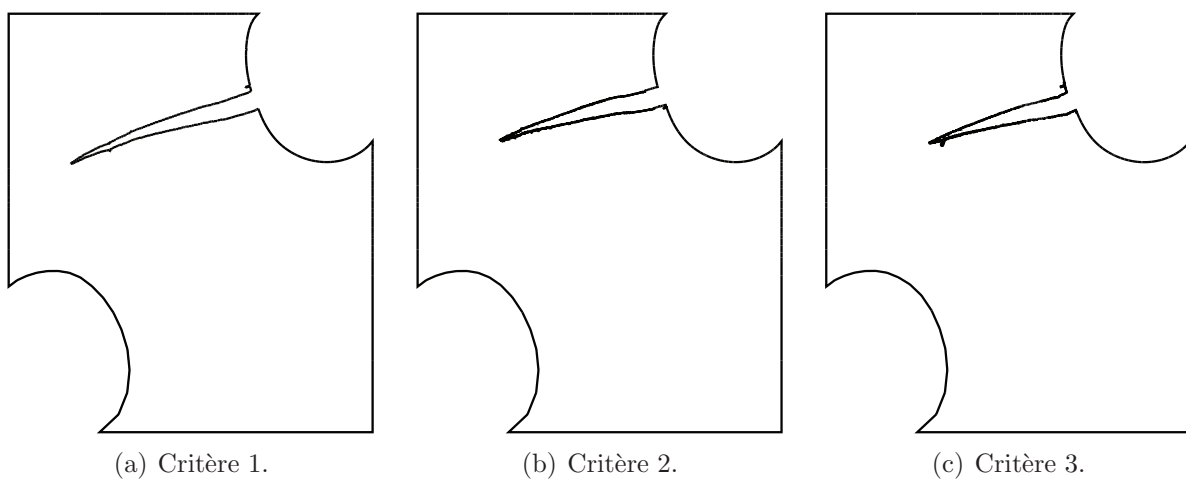


FIG. 7.19 – Méthode par érosion, chemin de propagation de la fissure, maillage 4.

## 7.4 Application 3 : Tests de traction à grande vitesse avec endommagement et rupture

### 7.4.1 Introduction

Le but de cette application est la validation de l'implémentation conjointe de la théorie de l'endommagement continu et de la désactivation d'éléments finis par érosion (section 6.3.5) lors de mises en charge très rapides. Nous nous basons pour cela sur la simulation d'un test de traction réalisé sur une barre d'Hopkinson, étudiée par deux auteurs : Mediavilla et al. [174, 176] et Børvik et al. [35, 36, 38]. Ces auteurs utilisent un modèle d'endommagement et une méthode de propagation de fissure différents. Børvik et al. [35, 36, 38] utilisent une technique d'érosion via l'utilisation du logiciel explicite LS-DYNA [158], analogue à celle implémentée dans Metafor. Mediavilla et al. [174, 176] utilisent la technique de remaillage de la structure présentée à la section 6.3.4.

### 7.4.2 Présentation du problème

Le test considéré est un test de traction classique d'une barre cylindrique, entaillée ou non. Dans le cas de spécimens entaillés, trois rayons d'encoche sont considérés : 0.4, 0.8 et 2mm. Le chargement est imposé par le déplacement d'une des extrémités de la barre, l'autre extrémité restant fixe. Les quatre géométries (modélisation axisymétrique), ainsi que les fixations et le chargement, sont présentés à la figure 7.20. Les données géométriques du problème sont précisées dans le tableau 7.5. La courbe de déplacement imposé est représentée à la figure 7.21. Le matériau testé est un acier Weldox 460E.

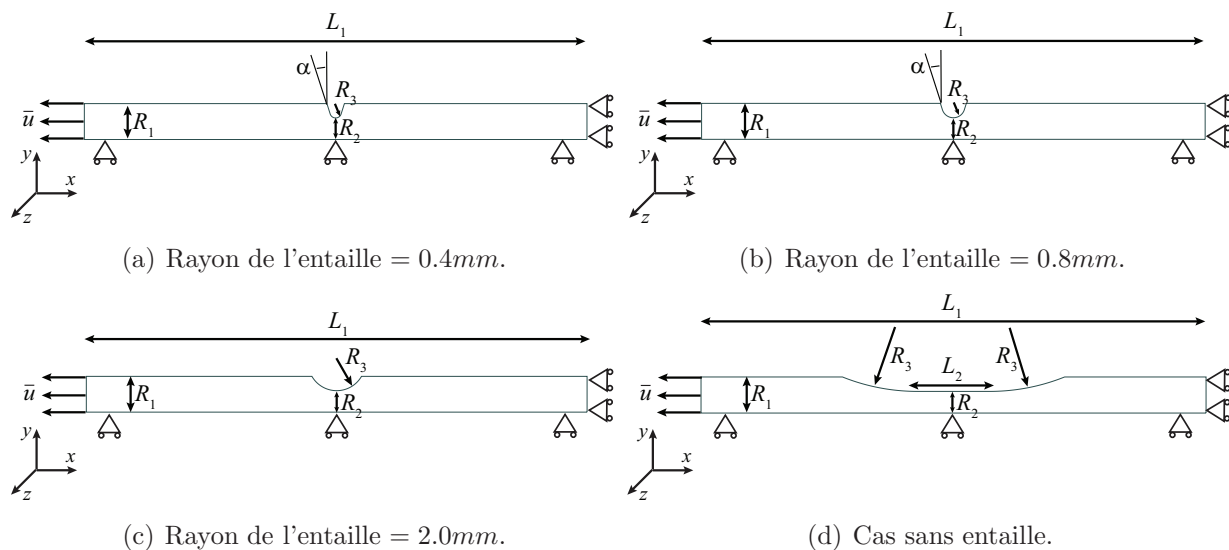


FIG. 7.20 – Géométrie des tests.

Données géométriques	7.20(a)	7.20(b)	7.20(c)	7.20(d)
Longueur totale de l'éprouvette $L_1$ (mm)	35.0	35.0	35.0	35.0
Rayon de l'éprouvette $R_1$ (mm)	2.5	2.5	2.5	2.5
Rayon de la zone utile $R_2$ (mm)	1.5	1.5	1.5	1.5
Rayon de l'encoche $R_3$ (mm)	0.4	0.8	2.0	14.0
Longueur de la zone utile $L_2$ (mm)	-	-	-	5.0
Angle d'inclinaison de l'encoche $\alpha$ (°)	17.5	17.5	-	-

TAB. 7.5 – Données géométriques des tests.

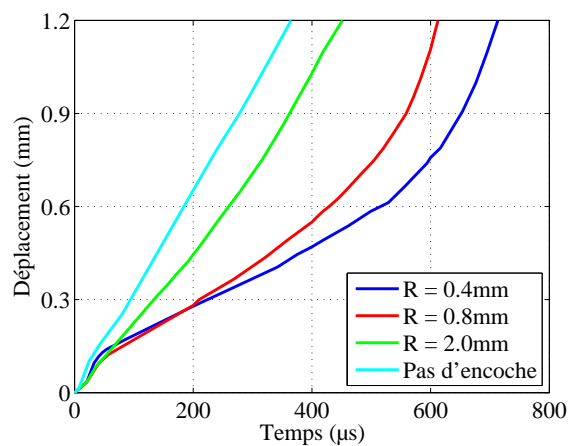


FIG. 7.21 – Evolution des déplacements imposés pour les quatre problèmes.

### 7.4.2.1 Maillage de la structure

Les maillages initiaux, pour les quatre géométries, sont illustrés à la figure 7.22 où nous avons zoomé à l'endroit de la zone critique. Ils ont été réalisés pour s'approcher le plus possible des maillages utilisés dans LS-DYNA par Borvik et al. [38]. Ils comportent 20 éléments le long du rayon  $R_2$ . Le nombre total d'éléments est de 3400 pour la géométrie sans encoche et de 4560 pour les géométries avec encoche. Notons que, dans le cas  $R = 2.0mm$ , nous avons un maillage légèrement différent de celui obtenu avec LS-DYNA, afin d'obtenir des mailles mieux conditionnées au début du calcul. Deux points caractéristiques du maillage seront considérés tout au long de l'étude : le point  $A$  placé au centre de l'entaille, et le point  $B$  placé au centre de l'éprouvette (voir figure 7.22).

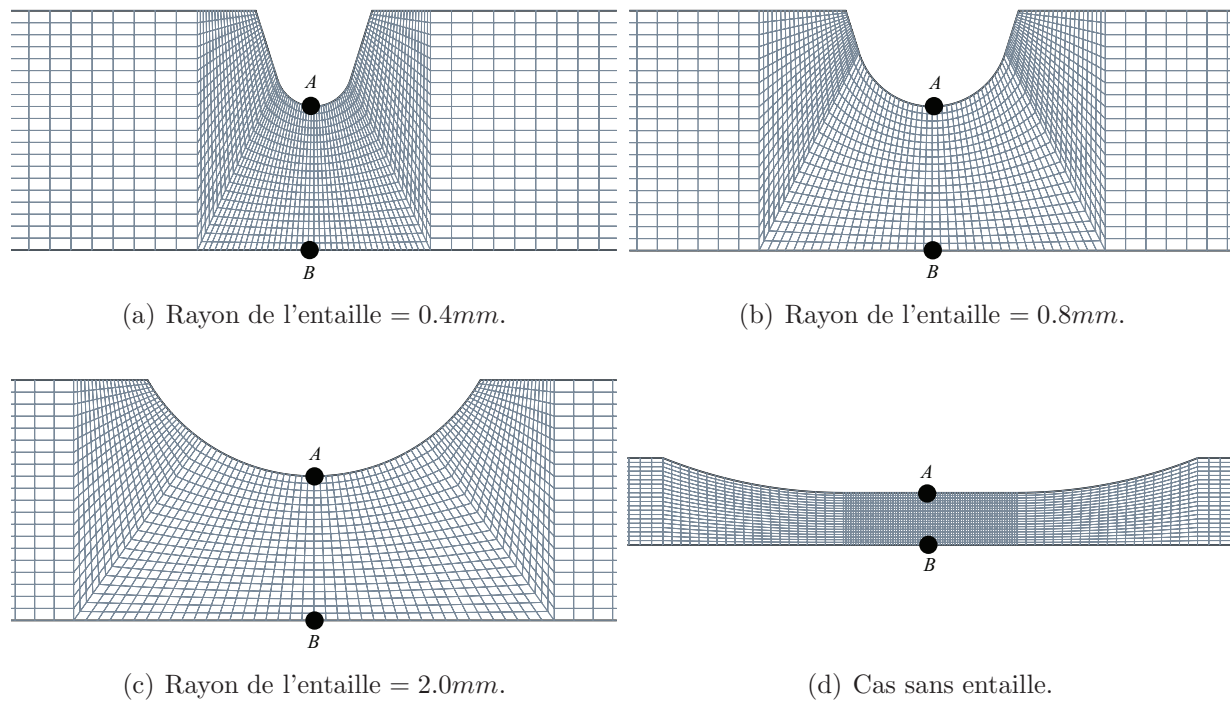


FIG. 7.22 – Maillages des 4 géométries (zoom sur la zone critique).

### 7.4.2.2 Modélisation 1

Dans Mediavilla et al. [174, 176], la modélisation néglige les effets dynamiques, l'auteur considérant que les effets de la vitesse de déformation sont modérés. Pour la même raison, les effets d'adoucissement thermique ne sont pas non plus pris en compte<sup>1</sup>. Le comportement

<sup>1</sup>Nous avons cependant montré dans la section 4.3.6 l'importance de considérer les effets d'inertie pour un problème tout à fait semblable. Cependant, nous considérons dans un premier temps une modélisation identique à Mediavilla et al. [174, 176].

du matériau est modélisé par une loi de type Swift :

$$\sigma_{crit} = \sigma^{el} + h (\bar{\varepsilon}^{pl})^n$$

où  $\sigma^{el}$ ,  $h$  et  $n$  sont des paramètres matériau. Le modèle d'endommagement utilisé est celui de Geers décrit à la section 5.4.2.4, pour lequel l'évolution de la variable d'endommagement est donnée par l'expression :

$$\dot{D} = \begin{cases} \langle 1 + A\sigma^* \rangle (\bar{\varepsilon}^{pl})^B \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\kappa_c - \kappa_i} & \text{si } \kappa_i \leq \kappa \leq \kappa_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.1)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $\kappa_i$  et  $\kappa_c$  sont des paramètres matériau. Cependant, nous utilisons un modèle simplifié de cette loi d'endommagement. En effet, Mediavilla et al. [174, 176] relie l'évolution de l'endommagement à une variable non locale dans le but d'atténuer la dépendance au maillage, ce que nous ne considérons pas dans cette étude. Les valeurs des paramètres matériau sont résumées dans le tableau 7.6.

Paramètres mécaniques et thermiques	Valeur
Module de Young $E$ (Mpa)	200000.0
Coefficient de Poisson $\nu$	0.33
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	8950.0
Paramètres de la loi de Swift	
$\sigma_{crit} = \sigma^{el} + h (\bar{\varepsilon}^{pl})^n$	
$\sigma^{el}$ (Mpa)	490.0
$h$ (Mpa)	807.0
$n$	0.73
Paramètres de la loi d'endommagement de Geers	
$\dot{D} = \begin{cases} \langle 1 + A\sigma^* \rangle (\bar{\varepsilon}^{pl})^B \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\kappa_c - \kappa_i} & \text{si } \kappa_i \leq \kappa \leq \kappa_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	
$\kappa_i$	0.05
$\kappa_c$	5.0
$A$	3.9
$B$	0.63
$D_C$	0.9

TAB. 7.6 – Paramètres matériau de l'acier Weldox 460E pour le modèle de Geers.

### 7.4.2.3 Modélisation 2

Børvik et al. [35, 36, 38] considèrent un problème thermomécanique résolu à l'aide d'un algorithme explicite. Le comportement du matériau est modélisé par une loi de Johnson-Cook modifiée par Camacho et Ortiz [44] :

$$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left(1 + \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\varepsilon}}_0}\right)^C \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m\right) \quad (7.2)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $n$ ,  $C$ ,  $\dot{\bar{\varepsilon}}_0$ ,  $m$  et  $T_{melt}$  sont des paramètres matériau. Cette loi d'érouissage est couplée à un modèle d'endommagement de Langseth, présenté à la section 5.4.3.2. La loi d'évolution de l'endommagement est donné par l'expression :

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} < \varepsilon_d \\ \frac{D_C}{\bar{\varepsilon}_f^{pl} - \varepsilon_d} \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} \geq \varepsilon_d \end{cases}$$

où  $\varepsilon_d$  et  $D_C$  sont des paramètres matériau. La déformation plastique équivalente de rupture s'écrit :

$$\bar{\varepsilon}_f^{pl} = (D_1 + D_2 \exp D_3 (\sigma^*)) \left(1 + \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\varepsilon}}_0}\right)^{D_4} \left(1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)$$

où  $D_1$  à  $D_5$  sont des constantes du matériau. Les paramètres matériau (tirés de Børvik et al. [35, 36, 38]) sont résumés dans le tableau 7.7. Trois températures initiales sont considérées pour chaque géométrie : 100, 300 et 500°C.

## 7.4.3 Comparaison des résultats

### 7.4.3.1 Modélisation 1

Nous comparons tout d'abord les courbes force-déplacement obtenues dans le cas quasi-statique tel que présentées dans Mediavilla et al. [176] et tels que déterminées dans Metafor (voir figure 7.23(a)). Les résultats sont très proches. Nous comparons ensuite l'évolution de l'endommagement pour les deux points caractéristiques de la structure (voir figure 7.23(b)). Les résultats sont présentés à la figure 7.23(b) pour un rayon de l'encoche de 0.4mm.

La différence entre les deux courbes peut provenir de deux sources : tout d'abord, nous utilisons une simplification du modèle d'endommagement (notre modèle est purement local). Ensuite, Mediavilla et al. [176] utilisent une méthode de remaillage qui leur permet de garder des mailles bien conditionnées tout au long du processus. De même, pour des valeurs importantes du déplacement, la différence entre les courbes force-déplacement dans le cas de la barre non entaillée provient de ces deux mêmes causes.



Paramètres mécaniques et thermiques	Valeur
Module de Young $E$ (Mpa)	200000.0
Coefficient de Poisson $\nu$	0.33
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	8950.0
Conductivité thermique $k$ (W/mK)	47.0
Chaleur spécifique $c$ (J/KgK)	452.0
Coefficient d'expansion thermique $\alpha$	1.1e - 5
Facteur de Taylor-Quinney $\beta$	0.9
Paramètres de la loi de Johnson-Cook	
$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^C \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m\right)$	
$A$ (Mpa)	490.0
$B$ (Mpa)	807.0
$n$	0.74
$C$	0.0114
$\dot{\varepsilon}_0$ (s <sup>-1</sup> )	5.0e - 4
$m$	0.94
$T_{room}$ (K)	293.0
$T_{melt}$ (K)	1800.0
Paramètres de la loi d'endommagement de Langseth	
$\dot{D} = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} < \varepsilon_d \\ \frac{D_C}{\bar{\varepsilon}_f^{pl} - \varepsilon_d} \dot{\varepsilon}^{pl} & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} \geq \varepsilon_d \end{cases}$	
$\bar{\varepsilon}_f^{pl} = (D_1 + D_2 \exp D_3 (\sigma^*)) \left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{D_4} \left(1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)$	
$D_C$	0.3
$\varepsilon_d$	0.0
$D_1$	0.0705
$D_2$	1.732
$D_3$	-0.54
$D_4$	-0.015
$D_5$	0.0
$\dot{\varepsilon}_0$	5.0e - 4

TAB. 7.7 – Paramètres matériau de l'acier Weldox 460E pour le modèle de Langseth.

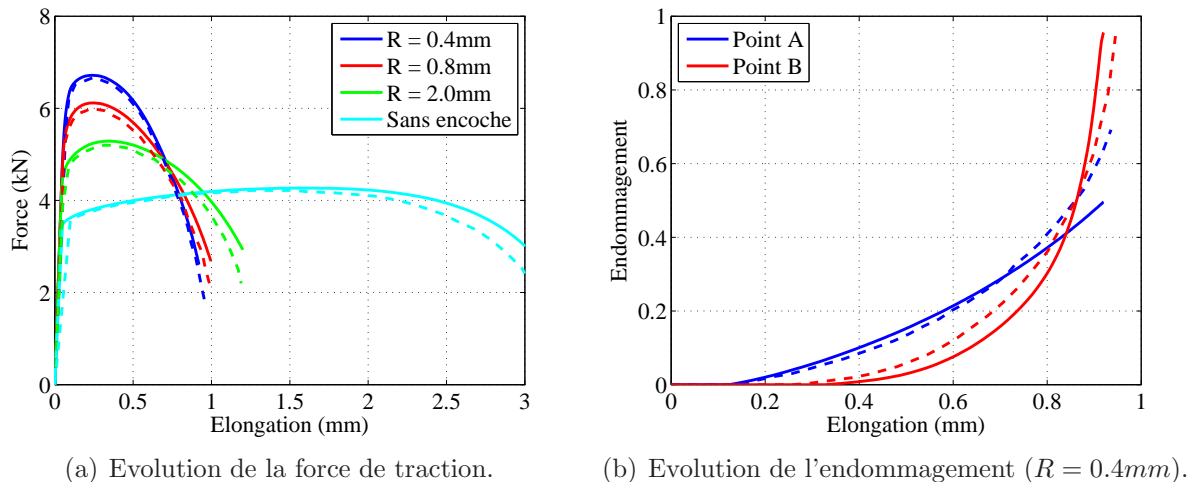


FIG. 7.23 – Comparaison des courbes force-déplacement et des courbes d'endommagement. En traits continus : résultats Metafor. En traits interrompus : résultats obtenus par Mediavilla et al. [176].

Dans tous les cas, l'endommagement croît tout d'abord au centre de l'encoche (point *A*) et ce, d'autant plus que le rayon de l'encoche est petit (voir figure 7.24). Ensuite, il se propage jusqu'au centre de l'éprouvette. En effet, la triaxialité devient très importante au centre de l'éprouvette (point *B*), ce qui a pour effet d'augmenter fortement la valeur d'endommagement (voir figure 7.25(b)), alors que la triaxialité au bord de l'éprouvette (point *A*) reste faible (voir figure 7.25(a)).

### Prise en compte des effets dynamiques

Vu le temps caractéristique du phénomène étudié (de l'ordre de la milliseconde), nous réétudions à présent le problème en tenant compte des effets d'inertie. Nous procédons en deux temps. Tout d'abord, nous utilisons simplement (c'est-à-dire sans considérer d'effets thermiques) un algorithme de type Chung-Hulbert tel que présenté à la section 3.2. Ensuite, nous prenons en compte les effets d'adoucissement thermique dans la modélisation du comportement du matériau, par l'utilisation d'une loi d'écrouissage thermomécanique de Johnson-Cook. Notons au passage que l'implémentation proposée des lois d'endommagement permet d'utiliser, de façon tout à fait transparente pour l'utilisateur, l'une ou l'autre loi d'endommagement couplée à une loi d'écrouissage quelconque. Le passage d'une loi mécanique à une loi thermomécanique ne nécessite que l'entrée supplémentaire des données thermiques (chaleur spécifique, conductivité...).

En utilisant un algorithme prenant en compte les effets d'inertie, nous obtenons les courbes force-déplacement présentées à la figure 7.26. Celles-ci présentent une succession de pics, également présents lors des tests expérimentaux (voir section suivante), correspondant aux passages des ondes élastiques à travers la structure (voir Børvik et al. [35, 38]). Hormis

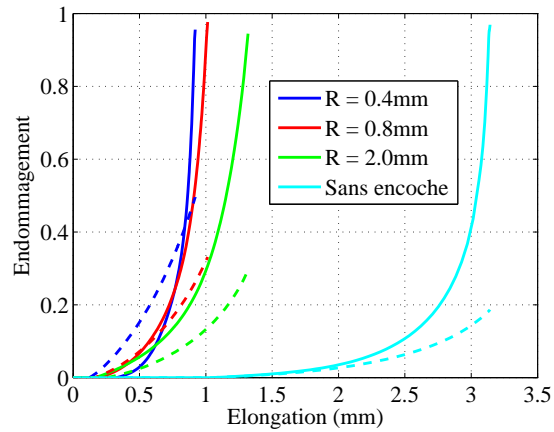
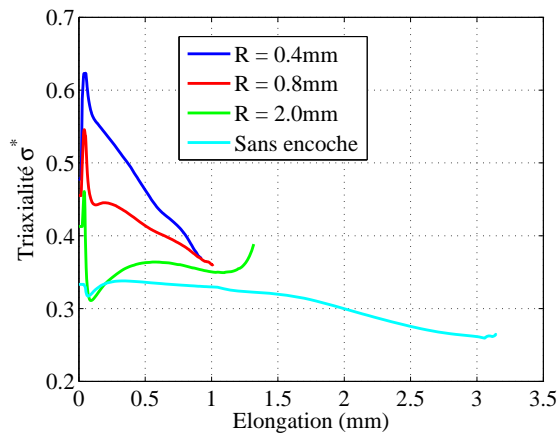
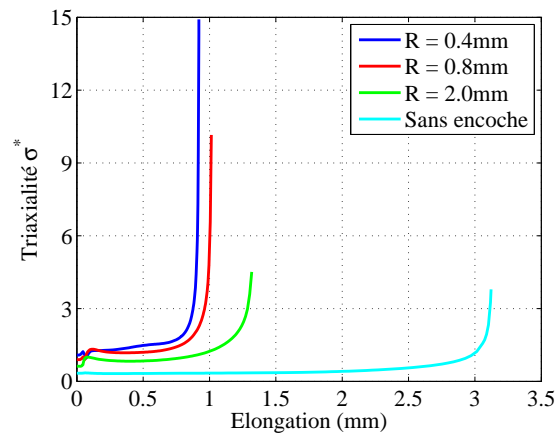


FIG. 7.24 – Comparaison de l'évolution d'endommagement pour les différentes géométries (résultats Metafor).

En traits continus : point B. En traits interrompus : point A.



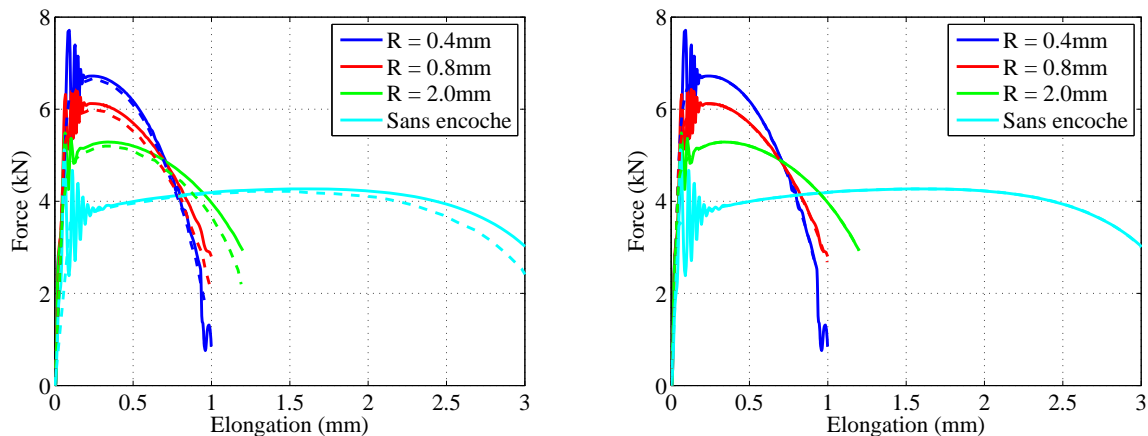
(a) Triaxialité au point A.



(b) Triaxialité au point B.

FIG. 7.25 – Evolution de la triaxialité.

cette succession de pics, les courbes présentent peu de différences pour des valeurs de l'élongation supérieures à  $0.25\text{mm}$ . Dans le cas de la comparaison entre les algorithmes dynamique et quasi-statique de Metafor (figure 7.26(b)), les courbes sont confondues à l'exception du passage des ondes élastiques. Il faut également noter que, dans le cas de la barre non entaillée, l'endroit de rupture (endommagement maximum) n'est plus situé au centre de l'éprouvette, ce que nous avons déjà observé dans la section 4.3.6.



(a) Courbes quasi-statiques tirées de Mediavilla et al. [174, 176]. (b) Courbes quasi-statiques obtenues par Metafor (les courbes sont confondues pour un déplacement supérieur à  $0.25\text{mm}$ ).

FIG. 7.26 – Influence des effets dynamiques. En traits pleins : courbes force-déplacement dynamiques. En traits interrompus : courbes force-déplacement quasi-statiques.

Couplons à présent l'utilisation d'un algorithme dynamique avec une loi d'érouissage comprenant un terme de viscosité. La loi d'érouissage utilisée est la loi proposée par Camacho et Ortiz [44] où nous ne tenons pas compte du terme en température :

$$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left( 1 + \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^C$$

Les valeurs des paramètres  $C$  et  $\dot{\varepsilon}_0$  sont tirées de Børvik et al. [35, 38] et valent respectivement  $0.0114$  et  $5.0e - 4$ . Nous obtenons les courbes force-déplacement et les courbes d'endommagement au centre du spécimen, présentées à la figure 7.27. Nous constatons une très nette augmentation de la force de traction par rapport au cas non visqueux. L'endommagement augmente quant à lui plus lentement, ce qui est normal au vu de la relation d'endommagement (7.1) : la triaxialité  $\sigma^*$  diminue pour une même valeur de pression.

Enfin, utilisons la loi de Johnson-Cook couplée au modèle d'endommagement de Geers dans le cadre dynamique et thermomécanique. Les paramètres matériau de la loi de Johnson-Cook sont ceux donnés dans le tableau 7.7. La température initiale est de  $293\text{K}$ . Les

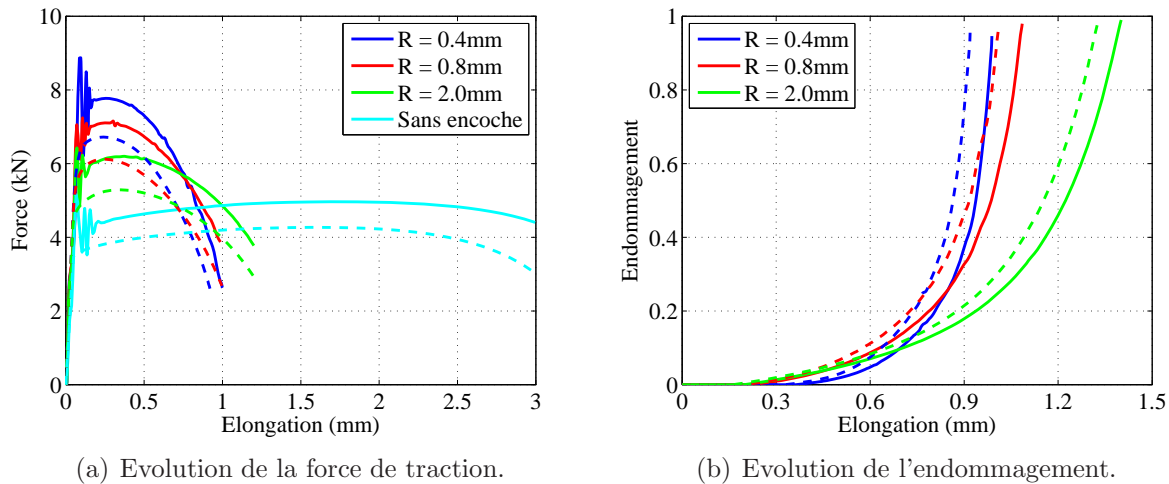


FIG. 7.27 – Comparaison des courbes force-déplacement et d'endommagement au point A. En traits continus : loi d'écroutissement viscoplastique. En traits interrompus : loi d'écroutissement non visqueuse.

résultats sont présentés à la figure 7.28(a). Nous assistons à une augmentation de la force de traction de l'ordre de 15% par rapport au cas quasi-statique non thermomécanique, ce qui est plus en adéquation avec les données expérimentales (voir modélisation 2). L'évolution de l'endommagement est également différente et la rupture de l'éprouvette intervient logiquement plus tôt, l'endommagement croissant plus rapidement (voir figure 7.28(b)).

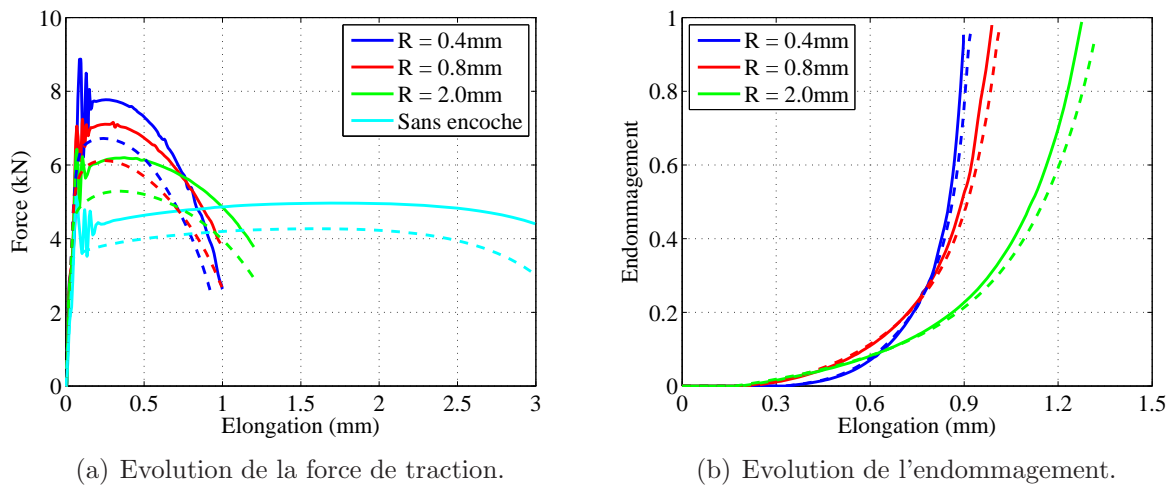


FIG. 7.28 – Comparaison des courbes force-déplacement et d'endommagement au point A. En traits pleins : algorithme thermomécanique. En traits interrompus : algorithme isotherme.

A titre d'illustration, les distributions de la vitesse de déformation plastique et de la température juste avant la rupture sont données aux figures 7.29 et 7.30. La vitesse de déformation plastique est de l'ordre de  $10000s^{-1}$  et l'augmentation de température est de l'ordre de 150 à  $300K$  à l'endroit critique. Le facteur de viscosité de l'expression (7.2) est donc de l'ordre de 1.17 et le terme d'adoucissement thermique de l'ordre de 0.85, ce qui est loin d'être négligeable.

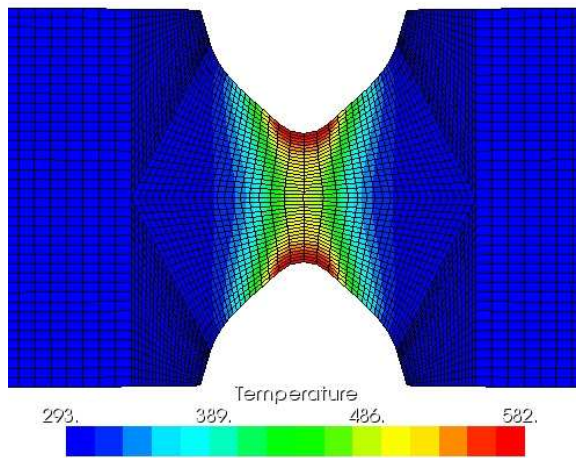


FIG. 7.29 – Distribution de température avant rupture ( $R = 0.8mm$ ).

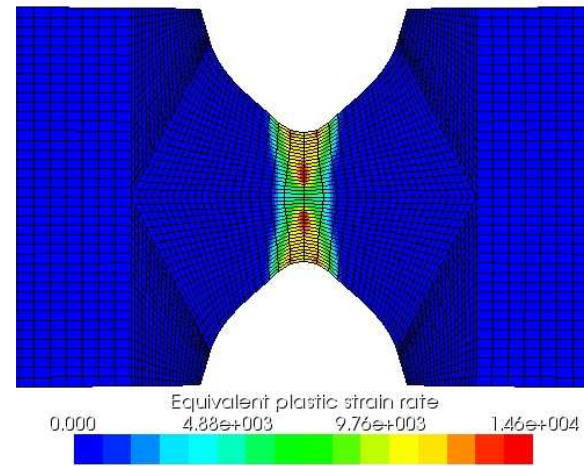


FIG. 7.30 – Distribution de vitesse de déformation plastique équivalente avant rupture ( $R = 0.8mm$ ).

#### 7.4.3.2 Modélisation 2

Comparons à présent les résultats obtenus par une formulation thermomécaniques et un modèle d'endommagement de Langseth. Rappelons que les résultats présentés par Børvik et al. [38] ont été obtenus avec le code commercial LS-DYNA explicite. Rappelons que nous modélisons le comportement du matériau par une loi d'écrouissage de Johnson-Cook (expression (7.2)) couplée à une loi d'endommagement de Langseth-Børvik [39] dont les paramètres sont repris au tableau 7.7.

Les comparaisons des courbes force-déplacement sont présentées à la figure 7.31 pour les quatre géométries et les trois températures initiales. Les résultats sont en accord avec ceux obtenus par Børvik et al. [38]. Ils sont aussi en accord avec les résultats expérimentaux pour les températures de 100 et  $300^{\circ}C$ . Par contre, dans le cas de températures élevées ( $500^{\circ}C$ ), l'accord entre les résultats numériques (tant ceux provenant de LS-DYNA que de Metafor qui restent comparables) et les résultats expérimentaux est nettement moins bon. Børvik et al. [38] expliquent cette différence par le type de dépendance en température de la loi de Johnson-Cook (7.2) : la limite élastique dépend presque linéairement de la température ( $m = 0.94$ ), ce qui n'est pas vérifié expérimentalement.

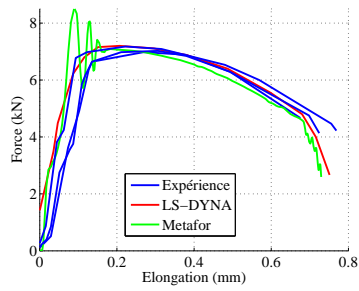
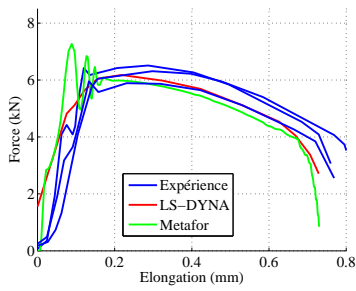
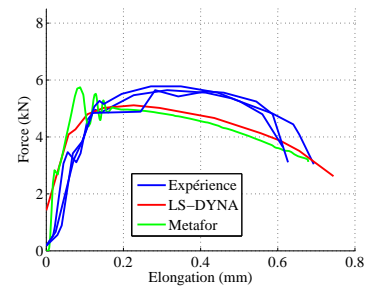
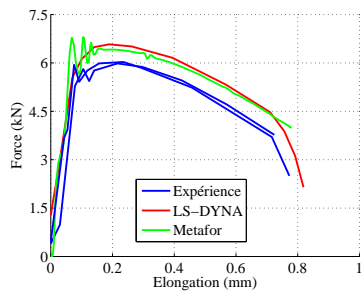
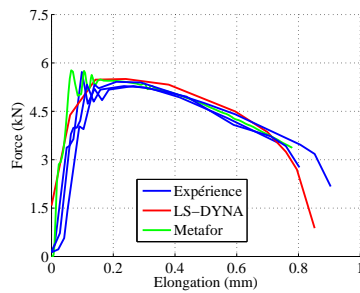
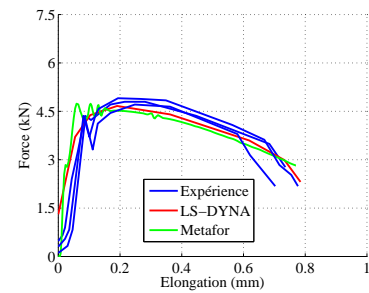
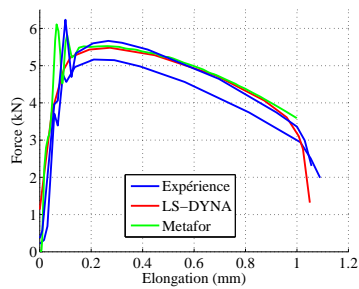
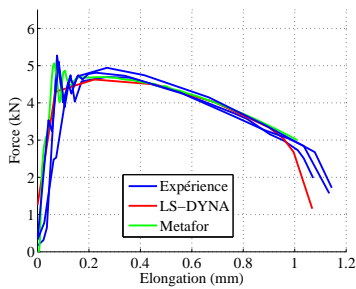
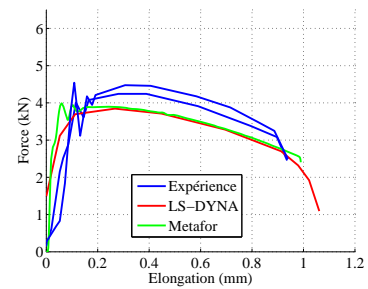
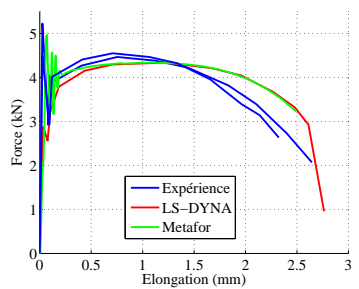
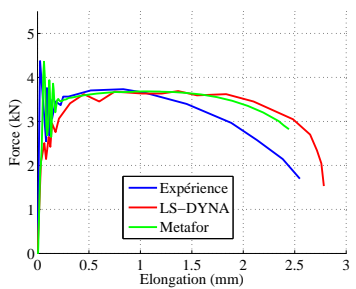
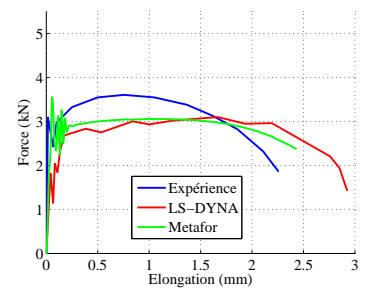
(a)  $R = 0.4mm$ ;  $T = 100^{\circ}C$ .(b)  $R = 0.4mm$ ;  $T = 300^{\circ}C$ .(c)  $R = 0.4mm$ ;  $T = 500^{\circ}C$ .(d)  $R = 0.8mm$ ;  $T = 100^{\circ}C$ .(e)  $R = 0.8mm$ ;  $T = 300^{\circ}C$ .(f)  $R = 0.8mm$ ;  $T = 500^{\circ}C$ .(g)  $R = 2.0mm$ ;  $T = 100^{\circ}C$ .(h)  $R = 2.0mm$ ;  $T = 300^{\circ}C$ .(i)  $R = 2.0mm$ ;  $T = 500^{\circ}C$ .(j) Sans encoche;  $T = 100^{\circ}C$ .(k) Sans encoche;  $T = 300^{\circ}C$ .(l) Sans encoche;  $T = 500^{\circ}C$ .

FIG. 7.31 – Comparaison des courbes force-déplacement.

Pour surmonter ce problème, nous avons considéré une variation de  $m$  avec la température selon une loi linéaire au-delà de  $325^\circ C$  :

$$m(T) = \begin{cases} m_0(1 + bT) & \text{si } T > 325^\circ C \\ m_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $m_0$  est la valeur de  $m$  à la température ambiante (0.94) et  $b$  est un paramètre matériau que nous avons fixé à 1.68. Les résultats sont donc inchangés à basse température ; l'effet de la température se marque d'autant plus que celle-ci augmente. Les résultats obtenus avec le paramètre  $m$  ainsi modifié sont présentés à la figure 7.32. Ceci montre une fois encore l'importance de ne pas négliger les aspects thermomécaniques des lois constitutives. Dans ce qui suit, nous utiliserons dorénavant ce modèle avec  $m$  variable.

Les figures 7.33 et 7.34 présentent à titre d'illustration les distributions d'endommagement et de température au début du processus de désactivation d'éléments, ainsi qu'en fin de simulation lorsque la structure est rompue. Nous donnons les résultats pour la géométrie sans encoche et pour un rayon de  $0.4mm$ , la première pour une température initiale de  $500^\circ C$ , la seconde pour une température initiale de  $100^\circ C$ <sup>1</sup>.

Dans le cas de la structure sans encoche, la rupture se produit d'abord au centre de l'éprouvette, là où la triaxialité est maximale (comme déjà étudié pour le cas de la modélisation précédente). Dans le cas de la géométrie avec encoche, la rupture s'initie au bord de l'encoche, vu la faible valeur du rayon  $R$ . Une fois la fissure apparue au bord, l'endommagement au centre de l'éprouvette croît rapidement, entraînant la rupture en ce point, ce qui conduit à la rupture au centre. Ceci pourrait expliquer l'existence de débris vu que la rupture s'initie à deux endroits différents dans la structure. Pour les autres valeurs du rayon, la rupture s'initie au centre de l'éprouvette avant de se propager vers l'extérieur de celle-ci.

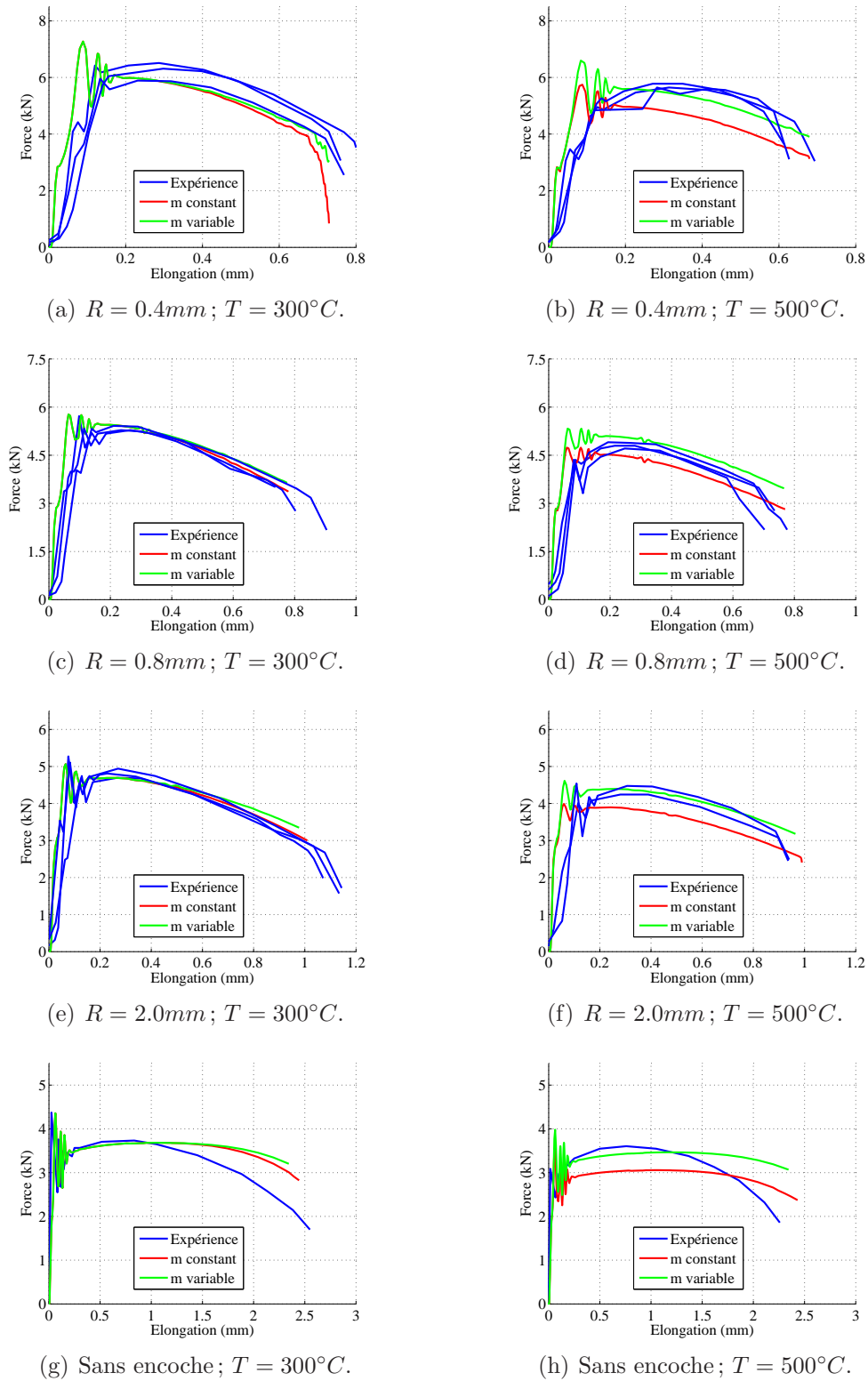
Remarquons enfin, dans le cas de la géométrie sans encoche, la non symétrie dans la configuration rompue. Il n'est possible de tenir compte de cette non symétrie que via l'utilisation d'un algorithme prenant en compte les forces d'inertie<sup>2</sup>.

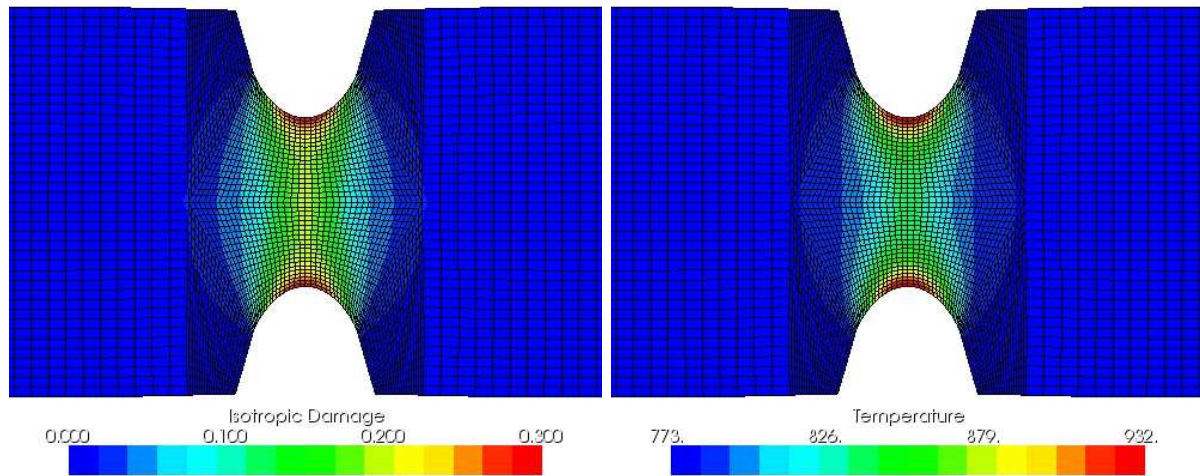
---

<sup>1</sup>Ces deux cas constituent les deux cas "opposés" : forte triaxialité initiale et haute température pour le premier, faible triaxialité initiale et basse température pour le second.

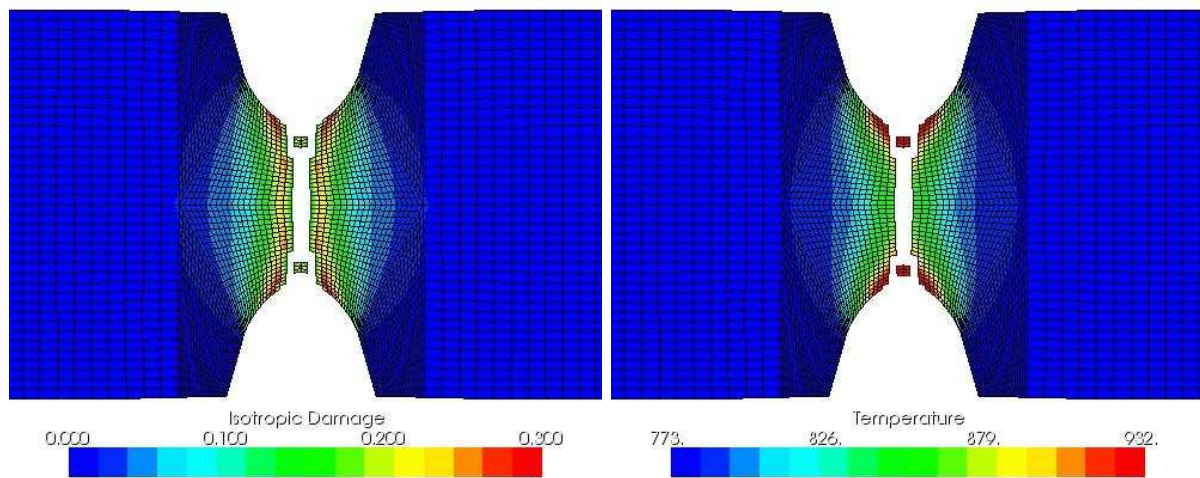
<sup>2</sup>Nous avons constaté la même dans le cas de l'étude de la barre d'Hopkinson à la section 4.3.6.



FIG. 7.32 – Influence de la variation du paramètre  $m$  sur les courbes force-déplacement.

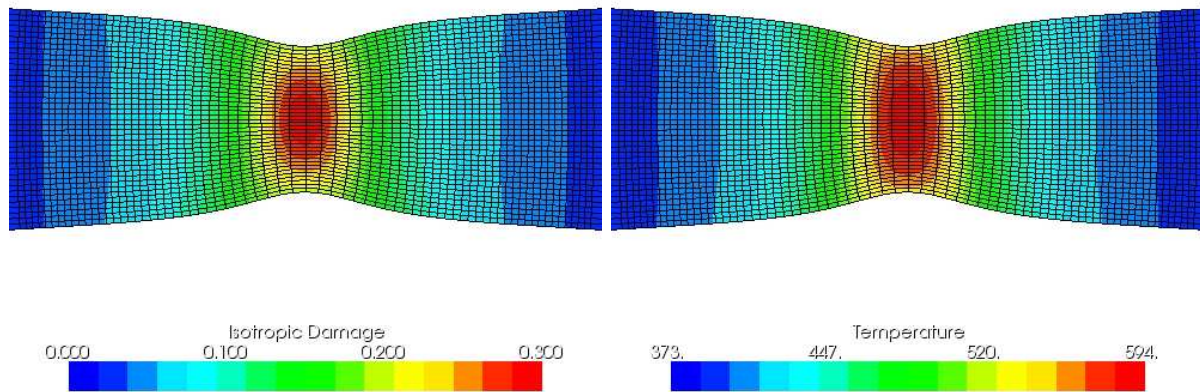


(a) A l'instant de la rupture.

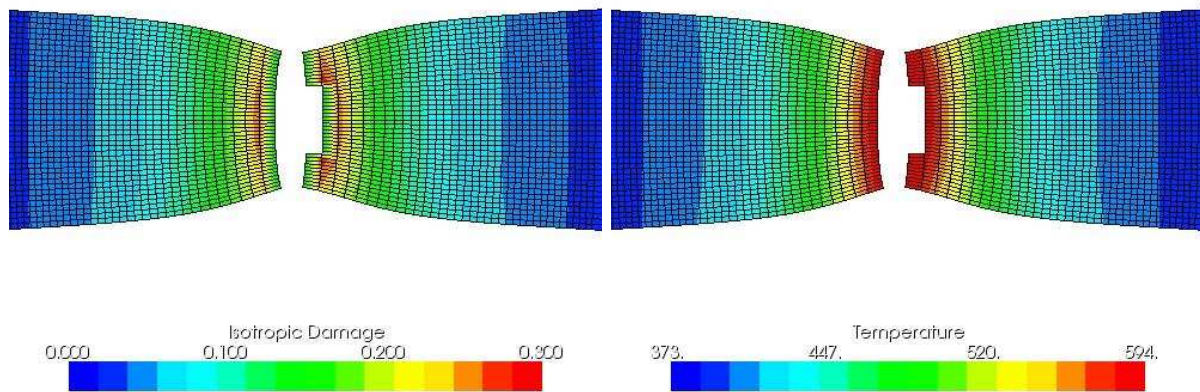


(b) Après rupture.

FIG. 7.33 – Distribution d'endommagement et de température pour  $R = 0.4mm$  et  $T = 500^{\circ}C$ .



(a) A l'instant de la rupture.



(b) Après rupture.

FIG. 7.34 – Distribution d'endommagement et de température pour la géométrie sans encoche et  $T = 100^{\circ}C$ .

## 7.5 Application 4 : Extension des tests de traction à grande vitesse

### 7.5.1 Introduction

Dans cette section, nous nous proposons d'étendre les tests de traction présentés aux sections 4.3 et 4.4. Rappelons qu'il s'agit de tests de traction effectués sur du fer REMCO, de l'acier DP800 et de l'acier TRIP800. Nous procédons en deux temps. Tout d'abord, nous introduisons un critère de rupture brutal de la structure, basé sur une valeur critique de la déformation plastique, tel que ceux présentés à la section 6.2.2. Ce critère est purement arbitraire, nous n'avons pas effectué d'essais d'identification. Ensuite, nous effectuons un calcul de rupture couplé à la mécanique de l'endommagement continu, en utilisant une loi d'endommagement de la littérature. Le but de ces applications est de comparer les comportements numériques de la rupture dans le cas où celle-ci est couplée ou non à l'adoucissement de la structure par endommagement.

### 7.5.2 Présentation des problèmes

Rappelons les données du problème. Le problème de la barre d'Hopkinson étudié ici consiste en la traction d'une barre de fer REMCO cylindrique, fixée à une de ses extrémités (modélisation axisymétrique). Le problème de traction à grande vitesse des deux aciers consiste en la traction rapide d'une barre, provoqué par le déplacement d'un anneau rigide. Les géométrie et chargement des deux tests sont rappelés aux figures 7.35 et 7.36. Pour les dimensions, nous renvoyons le lecteur aux tableaux des pages 79 et 92. Le comportement du matériau est modélisé par une loi d'érouissage de Zerilli-Armstrong (2.12) pour le fer REMCO et par une loi de Johnson-Cook (2.2) pour les deux aciers.

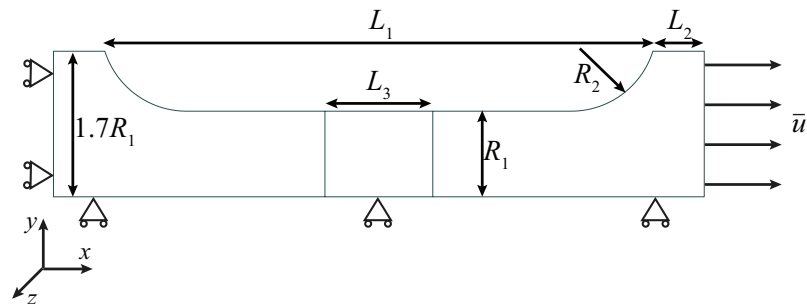


FIG. 7.35 – Barre d'Hopkinson (fer REMCO).  
Géométrie, chargement et fixations.

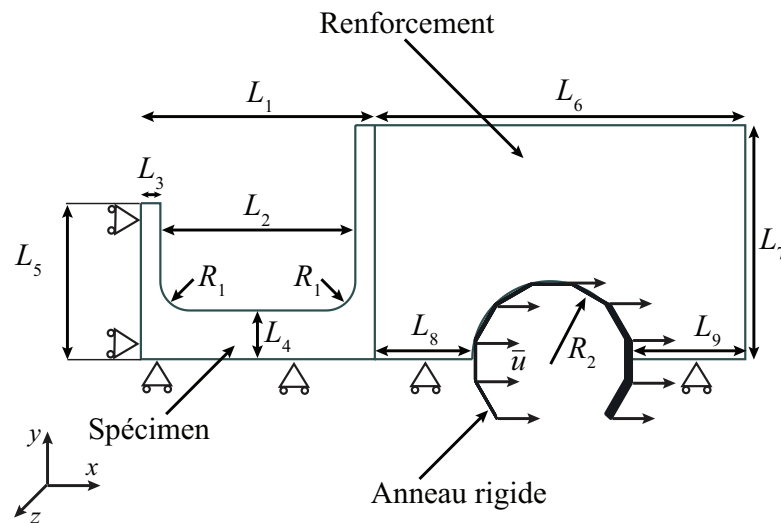


FIG. 7.36 – Essai de traction à grande vitesse (aciers DP800 et TRIP800).  
Géométrie, chargement et fixations.

### 7.5.3 Critère de rupture simple

Pour les deux problèmes proposés, nous utilisons le critère de rupture de Lemaitre [146] (voir page 154) :

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f^{pl}} \left[ \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3 (1 - 2\nu) (\sigma^*)^2 \right] d\bar{\varepsilon}^{pl} = C_{crit}$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau. Ce critère tient compte de la triaxialité des contraintes dont nous avons constaté l'importance aux sections 7.2 et 7.4. De plus, ce modèle ne nécessite pas de phase d'identification de paramètres matériau supplémentaires. C'est pourquoi nous l'avons choisi<sup>1</sup>.

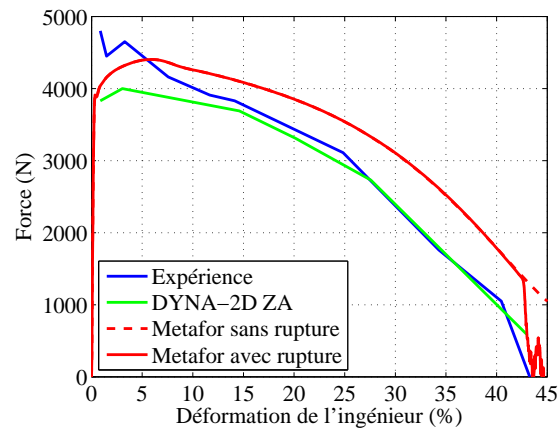
Les paramètres matériau des lois d'érouissage sont identiques à ceux utilisés dans le cas où la rupture n'est pas modélisée (voir tableaux 4.9 page 78 et 4.14 page 93).

Pour le fer REMCO, la valeur de  $C_{crit}$  est déterminée de telle sorte que la structure soit rompue après  $180\mu s$ , comme observé expérimentalement. Il en résulte une valeur de  $C_{crit}$  de 2.4. Pour les aciers, cette valeur est déterminée en fonction de la courbe force-déplacement expérimentale. Nous obtenons une valeur de  $C_{crit}$  de 1.8 pour l'acier DP800 et de 1.3 pour l'acier TRIP800.

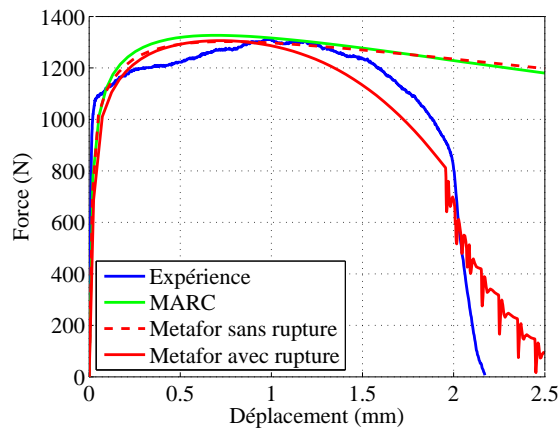
Dans les deux problèmes, la valeur critique a été déterminée simplement de manière à épouser au mieux la courbe expérimentale sans utiliser une méthode d'identification

<sup>1</sup>Rappelons que le but de cette section est d'étudier le comportement numérique de la structure, une fois le critère de rupture vérifié. Ce choix ne repose donc pas sur une base physique rigoureuse. Il n'y a donc aucune garantie sur la reproductibilité des résultats pour d'autres configurations et/ou mises en charge. Un tel modèle ne peut donc être considéré comme prédictif.

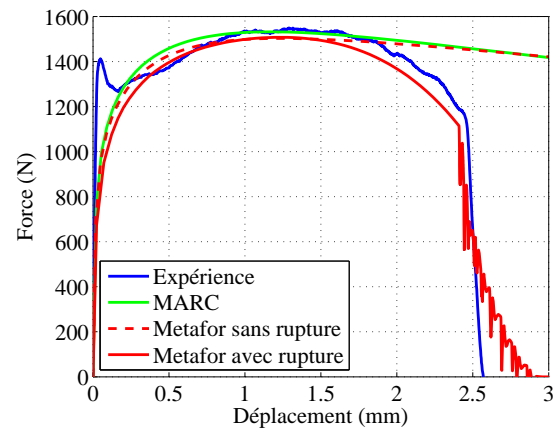
rigoureuse (par exemple une méthode inverse comme à la section 4.3.5). Cela nous a paru inutile dans les deux cas. Les courbes force-déplacement sont représentées à la figure 7.37.



(a) Fer REMCO.



(b) Acier DP800.



(c) Acier TRIP800.

FIG. 7.37 – Comparaison des courbes force-déplacement expérimentales et simulées.

Dans le cas du fer REMCO, nous constatons une bonne adéquation entre la force avec et sans rupture jusqu'à l'instant de la rupture du premier élément. La force chute alors brutalement jusqu'à zéro. Pour les deux aciers, la rupture de la barre se produit progressivement et la force tend vers zéro au fur et à mesure de la rupture des éléments le long de la longueur  $L_4$  (voir figure 7.36). La décroissance de la force est, dans les deux cas, légèrement trop lente, alors qu'expérimentalement, on observe une rupture plus brutale.

Dans les deux cas, nous constatons la présence d'oscillations lorsque des éléments sont rompus. Ce phénomène est illustré à la figure 7.38 où la séquence de rupture a été zoomée. Dans un premier temps, la force diminue de façon régulière quand la striction augmente.

Ensuite, chaque fois qu'un élément est rompu, une brusque chute de la résistance de la structure se produit, suivie d'un accroissement de la résistance. En quelque sorte, on peut dire que les éléments voisins de l'élément rompu "reprennent" en partie la résistance de l'élément rompu. Cela est peut-être dû au défaut de masse dans la structure suite à la désactivation de l'élément rompu. La striction se poursuit alors et la force diminue jusqu'à la rupture de l'élément suivant.

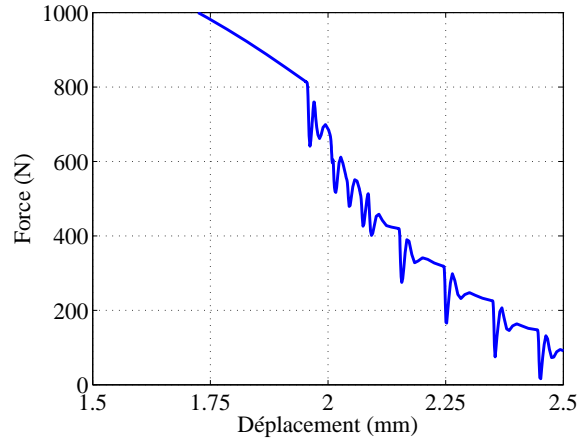


FIG. 7.38 – Acier DP800. Oscillations lors de la rupture de la structure.

#### 7.5.4 Rupture par endommagement

Étudions à présent la rupture de ces deux structures à l'aide d'un critère basé sur la théorie de l'endommagement continu. On a donc un adoucissement progressif du matériau conduisant à la rupture.

Dans les deux problèmes étudiés, nous utilisons le modèle d'endommagement dynamique de Langseth décrit à la section 5.4.3.2. La forme de la loi d'évolution de la variable d'endommagement est la suivante :

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} < \varepsilon_d \\ \frac{D_C}{\varepsilon_f - \varepsilon_d} \dot{\varepsilon}^{pl} & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} \geq \varepsilon_d \end{cases}$$

où  $D_C$  est la valeur critique d'endommagement,  $\varepsilon_d$  est le seuil d'endommagement et  $\varepsilon_f$  est la déformation de rupture dépendant de la triaxialité des contraintes, de la vitesse de déformation plastique équivalente et de la température et qui est donnée explicitement par :

$$\varepsilon_f = (D_1 + D_2 \exp D_3 (\sigma^*)) \left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{D_4} \left(1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)$$

où  $D_1$  à  $D_5$  sont les cinq paramètres matériau liés à l'endommagement.

Les paramètres matériau dont nous disposons pour la loi d'endommagement ont été identifiés pour un acier de type Weldom 460E (voir Børvik et al. [36]). Pour le fer REMCO, nous avons recalibré seulement la loi d'endommagement ; les paramètres de la loi de Zerilli-Armstrong ont été gardés identiques à ceux utilisés dans Noble et al. [194] (cf. tableau 4.9 page 78). Dans le cas des aciers, les paramètres de la loi de Johnson-Cook et du modèle d'endommagement ont été recalés. Les paramètres matériau sont présentés aux tableaux 7.8 et 7.9.

Paramètres de la loi d'endommagement de Langseth	
$\dot{D} = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} < \varepsilon_d \\ \frac{D_C}{\varepsilon_f - \varepsilon_d} \dot{\varepsilon}^{pl} & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} \geq \varepsilon_d \end{cases}$	
$\varepsilon_f = (D_1 + D_2 \exp D_3 (\sigma^*)) \left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{D_4} \left(1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)$	
$D_C$	0.3
$\varepsilon_d$	0.0
$D_1$	0.18
$D_2$	2.5
$D_3$	-0.1
$D_4$	-0.015
$D_5$	0.05
$\dot{\varepsilon}_0$	$5.0e - 4$

TAB. 7.8 – Paramètres matériau d'endommagement pour le fer REMCO.

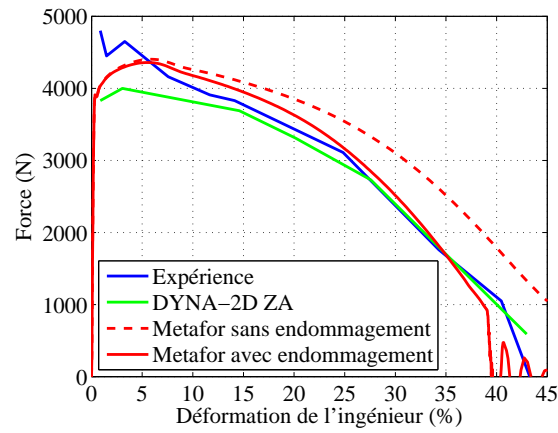
Les courbes force-déplacement sont présentées à la figure 7.39. Pour le fer REMCO (figure 7.39(a)), la courbe épouse bien la courbe expérimentale. Dans le cas des aciers (figures 7.39(b) et 7.39(c)), la rupture est moins brutale que ce qui est prédit expérimentalement. Contrairement au cas du fer REMCO, la rupture se produit dès l'apparition de striction, il n'y a donc pas de phénomène d'adoucissement préalable. L'endommagement ne croît donc pas assez vite dans la structure. Une solution consisterait à introduire une déformation plastique équivalente seuil  $\varepsilon_d$  importante, couplée à une valeur critique d'endommagement  $D_C$  plus faible et rapidement atteinte. Cependant, nous n'avons pas investigué plus avant, vu que le but de ces applications est d'étudier les aspects numériques du couplage endommagement-désactivation d'éléments. Dès lors, nous estimons satisfaisant l'accord entre les courbes.

Dans les deux cas, les oscillations sont toujours présentes lors du processus de désactivation d'éléments (voir figure 7.40). Les causes de ces oscillations sont identiques au cas de rupture sans endommagement. En effet, les valeurs critiques d'endommagement sont assez faibles (de l'ordre de 0.3) et la résistance de la structure est donc toujours importante au moment de la rupture. Nous reviendrons sur ce point lors de l'étude numérique qui suit.

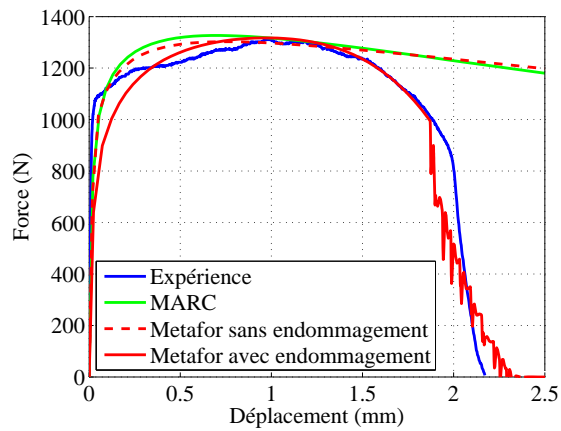


Paramètres de la loi de Johnson-Cook		
$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\epsilon}^{pl})^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{\dot{\epsilon}_0}\right) \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m\right)$		
	Acier DP800	Acier TRIP800
$A$ (Mpa)	266.0	280.0
$B$ (Mpa)	1658.0	1720.0
$n$	0.3	0.35
$C$	0.006409	0.001837
$\dot{\epsilon}_0$ ( $s^{-1}$ )	1.0	1.0
$m$	0.5	0.65
$T_{room}$ (K)	293.0	293.0
$T_{melt}$ (K)	1809.0	1809.0
Paramètres de la loi d'endommagement de Langseth		
$\dot{D} = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{\epsilon}^{pl} < \epsilon_d \\ \frac{D_C}{\epsilon_f - \epsilon_d} \dot{\epsilon}^{pl} & \text{si } \bar{\epsilon}^{pl} \geq \epsilon_d \end{cases}$		
$\epsilon_f = (D_1 + D_2 \exp D_3 (\sigma^*)) \left(1 + \frac{\dot{\epsilon}^{pl}}{\dot{\epsilon}_0}\right)^{D_4} \left(1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)$		
	Acier DP800	Acier TRIP800
$D_C$	0.3	0.35
$\epsilon_d$	0.0	0.0
$D_1$	0.05	0.11
$D_2$	1.45	1.7
$D_3$	-0.6	-0.35
$D_4$	-0.015	-0.015
$\dot{\epsilon}_0$ ( $s^{-1}$ )	$5.0e - 4$	$5.0e - 4$
$D_5$	0.15	0.15

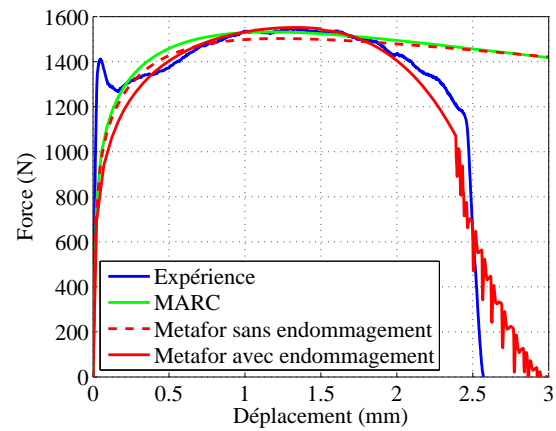
TAB. 7.9 – Paramètres matériau des aciers DP800 et TRIP800.



(a) Fer REMCO.



(b) Acier DP800.



(c) Acier TRIP800.

FIG. 7.39 – Comparaison des courbes force-déplacement expérimentales et simulées.

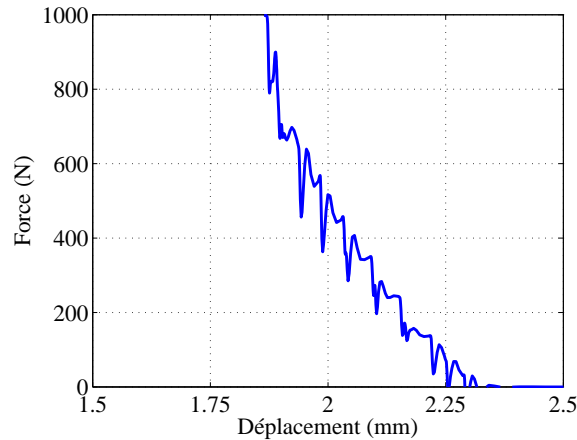


FIG. 7.40 – Oscillations lors de la rupture de la structure pour l'acier dual phase.

### 7.5.5 Etude numérique

Dans cette section, nous comparons la rupture couplée ou non à l'endommagement. Les comparaisons portent sur le comportement numérique de la structure lors de la désactivation d'éléments. Les paramètres matériau sont, sauf mention contraire, ceux des tableaux 7.8 et 7.9. Nous nous intéressons donc davantage au comportement numérique de la structure qu'à la signification physique des résultats.

#### 7.5.5.1 Influence du maillage

Vu la forte dépendance possible au maillage des résultats obtenus par la méthode de propagation de fissure par érosion, une étude de maillage est nécessaire. Ainsi, pour les trois tests, quatre maillages sont considérés, pour lesquels seule la zone critique de rupture est maillée finement. Dans le cas du fer REMCO (dont le comportement est modélisé en axisymétrique), les quatre maillages utilisés comptent respectivement dans la zone critique  $N_x = 10, 20, 30, 40$  éléments dans la directions  $x$  et  $N_y = 40, 80, 120, 160$  éléments dans la direction  $y$  (voir figure 7.41). Dans le cas des deux aciers, la zone critique est la zone utile. Les quatre maillages comptent respectivement  $N_x = 30, 60, 90, 120$  éléments dans la direction  $x$ ,  $N_y = 5, 10, 15, 20$  éléments dans la direction  $y$  et  $N_z = 1, 2, 3, 4$  éléments dans la direction  $z$  (voir figure 7.42).

Les courbes force-déplacement pour les quatre maillages considérés pour les trois problèmes sont comparées à la figure 7.43. Nous pouvons tout d'abord constater que la rupture est de plus en plus brutale (pente de la courbe de plus en plus raide) au fur et à mesure que le maillage devient plus dense ; la rupture se déclenche cependant toujours au même moment (l'écart est peu significatif entre les différents maillages). Dans tous les cas, le maillage le plus grossier est clairement insuffisant une fois la rupture déclenchée, alors qu'il est suffisant tant qu'il n'y a pas de désactivation d'éléments.

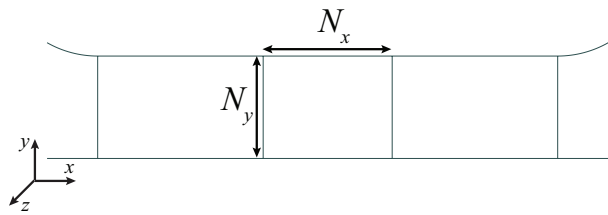


FIG. 7.41 – Fer REMCO. Maillage de la zone critique :  $N_x = 10, 20, 30, 40$  éléments,  $N_y = 40, 80, 120, 160$  éléments.

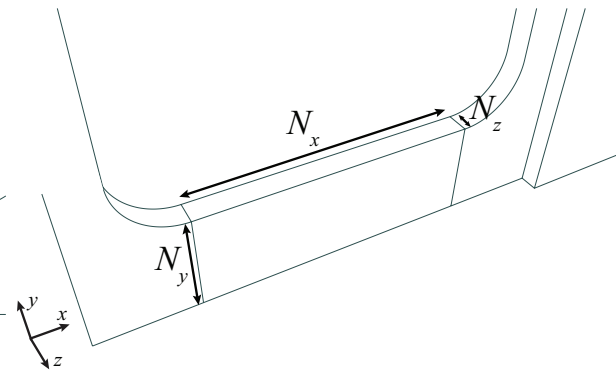


FIG. 7.42 – Aciers TRIP et dual phase. Maillage de la zone critique :  $N_x = 30, 60, 90, 120$  éléments,  $N_y = 5, 10, 15, 20$  éléments,  $N_z = 1, 2, 3, 4$  éléments.

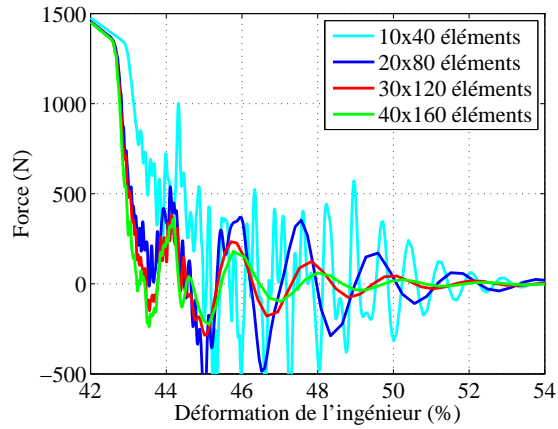
Les oscillations sont présentes dans tous les cas, mais leur amplitude tend logiquement à décroître lorsque la taille des mailles rompues diminue. Il y a peu de différences entre le fait que l'on utilise une méthode de rupture sans ou avec endommagement pour la simple raison que la valeur critique d'endommagement reste assez faible. Nous reviendrons sur ce point à la section 7.5.5.4.

Comparons à présent le volume de matière enlevée lors du processus de désactivation d'éléments, au fur et à mesure que le critère de rupture est vérifié. Le volume de matière enlevée est calculé à partir de la taille des éléments initiaux (avec l'hypothèse de quasi incompressibilité de la matière). Les résultats sont présentés à la figure 7.44 dans le cas d'une rupture avec et sans endommagement et pour les différents maillages étudiés. Logiquement, le volume de matière enlevée diminue avec la taille des mailles, sans pour autant que nous puissions garantir une convergence vers une valeur fixée, ce qui constitue clairement une des limitations de la méthode de rupture par érosion. La différence entre le critère de rupture abrupt et la rupture avec endommagement est assez faible pour la même raison que précédemment.

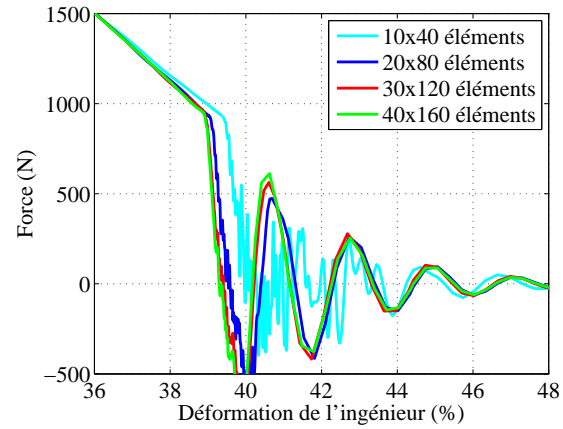
### 7.5.5.2 Influence du type de critère de rupture

Trois types de critère de rupture sont proposés dans Metafor : rupture de l'élément si le critère est satisfait en un point de Gauss de l'élément (critère 1), en moyenne sur les points de Gauss de l'élément (critère 2) ou à tous les points de Gauss de l'élément (critère 3). Quatre points de Gauss sont utilisés par élément.

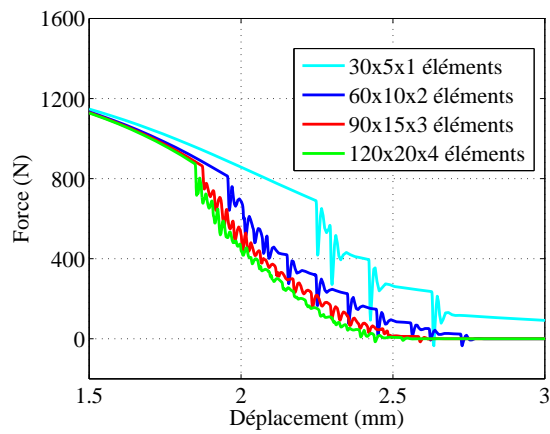
Les courbes force-déplacement pour le test de traction relatif à l'acier TRIP800 sont présentées à la figure 7.45 à titre d'exemple. Les courbes de rupture de l'élément pour un



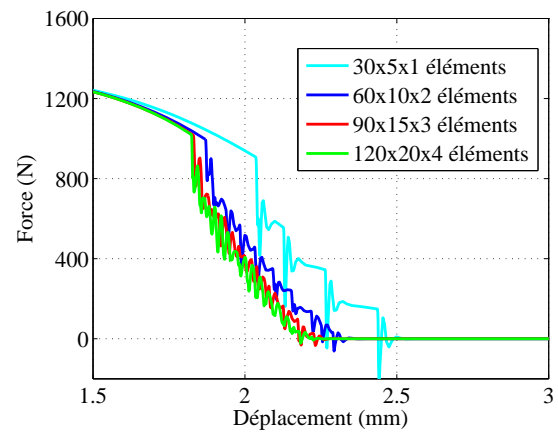
(a) Fer REMCO sans endommagement.



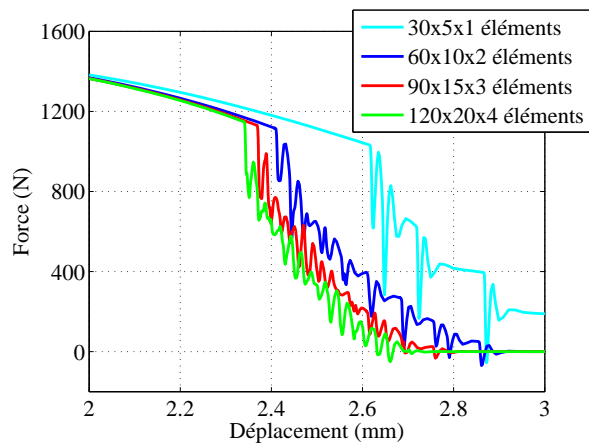
(b) Fer REMCO avec endommagement.



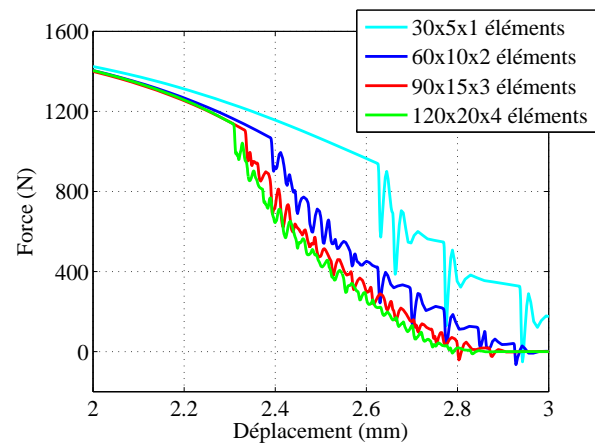
(c) Acier DP800 sans endommagement.



(d) Acier DP800 avec endommagement.

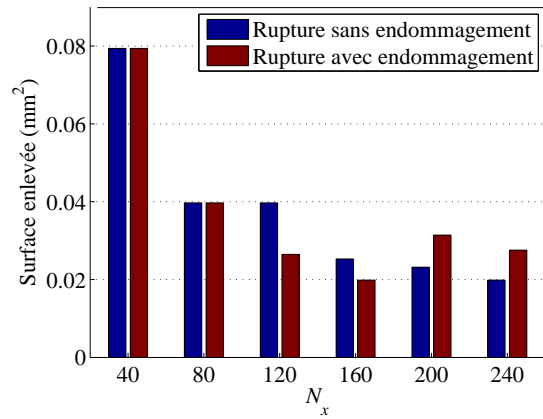


(e) Acier TRIP800 sans endommagement.

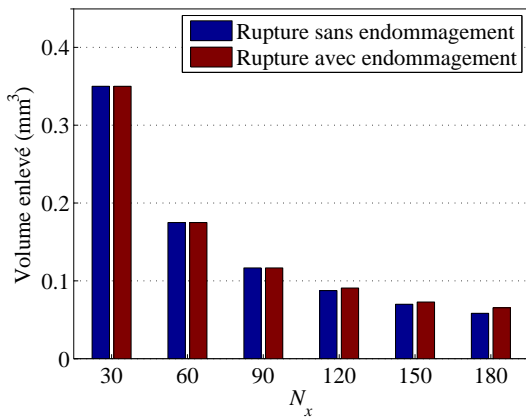


(f) Acier TRIP800 avec endommagement.

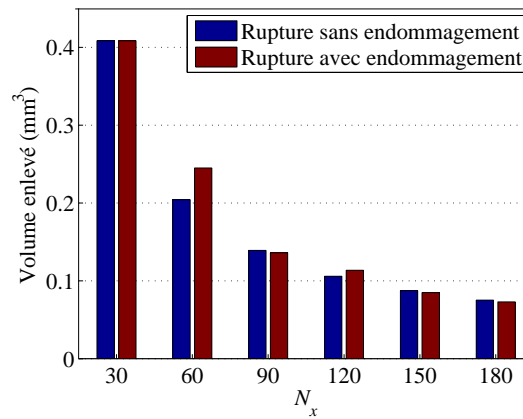
FIG. 7.43 – Influence du maillage sur les oscillations.



(a) Fer REMCO.



(b) Acier DP800.



(c) Acier TRIP800.

FIG. 7.44 – Volume de matière enlevée lors de la désactivation d'éléments ( $N_x$  est le nombre d'éléments dans la direction de chargement).

critère satisfait en moyenne sur l'élément (critère 2) sont, comme attendu, situées entre les courbes correspondant aux deux autres types de critère.

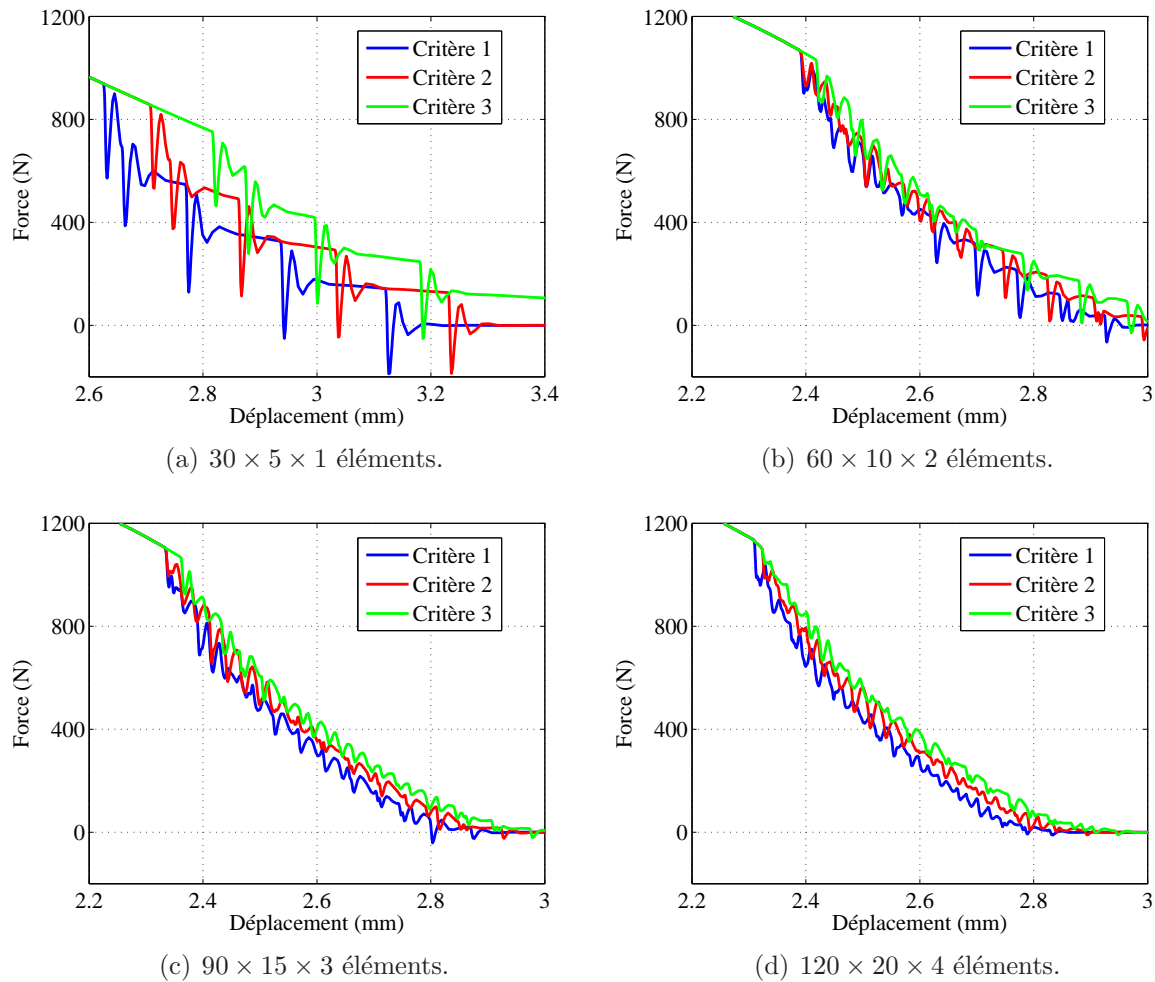
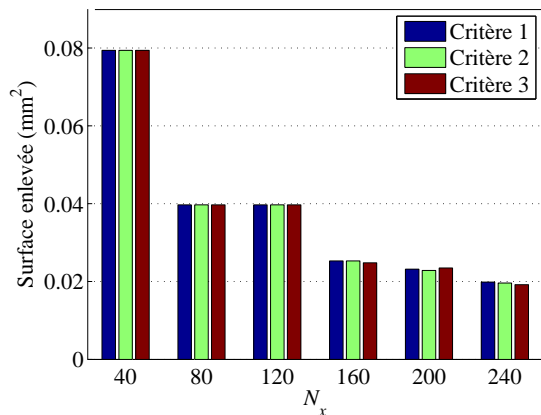
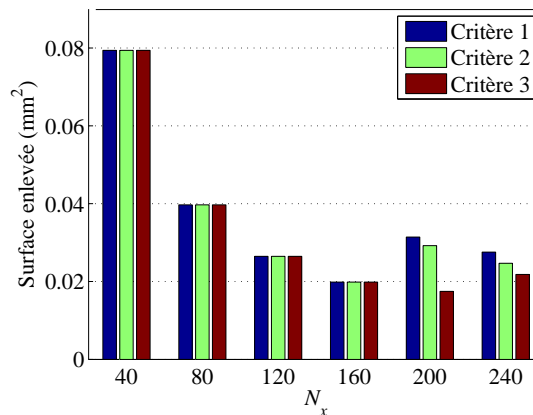


FIG. 7.45 – Test de traction, acier TRIP800. Influence du type de critère de rupture (rupture avec endommagement).

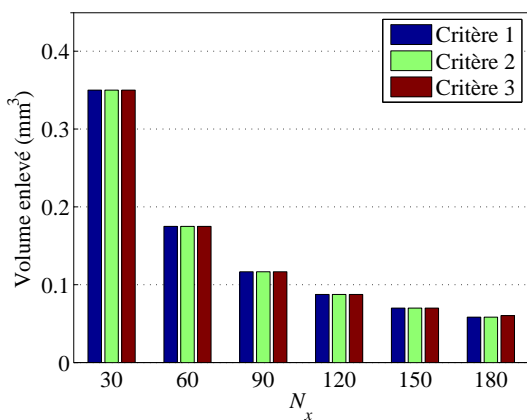
Comme à la section précédente, nous comparons le volume de matière enlevée lors du processus de désactivation d'éléments, au fur et à mesure que le critère de rupture est satisfait, pour les trois types de critère de rupture. Les résultats sont présentés à la figure 7.46. Le type de critère de rupture influence peu le volume de matière enlevée. La différence ne se marque que pour des maillages très fins.



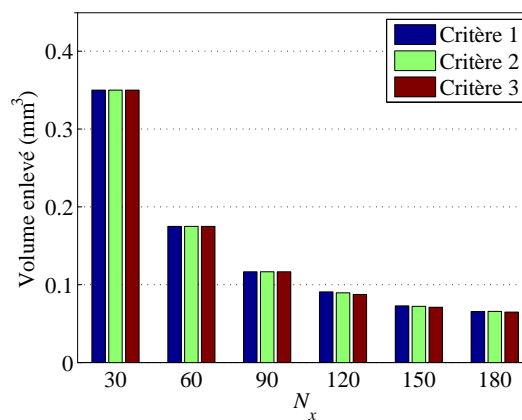
(a) Fer REMCO sans endommagement.



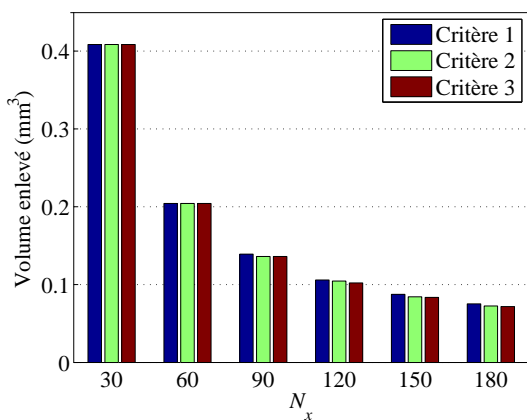
(b) Fer REMCO avec endommagement.



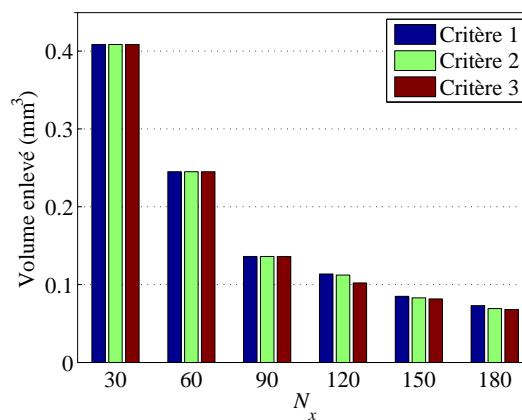
(c) Acier DP800 sans endommagement.



(d) Acier DP800 avec endommagement.



(e) Acier TRIP800 sans endommagement.



(f) Acier TRIP800 avec endommagement.

FIG. 7.46 – Volume de matière enlevée en fonction du type de critère de rupture ( $N_x$  est le nombre d'éléments dans la direction de chargement).



### 7.5.5.3 Influence de l'algorithme utilisé

Étudions à présent les aspects de la gestion numérique des éléments désactivés. En effet, une fois un élément rompu, la structure subit un déséquilibre brutal : des nœuds peuvent devenir des nœuds frontières ou devenir complètement libres (ils sont dépourvus de toute connexion).

Le premier cas de figure est illustré à la figure 7.47 : l'élément grisé est désactivé et les nœuds 1 et 2 deviennent donc des nœuds frontières. Les nœuds 3 et 4 "perdent" quant à eux leur interconnexion.

Dans le second cas de figure, des nœuds deviennent complètement libres : ils ne sont alors plus liés à aucun élément. La figure 7.48 illustre ce phénomène : les deux éléments grisés ont été désactivés (simultanément ou non). Le nœud 5 se retrouve donc dépourvu de toute connexion.

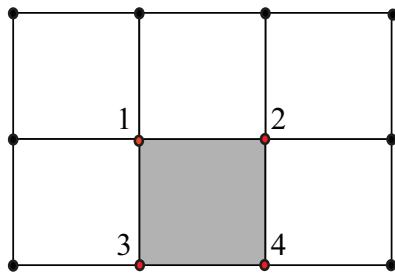


FIG. 7.47 – Modification de la frontière du domaine suite à la désactivation d'éléments (élément grisé).

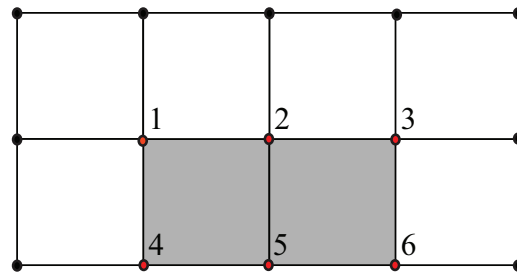


FIG. 7.48 – Apparition d'un nœud dépourvu de toute connexion (nœud 5) suite à la désactivation d'éléments (éléments grisés).

Ce dernier cas de figure peut poser problème dans le cas où ce nœud est un nœud de contact : en effet, dans ce cas, une force est appliquée en ce nœud complètement libre, ce qui induit un déplacement de ce nœud qui n'a plus de sens physique et qui peut introduire des perturbations dans le calcul de l'équilibre global de la structure. Le même problème se pose dans le cas d'éléments de traction-compression. Un test est donc réalisé sur les nœuds de contact pour tester si ceux-ci possèdent ou non des connexions avec les nœuds voisins. Ces nœuds de contact sont désactivés en cas d'absence de connexions avec les nœuds adjacents.

Jusqu'à présent, toutes les simulations ont été réalisées en utilisant un algorithme implicite de Chung-Hulbert tel que décrit à la section 3.2. Cet algorithme, qui tient compte des forces d'inertie, permet également au processus de continuer à converger après rupture d'un élément. L'avantage d'utiliser un algorithme implicite à la place d'un algorithme explicite (comme par exemple Børvik et al. [36]) est l'assurance, si le pas de temps converge, de "rattraper" le déséquilibre dû à la désactivation d'éléments.

La prise en compte des forces d'inertie aide rééquilibrer automatiquement la structure après désactivation d'un élément, la masse jouant le rôle d'amortisseur. Lorsqu'un élément

est désactivé, nous observons le comportement numérique suivant : l'algorithme ne converge pas et divise dès lors le pas de temps jusqu'à une taille de pas de temps pour laquelle un nouvel équilibre de la structure est trouvé. Il y a alors convergence rapide du processus de Newton-Raphson (2 ou 3 itérations) et la taille du pas de temps ré-augmente<sup>1</sup> jusqu'à la rupture éventuelle d'un autre élément. Un exemple d'un tel processus est illustré ci-après<sup>2</sup>.

```

*** STEP 142 ( t = 0.000452652 - dt = 4.70127e-007 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.171348e-002 Rmax = 2.028299e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 1.691892e-005 Rmax = 7.420281e-003
mechanical iteration 2 : Rmean = 2.035514e-007 Rmax = 2.183038e-004

Rupture criterion
Critical value of 0.3 reached for Gauss point 6. GP value = 0.300076
-> Element 4289 is Broken

*** STEP 143 ( t = 0.00045324 - dt = 5.87658e-007 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.391030e-002 Rmax = 5.521479e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 1.164662e-002 Rmax = 7.991362e+000
mechanical iteration 2 : Rmean = 9.268863e-003 Rmax = 6.715337e+000

Iteration Endo : Maximum number of iterations reached (const law)
-> Time step division

*** STEP 143 ( t = 0.000452848 - dt = 1.95886e-007 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.299940e-002 Rmax = 5.426612e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 1.006646e-002 Rmax = 7.417403e+000
mechanical iteration 2 : Rmean = 7.886887e-003 Rmax = 7.098392e+000
mechanical iteration 3 : Rmean = 1.751476e-002 Rmax = 1.098981e+001
mechanical iteration 4 : Rmean = 4.623989e-002 Rmax = 3.748637e+001

Maximum number of iterations reached (const law)
-> Time step division

*** STEP 143 ( t = 0.000452717 - dt = 6.52954e-008 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.301857e-002 Rmax = 5.433297e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 8.224603e-003 Rmax = 6.205475e+000
mechanical iteration 2 : Rmean = 6.134071e-003 Rmax = 5.598928e+000
mechanical iteration 3 : Rmean = 1.028154e-002 Rmax = 8.718620e+000
mechanical iteration 4 : Rmean = 8.221598e-003 Rmax = 8.389785e+000
mechanical iteration 5 : Rmean = 1.348039e-002 Rmax = 1.243558e+001
mechanical iteration 6 : Rmean = 1.313400e-002 Rmax = 1.217653e+001

Non convergence of iterative process
-> Time step division

*** STEP 143 ( t = 0.000452674 - dt = 2.17651e-008 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.306662e-002 Rmax = 5.434339e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 3.089552e-003 Rmax = 2.434666e+000
mechanical iteration 2 : Rmean = 5.045007e-006 Rmax = 3.476768e-003
mechanical iteration 3 : Rmean = 4.226862e-010 Rmax = 4.748190e-007

*** STEP 144 ( t = 0.000452696 - dt = 2.17651e-008 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.122653e-002 Rmax = 2.816653e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 4.014440e-005 Rmax = 2.411112e-002
mechanical iteration 2 : Rmean = 1.045118e-008 Rmax = 8.878803e-006

*** STEP 145 ( t = 0.000452723 - dt = 2.72064e-008 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.252468e-002 Rmax = 4.149617e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 6.942766e-004 Rmax = 5.522016e-001
mechanical iteration 2 : Rmean = 4.468270e-006 Rmax = 3.737608e-003
mechanical iteration 3 : Rmean = 4.015662e-010 Rmax = 3.783974e-007

*** STEP 146 ( t = 0.00045275 - dt = 2.72064e-008 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.158390e-002 Rmax = 2.612350e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 9.715336e-005 Rmax = 8.774336e-002
mechanical iteration 2 : Rmean = 2.202936e-007 Rmax = 2.661301e-004

*** STEP 147 ( t = 0.000452784 - dt = 3.4008e-008 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.145700e-002 Rmax = 2.150915e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 4.630093e-005 Rmax = 4.251459e-002
mechanical iteration 2 : Rmean = 6.329160e-008 Rmax = 5.966564e-005

*** STEP 148 ( t = 0.000452827 - dt = 4.251e-008 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.666159e-002 Rmax = 7.378905e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 4.294900e-003 Rmax = 3.157322e+000
mechanical iteration 2 : Rmean = 5.911963e-005 Rmax = 3.907782e-002
mechanical iteration 3 : Rmean = 5.788719e-008 Rmax = 3.890329e-005

*** STEP 149 ( t = 0.000452869 - dt = 4.251e-008 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.271812e-002 Rmax = 4.248091e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 5.807023e-004 Rmax = 6.132892e-001
mechanical iteration 2 : Rmean = 6.061595e-006 Rmax = 9.559980e-003
mechanical iteration 3 : Rmean = 1.198636e-009 Rmax = 2.376817e-006

*** STEP 150 ( t = 0.000452912 - dt = 4.251e-008 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.209397e-002 Rmax = 3.732695e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 4.186733e-004 Rmax = 4.367677e-001
mechanical iteration 2 : Rmean = 3.833669e-006 Rmax = 3.925058e-003
mechanical iteration 3 : Rmean = 4.692951e-010 Rmax = 5.625281e-007

*** STEP 151 ( t = 0.000452954 - dt = 4.251e-008 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.088272e-002 Rmax = 2.167934e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 4.261291e-005 Rmax = 2.941521e-002
mechanical iteration 2 : Rmean = 7.352509e-008 Rmax = 5.301975e-005

*** STEP 152 ( t = 0.000453007 - dt = 5.31375e-008 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.061267e-002 Rmax = 2.178219e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 4.035325e-005 Rmax = 3.317469e-002
mechanical iteration 2 : Rmean = 9.152772e-008 Rmax = 5.745092e-005

*** STEP 153 ( t = 0.000453074 - dt = 6.64219e-008 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.026346e-002 Rmax = 2.181320e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 2.555315e-005 Rmax = 1.236834e-002
mechanical iteration 2 : Rmean = 3.400341e-008 Rmax = 2.762881e-005

*** STEP 154 ( t = 0.000453157 - dt = 8.30274e-008 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 9.968848e-003 Rmax = 2.170150e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 2.648155e-005 Rmax = 1.098664e-002
mechanical iteration 2 : Rmean = 2.672217e-008 Rmax = 1.570779e-005

*** STEP 155 ( t = 0.000453261 - dt = 1.03784e-007 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 9.536538e-003 Rmax = 2.131566e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 3.007270e-005 Rmax = 1.599932e-002
mechanical iteration 2 : Rmean = 6.938567e-008 Rmax = 3.958053e-005

*** STEP 156 ( t = 0.00045339 - dt = 1.2973e-007 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 9.003830e-003 Rmax = 2.043514e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 2.969900e-005 Rmax = 1.492257e-002
mechanical iteration 2 : Rmean = 1.949499e-007 Rmax = 1.765410e-004

*** STEP 157 ( t = 0.000453552 - dt = 1.62163e-007 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 8.429904e-003 Rmax = 1.937584e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 3.004500e-005 Rmax = 1.375571e-002
mechanical iteration 2 : Rmean = 1.083451e-007 Rmax = 6.937978e-005

*** STEP 158 ( t = 0.000453755 - dt = 2.02704e-007 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 7.857054e-003 Rmax = 2.033096e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 2.266127e-005 Rmax = 9.118192e-003
mechanical iteration 2 : Rmean = 1.128414e-007 Rmax = 1.181534e-004

*** STEP 159 ( t = 0.000454009 - dt = 2.53379e-007 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 7.779681e-003 Rmax = 2.075661e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 1.052720e-005 Rmax = 1.006327e-002
mechanical iteration 2 : Rmean = 3.164309e-008 Rmax = 3.550882e-005

*** STEP 160 ( t = 0.000454325 - dt = 3.16724e-007 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 8.828456e-003 Rmax = 1.739888e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 8.178357e-006 Rmax = 2.655545e-003
mechanical iteration 2 : Rmean = 9.202031e-009 Rmax = 5.986804e-006

*** STEP 161 ( t = 0.000454721 - dt = 3.95905e-007 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.078895e-002 Rmax = 1.966417e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 4.745118e-005 Rmax = 2.585768e-002
mechanical iteration 2 : Rmean = 3.307666e-007 Rmax = 3.328000e-004

*** STEP 162 ( t = 0.000455216 - dt = 4.94882e-007 )
mechanical iteration 0 : Rmean = 1.242092e-002 Rmax = 2.237178e+000
mechanical iteration 1 : Rmean = 6.658521e-005 Rmax = 4.793102e-002
mechanical iteration 2 : Rmean = 1.330408e-007 Rmax = 9.912174e-005

```

<sup>1</sup>Nous utilisons la stratégie automatique de mise à jour du pas de temps décrite à la page 67.

<sup>2</sup>Nous n'avons pas mentionné ici les itérations thermiques du schéma étagé par souci de concision.

Lors du processus de désactivation successive d'éléments, nous avons constaté la présence d'un pas de temps caractéristique, fonction de la taille des éléments rompus. Quand un élément est désactivé, l'algorithme divise le pas de temps, jusqu'à arriver dans l'ordre de grandeur de ce pas de temps caractéristique. Celui-ci diminue avec la taille des mailles. Dès lors, partant de ce constat, nous définissons le pas de temps critique du problème comme étant le plus petit pas de temps pour lequel il y a à nouveau convergence du processus de Newton-Raphson, après la désactivation d'un ou plusieurs éléments.

La figure 7.49 présente les valeurs des pas de temps critiques pour les différents maillages des trois problèmes étudiés. Nous constatons que la valeur de ce pas de temps critique diminue avec la taille des mailles de façon plus significative dans le cas d'une rupture sans endommagement. Pour une rupture avec endommagement, cette diminution est moins marquée, excepté pour des maillages grossiers.

Sur ces figures, le pas de temps critique obtenu lors de l'utilisation d'un algorithme explicite (au lieu de l'algorithme implicite de Chung-Hulbert) est également présenté. Ce pas de temps critique explicite est, dans tous les cas, inférieur au pas de temps critique implicite, ce qui nous conforte dans le choix de l'utilisation d'un algorithme implicite.

Une extension intéressante serait une estimation automatique de ce pas de temps critique. Ainsi, lorsqu'un élément est désactivé, l'algorithme impose le pas de temps critique, ce qui évite les divisions successives du pas de temps et permet un gain de temps CPU. Nous n'avons cependant pas investigué plus avant ce point vu qu'aucune tendance claire ne se dégage.

Analysons à présent les processus de désactivation d'élément, en remplaçant l'algorithme de Chung-Hulbert par un algorithme quasi-statique. Pour ce faire, nous considérons les trois problèmes avec un maillage d'un rapport qualité-prix raisonnable (voir courbes force-déplacement) :  $30 \times 120$  éléments pour le fer REMCO et  $90 \times 15 \times 3$  éléments pour les deux aciers.

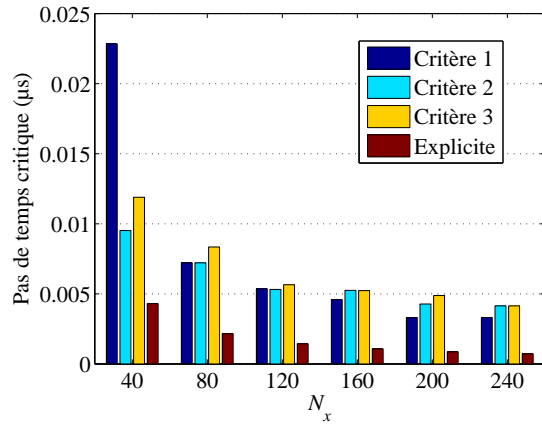
Les courbes force-déplacement sont comparées à la figure 7.50. Les oscillations sont absentes lors de l'utilisation de l'algorithme quasi-statique. En effet, dans le cas dynamique, vu l'inertie présente aux nœuds, on assiste à une vibration de ceux-ci une fois qu'un élément "contenant" ces nœuds a été désactivé<sup>1</sup>, ce qui provoque les oscillations observées. Celles-ci n'apparaissent donc pas dans le cas quasi-statique<sup>2</sup>.

D'un point de vue numérique, une fois un élément désactivé, la convergence vers le nouvel équilibre est plus "difficile" dans le cas de l'utilisation d'un algorithme quasi-statique. Ceci est particulièrement important au moment où le dernier élément avant rupture totale est désactivé (induisant un mouvement de corps rigide de la structure).

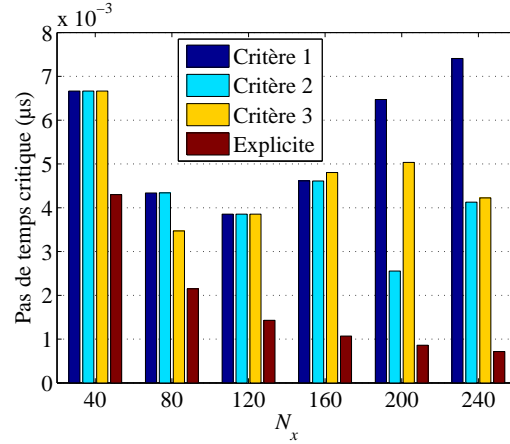
---

<sup>1</sup>si ce nœud possède toujours une connexion avec les nœuds voisins.

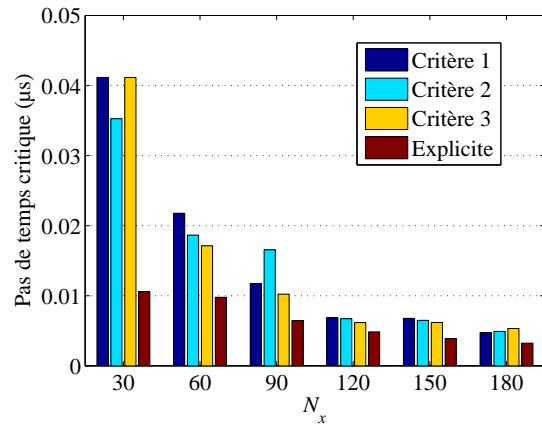
<sup>2</sup>Les courbes présentées correspondent au critère de rupture 1. Les résultats sont tout à fait analogues pour les deux autres critères.



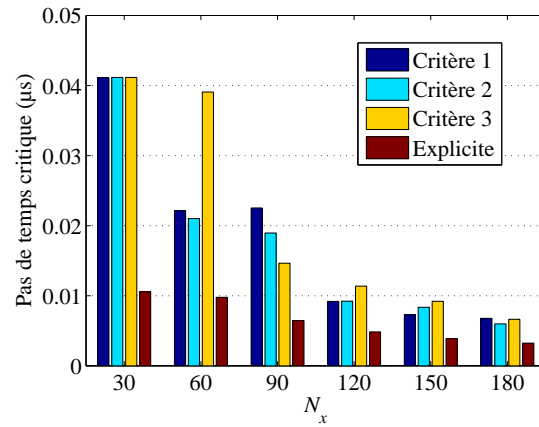
(a) Fer REMCO sans endommagement.



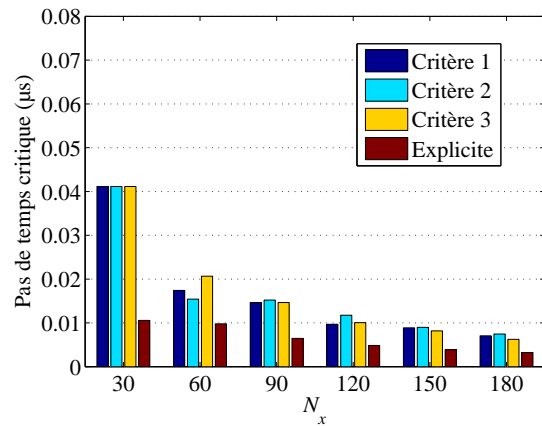
(b) Fer REMCO avec endommagement.



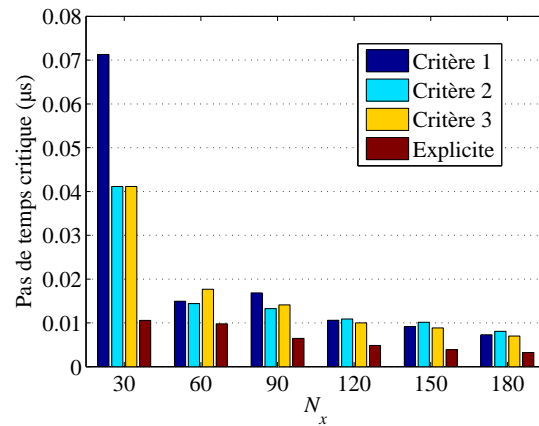
(c) Acier DP800 sans endommagement.



(d) Acier DP800 avec endommagement.

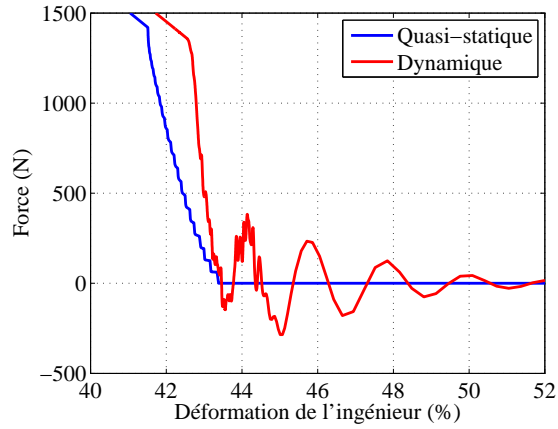


(e) Acier TRIP800 sans endommagement.

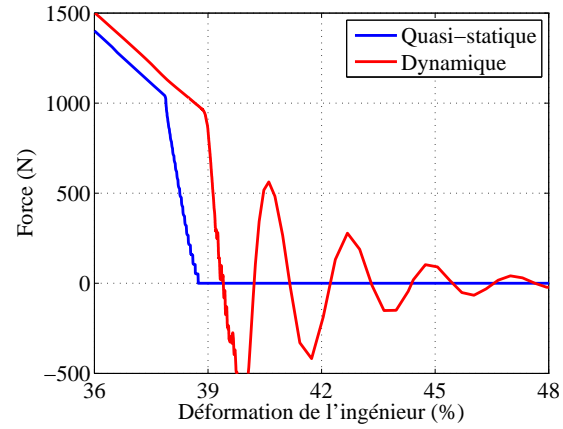


(f) Acier TRIP800 avec endommagement.

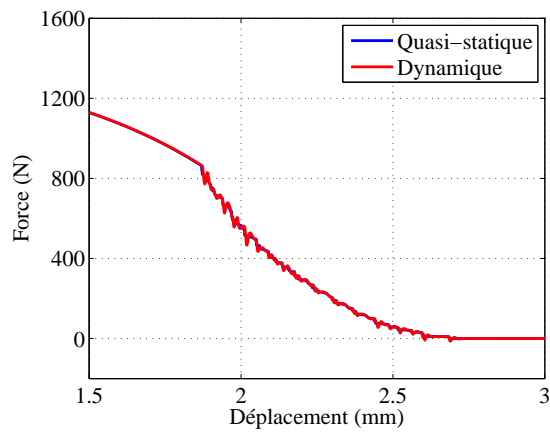
FIG. 7.49 – Etude du pas de temps critique en fonction de la densité du maillage.



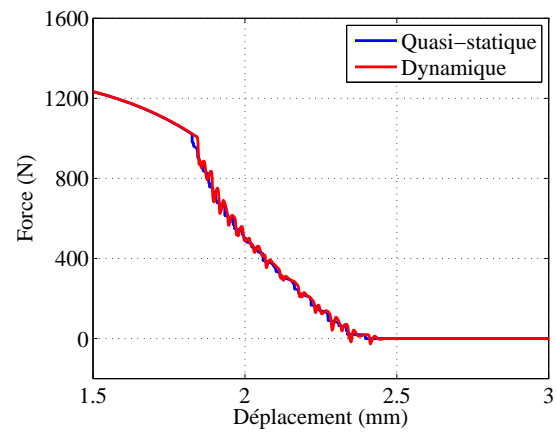
(a) Fer REMCO sans endommagement.



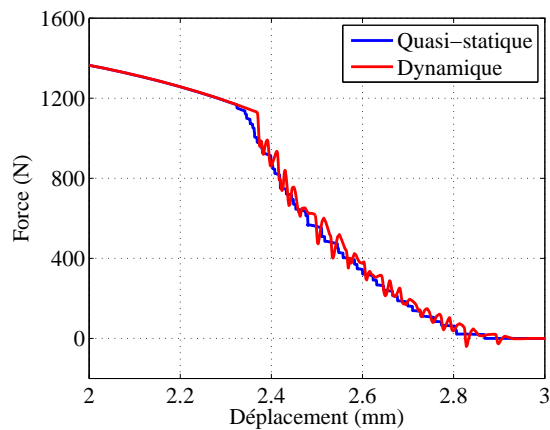
(b) Fer REMCO avec endommagement.



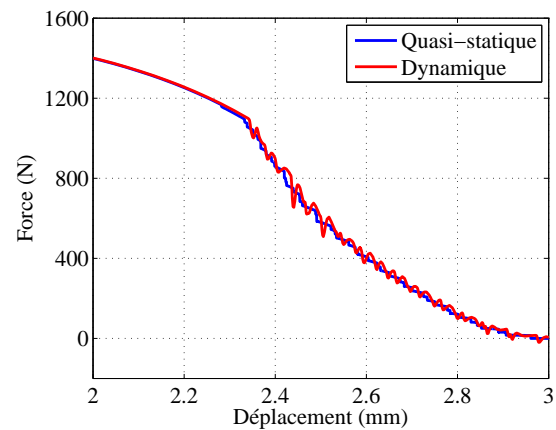
(c) Acier DP800 sans endommagement.



(d) Acier DP800 avec endommagement.



(e) Acier TRIP800 sans endommagement.



(f) Acier TRIP800 avec endommagement.

FIG. 7.50 – Comparaison des courbes force-déplacement avec l'utilisation d'un algorithme quasi-statique ou dynamique.

En particulier, dans le cas de l'acier TRIP800, lors de l'utilisation d'un algorithme quasi-statique, la convergence du processus itératif après la désactivation du premier élément est impossible en considérant la stratégie automatique de pas de temps exposée à la page 67. La solution consiste à limiter fortement le pas de temps durant tout le processus de désactivation d'éléments : le pas de temps maximum autorisé est jusqu'à 100 fois plus petit pour l'algorithme quasi-statique que pour l'algorithme dynamique :  $\Delta t_{max,qs} \in \{1.0e - 7, 1.0e - 6\}$ ,  $\Delta t_{max,dyn} = 1.0e - 5$ . En effet, en imposant un pas de temps maximum faible, on déséquilibre peu la structure entre deux pas de temps, y compris lorsqu'un élément est désactivé. Cette limitation du pas de temps n'est jamais nécessaire dans le cas de l'utilisation d'un algorithme dynamique. L'utilisation d'un algorithme dynamique augmente donc la robustesse de la procédure de désactivation d'éléments.

Nous pouvons mesurer cette plus grande difficulté de convergence en estimant les pas de temps critiques dans les cas quasi-statique et dynamique (voir figures 7.51)<sup>1</sup>. Si les différences entre les valeurs des pas de temps critiques ne sont pas importantes dans le cas du fer REMCO, le pas de temps critique en quasi-statique est beaucoup plus faible pour les deux aciers. Dans ces deux cas, le pas de temps critique en quasi-statique est même inférieur au pas de temps critique du schéma explicite.

Notons que Mediavilla [176] utilise un algorithme quasi-statique nécessitant un pas de temps à incrément nul permettant le rééquilibrage de la structure après ouverture d'une fissure, ce qui n'a pas été nécessaire dans notre cas. Cette constatation est d'autant plus importante que, dans le cas de matériaux élasto-viscoplastiques ou viscoélastiques, le concept du pas de rééquilibrage (qui implique un incrément temporel  $\Delta t$  nul) est impraticable.

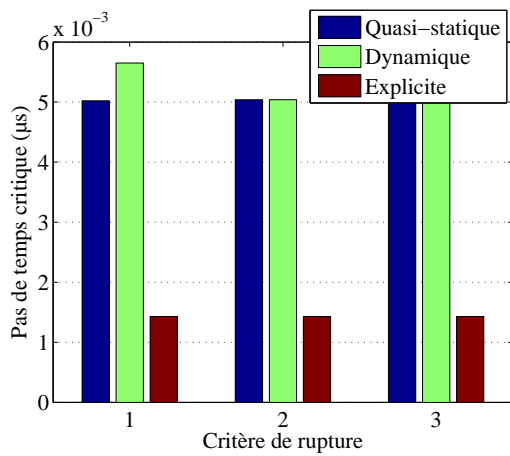
#### 7.5.5.4 Influence de la valeur critique d'endommagement

Dans cette section, nous faisons varier la valeur critique d'endommagement  $D_C$  de la loi d'endommagement de Langseth. Le but de cette étude est de vérifier si les oscillations observées sur les courbes force-déplacement s'atténuent ou non en fonction de l'adoucissement du matériau avant rupture. Dans les deux problèmes étudiés, nous utilisons le troisième maillage ( $30 \times 120$  pour le fer REMCO ou  $90 \times 15 \times 3$  éléments pour les deux aciers) qui sont de bons compromis entre précision et temps de calcul.

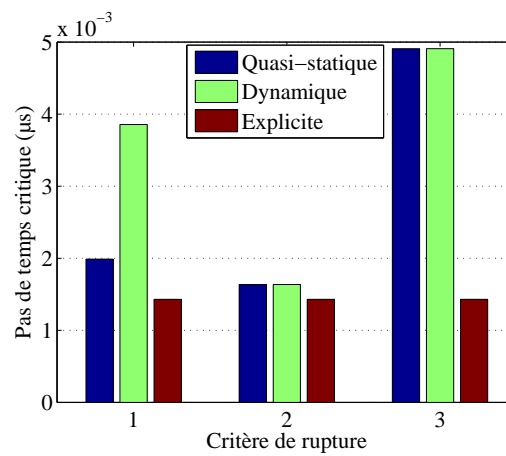
Quatre valeurs critiques d'endommagement  $D_C$  ont été envisagées :  $D_C = 0.3, 0.5, 0.7$  et  $0.9$ . Ces valeurs (à l'exception de la valeur  $0.3$ ) n'ont pas de signification physique, le but étant d'étudier le comportement numérique de la structure lors de du processus de désactivation d'éléments. Afin d'assurer la bonne tenue du calcul numérique pour des valeurs élevées de l'endommagement, l'intégration des lois constitutives n'est plus considérée en un point de Gauss lorsque la valeur de l'endommagement en ce point de Gauss, en début

---

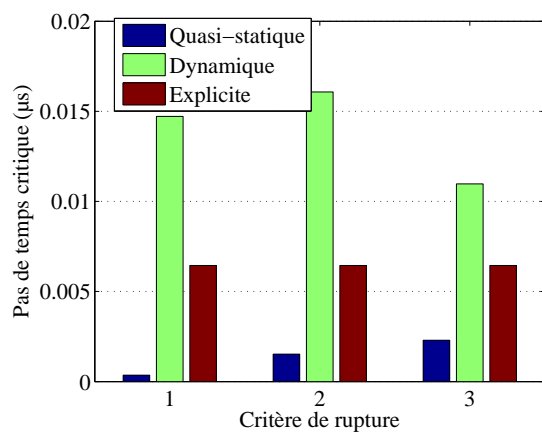
<sup>1</sup>Le pas de temps critique relatif à la désactivation du dernier élément avant rupture totale des spécimens n'est pas considéré dans le cas quasi-statique. En effet, celui-ci est beaucoup plus petit que les autres pas de temps, vu l'apparition d'un mouvement de corps rigide, toujours difficile à gérer avec un algorithme quasi-statique.



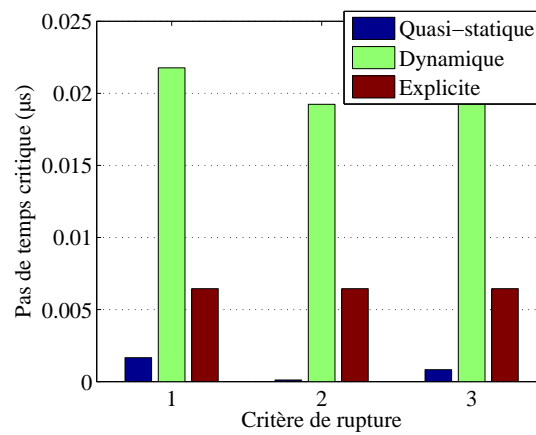
(a) Fer REMCO sans endommagement.



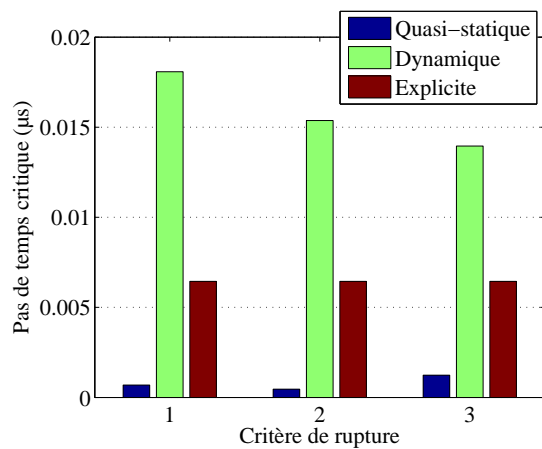
(b) Fer REMCO avec endommagement.



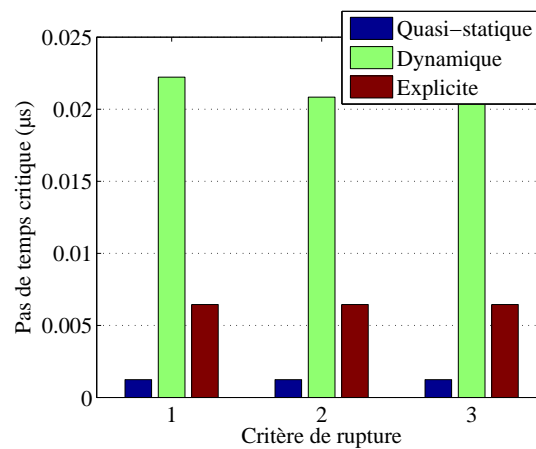
(c) Acier DP800 sans endommagement.



(d) Acier DP800 avec endommagement.



(e) Acier TRIP800 sans endommagement.



(f) Acier TRIP800 avec endommagement.

FIG. 7.51 – Pas de temps critique avec l'utilisation d'un algorithme quasi-statique, dynamique implicite ou explicite.

de pas de temps, est supérieure à 0.99. Cette valeur peut être adaptée par l'utilisateur en fonction du problème étudié.

Les courbes force-déplacement sont présentées à la figure 7.52. Comme nous pouvions le supposer, les oscillations sont de moins en moins fortes, au fur et à mesure que la valeur critique d'endommagement augmente. Elles ont même pratiquement disparu pour les tests sur les aciers DP800 et TRIP800 pour la valeur critique d'endommagement  $D_C = 0.9$ . En effet, pour des valeurs critiques élevées de l'endommagement  $D_C$ , l'élément a déjà perdu presque toute résistance. Désactiver cet élément déséquilibre donc peu la structure, d'où des oscillations de moins forte amplitude. Notons encore que le type de critère de rupture envisagé ne change pas ces observations<sup>1</sup>. La méthode de désactivation d'éléments s'applique donc plus judicieusement pour des valeurs critiques de l'endommagement importantes.

Etudions à présent l'influence de la valeur critique d'endommagement sur la valeur du pas de temps critique. Les résultats sont présentés à la figure 7.53. Nous constatons globalement une augmentation du pas de temps critique avec la valeur critique d'endommagement  $D_C$ . Nous pouvons à nouveau l'expliquer facilement à nouveau par le fait que l'élément désactivé participe d'autant moins à l'effort que  $D_C$  augmente.

Le type de critère de rupture a maintenant une importance. En effet, pour des valeurs critiques de l'endommagement  $D_C = 0.9$ , le fait de désactiver les éléments dès que le critère de rupture est satisfait en un point de Gauss "empêche" l'endommagement d'approcher la valeur 1, ce qui est possible pour le critère de rupture moyen (critère 2) et encore plus pour le critère 3. Quand l'endommagement approche la valeur de 1, le pas de temps est donc limité par l'intégration de la loi constitutive. Ceci explique les valeurs plus élevées du pas de temps critique pour le critère de rupture 1 pour  $D_C = 0.9$ .

#### 7.5.5.5 Evaluation du coût des différentes méthodes

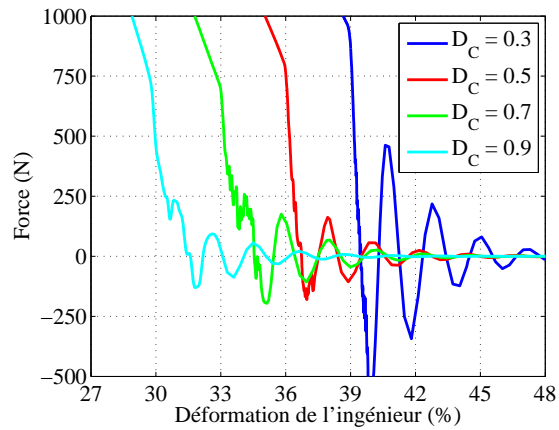
Dans cette section, nous évaluons le coût d'utilisation des méthodes de rupture avec et sans endommagement. Comme dans la section précédente, Nous effectuons les comparaisons sur le troisième maillage ( $30 \times 120$  éléments pour le fer REMCO et  $90 \times 15 \times 3$  éléments pour les deux aciers). Les paramètres matériau des lois d'écrouissage sont identiques à ceux utilisés dans le cas où la rupture n'est pas modélisée (voir tableaux 4.9 et 4.14).

La première comparaison porte sur l'évaluation du coût d'utilisation d'un modèle de rupture avec ou sans endommagement par rapport à une méthode sans endommagement, dans le cas de l'utilisation d'un algorithme quasi-statique et dynamique, jusqu'au moment de la rupture. Les résultats sont présentés à la figure 7.54. Les temps CPU sont normalisés par rapport à l'utilisation d'un modèle quasi-statique sans critère de rupture ni endommagement. L'utilisation d'un algorithme dynamique est plus coûteuse en termes de temps

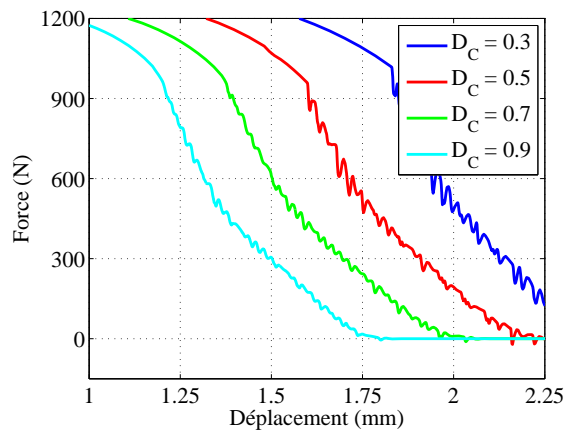
---

<sup>1</sup>Nous avons considéré à la figure 7.52 le critère de rupture 1, soit l'élément est désactivé si le critère est satisfait en un point de Gauss. Les résultats pour les deux autres types de critères de rupture sont tout à fait semblables.

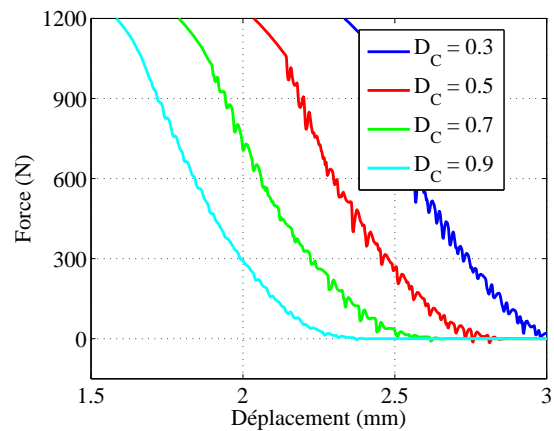




(a) Fer REMCO.

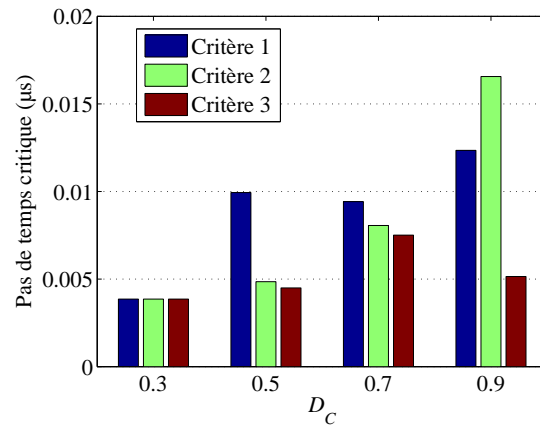


(b) Acier DP800.

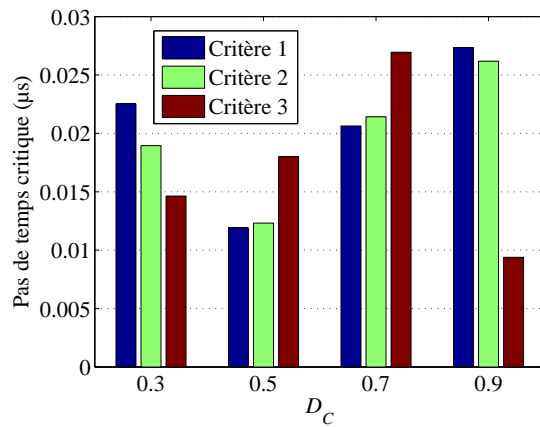


(c) Acier TRIP800.

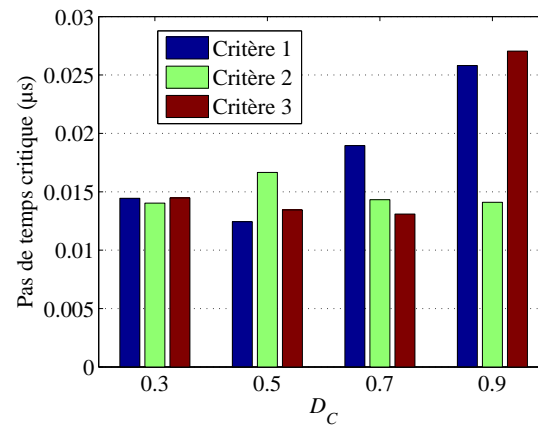
FIG. 7.52 – Courbes force-déplacement pour différentes valeurs de la valeur critique d'endommagement  $D_C$ .



(a) Fer REMCO.



(b) Acier DP800.



(c) Acier TRIP800.

FIG. 7.53 – Pas de temps critique en fonction de la valeur critique d'endommagement  $D_C$ .

CPU vu les effets dynamiques dans le calcul des forces et l'intégration des lois constitutives (l'utilisation d'un algorithme dynamique peut changer les modes de déformation, ce qui peut conduire à un surcoût CPU). C'est particulièrement vrai dans le cas des deux aciers. La modélisation du comportement du matériau en utilisant une formulation d'endommagement génère un surcoût de l'ordre de 60 à 70%.

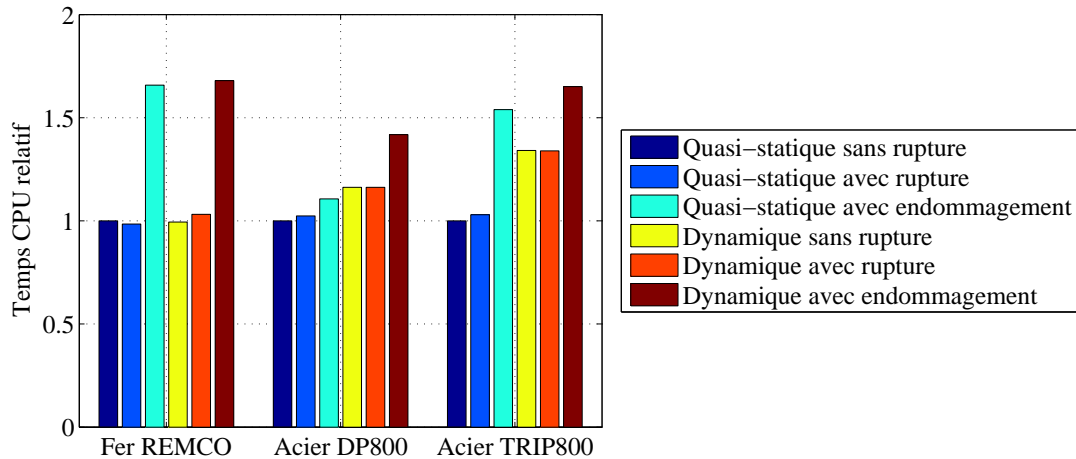


FIG. 7.54 – Coût des méthodes de rupture, avec et sans endommagement, avec l'utilisation d'un algorithme quasi-statique ou dynamique.

La deuxième comparaison porte sur le coût du mécanisme de désactivation d'éléments pour lesquels le critère de rupture est satisfait. Nous envisageons les cas avec et sans endommagement, dans le cas de l'utilisation d'un algorithme quasi-statique ou dynamique. Le temps CPU est évalué entre le moment du déclenchement de la rupture et l'instant de la rupture totale des spécimens (une fois l'équilibre retrouvé). Les résultats sont présentés à la figure 7.55. Nous avons normalisé les temps CPU par rapport à l'utilisation d'un modèle quasi-statique avec un critère de rupture sans endommagement.

Pour le fer REMCO, l'algorithme dynamique est notablement plus cher que l'algorithme quasi-statique. Cela s'explique par le fait que les pas de temps critiques sont assez proches en quasi-statique et en dynamique (voir figures 7.51(a) et 7.51(b)). L'utilisation d'une loi d'endommagement par rapport à un modèle de rupture simple engendre une augmentation du coût CPU de l'ordre de 70% dans le cas quasi-statique et de 40% pour le cas dynamique.

En revanche, pour les deux aciers, le pas de temps critique est beaucoup plus faible lors de l'utilisation d'un algorithme quasi-statique (voir figures 7.51(c) à 7.51(f)). Le surcoût de coût CPU dû à l'utilisation d'un algorithme dynamique est alors compensé par le rééquilibrage plus rapide de la structure et la plus grande robustesse de l'algorithme<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Rappelons que nous avons dû limiter drastiquement la taille maximale du pas de temps dans le cas de l'acier TRIP800 pour le modèle quasi-statique avec endommagement.

Dans ces deux cas, l'utilisation d'un modèle constitutif avec endommagement du matériau génère peu de surcoût CPU lors du processus de désactivation d'éléments, par rapport à l'utilisation d'un critère de rupture simple.

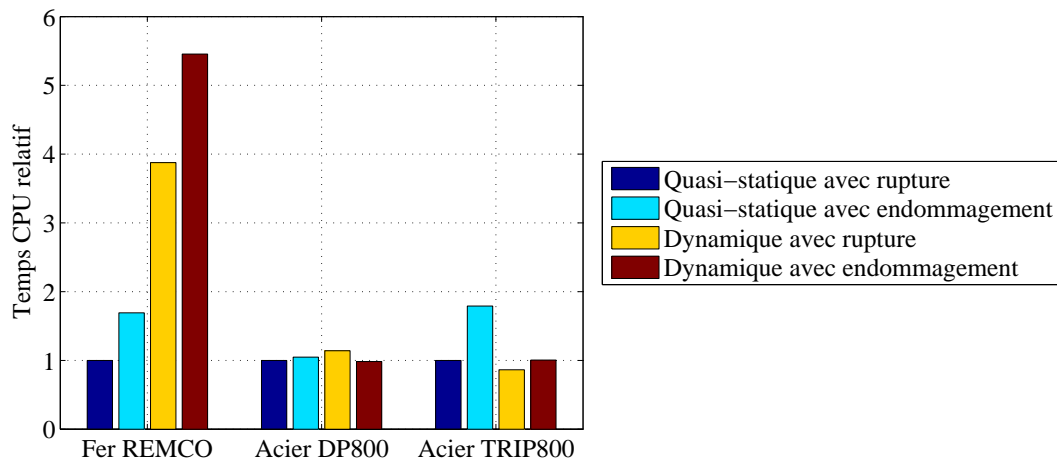


FIG. 7.55 – Coût de la désactivation d'éléments avec et sans endommagement avec l'utilisation d'un algorithme quasi-statique ou dynamique.

Comparons à présent le nombre de pas de temps et d'itérations au cours du processus de désactivation d'éléments pour les cas quasi-statiques, dynamiques, avec ou sans rupture et avec ou sans endommagement.

Le tableau 7.10 présente le nombre de pas et d'itérations jusqu'à rupture pour les différentes méthodes<sup>1</sup>. L'intégration avec endommagement nécessite dans tous les cas, à l'exception de l'acier DP800 en quasi-statique, un nombre plus élevé d'itérations mécaniques<sup>2</sup>. Cela est confirmé par le graphe des CPU (figure 7.54) où le surcoût CPU dû à l'utilisation d'une loi d'endommagement est très faible par rapport à l'utilisation d'une loi classique dans le cas de l'acier DP800. La comparaison des algorithmes quasi-statique et dynamique montre que l'utilisation d'un algorithme dynamique est plus "pénalisante" dans le cas des deux aciers, alors qu'elle se révèle avantageuse dans le cas du fer REMCO. Cela corrobore le graphe des CPU (figure 7.54) où le surcoût CPU dû à l'utilisation d'un algorithme dynamique est très faible dans le cas du fer REMCO, alors qu'il est de l'ordre de 20% pour les aciers.

<sup>1</sup>Il est évident que le cas sans rupture donne des résultats identiques au cas avec critère de rupture sans endommagement.

<sup>2</sup>Le nombre d'itérations thermiques est identiques dans tous les cas, c'est pourquoi elles ne sont pas mentionnées.

	Quasi-statique				Dynamique			
	Rupture		Endommagement		Rupture		Endommagement	
	Pas	Ités	Pas	Ités	Pas	Ités	Pas	Ités
Fer REMCO	191	480	184	512	177	442	169	469
Acier DP800	45	139	44	124	45	153	57	183
Acier TRIP800	60	162	73	188	57	185	66	209

TAB. 7.10 – Comparaison du nombre de pas et d’itérations mécaniques pour les différents algorithmes jusqu’au moment de la rupture.

Dans le tableau 7.11, nous comparons le nombre de pas et d’itérations pendant le processus de désactivation d’éléments, dans le cas de l’utilisation d’un algorithme quasi-statique ou dynamique, couplé ou non à une loi d’endommagement. Dans le cas du fer REMCO, l’utilisation d’un algorithme dynamique s’avère plus coûteux en termes de nombre de pas et d’itérations, ce qui n’est pas le cas des deux aciers. Dans le cas de l’acier DP800, les coûts sont fort similaires. Ils diminuent par contre pour l’acier TRIP800. Cela correspond au graphe des temps de calcul (figure 7.55) où le surcoût CPU dû à l’utilisation d’un algorithme dynamique est très important dans le cas du fer REMCO, alors qu’il est similaire pour l’acier DP800 et moins élevé dans le cas de l’acier TRIP800.

	Quasi-statique				Dynamique			
	Rupture		Endommagement		Rupture		Endommagement	
	Pas	Ités	Pas	Ités	Pas	Ités	Pas	Ités
Fer REMCO	213	613	236	680	868	2682	846	2644
Acier DP800	525	1455	559	1261	525	1621	396	1216
Acier TRIP800	597	1631	1722	2276	474	1475	446	1348

TAB. 7.11 – Comparaison du nombre de pas et d’itérations mécaniques pour les différents algorithmes pendant le processus de désactivation d’éléments.

## 7.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons validé chacun des points présentés aux chapitres 5 et 6. Nous avons progressé pas à pas : nous avons tout d’abord validé la méthode d’intégration d’endommagement proposée. Nous ne nous sommes volontairement pas placés dans le cadre thermomécanique général et nous avons choisi une application utilisant le modèle d’endommagement original de Lemaitre. Cela nous a permis d’estimer l’efficacité de la méthode originale d’intégration proposée.

La deuxième application nous a permis de cerner les limitations de la méthode de rupture par érosion, en la comparant à la méthode par remaillage.

La troisième application a permis la validation de la formulation thermomécanique d'endommagement couplée à la méthode de rupture par érosion sur un cas-test standard à grande vitesse. Les effets dynamiques ont à nouveau été mis en évidence.

L'extension des cas-tests de traction à grande vitesse, présentés aux sections 4.3 et 4.4, a permis de montrer l'intérêt de la formulation d'endommagement continu. Il a également permis de quantifier le surcoût, en termes de temps de calcul, résultant de l'utilisation d'une loi constitutive avec endommagement. Cette application a également permis d'explorer plus avant les caractéristiques de la méthode de rupture par érosion couplée à un algorithme implicite. La plus grande robustesse des algorithmes dynamiques implicites, par rapport aux algorithmes quasi-statiques, lors de la désactivation d'éléments a également été mise en avant.

# Conclusions de la deuxième partie

Dans le chapitre 5, nous avons tout d'abord décrit le modèle d'endommagement continu de Lemaitre dans le cadre général de l'endommagement isotrope en petites déformations. Nous l'avons ensuite étendu aux grandes déformations et aux lois constitutives thermo-élasto-viscoplastiques dans le cadre hypoélastique thermomécanique. Nous nous sommes placés dans le cas le plus général possible de sorte que toutes les lois d'érouissage puissent être couplées à une loi d'endommagement quelconque. La formulation proposée est donc adaptée aux lois de la dynamique rapide présentées au chapitre 2.

Deux apports ont été ajoutés au modèle de Lemaitre. Tout d'abord (section 5.5.4.4), une méthode originale d'intégration des lois constitutives avec endommagement a été proposée. Celle-ci repose sur une méthode itérative d'intégration des contraintes à endommagement constant suivi d'une mise à jour de l'endommagement. Cette méthode a été comparée à une méthode couplée d'intégration des contraintes et de l'endommagement ainsi qu'à une méthode de la littérature proposée par de Souza Neto [68]. La méthode proposée se révèle robuste et avantageuse au niveau du coût CPU. De plus, nous avons étendu les deux autres algorithmes pour permettre leur utilisation avec une loi d'érouissage quelconque, couplée à une loi d'endommagement quelconque.

Le second apport est une expression analytique générale de la matrice de raideur tangente matérielle de manière analytique (section 5.6). Cette expression a été établie dans le cadre thermomécanique étendu (variation des paramètres matériau avec la température). L'expression canonique proposée de la matrice de raideur est indépendante de la loi d'évolution de la variable d'endommagement et de la loi d'évolution de la limite élastique. L'introduction de nouveaux modèles d'endommagement est donc très aisée, de même que l'utilisation de lois d'endommagement quelconques, associées à des lois constitutives quelconques. Le gain en temps de calcul, dû à l'utilisation de l'expression analytique de la matrice de raideur tangente, est très important par rapport à l'utilisation d'une matrice de raideur numérique.

Dans le chapitre 6, nous avons tout d'abord exposé les critères de rupture ductile couramment utilisés dans la littérature (section 6.2). Ensuite, différentes méthodes courantes de traitement d'éléments rompus ont été décrites (section 6.3). La méthode implémentée est la méthode d'érosion analogue à celle proposée dans des codes commerciaux tels Abaqus explicite [111] ou LS-DYNA [158]. Cette méthode est ici couplée à un algorithme d'intégra-

tion implicite prenant en compte les effets d'inertie tels que ceux proposés à la section 3.2. Nous nous sommes également placés dans le cadre thermomécanique.

Les résultats ont été validés sur un problème classique de la littérature en utilisant deux lois différentes d'endommagement. Nous avons également envisagé la possibilité de désactiver un élément selon trois manières pour lesquelles le critère de rupture est satisfait sur les points de Gauss de l'élément (critère satisfait en un point de Gauss, à tous les points de Gauss ou en moyenne sur les points de Gauss).

Nous avons étudié les caractéristiques de la méthode proposée via l'extension de deux problèmes étudiés dans les sections 4.3 et 4.4. La méthode proposée est mieux adaptée dans le cas d'adoucissement important de la structure dû à l'endommagement. L'utilisation d'un algorithme implicite par rapport à un algorithme explicite (utilisé dans Abaqus explicite et LS-DYNA) permet de garantir l'équilibre de la structure tout au long du processus de désactivation d'éléments. Cette procédure de désactivation d'éléments en utilisant un algorithme implicite est un apport original de ce travail.



# Chapitre 8

## Application industrielle

### 8.1 Introduction

Dans les applications présentées aux chapitres 4 et 7, nous avons étudié des cas classiques de la littérature pour valider et étudier les méthodes proposées. Dans ce chapitre, nous allons étudier un problème tridimensionnel d'intérêt industriel, proposé en collaboration avec la société Techspace Aero S.A., en utilisant simultanément toutes les méthodes développées et exposées aux chapitres 2, 3, 5 et 6.

Dans cette application, nous proposons un cheminement complet de résolution d'un problème thermomécanique avec endommagement et rupture :

- modélisation du matériau par une loi constitutive dynamique thermomécanique couplée à une loi d'endommagement continu, elle aussi thermomécanique ;
- utilisation d'un algorithme d'intégration implicite thermomécanique jusqu'à la rupture éventuelle de la structure ;
- possibilité de désactiver les éléments rompus lorsque la valeur critique d'endommagement est atteinte.

Tous ces points ont été validés lors des applications des chapitres 4 et 7 sur des cas standards. Nous allons montrer que ces méthodes sont également applicables sur un problème non académique d'impact.

### 8.2 Description et données du problème

#### 8.2.1 Introduction

Le problème étudié est l'analyse du flambement d'une aube mobile d'un compresseur basse pression d'un moteur d'avion<sup>1</sup>, dû au contact accidentel entre cette aube et le carter. Ce type de problème de contact accidentel a été récemment étudié par Kermanpur et al. [129] dans le cadre du premier étage d'un compresseur haute pression, mais

---

<sup>1</sup>Pour des raisons de confidentialité, nous ne détaillons pas le type de moteur.

dans le cas de rupture par fatigue. De plus, cette étude a été réalisée sur un problème bidimensionnel uniquement.

### 8.2.2 Géométrie et maillage

La géométrie et le maillage original de l'aube, présentés à la figure 8.1, ont été réalisés à l'aide du logiciel CATIA V5 et fournis par la société Techspace Aero. Les dimensions principales de l'aube sont spécifiées au tableau 8.1. Pour des raisons évidentes de confidentialité, les dimensions indiquées ne sont que des ordres de grandeur des valeurs réelles. L'aube peut être décomposée en trois parties (voir figure 8.1) : l'aube proprement dite, la plate-forme sur laquelle repose l'aube et enfin le pied d'aube qui est encastré dans le rotor (non représenté ici).

<b>Aube</b>	
Largeur $L_A$	42.0mm
Hauteur $H_A$	65.0mm
Epaisseur $E_A$	3.7mm
Rayon du congé de raccordement $R_A$	2.9mm
<b>Plate-forme</b>	
Longueur $L_{PF}$	48.0mm
Profondeur $P_{PF}$	30.6mm
Epaisseur $E_{PF}$	1.6mm
Angle d'inclinaison $\alpha$ par rapport au plan $x - y$	5.7°
<b>Carter</b>	
Rayon minimum $R_C, min$	451.0mm
Rayon maximum $R_C, max$	455.0mm

TAB. 8.1 – Dimensions de l'aube.

Le système d'axes est défini de la façon suivante : l'axe  $x$  est dirigé dans le sens axial du moteur vers l'aval moteur, l'axe  $z$  est dirigé dans la position radiale du moteur et l'axe  $y$  est dirigé pour construire un repère dextrorsum (direction transverse).

Ce premier maillage comporte 12096 éléments tridimensionnels. Celui-ci compte  $N_E = 2$  éléments selon l'épaisseur de l'aube,  $N_H = 40$  éléments sur la hauteur et  $N_L = 31$  éléments sur la largeur. A partir de ce maillage, six nouveaux maillages plus raffinés ont été générés, dont les caractéristiques sont spécifiées au tableau 8.2.

Le carter est modélisé par une surface réglée supposée rigide. Cette surface est générée à partir de la géométrie de l'aube mobile en laissant un jeu initial de 2mm entre la position initiale de l'aube et le carter. La figure 8.2 illustre la position initiale de l'ensemble aube-carter dans le plan  $y - z$ .

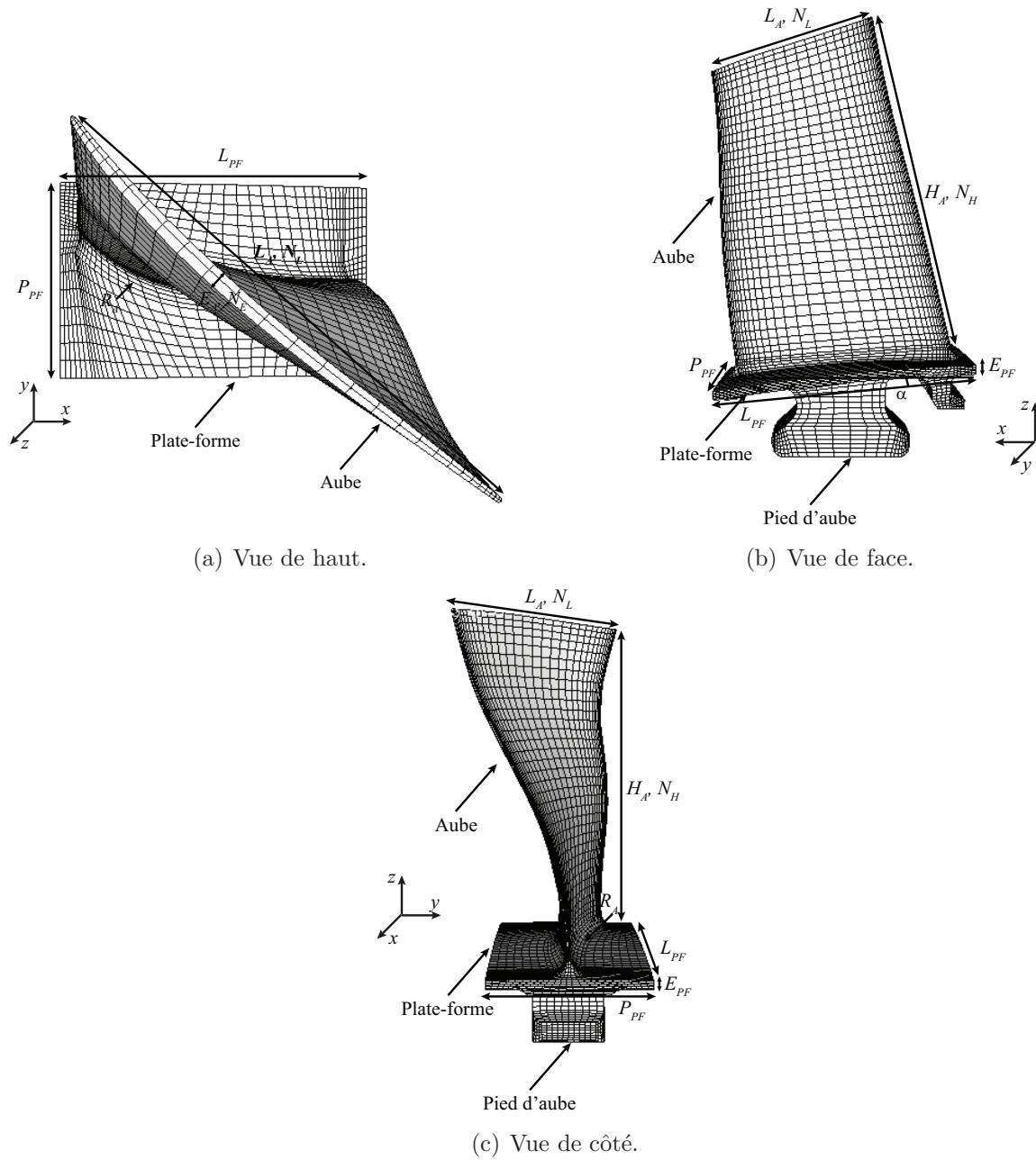


FIG. 8.1 – Géométrie et maillage de l'aube (12096 éléments tridimensionnels).

	$N_E$	$N_L$	$N_H$	Nombre total d'éléments
Maillage 1	2	31	40	12096
Maillage 2	4	31	35	15446
Maillage 3	6	31	35	18796
Maillage 4	4	63	75	39630
Maillage 5	6	63	70	50950
Maillage 6	4	95	121	75206
Maillage 7	6	95	121	100718

TAB. 8.2 – Caractéristiques des maillages de l'aube (par ordre croissant de nombre total d'éléments).

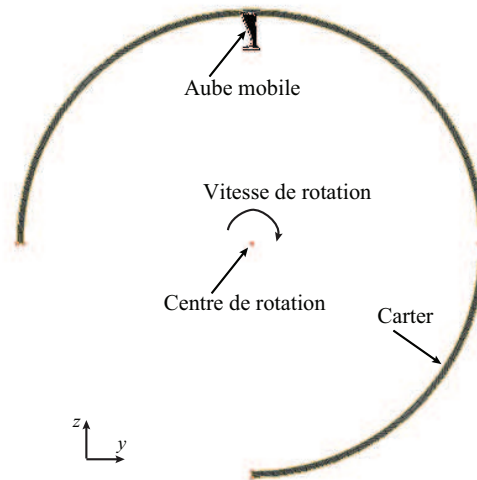


FIG. 8.2 – Vue générale de la géométrie aube-carter.  
Le sens de rotation indiqué est celui du moteur.

### 8.2.3 Fixations et chargement

Le problème de flambement d'une aube de compresseur basse pression par contact avec le carter du moteur survient lorsque, durant le fonctionnement nominal du moteur, une aube fan (située en amont du moteur) se détache accidentellement du rotor, suite, par exemple, à un choc à l'oiseau. Cette rupture d'aube fan crée un déséquilibre, donc un balourd, dans l'arbre du moteur, ce qui engendre une flexion de celui-ci. La flexion de l'arbre induit un contact accidentel entre les aubes du compresseur basse pression et le carter.

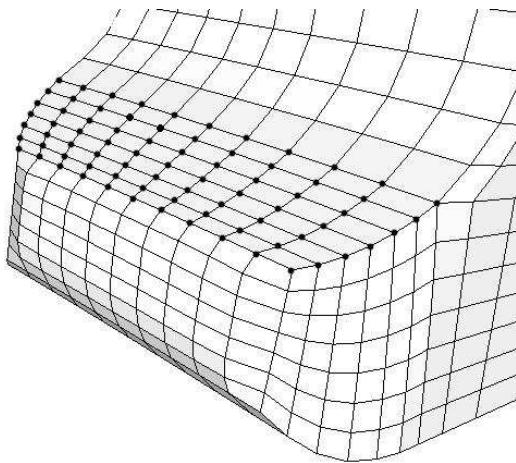
Plutôt que de modéliser ce mouvement de l'arbre du moteur, donc de l'ensemble des aubes du compresseur, nous choisissons de garder le pied de l'aube fixe, et de déplacer le carter selon le mouvement inverse de celui décrit en réalité par l'aube. Le déplacement du stator est donc composé d'un mouvement de translation dans la direction  $-z$  et d'une rotation dans le sens inverse de rotation du moteur. La vitesse de déplacement du carter est une vitesse caractéristique du problème.

La mise en charge s'effectue donc de la façon suivante. Tout d'abord, une mise en rotation fictive de l'aube est effectuée, à une vitesse imposée de  $2260tr/min$ . Cette mise en rotation permet de prendre en compte le raidissement centrifuge, ainsi que le dévissage de l'aube dus à celle-ci. Une fois cette mise en rotation fictive effectuée, la surface rigide modélisant le carter se rapproche radialement de l'aube, en tournant à une vitesse de rotation de sens opposé à celle de l'aube. La valeur de ce déplacement radial est choisie égale au trois quarts de la hauteur de l'aube, soit  $45mm$ .

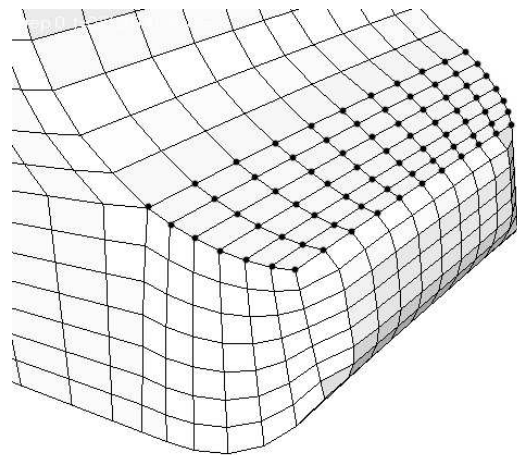
La température initiale sera de  $373K$ , ce qui est l'ordre de grandeur de la température atteinte lors du fonctionnement nominal du moteur à l'intérieur du compresseur basse pression.

Toujours en accord avec Techspace Aero S.A., nous prenons pour hypothèse que les portées de l'aube amont et aval sont encastrées (voir figure 8.3). Partant de cette hypothèse, dans le but de diminuer le nombre d'éléments -et par conséquent, le temps de calcul-, nous avons supprimé des éléments du pied d'aube pour ne garder que l'aube en elle-même et la partie supérieure du pied (plate-forme). Les nœuds frontières situés à la jonction de la plate-forme et du pied d'aube sont alors encastrés.

Cette simplification de la géométrie est présentée à la figure 8.4. Les nouvelles fixations des nœuds sont illustrées à la figure 8.5. Le gain en éléments est quantifié dans le tableau 8.3. Les conséquences de cette simplification seront quantifiées dans la section 8.4.1.



(a) Portée amont de l'aube.



(b) Portée aval de l'aube.

FIG. 8.3 – Détails du pied d'aube et encastrement des nœuds des portées.  
Les • correspondent aux nœuds fixés.

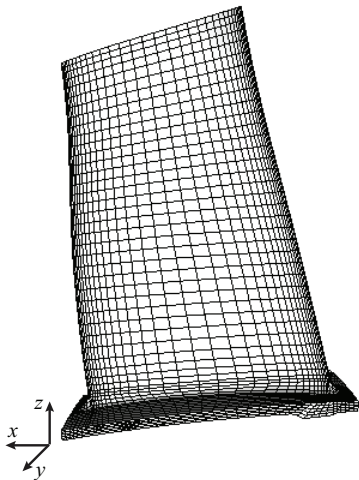


FIG. 8.4 – Simplification de la géométrie de l'aube.

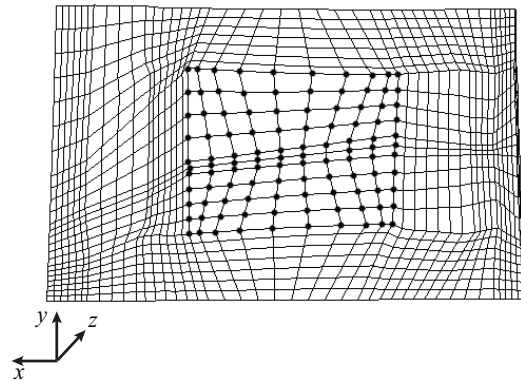


FIG. 8.5 – Encastrement des nœuds inférieurs de jonction de la plate-forme et du pied d'aube.  
Les • correspondent aux nœuds fixés.

	Eléments avant simplification	Eléments après simplification	gain (%)
Maillage 1	12096	7272	40
Maillage 2	15446	9924	36
Maillage 3	18796	12568	33
Maillage 4	39630	27512	31
Maillage 5	50950	37198	27
Maillage 6	75206	57860	23
Maillage 7	100718	80960	20

TAB. 8.3 – Influence de la simplification de la géométrie de l’aube sur le nombre d’éléments.

### 8.2.4 Paramètres du calcul

La précision d’intégration temporelle est de  $10^{-6}$ , tant pour la résolution du problème mécanique (expression (3.10)) que du problème thermique (expression (3.25)). Le schéma d’intégration mécanique est de type Chung-Hulbert et le schéma d’intégration de l’équation de la chaleur est celui du point milieu généralisé.

Ce sont les valeurs imposées du déplacement et de la vitesse de déplacement radial du carter qui déterminent l’intervalle temporel de la simulation. Nous choisissons d’arrêter la simulation lorsque le carter a parcouru une distance égale aux trois quarts de la hauteur initiale de l’aube, soit  $45\text{mm}$ . Le temps de simulation associé est de  $4.6\text{ms}$ .

Le contact entre l’aube et le carter est supposé sans frottement. Il est modélisé par la méthode de la pénalité<sup>1</sup>. La pénalité choisie est de  $100000\text{kN/m}$ . Cette valeur est suffisante a posteriori pour empêcher toute pénétration significative de l’aube dans le carter.

## 8.3 Modélisation du matériau utilisé

### 8.3.1 Introduction

Le matériau utilisé est un alliage de titane proche de l’alliage Ti-6Al-4V. Le comportement de ce matériau est largement étudié dans la littérature, dans le cadre de problèmes dynamiques ou non<sup>2</sup>. De nombreux modèles de comportement existent, que ce soit au niveau microscopique (citons entre autres Giannopoulos et al. [93]), macroscopique (Picu et Majorell [216] ou Vanderhasten et al. [266]) ou micro-macroscopique (par exemple Ding et al. [76]). Nous nous limitons dans ce travail aux modèles macroscopiques.

<sup>1</sup>Le lecteur intéressé par la méthode de traitement du contact est invité à consulter Noels [195].

<sup>2</sup>Nous ne nous intéressons ici qu’aux auteurs ayant proposé une modélisation du comportement du matériau et non simplement une description de celui-ci.

Dans le domaine des applications quasi-statiques, l'étude et la modélisation du titane portent sur des applications telles que, par exemple, le formage superplastique (Adam [2], Vasin et al. [267] ou Cheong et al. [50]), la fatigue (Martinez et al. [168], Ding et al. [75] ou Golden et Calcaterra [96]) ou encore l'usure (Fouvry et al. [85], ElTobgy et al. [81], Paulin et al. [206] ou encore la thèse de Dick [74])<sup>1</sup>. Vanderhasten et al. [266] décrivent le comportement viscoplastique du titane Ti-6Al-4V par une loi de Norton-Hoff étendue (voir Moureaux et al. [189]), tandis que Picu et Majorell [216] utilisent une loi de Kocks [138].

Pour les applications de dynamique rapide telles que celles étudiées dans ce travail, la modélisation macroscopique du comportement du titane est essentiellement réalisée à partir d'une loi de Johnson-Cook [123] originale (Akbari Mousavi et al. [3], Lee et Lin [143, 144], Wang [271], Dabboussi et Nemes [64] ou Umbrello [264]) ou modifiée (Calamaz et al. [42], Khan et al. [130, 131] ou Seo et al. [237]).

Macdougall et Harding [159] modélisent quant à eux le comportement du titane par une loi de Zerilli-Armstrong. Meyer et Kleponis [180] comparent les modèles de Johnson-Cook et de Zerilli-Armstrong. Daridon et al. [66] comparent la loi de Johnson-Cook à une loi de type puissance (voir Molinari [182]) décrite à la section 2.3.4. Enfin, Nemat-Nasser et al. [191] utilisent la loi de Kocks [138]. Citons encore pour mémoire Bonnet-Lebouvier et Klepaczko [29] et Boidin et al. [28], qui utilisent le modèle de Klepaczko [135] élaboré spécifiquement pour le titane (voir page 38), ou Guo et al. [101] qui utilisent le modèle de Bammann [14] à 20 paramètres (cf. page 39).

La rupture du titane est modélisée dans le cadre de problèmes de fatigue (voir par exemple Fadag et al. [83] ou Shademan et al. [239]), d'usure (citons Fridrici et al. [87]), ou encore de superplasticité (voir Chung et Cheng [52]). La rupture ductile est également étudiée : Dabboussi et Nemes [64] choisissent comme critère de rupture une valeur critique de la déformation plastique équivalente. El-Magd et Abouridouane [80] ont recours au critère de Hancock-Mackenzie [109] (voir page 155). Li et al. [151] appliquent un critère de rupture sous la forme d'une loi de type puissance en la déformation plastique équivalente. Macdougall et Harding [159] utilisent quant à eux un critère de rupture implémenté dans Abaqus [111] correspondant à une valeur critique de la déformation plastique équivalente. Enfin, Umbrello [264] utilise le critère de Cockroft and Latham [58] (voir page 152).

Tous ces traitements numériques de la rupture du matériau utilisent un critère de rupture simple, tel que ceux présentés à la section 6.2.2. Ils ne prennent dès lors pas en compte une formulation d'endommagement continu telle que celle décrite dans la section 5.3, et étendue aux grandes déformations dans le cadre thermomécanique à la section 5.5. L'adoucissement mécanique de la structure n'est donc pas modélisé. Or, nous avons vu lors de l'application 7.5 l'intérêt de recourir à une telle formulation.

---

<sup>1</sup>Nous citons ce type d'applications pour mémoire.



### 8.3.2 Modélisation du comportement thermo-viscoplastique du matériau

Comme nous l'avons montré dans les applications des chapitres 4 et 7, il est important de tenir compte de la vitesse de déformation plastique équivalente et de l'adoucissement thermique dans la modélisation du comportement du matériau. Les lois de Johnson-Cook ou de Zerilli-Armstrong sont donc appropriées pour la modélisation du comportement du Ti-6Al-4V. Pour sa plus grande utilisation dans la littérature, et parce que les autres types de lois ou extensions présentes dans la littérature ne montrent pas une nette supériorité par rapport au modèle original, nous choisissons d'utiliser la loi de Johnson-Cook [123] standard à six paramètres  $A$ ,  $B$ ,  $n$ ,  $C$ ,  $m$  et  $\dot{\varepsilon}_0$  :

$$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right) \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m\right) \quad (8.1)$$

Les paramètres trouvés dans la littérature pour la loi de Johnson-Cook sont très variables en fonction des proportions des différents composants chimiques de l'alliage considéré. Nous ne connaissons pas ces proportions pour le matériau étudié. Cependant, nous disposons d'une courbe de traction expérimentale relative à l'alliage utilisé dans ce travail, courbe obtenue à partir d'un test réalisé en quasi-statique et à température ambiante. Nous pouvons donc déterminer les paramètres  $A$ ,  $B$  et  $n$  de la loi (8.1) en négligeant les termes de viscosité et d'adoucissement thermique. Les paramètres matériau se rapprochant le plus de la courbe expérimentale sont donnés par Umbrello [264]. Nous utilisons donc également les paramètres de viscosité  $C$  et  $\dot{\varepsilon}_0$  et d'adoucissement thermique  $m$  proposés par Umbrello [264]<sup>1</sup>. Les paramètres thermomécaniques du matériau et de la loi constitutive sont résumés dans le tableau 8.4.

Le module de Young  $E$ , ainsi que la chaleur spécifique  $c$ , la conductivité thermique  $k$  et le coefficient d'expansion thermique  $\alpha$  du matériau varient avec la température. Ces courbes de variations ont été fournies par Techspace Aero S.A. (sous forme de courbe "point par point") et sont présentées à la figure 8.6.

### 8.3.3 Modélisation de l'endommagement du matériau

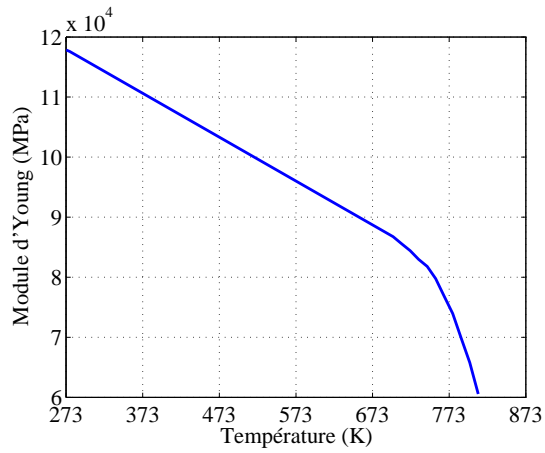
En ce qui concerne la rupture ductile du matériau, nous avons mis en évidence (section 7.5) l'avantage, du point de vue numérique, de l'utilisation d'une loi d'endommagement continu par rapport à un critère de rupture ductile brutal. Or, ce type de modélisation n'est apparemment pas utilisé dans la littérature. Seule la rupture sans endommagement est envisagée (voir page 232).

---

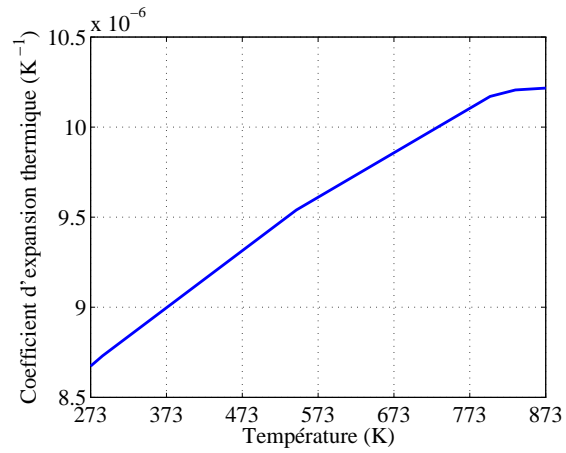
<sup>1</sup>Notons que ces valeurs des paramètres de la loi de Johnson-Cook sont également utilisées dans Meyer et Kleponis [179].

Paramètres mécaniques et thermiques (à 293K)	Valeur
Module de Young $E$ (Mpa)	116441.0
Coefficient de Poisson $\nu$	0.31
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	4429.0
Conductivité thermique $k$ (W/mK)	7.0
Chaleur spécifique $c$ (J/KgK)	564.0
Coefficient d'expansion thermique $\alpha$	8.81e - 6
Facteur de Taylor-Quinney $\beta$	0.9
Paramètres de la loi de Johnson-Cook	
$\sigma_{crit} = (A + B (\bar{\varepsilon}^{pl})^n) \left(1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right) \left(1 - \left(\frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)^m\right)$	
$A$ (Mpa)	896.0
$B$ (Mpa)	656.0
$n$	0.5
$C$	0.0128
$\dot{\varepsilon}_0$ (s <sup>-1</sup> )	1.0
$m$	0.8
$T_{room}$ (K)	293.0
$T_{melt}$ (K)	1873.0

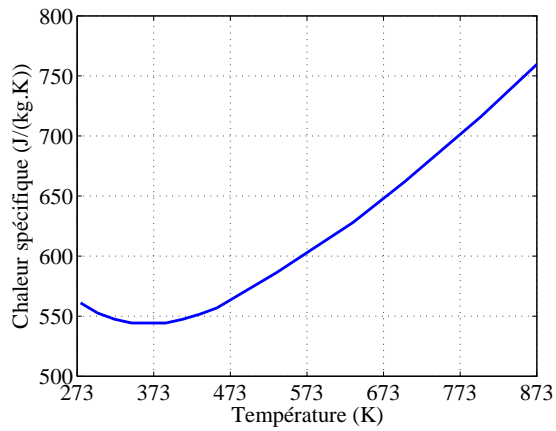
TAB. 8.4 – Paramètres thermomécaniques du titane Ti-6Al-4V et paramètres de la loi de Johnson-Cook.



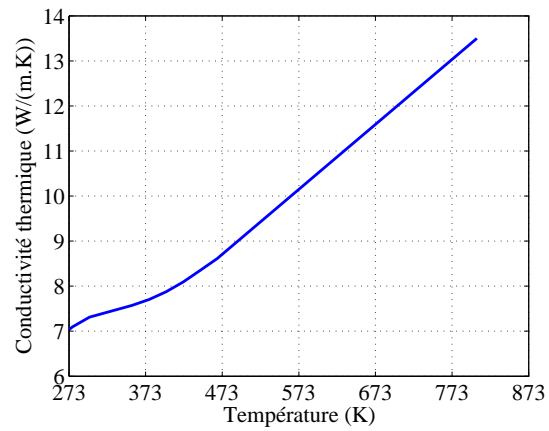
(a) Module de Young.



(b) Expansion thermique.



(c) Chaleur spécifique.



(d) Conductivité thermique.

FIG. 8.6 – Variation des paramètres matériau du titane Ti-6Al-4V avec la température.

El-Magd et Abouridouane [80] utilisent le critère de Hancock-Mackenzie [109] décrit par l'expression :

$$\varepsilon_f = D_1 + D_2 \exp(D_3 \sigma^*)$$

Les paramètres  $D_1$  à  $D_3$  sont déterminés par des tests de traction du même type que ceux envisagés à la section 7.4. El-Magd et Abouridouane [80] envisagent cinq géométries de traction : quatre géométries entaillées et une géométrie non entaillée. Les rayons d'encoche varient de 0.02 à 1.2mm. Pour chaque géométrie, un test quasi-statique ( $\dot{\varepsilon}^{pl} = 0.001s^{-1}$ ) et un test dynamique ( $\dot{\varepsilon}^{pl} = 4000s^{-1}$ ) sont réalisés avec, pour chacun d'eux, des températures initiales de 293K et 473K, soit quatre familles de tests.

El-Magd et Abouridouane [80] identifient les paramètres  $D_1$  à  $D_3$  pour chaque famille de tests. Ils obtiennent donc quatre ensembles de coefficients matériau<sup>1</sup>. Nous proposons d'étendre ce modèle pour introduire un terme en température et un terme dépendant de la vitesse de déformation plastique équivalente pour la détermination de la déformation plastique de rupture. Pour ce faire, nous nous basons sur le modèle d'endommagement proposé par Børvik et al. [39] présenté à la section 5.4.3.2. Rappelons la forme proposée de l'expression de la déformation plastique de rupture :

$$\varepsilon_f = (D_1 + D_2 \exp D_3 (\sigma^*)) \left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{D_4} \left(1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right) \quad (8.2)$$

Les paramètres  $D_1$  à  $D_3$  de l'expression (8.2) sont connus à partir des tests quasi-statiques réalisés à température ambiante (293K) d'El-Magd et Abouridouane [80].

Dans le cas des tests quasi-statiques<sup>2</sup>, El-Magd et Abouridouane [80] ont effectué un test à température ambiante (293K) et un autre à une température de 473K. Ils montrent alors que la déformation plastique de rupture, en fonction de la triaxialité, est proportionnelle à la température. Ce résultat justifie la relation linéaire en la température de la déformation plastique de rupture<sup>3</sup>. A partir des expressions de la déformation plastique de rupture proposées par El-Magd et Abouridouane [80], nous pouvons déterminer le coefficient de proportionnalité entre le test quasi-statique à 293K et celui à 373K. Il s'établit à 1.8. Le coefficient  $D_5$  se calcule donc aisément à partir de ce coefficient de proportionnalité, en gardant constants et égaux à leur valeur à température ambiante les paramètres  $D_1$  à  $D_3$ . Nous trouvons ainsi la valeur  $D_5 = -7.29$ .

<sup>1</sup>Cela nous paraît clairement être une limitation de la méthode proposée par El-Magd et Abouridouane [80] dans la mesure où les paramètres matériau devraient être indépendants du chargement. Dans le même ordre d'idées, les paramètres matériau de la loi constitutive sont également dépendants de la vitesse du test. Cela provient du fait que la loi de comportement utilisée est une simple loi d'écrouissage ne prenant pas en compte la vitesse de déformation plastique équivalente.

<sup>2</sup>Dans ce cas, le facteur relatif à la vitesse de déformation est négligeable et on peut considérer que la température reste constante et uniforme tout au long du test.

<sup>3</sup>Nous vérifierons a posteriori via les deux tests à grande vitesse que cette relation de proportionnalité reste bien valable.

La détermination du paramètre  $D_4$ , relatif au terme de viscosité plastique, est moins triviale. En effet, dans ce cas, la température n'est plus constante et uniforme dans la barre durant le test. Nous ne pouvons donc pas déduire le terme de viscosité de la même façon que pour le terme en température. Nous allons procéder en plusieurs étapes.

La première étape consiste à choisir la valeur du paramètre  $\dot{\varepsilon}_0$ . Nous la choisissons égale à la vitesse de déformation du test quasi-statique, soit  $0.001s^{-1}$ . Cela se justifie par le fait qu'en deçà de cette vitesse de déformation, les aspects visqueux sont négligeables et nous pouvons donc conserver les valeurs des paramètres  $D_1$  à  $D_3$  tirées de El-Magd et Abouridouane [80].

La deuxième étape consiste à effectuer des simulations éléments finis des tests de traction proposés par El-Magd et Abouridouane [80] pour estimer la température au moment de la rupture dans le cas dynamique ( $\dot{\varepsilon}^{pl} = 4000s^{-1}$ ), en utilisant le critère de rupture de Hancock-Mackenzie [109]. Ces tests sont tout à fait analogues à ceux présentés à l'application 7.4; seuls les rayons des cercles des encoches sont différents et valent ici 0.02, 0.4, 0.8 et 1.2mm.

La troisième étape est le calcul proprement dit du paramètre  $D_4$  à partir des résultats des simulations éléments finis. Pour une même valeur de triaxialité  $\sigma^*$ , la déformation plastique de rupture  $\varepsilon_f$  est calculée pour les deux vitesses de déformation :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{f,qs} &= (D_1 + D_2 \exp D_3 (\sigma^*)) \\ \varepsilon_{f,dyn} &= (D_1 + D_2 \exp D_3 (\sigma^*)) \left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}_{dyn}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{D_4} \left(1 - D_5 \frac{T_{dyn} - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)\end{aligned}$$

La température  $T_{dyn}$  est connue par les simulations éléments finis. En calculant le rapport de ces deux grandeurs, on obtient :

$$\frac{\varepsilon_{f,dyn}}{\varepsilon_{f,qs}} = \left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}_{dyn}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{D_4} \left(1 - D_5 \frac{T_{dyn} - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)$$

d'où nous extrayons le paramètre  $D_4$  :

$$D_4 = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_{f,dyn}}{\varepsilon_{f,qs}}\right) - \ln\left(1 - D_5 \frac{T_{dyn} - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}_{dyn}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)}$$

Nous trouvons ainsi pour valeur de  $D_4$  :

$$D_4 = -0.0557$$

En résumé, nous n'avons plus qu'un seul jeu de 5 paramètres,  $D_1$  à  $D_5$  pour l'expression de la déformation plastique de rupture  $\varepsilon_f$ . Cette expression est valable pour différentes températures et différentes vitesses de déformation. Les paramètres sont résumés dans le tableau 8.5. La figure 8.7 montre l'accord entre les courbes de déformation plastique de rupture déterminées par El-Magd et Abouridouane [80] et les courbes calculées à partir des coefficients  $D_1$  à  $D_5$ . L'accord entre les courbes est excellent.

Paramètres de la loi d'endommagement	Valeur
$\dot{D} = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} < \varepsilon_d \\ \frac{D_C}{\varepsilon_f - \varepsilon_d} \dot{\varepsilon}^{pl} & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} \geq \varepsilon_d \end{cases}$	
$\varepsilon_f = (D_1 + D_2 \exp(D_3 \sigma^*)) \left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{D_4} \left(1 - D_5 \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}}\right)$	
$D_C$	0.38
$\varepsilon_d$	0.01
$D_1$	0.05
$D_2$	2.89
$D_3$	-2.35
$D_4$	-0.0557
$D_5$	-7.29
$\dot{\varepsilon}_0 (s^{-1})$	0.001
$T_{room} (K)$	293.0
$T_{melt} (K)$	1873.0

TAB. 8.5 – Paramètres de la loi d'endommagement du titane Ti-6Al-4V.

Pour le modèle d'endommagement continu de Børvik et Langseth [39], nous devons encore identifier les paramètres de valeur critique d'endommagement  $D_C$  et de déformation plastique seuil  $\varepsilon_d$ . Pour cela, nous effectuons un test numérique de traction pour recalibrer la courbe de traction fournie par Techspace Aero S.A. Cette courbe est, rappelons-le, obtenue par un test de traction quasi-statique à température ambiante. Ce n'est pas une limitation vu que les paramètres relatifs à la vitesse de déformation plastique  $C$  et  $D_4$  et à l'adoucissement thermique  $m$  et  $D_5$  sont connus. Les paramètres de la loi d'écrouissage et de la loi d'évolution de la déformation plastique de rupture sont fixés. Seules varient la déformation plastique seuil et la valeur critique d'endommagement. Les valeurs trouvées pour ces deux paramètres sont  $D_C = 0.38$  et  $\varepsilon_d = 0.01$ . L'ensemble des valeurs des paramètres matériau du modèle d'endommagement est résumé dans le tableau 8.5.

La figure 8.8 présente les différentes courbes numériques force-déplacement pour le modèle matériau présenté, dans le cas d'un test de traction, soit la loi d'écrouissage de Johnson-Cook couplée au modèle d'endommagement de Langseth. Les vitesses de déformation plastique varient de  $0.001$  à  $4000s^{-1}$  (vitesse de déformation maximale envisagée par El-Magd et Abouridouane [80]). Les températures initiales des tests sont de  $293K$  (figure 8.8(a)) et  $473K$  (figure 8.8(b)).

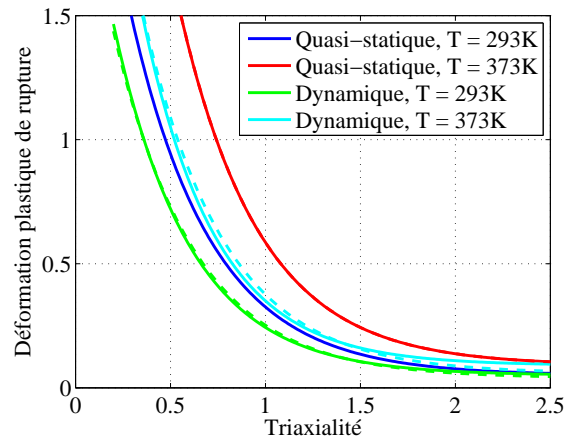


FIG. 8.7 – Comparaison des courbes de déformation plastique de rupture en fonction de la triaxialité pour les différents chargements et températures.

En traits continus : le modèle de El-Magd et Abouridouane [80]. En traits interrompus : le modèle de Langseth prenant en compte la vitesse de déformation et la température. Les courbes interrompues et continues bleues et rouges sont totalement confondues.

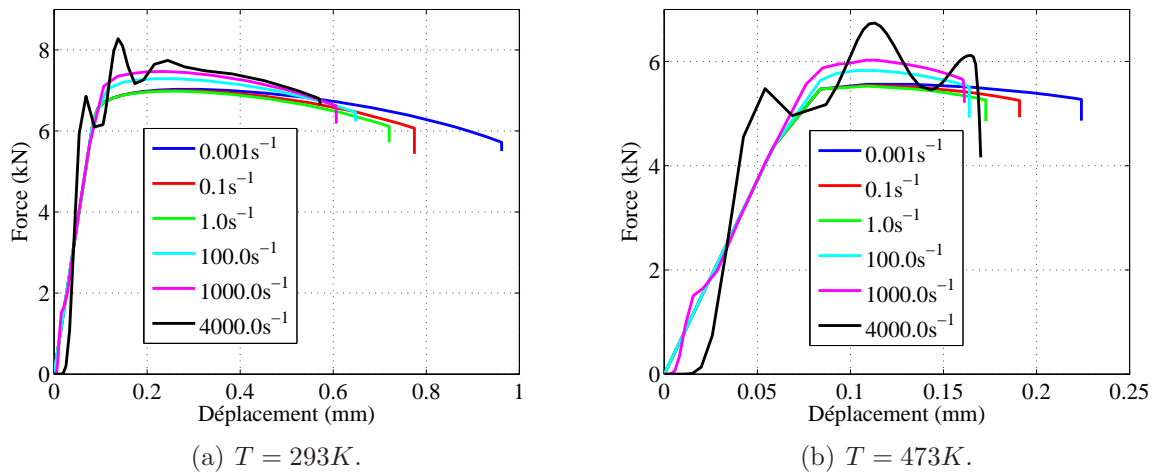


FIG. 8.8 – Courbes de traction du matériau pour différentes vitesses de déformation.

## 8.4 Résultats et discussion

### 8.4.1 Validation de l'hypothèse simplificatrice

Dans un tout premier temps, il est indispensable de valider l'hypothèse simplificatrice concernant la fixation du pied d'aube. Pour ce faire, nous comparons, d'une part, la force de contact entre l'aube et le carter tout au long du processus et, d'autre part, les endroits critiques au niveau de l'aube, i.e. les zones où l'endommagement est maximum.

Les courbes force-déplacement sont présentées à la figure 8.9<sup>1</sup>. Les différences entre les deux types de fixation du pied d'aube sont très faibles. Comme on pouvait s'y attendre, les forces dans les directions axiale (direction  $x$ ) et transverse (direction  $y$ ) sont petites par rapport à la force radiale (direction  $z$ )<sup>2</sup>. C'est pourquoi, dorénavant, nous ne considérerons plus que la force radiale comme force représentative. La courbe force-déplacement présente un premier pic correspondant à la prise de contact de l'aube et du carter. La force diminue ensuite, vu le flambement de l'aube. La force se stabilise ensuite autour de  $3kN$  jusqu'à une valeur du déplacement d'environ  $24mm$  pour ré-augmenter ensuite jusqu'à  $3.5kN$ .

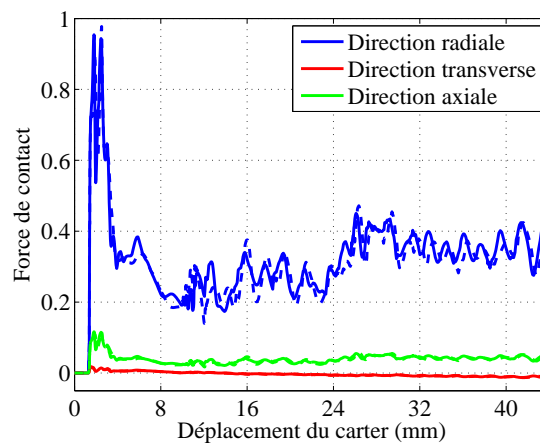


FIG. 8.9 – Influence des conditions d'encastrement sur la force de contact entre l'aube et le carter. En traits pleins, fixations simplifiées ; en traits interrompus, fixations originales.

En examinant la déformée de l'aube pour les deux fixations, nous constatons peu de différences. Nous présentons les distributions d'endommagement et de température pour trois configurations (figures 8.10 à 8.15) correspondant à deux zones critiques de flambement, ainsi qu'à la configuration finale de l'aube. Les valeurs de l'endommagement et de la température sont très semblables dans les deux cas. Les différences entre les deux types de fixations apparaissent en toute fin de simulation, lorsque la zone critique de flambement

<sup>1</sup>Pour des raisons de confidentialité, les forces de contact sont normalisées par rapport à la valeur de la force du premier pic de contact.

<sup>2</sup>Cela pourrait être différent si nous avions considéré un contact avec frottement.



s'approche du pied d'aube (figures 8.14 et 8.15). Nous voyons également sur ces figures que l'échauffement peut devenir assez important, de l'ordre de  $60K$  au moment de la rupture de l'aube, ce qui justifie pleinement l'utilisation d'une formulation thermomécanique.

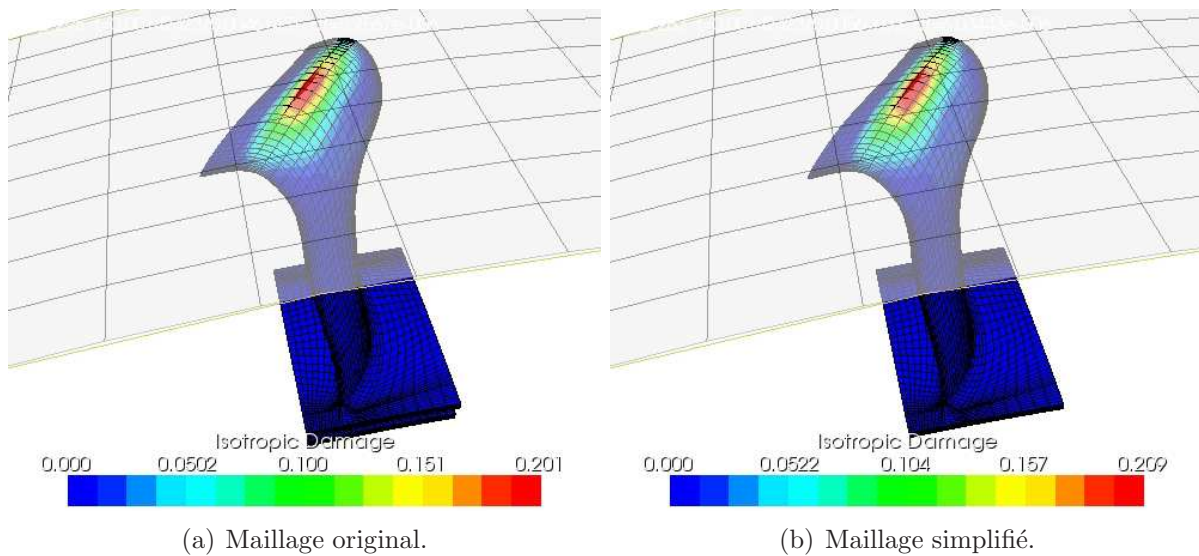


FIG. 8.10 – Zone critique de flambement 1. Distribution d'endommagement.

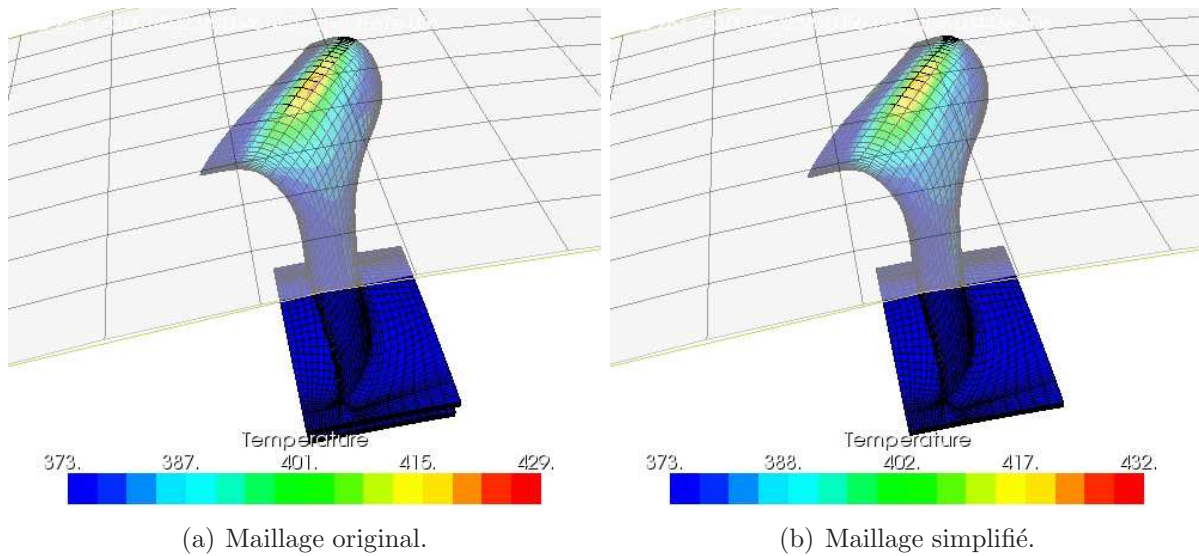


FIG. 8.11 – Zone critique de flambement 1. Distribution de température.

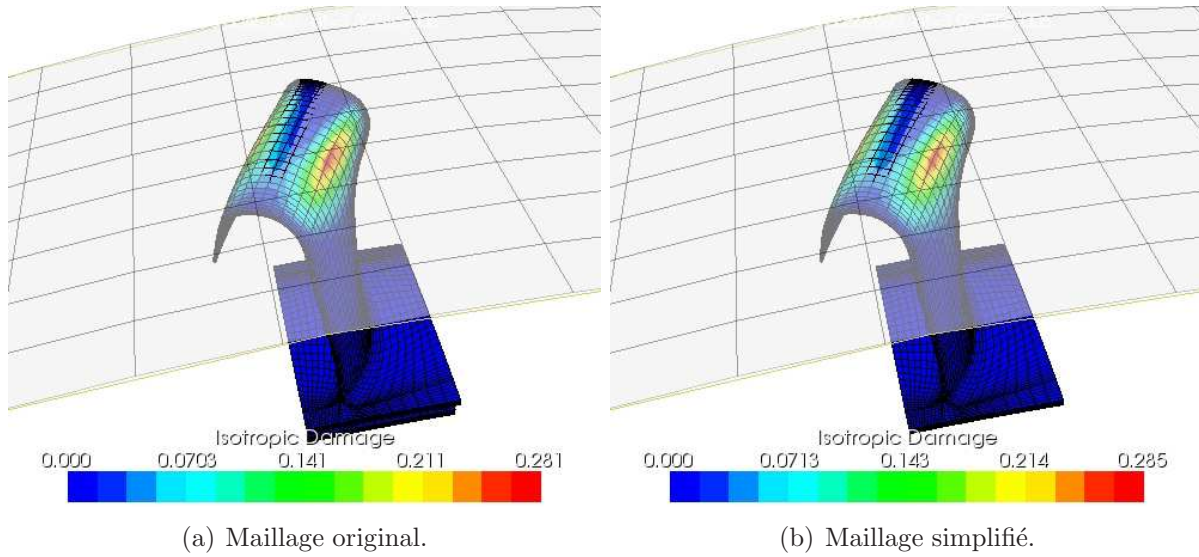


FIG. 8.12 – Zone critique de flambement 2. Distribution d'endommagement.

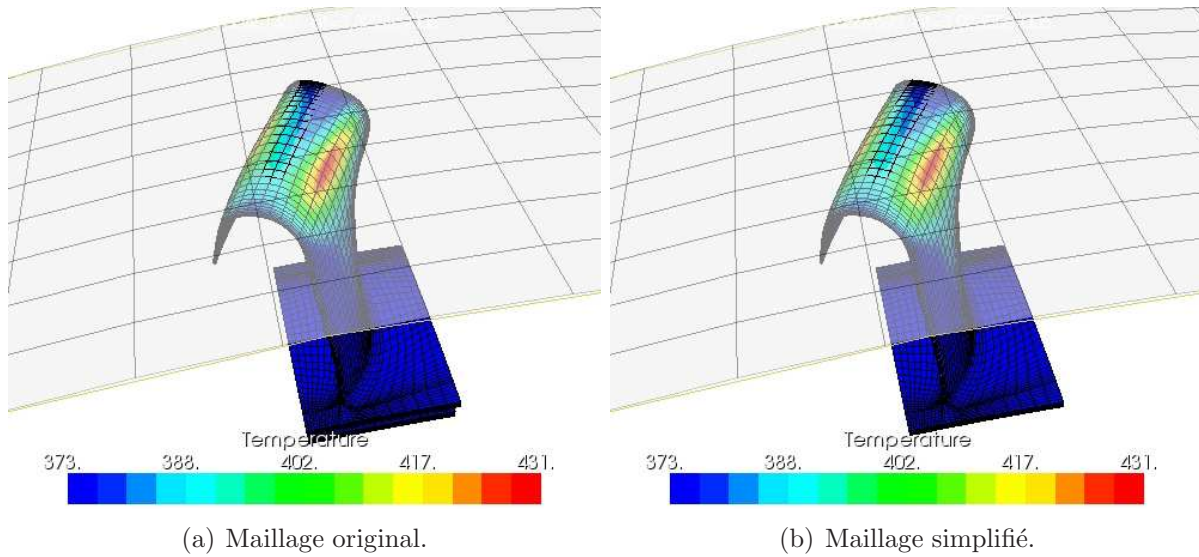


FIG. 8.13 – Zone critique de flambement 2. Distribution de température.

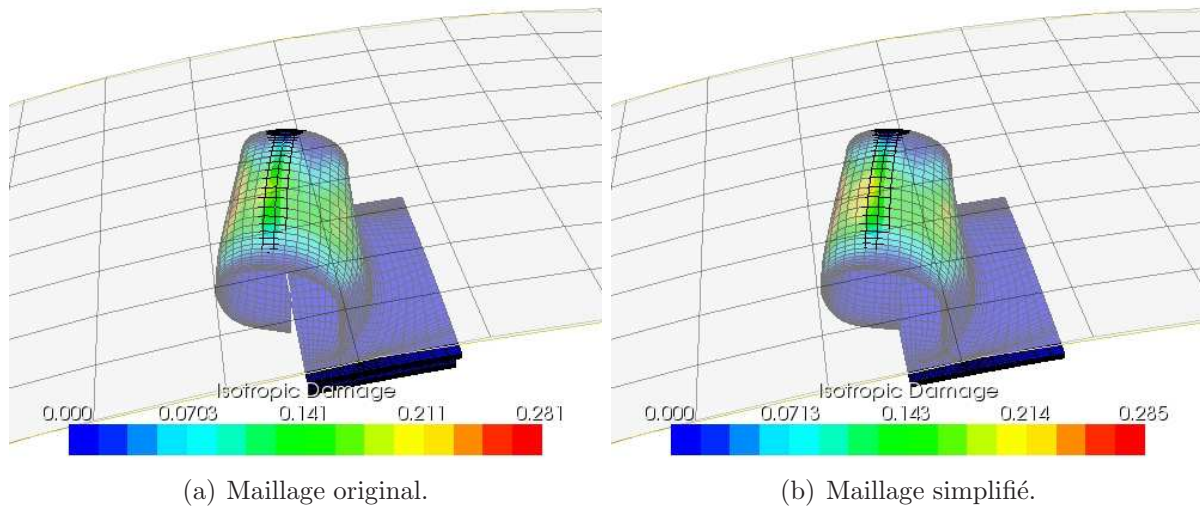


FIG. 8.14 – Déformée finale de l'aube. Distribution d'endommagement.

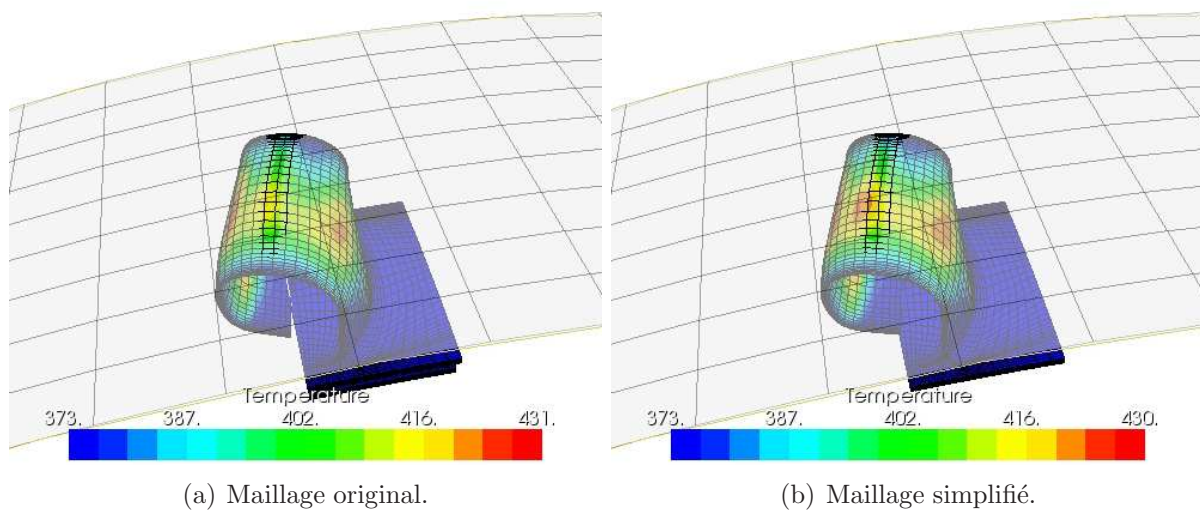


FIG. 8.15 – Déformée finale de l'aube. Distribution de température.

Le gain en termes de temps de calcul est non négligeable : celui-ci est de l'ordre de 40% pour le maillage considéré (12096 éléments). Nous avons poussé la comparaison en examinant les temps CPU pour les maillages 2 à 4 (voir tableau 8.2), pour les deux types de fixations. Les gains en temps de calcul sont présentés au tableau 8.6. Le gain devient plus faible au fur et à mesure que le maillage augmente, ce qui est normal vu que le gain en éléments diminue lui aussi. Cependant, les gains enregistrés sont très significatifs dans tous les cas. En conclusion, vu le peu de différences entre les deux types de fixation, nous ne considérerons plus que le maillage simplifié.

	Gain d'éléments (%)	Gain en CPU (%)
Maillage 1	40	44
Maillage 2	36	45
Maillage 3	33	38
Maillage 4	31	33

TAB. 8.6 – Influence de la simplification de la géométrie de l'aube sur le temps de calcul.

## 8.4.2 Etude de maillage

### 8.4.2.1 Introduction

Comme nous avons montré dans les applications de propagation de fissure 7.3 et de tests de traction à grande vitesse 7.5, la sensibilité au maillage de la méthode par érosion est importante. Une étude de sensibilité au maillage est donc nécessaire. De plus, en cas de flexion importante, les éléments fins peuvent être soumis au phénomène de *locking* dans le cas de sollicitations en flexion (voir Ponthot [217] pour plus de détails).

Nous avons utilisé deux formulations éléments finis. La première est une formulation de type SRI, i.e. *Selective Reduced Integration*. Cette technique de sous-intégration sélective permet de supprimer les effets de *locking* volumique. Ce phénomène consiste en l'apparition d'une raideur excessive de l'élément, suite à la condition d'incompressibilité des déformations viscoplastiques en un nombre trop important de points d'intégration (voir Ponthot [217, 218] ou Stainier [252] pour plus de détails).

La seconde formulation est une formulation de type EAS, i.e. *Enhanced Assumed Strain*, qui consiste en l'ajout de modes de déformations internes à un élément intégré exactement afin de diminuer les effets de *locking* volumique et d'améliorer le comportement flexionnel. Le lecteur intéressé par cette formulation peut se reporter à Adam [2], Simo et al. [243, 244, 248], Glaser et Armero [94] ou encore Andefinger et Ramm [8].

### 8.4.2.2 Configuration de la solution déformée

Nous présentons les résultats pour une valeur du déplacement du carter de  $40\text{mm}$ .

Dans le cas de l'utilisation d'éléments SRI (figures 8.16 à 8.22), nous avons rencontré des problèmes de convergence de la solution.

En ce qui concerne les maillages 1 à 3 (figures 8.16 à 8.18), ceux-ci fournissent une solution, mais celle-ci s'avère très mauvaise en comparaison à celle fournie par les maillages plus fins. En effet, la flexion a lieu "à l'envers" : le contact aube-carter se fait selon l'intrados au lieu de l'extrados.

Le maillage 4 n'aboutit pas à une solution (le calcul s'arrête avant le déplacement maximal du carter). Nous présentons les solutions relatives à ce maillage juste avant l'arrêt du calcul (figure 8.19). Le déplacement du carter correspondant est alors de  $29\text{mm}$ . Quoiqu'il en soit, le résultat relatif à ce maillage est très mauvais.

Les maillages 5 à 7 (figures 8.20 à 8.22) fournissent quant à eux une forme correcte de la déformée de l'aube. Cependant, dans le cas du maillage 5, le critère de rupture est atteint, ce qui n'est pas observé pour les maillages plus fins. Finalement, seuls les maillages 6 et 7 fournissent une solution acceptable, la déformée étant similaire dans les deux cas (figures 8.21 et 8.22).

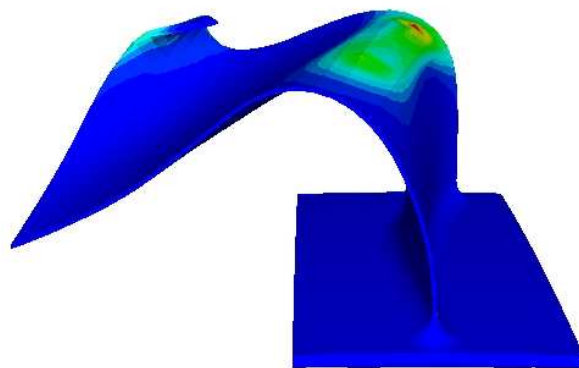


FIG. 8.16 – Déformée de l'aube maillage 1, éléments SRI.

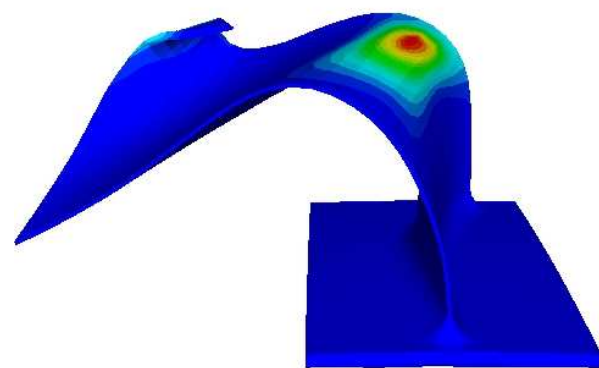


FIG. 8.17 – Déformée de l'aube maillage 2, éléments SRI.

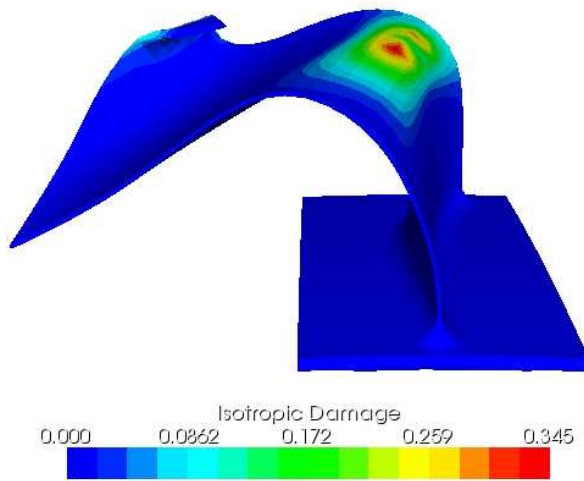


FIG. 8.18 – Déformée de l'aube maillage 3, éléments SRI.

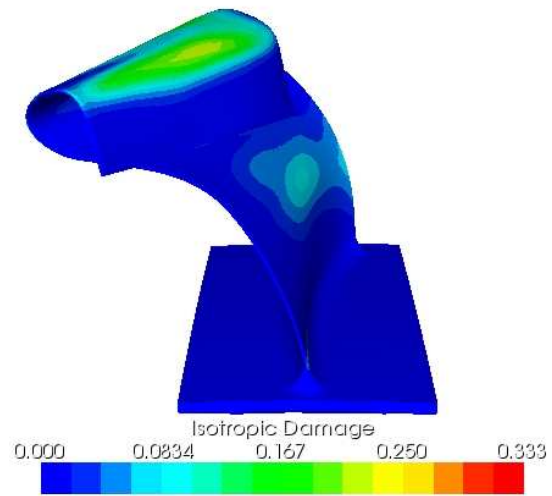


FIG. 8.19 – Déformée de l'aube maillage 4, éléments SRI.

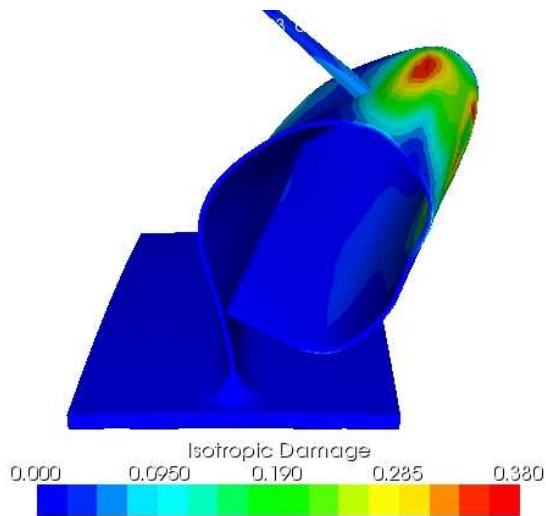


FIG. 8.20 – Déformée de l'aube maillage 5, éléments SRI.

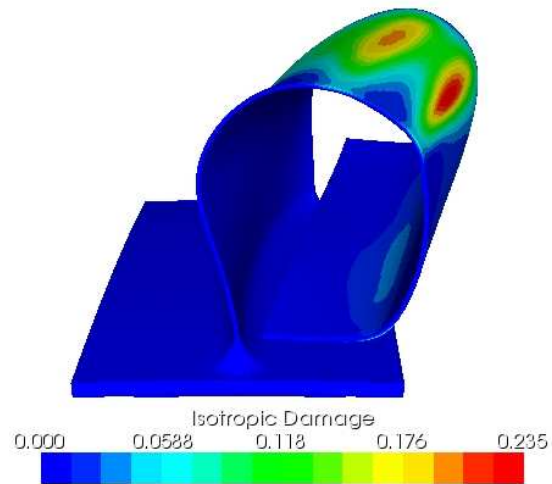


FIG. 8.21 – Déformée de l'aube maillage 6, éléments SRI.

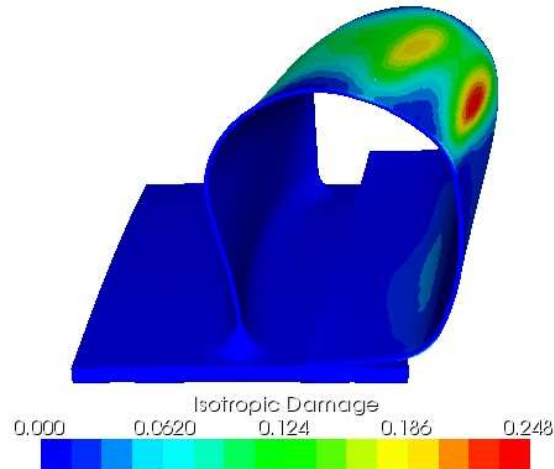


FIG. 8.22 – Déformée de l'aube maillage 7, éléments SRI.

Lorsque nous utilisons une formulation de type EAS (figures 8.23 à 8.29), les résultats sont très satisfaisants au niveau de la déformée, y compris pour les maillages les plus grossiers. Le problème de flexion dans le mauvais sens n'apparaît plus. En considérant le maillage le plus fin (maillage 7) comme le maillage de référence, on peut voir que tous les maillages donnent une déformée tout à fait similaire. Les points critiques de flexion se situent aux mêmes endroits pour tous les maillages. Cette déformée est analogue à celle déterminée par l'utilisation de la formulation à sous intégration sélective pour le maillage le plus fin. Au niveau de la valeur d'endommagement atteinte pour le déplacement du carter de  $40\text{mm}$ , seuls les maillages 4 à 7 fournissent une valeur analogue.

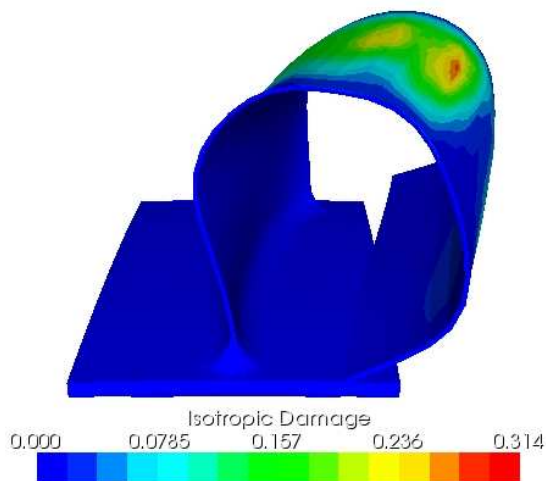


FIG. 8.23 – Déformée de l'aube maillage 1, éléments EAS.

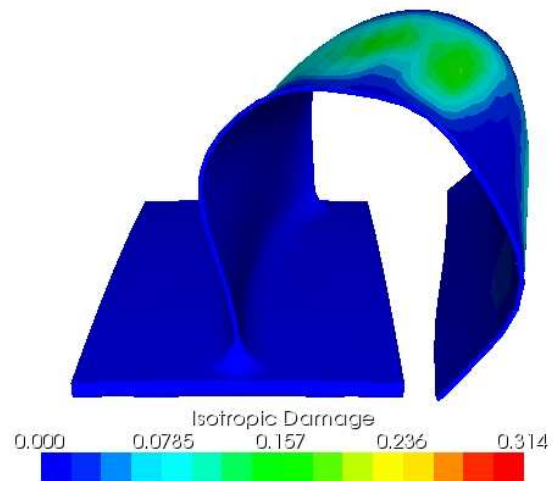


FIG. 8.24 – Déformée de l'aube maillage 2, éléments EAS.

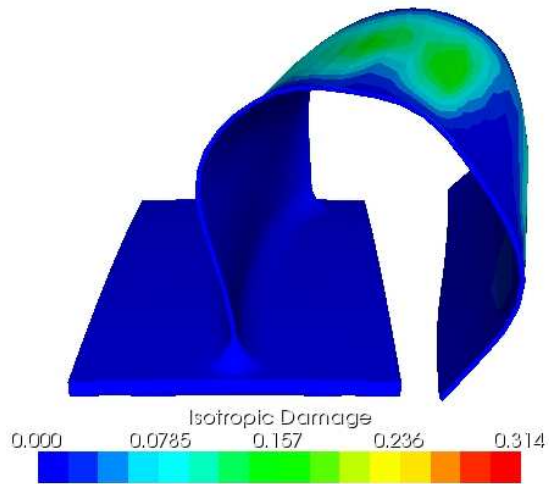


FIG. 8.25 – Déformée de l'aube maillage 3, éléments EAS.

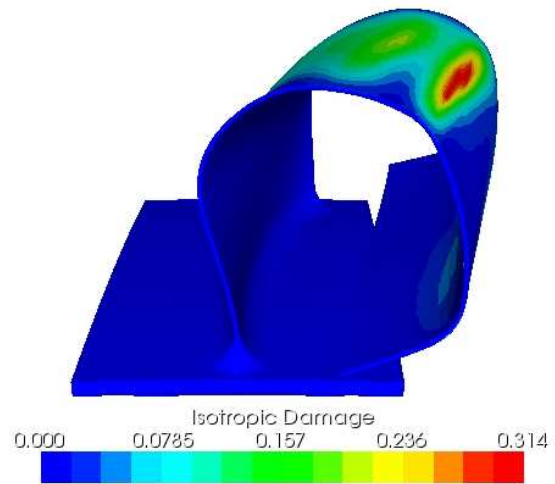


FIG. 8.26 – Déformée de l'aube maillage 4, éléments EAS.

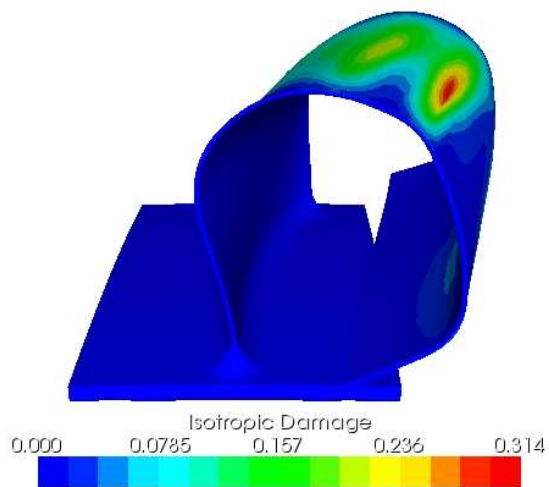


FIG. 8.27 – Déformée de l'aube maillage 5, éléments EAS.

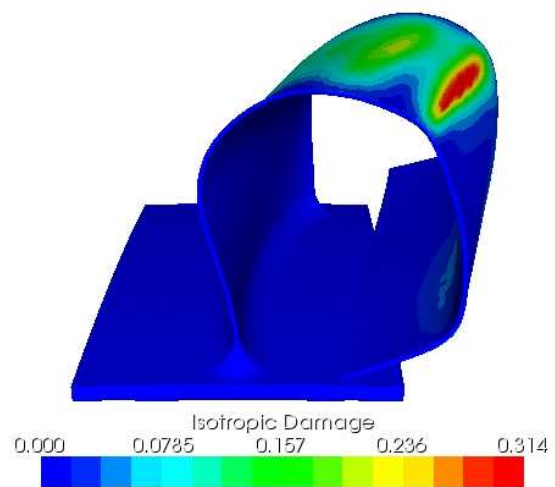


FIG. 8.28 – Déformée de l'aube maillage 6, éléments EAS.



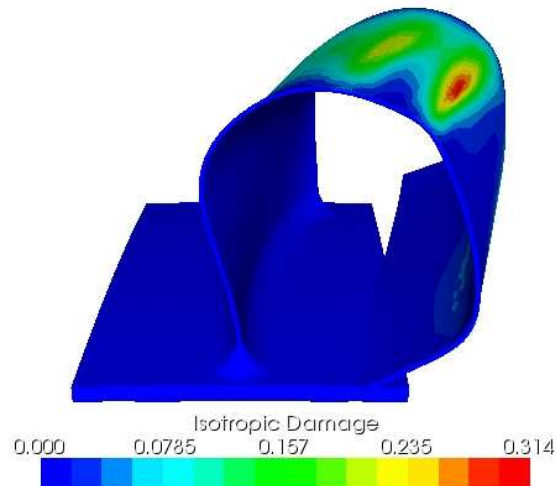


FIG. 8.29 – Déformée de l'aube maillage 7, éléments EAS.

La configuration déformée obtenue par simulation numérique est qualitativement tout à fait semblable à celle observée lors de tels problèmes de contacts accidentels entre les aubes du compresseur et le carter. Cependant, il n'existe pas de courbe expérimentale de forces de contact, ou de mesure d'endommagement ou de température qui permettrait une comparaison quantitative des résultats expérimentaux et numériques.

#### 8.4.2.3 Courbes force-déplacement

Les courbes force-déplacement en fonction des différents maillages sont présentées aux figures 8.30 et 8.31. Nous considérons le maillage le plus fin (maillage 7) combiné à l'utilisation d'éléments EAS comme solution de référence. Pour les résultats relatifs à l'utilisation d'éléments SRI, nous ne présentons les courbes force-déplacement que pour les résultats dont la configuration déformée est acceptable, soit ceux relatifs aux maillages 5 à 7.

Dans le cas de l'utilisation d'éléments SRI (figure 8.30), la courbe force-déplacement converge très lentement vers la courbe de référence. Il faudrait utiliser un maillage plus fin encore, mais le coût de calcul deviendrait prohibitif. De plus, si la configuration déformée du maillage 5 est bonne (cf. figure 8.20), il n'en va pas de même pour les valeurs de la force qui est clairement surestimée.

Les résultats obtenus par l'utilisation d'éléments EAS sont quant à eux nettement meilleurs, et ce pour tous les maillages (figure 8.31). Les oscillations présentes dans le cas du maillage 1 sont dues à la prise de contact successive des nœuds sur le carter, puis à la perte de contact de ces nœuds. Le maillage est trop grossier et il y a des pertes de contact entre l'aube et le carter, ce qui explique les oscillations. Ces oscillations disparaissent pratiquement pour les maillages plus fins. Le maillage 4 s'avère suffisant pour l'obtention de résultats de qualité.

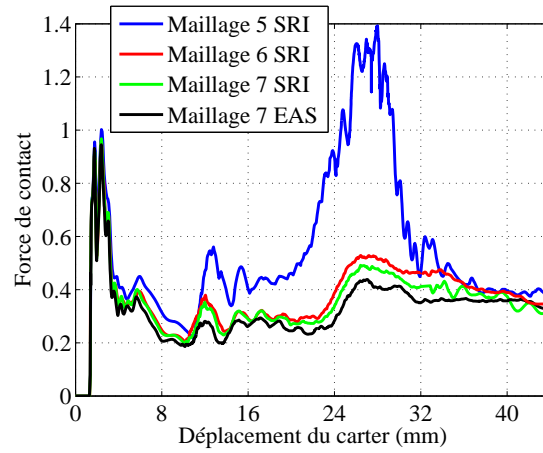
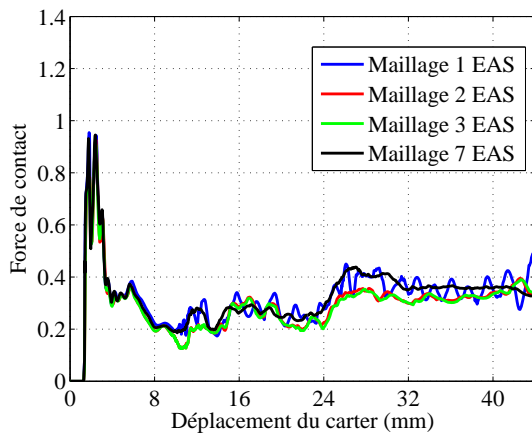
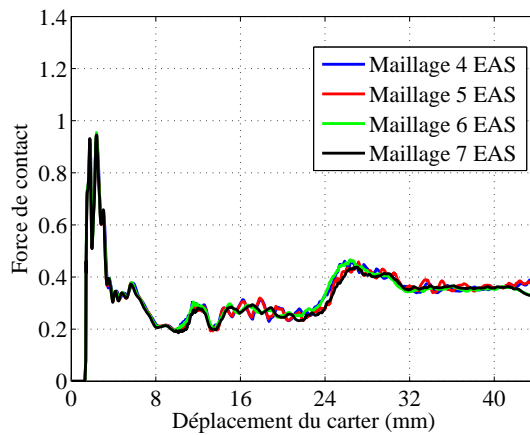


FIG. 8.30 – Courbes force-déplacement en fonction du maillage avec l'utilisation d'éléments SRI. La courbe noire représente la solution la plus précise (maillage 7).



(a) Maillages 1 à 3.



(b) Maillages 4 à 6.

FIG. 8.31 – Courbes force-déplacement en fonction du maillage avec l'utilisation d'éléments EAS. La courbe noire représente la solution la plus précise (maillage 7).

#### 8.4.2.4 Coût CPU

Nous avons mis en évidence ici l'intérêt d'utiliser des éléments EAS dans le cadre de problèmes de flambement. Cependant, ceux-ci s'avèrent plus coûteux en termes de temps de calcul vu le calcul des modes de déformations internes. Cependant, ce surcoût CPU est compensé par le fait qu'une solution de qualité peut être obtenue en utilisant un maillage plus grossier. Le tableau 8.7 illustre ce dernier point. Nous ne tenons compte que des maillages donnant une solution satisfaisante au point de vue de la déformée, soit les maillages 5 à 7 dans le cas de l'utilisation d'éléments SRI et tous les maillages dans le cas de la formulation EAS.

Comme prévu, à maillage égal, la méthode EAS s'avère plus coûteuse. Cependant, le maillage 4 est suffisant lors de l'utilisation d'éléments EAS pour obtenir une bonne précision, alors que le maillage 7 combiné à des éléments SRI est tout juste assez précis. Mais son coût de calcul est 2.5 fois plus élevé que celui du maillage 4.

	Formulation SRI	Formulation EAS
Maillage 1 (7272 éléments)	Sans objet	5h11min
Maillage 2 (9924 éléments)	Sans objet	17h
Maillage 3 (12576 éléments)	Sans objet	39h13min
Maillage 4 (27512 éléments)	Sans objet	17h55min
Maillage 5 (37198 éléments)	36h56min	108h52min
Maillage 6 (57860 éléments)	20h49min	40h52min
Maillage 7 (80960 éléments)	47h40min	97h3min

TAB. 8.7 – Comparaison du coût CPU entre les formulations EAS et SRI pour les différents maillages.

## 8.5 Conclusions

Cette application "grandeur nature" a permis de montrer que les développements proposés dans les chapitres précédents étaient parfaitement applicables à des problèmes à l'échelle industrielle. Les temps de calculs nécessaires à l'obtention de résultats, bien qu'assez élevés, restent acceptables. Néanmoins, comme dans les applications plus simples (voir section 7.5), l'obtention d'une solution de qualité avec endommagement et rupture du matériau passe par un maillage plus fin de la structure que pour des cas non destructifs (telles des études de vibrations). L'utilisation d'éléments finis adaptés (formulation EAS) permet d'atténuer en partie ce surcoût de maillage. La solution numérique proposée est qualitativement en accord avec les observations expérimentales. Malheureusement, il n'existe pas de donnée expérimentale permettant de valider les valeurs numériques prédites par les simulations éléments finis.



# Chapitre 9

## Conclusions générales et perspectives

Le but de ce travail était de développer une méthode de simulation de phénomènes d'impact fortement non linéaires dans le cadre de grandes déformations. Nous nous sommes également attachés à rendre cette méthode utilisable dans le cadre d'une application à l'échelle industrielle.

Le chapitre 2 a permis d'établir un formalisme d'intégration de lois de comportement du matériau adaptées aux sollicitations dynamiques. Ces lois sont de type thermomécanique et sont dépendantes de la vitesse de déformation.

Bien que l'approche délibérément adoptée au départ soit restreinte aux modèles phénoménologiques, l'implémentation proposée est suffisamment générale pour permettre, de manière aisée, l'enrichissement du code par des lois plus évoluées, notamment des lois de comportement multi-échelles, dépendantes de la structure microscopique du matériau. Ces modèles microscopiques, dont le domaine de validité est plus large que celui des lois phénoménologiques implémentées, peuvent s'avérer plus généraux. Ils constituent donc un prolongement naturel de la présente recherche.

Les algorithmes implicites d'intégration temporelle des équations de mouvement présentés au chapitre 3 constituent une contribution originale de ce travail. En effet, les algorithmes de type étagé sont généralement utilisés dans le cadre de processus plus lents (mise à forme,...) qui ne nécessitent pas la prise en compte des effets d'inertie mécanique. Nous avons mesuré l'importance de ces effets d'inertie dans les applications. Généralement, les phénomènes rapides sont intégrés par des algorithmes explicites. Nous avons montré que ces algorithmes thermomécaniques de type étagé se sont avérés très satisfaisants et efficaces au niveau du coût de calcul.

Une perspective intéressante serait d'envisager un schéma thermomécanique étagé couplé à des algorithmes dits "*energy conserving*", tels que ceux utilisés dans le travail de Noels [195], et qui se sont avérés performants dans le cadre de l'étude de pertes d'aube dans des moteurs d'avion.

Le chapitre 5 présente un algorithme d'intégration des lois constitutives avec endommagement. Cet algorithme d'intégration est aussi une des originalités de ce travail. Il s'est avéré plus efficace, en termes de temps de calcul, que les algorithmes d'intégration de la littérature. La technique de calcul de la matrice de raideur tangente matérielle est, elle aussi, originale et présente la particularité d'être formellement indépendante de la loi d'endommagement, ce qui rend très aisée l'implémentation de nouveaux modèles. Cette méthode d'intégration de loi d'endommagement est d'ailleurs utilisée avec succès pour des modèles biomédicaux dans le cadre de problèmes d'orthodontie (voir Mengoni et Ponthot [178]).

Une extension possible de la méthode proposée est l'établissement d'une formulation d'endommagement anisotrope. Cela permettrait de modéliser l'endommagement de matériaux tels que les polymères, les composites... Alors que nous avons choisi d'utiliser la formulation d'endommagement par la méthode de la contrainte effective, il serait également intéressant de comparer cette méthode aux méthodes de déformation effective et d'énergie élastique effective (voir Zhu et al. [283–285]).

Le chapitre 6 a permis de modéliser d'une façon simple la perte de résistance de la structure lorsqu'un critère de rupture est satisfait. L'utilisation d'algorithmes implicites thermomécaniques étagés, couplés à la méthode d'érosion dans le cadre de problèmes dynamiques, est également une originalité, les codes de calcul commerciaux utilisant quant à eux des algorithmes explicites. L'association de ces deux méthodes s'est avérée être une solution robuste et fiable, même si, comme déjà constaté dans la littérature, cette méthode s'est révélée être sensible au maillage. Cependant, la structure du code Metafor permet, en tant que plate-forme numérique, d'implémenter de nouvelles méthodes de propagation de fissure plus efficaces, telles que celle présentées à la section 6.3. Ceci peut faire l'objet de recherches futures en utilisant cette plate-forme d'accueil.

Les pistes d'amélioration de la méthode sont nombreuses, notamment le calcul plus précis d'une direction de propagation de fissure. Une opération de remaillage pourrait également s'avérer être bénéfique, même si celle-ci est très difficile à mettre en œuvre de façon générale dans les cas tridimensionnels. Nous avons également constaté l'existence d'un pas de temps caractéristique dépendant de la taille des mailles. Il pourrait être intéressant d'estimer ce pas de temps pour gagner en efficacité lorsqu'un élément est rompu.

Le dernier chapitre a permis de montrer que toutes les méthodes proposées dans cet ouvrage étaient aisément applicables à un problème tridimensionnel à l'échelle industrielle. Nous avons donc montré l'efficacité de ces méthodes pour un exemple représentatif de phénomène dynamique dans l'aéronautique.

# Annexe A

## Annexes relatives au chapitre 2

### A.1 Résolution de la plasticité pour un matériau thermo-élasto-viscoplastique

#### A.1.1 Données du problème

Le tenseur de Hooke isotrope est donné sous forme indicielle<sup>1</sup> par l'expression :

$$\mathbf{C}(T)_{ijkl} = K(T) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G(T) \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right)$$

où  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  est le module de cisaillement,  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  est le module de compressibilité cubique. Les modules de compressibilité cubique et de cisaillement peuvent varier avec la température (formulation étendue).

En décomposant le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  en ses parties volumique ( $p$ ) et déviatorique ( $\mathcal{S}$ ), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \\ \dot{\mathcal{S}} &= \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{p} \mathbf{I} \end{aligned}$$

En utilisant la loi de Hooke, nous pouvons écrire, vu le caractère déviatorique des déformations plastiques (plasticité de type  $J_2$ ) et le caractère purement volumique des déformations

---

<sup>1</sup>Nous n'envisageons que ce cas dans cette étude.

thermiques<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned}\dot{p} &= K \left( \dot{J} - 3\alpha\dot{T} \right) + \dot{K} (J - 3\alpha\Delta T) \\ &= K \left( \dot{J} - 3\alpha\dot{T} \right) + \frac{\dot{K}}{K} p\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{S}} &= 2G \left( \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) + 2\dot{G} \left( \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \right) \\ &= 2G \left( \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) + \frac{\dot{G}}{G} \mathbf{S}\end{aligned}\tag{A.2}$$

où  $J$  et  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  sont respectivement la trace et la partie déviatorique du tenseur des déformations.

### A.1.2 Normale à la surface de plasticité et déformations plastiques

La normale à la surface de plasticité est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\|} \\ &= \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}}\end{aligned}\tag{A.3}$$

Par la théorie de la plasticité associée, le tenseur des vitesses des déformation plastique s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pl} &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\lambda} \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\lambda} \mathbf{N}\end{aligned}\tag{A.4}$$

Enfin, la vitesse de déformation plastique équivalente est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pl} &= \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pl} : \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{pl}} \\ &= \dot{\lambda}\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Nous considérons que la dilatation thermique a la forme (voir Adam [2]) :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = \alpha\dot{T}\mathbf{I} \rightarrow tr \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} \right) = 3\alpha\dot{T}$$

où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique du matériau.



En intégrant cette dernière expression, il vient classiquement :

$$\bar{\varepsilon}_1^{pl} = \bar{\varepsilon}_0^{pl} + \sqrt{\frac{2}{3}}\Gamma$$

où

$$\Gamma = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 \dot{\lambda} \quad (\text{A.5})$$

Les indicateurs 0 et 1 symbolisent respectivement le début et la fin de l'intervalle temporel. En considérant que la normale à la surface de plasticité est constante le long du pas de temps et prise égale à sa valeur à l'instant 1 (schéma du retour radial), il vient pour le tenseur des incréments des déformations plastiques, en utilisant (A.4) et (A.5) :

$$\Delta \hat{\varepsilon}^{pl} = \Gamma \mathbf{N}_1 \quad (\text{A.6})$$

### A.1.3 Intégration des lois constitutives

Par le principe de décomposition, les équations (A.1) et (A.2) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \begin{cases} K\dot{J} - 3K\alpha\dot{T} & \Rightarrow p_1 = p_0 + K_0(\Delta J - 3\alpha\Delta T) \\ \frac{\dot{K}}{K}p & \Rightarrow p_1 = p_0 \exp \frac{K_1 - K_0}{K_0} \end{cases} \\ \dot{\mathbf{S}} &= \begin{cases} 2G(\dot{\hat{\varepsilon}} - \dot{\hat{\varepsilon}}^{pl}) & \Rightarrow \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_0 + 2G(\Delta \hat{\varepsilon} - \Gamma \mathbf{N}_1) \\ \frac{\dot{G}}{G}\mathbf{S} & \Rightarrow \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_0 \exp \frac{G_1 - G_0}{G_0} \end{cases} \end{aligned}$$

où nous avons fait l'hypothèse de la constance du tenseur des vitesses de déformation le long du pas de temps et où nous avons tenu compte de l'expression du tenseur de variation des déformations plastiques (A.6);  $\Delta \varepsilon$  est le tenseur des déformations naturelles énergétiquement associé au tenseur des contraintes de Cauchy corotationnel  $\boldsymbol{\sigma}$ . Il vient finalement :

$$\begin{aligned} p_1 &\simeq \begin{cases} (p_0 + K_0(\Delta J - 3\alpha\Delta T)) e^{\frac{\Delta K}{K_0}} & \text{intégration du pas mécanique puis thermique} \\ p_0 e^{\frac{\Delta K}{K_0}} + K_1(\Delta J - 3\alpha\Delta T) & \text{intégration du pas thermique puis mécanique} \end{cases} \\ \mathbf{S}_1 &\simeq \begin{cases} (\mathbf{S}_0 + 2G_0(\Delta \hat{\varepsilon} - \Gamma \mathbf{N}_1)) e^{\frac{\Delta G}{G_0}} & \text{intégration du pas mécanique puis thermique} \\ \mathbf{S}_0 e^{\frac{\Delta G}{G_0}} + 2G_1(\Delta \hat{\varepsilon} - \Gamma \mathbf{N}_1) & \text{intégration du pas thermique puis mécanique} \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\Delta K = K_1 - K_0$  et  $\Delta G = G_1 - G_0$ .

Dans notre cas, nous intégrons d'abord la partie mécanique, puis la partie thermique des contraintes, ce qui nous paraît le choix le plus évident, sachant que la variation de température est générée en majorité par les déformations plastiques. Ainsi, en linéarisant

les exponentielles, nous obtenons pour l'intégration des équations (A.1) et (A.2) :

$$\mathbf{S}_1 = \frac{\mathbf{S}_0 + 2G_1\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G_1\Gamma\mathbf{N}_1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} = \frac{\mathbf{S}^{el} - 2G_1\Gamma\mathbf{N}_1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} \quad (\text{A.7})$$

$$p_1 = \frac{p_0 + K_1(\Delta J - 3\alpha\Delta T)}{1 - \frac{\Delta K}{K_1}} \quad (\text{A.8})$$

où le prédicteur élastique des contraintes est défini par :

$$\mathbf{S}^{el} = \mathbf{S}_0 + 2G_1\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{A.9})$$

#### A.1.4 Calcul de la normale à la surface de plasticité

La normale au critère de plasticité (normée à l'unité) est donnée par l'expression<sup>1</sup> :

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}}$$

Ainsi, l'équation de mise à jour des contraintes déviatoriques (A.7) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{S}_1 = \frac{\mathbf{S}^{el} - 2G_1\Gamma\frac{\mathbf{S}_1}{\sqrt{\mathbf{S}_1 : \mathbf{S}_1}}}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} \quad (\text{A.12})$$

ou encore :

$$\left(1 - \frac{\Delta G}{G_1} + \frac{2G_1\Gamma}{\sqrt{\mathbf{S}_1 : \mathbf{S}_1}}\right) \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}^{el}$$

Cette dernière expression indique que, quelle que soit la valeur de  $\Gamma$ , le tenseur des contraintes finales,  $\mathbf{S}_1$ , et le prédicteur élastique des contraintes,  $\mathbf{S}^{el}$ , sont une mise à échelle l'un de l'autre.

Cette constatation entraîne une simplification de la procédure d'intégration en vérifiant que la normale à la surface de plasticité, calculée sur base des contraintes finales  $\mathbf{S}_1$ , est

<sup>1</sup>Par construction, on a pour  $\mathbf{N}$  :

$$\mathbf{N} : \mathbf{N} = 1 \quad (\text{A.10})$$

et donc :

$$\mathbf{N} : d\mathbf{N} = 0 \quad (\text{A.11})$$

égale à celle calculée sur base du prédicteur élastique des contraintes  $\mathbf{S}^{el}$  :

$$\mathbf{N}^{el} = \frac{\mathbf{S}^{el}}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mathbf{S}_1 \left(1 - \frac{\Delta G}{G_1} + \frac{2G_1\Gamma}{\sqrt{\mathbf{S}_1 : \mathbf{S}_1}}\right)}{\sqrt{\mathbf{S}_1 \left(1 - \frac{\Delta G}{G_1} + \frac{2G_1\Gamma}{\sqrt{\mathbf{S}_1 : \mathbf{S}_1}}\right) : \mathbf{S}_1 \left(1 - \frac{\Delta G}{G_1} + \frac{2G_1\Gamma}{\sqrt{\mathbf{S}_1 : \mathbf{S}_1}}\right)}} \\ &= \frac{\mathbf{S}_1}{\sqrt{\mathbf{S}_1 : \mathbf{S}_1}} \\ \mathbf{N}^{el} &= \mathbf{N}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

L'équation (A.12) devient une mise à échelle du prédicteur élastique :

$$\mathbf{S}_1 = \left( \frac{1 - 2G_1\Gamma \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}}}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} \right) \mathbf{S}^{el} \quad (\text{A.15})$$

### A.1.5 Résolution de la plasticité

L'inconnue  $\Gamma$  est déterminée à l'aide du critère de plasticité (2.26) via une procédure de Newton-Raphson classique. Si le critère de plasticité n'est pas vérifié ( $\sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S} : \mathbf{S}} > \sigma_{yield}$ ), il y a plastification et il faut donc déterminer l'incrément de déformation plastique équivalente qui vérifie l'équation (2.26).

Soit  $\Gamma^{(i)}$  la valeur de l'inconnue à l'itération  $i$ . On a l'équation suivante :

$$\sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S}^{(i)} : \mathbf{S}^{(i)}} - \sigma_{yield} - \sigma_{visq} = residu_{\Gamma^{(i)}} \quad (\text{A.16})$$

Une meilleure solution  $\Gamma^{(i+1)}$  définie par :

$$\Gamma^{(i+1)} = \Gamma^{(i)} + \Delta\Gamma$$

peut être trouvée par une linéarisation de l'équation (A.16) autour de  $\Gamma^{(i)}$  :

$$residu_{\Gamma^{(i+1)}} = residu_{\Gamma^{(i)}} + \left. \frac{\partial residu_{\Gamma}}{\partial \Gamma} \right]^{(i)} \Delta\Gamma = 0$$

ou encore :

$$\Delta\Gamma = - \frac{residu_{\Gamma^{(i)}}}{\left. \frac{\partial residu_{\Gamma}}{\partial \Gamma} \right]^{(i)}} \quad (\text{A.17})$$

### A.1.6 Calcul de $\Gamma$

Pour trouver la valeur de  $\Gamma$  à partir de la relation (A.17), il reste à calculer la dérivée du critère de plasticité par rapport à  $\Gamma$ .

En introduisant l'expression des contraintes (A.15) dans la définition du critère de plasticité (2.26), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 f &= \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_1 : \mathbf{S}_1} - \sigma_{crit} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \left( 1 - 2G_1 \Gamma \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}} \right) \sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}} - \sigma_{crit} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}} - 2G_1 \Gamma \right) - \sigma_{crit}
 \end{aligned}$$

Le calcul de la dérivée du critère devient :

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{d\Gamma} &= \frac{d}{d\Gamma} \left( \frac{1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}} - 2G_1 \Gamma \right) \right) - \frac{d\sigma_{crit}}{d\Gamma} \\
 &= -\frac{2G_1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \tilde{h}
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

où  $\tilde{h}$  est le taux d'érouissage modifié par les contraintes visqueuses :

$$\tilde{h} = h_{yield} + h_{visq} \tag{A.19}$$

Dès lors, la mise à jour de  $\Gamma$  par la procédure de Newton-Raphson (voir équation (A.17)) est donnée par :

$$\Delta\Gamma = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_1 : \mathbf{S}_1} - \sigma_{crit}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{2G_1}{1 - \frac{\Delta G}{G_1}} + \frac{2}{3} \tilde{h} \right)} \tag{A.20}$$

### A.1.7 Dissipation plastique

Il vient pour la dissipation plastique :

$$\begin{aligned}
 D^{pl} &= \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} \\
 &= \mathbf{S} : \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\lambda} \mathbf{N} \right) \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\lambda} \mathbf{S} : \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}} \\
 D^{pl} &= \sigma_{eq} \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}^{pl}
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

## A.2 Matrice de raideur tangente analytique

Le but de cette annexe est de calculer les termes  $\frac{d\Gamma}{d\boldsymbol{\varepsilon}}$  et  $\frac{d\mathbf{N}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}$  de l'équation (2.42).

### A.2.1 Calcul de la dérivée de $\Gamma$

La variation de  $\Gamma$  se calcule à l'aide du critère de plasticité (2.26) :

$$\frac{df}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S} : \frac{d\mathbf{S}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}}{\sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}} - \frac{d\sigma_{yield}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{d\sigma_{visq}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$$

En utilisant la relation (2.42), l'expression de la normale à la surface de plasticité (2.34) et la relation (A.19), il vient :

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N} : \left( 2G^* \frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G^* \mathbf{N} \frac{d\Gamma}{d\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G^* \Gamma \frac{d\mathbf{N}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right) - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d\Gamma}{d\boldsymbol{\varepsilon}} (h_{yield} + h_{visq}) = 0$$

En tenant compte des relations (A.10) et (A.11), nous pouvons écrire :

$$\sqrt{\frac{3}{2}} 2G^* \mathbf{N} : \frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d\Gamma}{d\boldsymbol{\varepsilon}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d\Gamma}{d\boldsymbol{\varepsilon}} (h_{yield} + h_{visq}) = 0 \quad (\text{A.22})$$

En regroupant les termes en  $\frac{d\Gamma}{d\boldsymbol{\varepsilon}}$ , on obtient l'expression suivante de la dérivée de  $\Gamma$  par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\frac{d\Gamma}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\mathbf{N} : \frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}}{1 + \frac{1}{3G^*} (h_{yield} + h_{visq})}$$

Notons encore, vu le caractère déviatorique du tenseur  $\mathbf{N}$ , qu'on a :

$$\mathbf{N} : \frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{N} \quad (\text{A.23})$$

En posant :

$$\boxed{\kappa = 1 + \frac{1}{3G^*} (h_{yield} + h_{visq})} \quad (\text{A.24})$$

il vient donc :

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\mathbf{N}}{\kappa}} \quad (\text{A.25})$$

### A.2.2 Calcul de la dérivée de la normale à la surface de plasticité

Nous obtenons successivement, en utilisant (2.34), pour le calcul de la dérivée de la normale à la surface de plasticité  $\mathbf{N}$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{N}}{d\varepsilon} &= \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\mathbf{S}^{el}}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}} \right) \\
 &= \frac{\frac{d\mathbf{S}^{el}}{d\varepsilon}}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}} - \frac{\mathbf{S}^{el}}{(\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el})^{\frac{3}{2}}} \otimes \left( \mathbf{S}^{el} : \frac{d\mathbf{S}^{el}}{d\varepsilon} \right) \\
 &= \frac{\frac{d\mathbf{S}^{el}}{d\varepsilon}}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}} - \frac{\mathbf{N}}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}} \otimes \left( \mathbf{N} : \frac{d\mathbf{S}^{el}}{d\varepsilon} \right) \\
 &= \frac{2G \left( \frac{d\hat{\varepsilon}}{d\varepsilon} - \mathbf{N} \otimes \left( \mathbf{N} : \frac{d\hat{\varepsilon}}{d\varepsilon} \right) \right)}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}}
 \end{aligned}$$

En tenant compte de (A.23), il vient finalement :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{N}}{d\varepsilon} = \frac{2G \left( \frac{d\hat{\varepsilon}}{d\varepsilon} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right)}{\sqrt{\mathbf{S}^{el} : \mathbf{S}^{el}}}} \quad (\text{A.26})$$

# Annexe B

## Annexes relatives au chapitre 5

### B.1 Introduction

Le but de cette annexe est de montrer le cheminement complet de l'établissement de l'expression de la matrice de raideur tangente matérielle pour un modèle thermo-élasto-viscoplastique avec endommagement du comportement du matériau.

### B.2 Grandeurs mises en jeu

Rappelons les expressions des différentes grandeurs intervenant dans l'intégration des contraintes et de l'endommagement. Nous avons les relations suivantes pour la mise à jour des contraintes en utilisant la définition du prédicteur élastique des contraintes (5.38) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(p, \mathbf{S}) = \mathbf{S} + p\mathbf{I} \quad (\text{B.1})$$

$$p = p(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = (1 - D)\tilde{p}_0^* + K^*(1 - D)(\Delta J - 3\alpha\Delta T) \quad (\text{B.2})$$

$$= (1 - D)\tilde{p}^{el,*} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}, D, \Delta r, \mathbf{N}) = (1 - D)\tilde{\mathbf{S}}_0^* + 2G^*(1 - D)\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - 2G^*\sqrt{\frac{3}{2}}\Delta r\mathbf{N} \quad (\text{B.4})$$

$$= (1 - D)\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} - 2G^*\sqrt{\frac{3}{2}}\Delta r\mathbf{N} \quad (\text{B.5})$$

où :

- $K^* = \frac{K}{1 - \frac{\Delta K}{K}}$
- $G^* = \frac{G}{1 - \frac{\Delta G}{G}}$
- $\tilde{p}_0^* = \frac{p_0}{(1 - D_0)(1 - \frac{\Delta K}{K})}$

- $\tilde{p}^{el,*} = \frac{\tilde{p}^{el}}{1 - \frac{\Delta K}{K}}$
- $\tilde{\mathbf{S}}_0^* = \frac{\mathbf{S}_0}{(1 - D_0)(1 - \frac{\Delta G}{G})}$
- $\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} = \frac{\tilde{\mathbf{S}}^{el}}{1 - \frac{\Delta G}{G}}$

La normale à la surface de plasticité  $\mathbf{N}$  s'écrit :

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\tilde{\mathbf{S}}_0^* + 2G^* \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\left\| \tilde{\mathbf{S}}_0^* + 2G^* \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\|} = \frac{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*}}{\left\| \tilde{\mathbf{S}}^{el,*} \right\|} = \frac{\tilde{\mathbf{S}}^{el}}{\left\| \tilde{\mathbf{S}}^{el} \right\|} \quad (\text{B.6})$$

L'incrément de déformation plastique équivalente  $\Delta r$  et la variable d'endommagement  $D$  sont les deux variables indépendantes du problème, fonctions de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Leur loi d'évolution sont déterminées par le critère de plasticité d'une part, et par la loi d'évolution de l'endommagement  $g$  d'autre part :

$$f = f(D, \mathbf{S}, \Delta r) = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}}{1 - D}} - \sigma_{crit}(\Delta r) \quad (\text{B.7})$$

$$D = D(\boldsymbol{\varepsilon}) = D_0 + g(\mathbf{S}, p, \Delta r, D, \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (\text{B.8})$$

### B.3 Différentiation des grandeurs mises en jeu

Dans cette section, nous écrivons formellement l'expression des dérivées des grandeurs mises en jeu :  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $p$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $f$  et  $D$ . Une dérivée partielle indique une dépendance explicite en la variable. Il vient donc en utilisant les expressions (B.1) à (B.8) :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{d\mathbf{S}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p} \otimes \frac{dp}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} \otimes \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} \otimes \frac{\partial \Delta r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{dp}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial p}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{df}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{d\mathbf{S}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r} \frac{\partial \Delta r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{dg}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \frac{d\mathbf{S}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{dp}{d\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \frac{\partial \Delta r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial g}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.13})$$



En introduisant les expressions (B.11) et (B.10) dans les expressions (B.9), (B.12) et (B.13), nous pouvons exprimer de manière explicite les dérivées du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , du critère de plasticité  $f$  et de l'endommagement  $D$  par rapport au tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = & \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} \otimes \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} \otimes \frac{\partial \Delta r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \\ & + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p} \otimes \left( \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial p}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} \otimes \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} \otimes \frac{\partial \Delta r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \\ & + \frac{\partial f}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r} \frac{\partial \Delta r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = & \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} \otimes \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} \otimes \frac{\partial \Delta r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \\ & + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \frac{\partial \Delta r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial g}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

## B.4 Dérivées formelles de $\Delta r$ et $D$

Dans les expressions (B.10), (B.11), (B.14), (B.15) et (B.16), toutes les dérivées explicites sont connues à partir des expressions (B.1) à (B.8), à l'exception des dérivées de l'incrément de déformation plastique  $\Delta r$  et de l'endommagement  $D$ . Ces deux expressions sont déduites du critère de plasticité et de la loi d'évolution d'endommagement.

En combinant les expressions (B.15) et (B.16) et en tenant compte de la stationnarité du critère de plasticité ( $\frac{df}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$ ), nous pouvons isoler les termes  $\frac{\partial \Delta r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  et  $\frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ .

On a tout d'abord pour le critère de plasticité en regroupant les termes en  $\frac{\partial \Delta r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ ,  $\frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r} \right) \frac{\partial \Delta r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} + \frac{\partial f}{\partial D} \right) \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 0$$

ou encore :

$$\frac{\partial \Delta r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} + \frac{\partial f}{\partial D}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.17})$$

En regroupant les termes en  $\frac{\partial \Delta r}{\partial \varepsilon}$  et  $\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}$  dans (B.16) et en y insérant cette dernière expression, il vient ensuite :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \\
&+ \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial D} + \frac{\partial g}{\partial D} \right) \frac{\partial D}{\partial \varepsilon} + \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \right) \frac{\partial \Delta r}{\partial \varepsilon} \\
&= \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \\
&+ \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial D} + \frac{\partial g}{\partial D} \right) \frac{\partial D}{\partial \varepsilon} \\
&- \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \right) \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} + \frac{\partial f}{\partial D}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \frac{\partial D}{\partial \varepsilon} \\
&- \left( \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \right) \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}}
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'expression de la dérivée de la variable d'endommagement  $D$  en fonction des dérivées de la loi d'évolution d'endommagement  $g$ , des dérivées du critère de plasticité  $f$  et des contraintes  $p$  et  $\mathbf{S}$  :

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon} = \frac{\frac{\partial g}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \mathbf{A}_1 - \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \mathbf{A}_2 + \frac{\partial g}{\partial p} \mathbf{A}_3}{1 + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \mathbf{B}_1 + \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \mathbf{B}_2 - \frac{\partial g}{\partial p} \mathbf{B}_3 - \frac{\partial g}{\partial D}} \quad (\text{B.18})$$

avec

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} \otimes \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{A}_3 = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \quad (\text{B.21})$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} + \frac{\partial f}{\partial D}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} - \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} + \frac{\partial f}{\partial D}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \quad (\text{B.23})$$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\partial p}{\partial D} \quad (\text{B.24})$$

## B.5 Ecriture formelle de la matrice de raideur

En insérant l'expression (B.17) dans l'égalité (B.14), nous obtenons l'expression générale de la matrice de raideur tangente matérielle :

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} \otimes \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p} \otimes \left( \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial p}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} \right) \otimes \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} + \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} + \frac{\partial f}{\partial D}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \end{aligned}$$

ou encore en regroupant les termes en  $\frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p} \otimes \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \\ &\quad - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} \right) \otimes \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \\ &\quad + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial D} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} + \frac{\partial f}{\partial D}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} \right) \otimes \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned}$$

Il vient finalement :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d'\boldsymbol{\sigma}}{d'\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\Delta r} \otimes \frac{d\Delta r}{d\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dD} \otimes \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.25})$$

où nous avons posé :

$$\frac{d'\boldsymbol{\sigma}}{d'\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p} \otimes \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\Delta r} = - \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{d\Delta r}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dD} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial D} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} + \frac{\partial f}{\partial D}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} \quad (\text{B.29})$$

L'expression de  $\frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  est donnée par (B.18).

Dans l'expression (B.25), nous constatons que la matrice de raideur se décompose en un terme relatif au tenseur des déformations (B.26), suivi d'un terme relatif à la variable de plasticité  $\Delta r$  par les équations (B.27) et (B.28), et enfin d'un terme prenant en compte les effets de l'endommagement  $D$  au travers des expressions (B.18) et (B.29).

## B.6 Décomposition en termes volumique et déviatorique

Le tenseur des déformations est décomposé en ses parties volumique et déviatorique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{J}{3} \mathbf{I} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.30})$$

où  $J = tr(\boldsymbol{\varepsilon})$ . On a pour les dérivées de la trace  $\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  et de la partie déviatorique  $\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  du tenseur des déformations par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{I} \\ \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}} &= \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \end{aligned}$$

En définissant le tenseur du quatrième ordre  $\boldsymbol{\Delta}$  de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\Delta}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{B.31})$$

Il vient :

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\Delta} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{B.32})$$

On a donc, pour la dérivée par rapport au tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  d'une grandeur scalaire  $x$  quelconque, la décomposition suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial x}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial x}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.33})$$

Dans le cas du calcul de la dérivée d'une grandeur  $\boldsymbol{x}$  tensorielle d'ordre 2 par rapport au tenseur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , on a la décomposition en partie volumique et déviatorique suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial J} \otimes \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.34})$$

La matrice de raideur donnée par l'expression (B.25) s'écrit donc selon cette décomposition :

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{d'\boldsymbol{\sigma}}{d'J} \otimes \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{d'\boldsymbol{\sigma}}{d'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\Delta r} \otimes \left( \frac{d\Delta r}{dJ} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\Delta r} \otimes \left( \frac{d\Delta r}{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \\ &\quad + \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dD} \otimes \left( \frac{dD}{dJ} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dD} \otimes \left( \frac{dD}{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \end{aligned}$$

Le tenseur des contraintes déviatoriques  $\boldsymbol{S}$  (expression (B.4)), ainsi que la normale à la surface de plasticité  $\boldsymbol{N}$  (expression (B.6)), ne dépendent que des déformations déviatoriques  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , tandis que la pression  $p$  (expression (B.2)) est fonction de la déformation

volumique  $J$  uniquement. Ainsi, l'expression (B.28) n'a qu'une composante déviatorique et  $\frac{d\Delta r}{dJ} = 0$ .

La matrice de raideur  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  donnée par l'expression (B.25) peut donc se décomposer en une partie volumique et une partie déviatorique :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma}{dJ} \otimes \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} + \frac{d\sigma}{d\hat{\varepsilon}} : \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} = \mathbf{H}^{vol} + \mathbf{H}^{dev} \quad (\text{B.35})$$

$$\mathbf{H}^{vol} = \frac{d'\sigma}{d'J} \otimes \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} + \frac{d\sigma}{dD} \otimes \left( \frac{dD}{dJ} \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \right) \quad (\text{B.36})$$

$$\mathbf{H}^{dev} = \frac{d'\sigma}{d'\hat{\varepsilon}} : \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} + \frac{d\sigma}{d\Delta r} \otimes \left( \frac{d\Delta r}{d\hat{\varepsilon}} : \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{d\sigma}{dD} \otimes \left( \frac{dD}{d\hat{\varepsilon}} : \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right) \quad (\text{B.37})$$

avec :

$$\frac{d'\sigma}{d'J} = \frac{\partial \sigma}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial J} \quad (\text{B.38})$$

$$\frac{d'\sigma}{d'\hat{\varepsilon}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \hat{\varepsilon}} + \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\varepsilon}} \quad (\text{B.39})$$

$$\frac{d\Delta r}{d\hat{\varepsilon}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \hat{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\varepsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{\partial D}{\partial J} = \frac{\frac{\partial g}{\partial J} + \frac{\partial g}{\partial p} A'_3}{1 + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \mathbf{B}_1 + \frac{\partial g}{\partial \Delta r} B_2 - \frac{\partial g}{\partial p} B_3 - \frac{\partial g}{\partial D}} \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \hat{\varepsilon}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial \hat{\varepsilon}} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \mathbf{A}'_1 - \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \mathbf{A}'_2}{1 + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \mathbf{B}_1 + \frac{\partial g}{\partial \Delta r} B_2 - \frac{\partial g}{\partial p} B_3 - \frac{\partial g}{\partial D}} \quad (\text{B.42})$$

où les coefficients  $\mathbf{A}'_1$  à  $A'_3$  sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_1 &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \hat{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\varepsilon}} - \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} \otimes \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \hat{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\varepsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \hat{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\varepsilon}} - \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} \otimes \frac{d\Delta r}{d\hat{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

$$\mathbf{A}'_2 = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \hat{\varepsilon}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\varepsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} = \frac{d\Delta r}{d\hat{\varepsilon}} \quad (\text{B.44})$$

$$A'_3 = \frac{\partial p}{\partial J} \quad (\text{B.45})$$

Le couplage entre les parties volumique et déviatorique de la matrice de raideur se matérialise donc via l'expression de la dérivée de l'endommagement qui possède une composante volumique (B.41) et déviatorique (B.42).

Nous avons à présent tous les éléments pour calculer toutes les expressions contenues dans (B.36) et (B.37) à partir des expressions des contraintes (B.1) à (B.5), du critère de plasticité (B.7), de la normale au critère de plasticité (B.6) et de l'évolution de l'endommagement (B.8). La loi d'évolution de l'endommagement  $g$  dépend du modèle d'endommagement considéré. Ainsi, par exemple, dans la loi d'évolution d'endommagement de Lemaitre décrite au paragraphe 5.4.2.1, on a l'expression suivante de  $g$  :

$$g = \left( \frac{\frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu)p^2}{2ES(1-D)^2} \right)^s \frac{\Delta r}{1-D}$$

Il vient donc :

$$\frac{\partial g}{\partial J} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{6s(1-2\nu)p}{(2ES(1-D)^2)^s} \left( \frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu)p^2 \right)^{s-1} \frac{\Delta r}{1-D}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} = \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}(1+\nu)\mathbf{S}}{(2ES(1-D)^2)^s} \left( \frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu)p^2 \right)^{s-1} \frac{\Delta r}{1-D}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \Delta r} = \left( \frac{\frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu)p^2}{2ES(1-D)^2} \right)^s \frac{1}{1-D}$$

$$\frac{\partial g}{\partial D} = \left( \frac{\frac{2}{3}(1+\nu)\sigma_{eq}^2 + 3(1-2\nu)p^2}{2ES} \right)^s \frac{(2s+1)\Delta r}{(1-D)^{2s+2}}$$

## B.7 Expression des dérivées explicites

### B.7.1 Dérivées des contraintes

Il vient tout d'abord pour le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  (B.1) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p} = \mathbf{I} \quad (\text{B.46})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} = \boldsymbol{\Delta} \quad (\text{B.47})$$

Pour la pression (B.2), on a les expressions suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial J} = K^*(1-D) \quad (\text{B.48})$$

$$\frac{\partial p}{\partial D} = -\tilde{p}_0^* - K^* (\Delta J - 3\alpha\Delta T) = -\tilde{p}^{el,*} \quad (\text{B.49})$$

Enfin, les dérivées des contraintes déviatoriques (B.4) sont données par :

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = 2G^* (1 - D) \boldsymbol{\Delta} \quad (\text{B.50})$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} = -2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N} \quad (\text{B.51})$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} = -\tilde{\mathbf{S}}_0^* - 2G^* \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} \quad (\text{B.52})$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} = -2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta r \boldsymbol{\Delta} \quad (\text{B.53})$$

### B.7.2 Dérivées du critère de plasticité

Les dérivées explicites du critère de plasticité (B.7) par rapport à  $\mathbf{S}$ ,  $\Delta r$  et  $D$  sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-D} \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{\mathbf{S}:\mathbf{S}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-D} \mathbf{N} \quad (\text{B.54})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta r} = -\tilde{h}^1 \quad (\text{B.55})$$

$$\frac{\partial f}{\partial D} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{(1-D)^2} \sqrt{\mathbf{S}:\mathbf{S}} \quad (\text{B.56})$$

### B.7.3 Dérivée de la normale à la surface de plasticité

Calculons tout d'abord la dérivée du prédicteur élastique des contraintes :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}^{el}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \left\{ \tilde{\mathbf{S}}_0 + 2G\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\} = 2G\boldsymbol{\Delta}$$

---

<sup>1</sup> $\tilde{h}$  est le taux d'érouissage viscoplastique -cf. page 142.

En tenant compte de cette dernière expression, la dérivée de la normale à la surface de plasticité s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{S}}^{el}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} \right\} \\
&= \frac{2G\boldsymbol{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} - \frac{\tilde{\mathbf{S}}^{el} \otimes (\tilde{\mathbf{S}}^{el} : (2G\boldsymbol{\Delta}))}{\left(\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}\right)^3} \\
&= \frac{2G}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} (\boldsymbol{\Delta} - \mathbf{N} \otimes (\mathbf{N} : \boldsymbol{\Delta})) \\
\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \frac{2G}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} (\boldsymbol{\Delta} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \tag{B.57}
\end{aligned}$$

où nous avons tenu compte du caractère déviatorique de la normale à la surface de plasticité.

## B.8 Calcul de $\frac{d' \boldsymbol{\sigma}}{dJ}$ et $\frac{d' \boldsymbol{\sigma}}{d' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}$

A l'aide des expressions (B.46) et (B.48), il vient pour la définition (B.38) de  $\frac{d' \boldsymbol{\sigma}}{dJ}$  :

$$\frac{d' \boldsymbol{\sigma}}{d' J} = K^* (1 - D) \mathbf{I} \tag{B.58}$$

Ensuite, on a pour la définition (B.39)  $\frac{d' \boldsymbol{\sigma}}{d' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  à l'aide des relations (B.47), (B.50), (B.53) et (B.57) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= 2G^* (1 - D) \boldsymbol{\Delta} \\
\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \boldsymbol{\Delta} : \left( -2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta r \boldsymbol{\Delta} \right) : \left( \frac{2G}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} (\boldsymbol{\Delta} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \right) \\
&= -2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta r \boldsymbol{\Delta} : \left( \frac{2G}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} (\boldsymbol{\Delta} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \right) \\
&= -2G^* \frac{2G \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta r}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} (\boldsymbol{\Delta} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \\
&= 2G^* (1 - D) (\beta - 1) (\boldsymbol{\Delta} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N})
\end{aligned}$$



où  $\beta$  est défini comme dans le cas des lois constitutives sans endommagement par :

$$\beta = 1 - \frac{2G\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Delta r}{1-D}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} \quad (\text{B.59})$$

Nous obtenons finalement :

$$\frac{d'\boldsymbol{\sigma}}{d'\hat{\varepsilon}} = 2G^*(1-D)\beta\boldsymbol{\Delta} - (\beta-1)\mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \quad (\text{B.60})$$

## B.9 Calcul de $\frac{d\Delta r}{d\hat{\varepsilon}}$

Il vient pour le numérateur de (B.28) en utilisant successivement les relations (B.54), (B.50), (B.53), (B.57) et (B.61) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \hat{\varepsilon}} &= \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-D} \mathbf{N} \right) : (2G^*(1-D)\boldsymbol{\Delta}) = 2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N} \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{N}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \hat{\varepsilon}} &= \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-D} \mathbf{N} \right) : \left( -2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta r \boldsymbol{\Delta} \right) : \\ &\quad \left( \frac{2G}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} (\boldsymbol{\Delta} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \right) \\ &= \left( -\frac{3}{2} \frac{2G^* \Delta r}{1-D} \mathbf{N} \right) : \left( \frac{2G}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} (\boldsymbol{\Delta} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \right) \\ &= -\frac{3}{2} \frac{2G^* \Delta r}{1-D} \frac{2G}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} (\mathbf{N} - \mathbf{N}) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Le dénominateur de (B.28) s'écrit quant à lui en utilisant successivement les relations (B.54), (B.51) et (B.55) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r} &= - \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-D} \mathbf{N} \right) : \left( 2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N} \right) - \tilde{h} \\ &= -\frac{3G^*}{1-D} - \tilde{h} \\ &= -\frac{3G^*}{1-D} \left( 1 + \frac{\tilde{h}(1-D)}{3G^*} \right) \\ &= -\frac{3G^*}{1-D} \kappa \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r} = -\frac{3G^*}{1-D} \kappa \quad (\text{B.61})$$

où nous avons défini, comme au chapitre 2 :

$$\kappa = 1 + \frac{\tilde{h}(1-D)}{3G^*} \quad (\text{B.62})$$

Il vient donc :

$$\frac{d \Delta r}{d \hat{\epsilon}} = \frac{2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N}}{-\frac{3G^*}{1-D} \kappa} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1-D}{\kappa} \mathbf{N} \quad (\text{B.63})$$

## B.10 Calcul de $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dD}$

Rappelons l'expression (B.29) à calculer :

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dD} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial D} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} + \frac{\partial f}{\partial D}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r}$$

On a tout d'abord en utilisant (B.46) et (B.49) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial D} = -\tilde{p}^{el,*} \mathbf{I} \quad (\text{B.64})$$

Ensuite, vu les expressions (B.47) et (B.52), il vient :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} = -\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} \quad (\text{B.65})$$

Calculons à présent le terme relatif au critère de plasticité. On a tout d'abord en utilisant les relations (B.47) et (B.51) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} = -2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N}$$

Il vient ensuite pour le numérateur de la fraction en utilisant successivement les relations (B.54), (B.52), (5.44) et (B.56) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-D} \mathbf{N} : \left( -\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} \right) \\ &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}}}{1-D} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial D} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}}{(1-D)^2}$$

Le numérateur du terme relatif au critère de plasticité s'écrit donc simplement :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} + \frac{\partial f}{\partial D} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-D} \left( \sqrt{\widetilde{\mathbf{S}} : \widetilde{\mathbf{S}}} - \sqrt{\widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \widetilde{\mathbf{S}}^{el,*}} \right) \quad (\text{B.66})$$

Le dénominateur est quant à lui identique à l'expression (B.61). Le terme relatif au critère de plasticité s'écrit donc :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial D} + \frac{\partial f}{\partial D}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} + \frac{\partial f}{\partial \Delta r}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta r} = \frac{\sqrt{\widetilde{\mathbf{S}} : \widetilde{\mathbf{S}}} - \sqrt{\widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \widetilde{\mathbf{S}}^{el,*}}}{\kappa} \mathbf{N} \quad (\text{B.67})$$

L'expression  $\frac{d\sigma}{dD}$  s'écrit donc :

$$\frac{d\sigma}{dD} = -\tilde{p}^{el,*} \mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} - \frac{\sqrt{\widetilde{\mathbf{S}} : \widetilde{\mathbf{S}}} - \sqrt{\widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \widetilde{\mathbf{S}}^{el,*}}}{\kappa} \mathbf{N}$$

Cette dernière expression peut se simplifier. Montrons tout d'abord que :

$$\beta = \frac{\sqrt{\widetilde{\mathbf{S}} : \widetilde{\mathbf{S}}}}{\sqrt{\widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \widetilde{\mathbf{S}}^{el,*}}}$$

En effet, on a, en utilisant successivement les relations (5.41), (5.44) et (5.30) :

$$\begin{aligned} \sqrt{\widetilde{\mathbf{S}} : \widetilde{\mathbf{S}}} &= \sqrt{\left( \widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} - 2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta r}{1-D} \mathbf{N} \right) : \left( \widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} - 2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta r}{1-D} \mathbf{N} \right)} \\ &= \sqrt{\widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} - 4G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta r}{1-D} \mathbf{N} : \widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} + \left( 2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta r}{1-D} \right)^2 \mathbf{N} : \mathbf{N}} \\ &= \sqrt{\widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} - 4G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta r}{1-D} \sqrt{\widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \widetilde{\mathbf{S}}^{el,*}} + \left( 2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta r}{1-D} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left( \sqrt{\widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \widetilde{\mathbf{S}}^{el,*}} - 2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta r}{1-D} \right)^2} \\ &= \sqrt{\widetilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \widetilde{\mathbf{S}}^{el,*}} - 2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta r}{1-D} \end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé en mettant en évidence  $\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}}$ . Il vient donc :

$$\sqrt{\tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{S}}} = \beta \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}}$$

ou encore :

$$\sqrt{\tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{S}}} - \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}} = (\beta - 1) \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}} \quad (\text{B.68})$$

L'expression  $\frac{d\sigma}{dD}$  s'écrit donc finalement :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dD} &= -\tilde{p}^{el,*} \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}^{el,*} - \frac{(\beta - 1) \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}}}{\kappa} \mathbf{N} \\ &= -\tilde{p}^{el,*} \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}^{el,*} - \frac{\beta - 1}{\kappa} \tilde{\mathbf{S}}^{el,*} \\ \frac{d\sigma}{dD} &= -\tilde{p}^{el,*} \mathbf{I} - \left(1 + \frac{\beta - 1}{\kappa}\right) \tilde{\mathbf{S}}^{el,*} \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

## B.11 Calcul de $\frac{dD}{d\varepsilon}$

Nous allons à présent calculer la dérivée de l'endommagement donnée par l'expression (B.18) et pour cela calculer les termes  $\mathbf{A}'_1$  (expression (B.43)) à  $\mathbf{A}'_3$  (expression (B.45)) et  $B_1$  (expression (B.22)) à  $B_3$  (expression (B.24)).

Le coefficient  $\mathbf{A}'_1$  s'écrit à partir des relations (B.50), (B.53), (B.57), (B.51) et (B.63) :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_1 &= 2G^* (1 - D) \Delta \\ &\quad - \left(2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta r \Delta\right) : \left(\frac{2G}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} (\Delta - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N})\right) \\ &\quad - 2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N} \otimes \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1 - D}{\kappa} \mathbf{N}\right) \\ &= 2G^* (1 - D) \Delta \\ &\quad - 2G^* (1 - D) \frac{2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta r}{1 - D}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el} : \tilde{\mathbf{S}}^{el}}} (\Delta - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \\ &\quad - \frac{2G^* (1 - D)}{\kappa} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \\ \mathbf{A}'_1 &= 2G^* (1 - D) \left(\beta \Delta - \left(\frac{1}{\kappa} + \beta - 1\right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

Vu la relation (B.63), le coefficient  $A'_2$  s'écrit :

$$A'_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1-D}{\kappa} \mathbf{N}$$

Le coefficient  $A'_3$  s'écrit :

$$A'_3 = K^* (1-D) \quad (\text{B.71})$$

Le terme  $B_1$  s'écrit immédiatement à partir de (B.66), (B.61), (B.51), (B.52), (B.68) et (5.44) :

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-D} \left( \sqrt{\tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{S}}} - \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}} \right)}{-\frac{3G^*}{1-D} \kappa} \left( -2G^* \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N} \right) + \tilde{\mathbf{S}}^{el,*} \\ &= \left( \frac{\beta-1}{\kappa} \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}} \right) \mathbf{N} + \tilde{\mathbf{S}}^{el,*} \\ B_1 &= \left( \frac{\beta-1}{\kappa} + 1 \right) \tilde{\mathbf{S}}^{el,*} \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

Le terme  $B_2$  s'écrit également à partir de (B.66), (B.61) et (B.68) :

$$B_2 = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-D} \left( \sqrt{\tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{S}}} - \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}} \right)}{-\frac{3G^*}{1-D} \kappa} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\beta-1}{3G^* \kappa} \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}} \quad (\text{B.73})$$

Enfin, le terme  $B_3$  s'identifie à l'expression (B.49) :

$$B_3 = -\tilde{p}^{el,*} \quad (\text{B.74})$$

En regroupant les termes (B.70) à (B.74), nous obtenons pour les expressions des dérivées de l'endommagement volumique  $\frac{\partial D}{\partial J}$  (B.41) et déviatorique  $\frac{\partial D}{\partial \hat{\varepsilon}}$  (B.42) :

$$\frac{\partial D}{\partial J} = \frac{\frac{\partial g}{\partial J} + \frac{\partial g}{\partial p} K^* (1-D)}{\zeta} \quad (\text{B.75})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \hat{\varepsilon}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial \hat{\varepsilon}} + 2G^* (1-D) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \left( \beta \mathbf{\Delta} - \left( \frac{1}{\kappa} + \beta - 1 \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right) + \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1-D}{\kappa} \mathbf{N}}{\zeta} \quad (\text{B.76})$$

avec

$$\zeta = 1 + \left( \frac{\beta-1}{\kappa} + 1 \right) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*} - \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\beta-1}{3G^* \kappa} \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}} + \frac{\partial g}{\partial p} \tilde{p}^{el,*} - \frac{\partial g}{\partial D} \quad (\text{B.77})$$

## B.12 Expression finale de la matrice de raideur tangente analytique

Nous pouvons à présent donner l'expression générale de la matrice de raideur tangente matérielle. Notons que cette expression est indépendante de la forme de la loi d'évolution de l'endommagement. La seule hypothèse est que l'évolution de l'endommagement ne peut dépendre que des contraintes, de la pression, de l'incrément de déformation plastique équivalente, de l'endommagement et du tenseur des déformations, ce qui est le cas des modèles présentés dans la section 5.4. Comme présenté dans la section B.6, on peut séparer cette matrice en une partie volumique  $\mathbf{H}^{vol}$  (respectivement déviatorique  $\mathbf{H}^{dev}$ ) qu'on prend en compte aux points de Gauss volumiques (respectivement déviatoriques) donnée par l'expression (B.36) (respectivement (B.37)).

La partie volumique de la matrice de raideur tangente matérielle s'écrit :

$$\mathbf{H}^{vol} = K^* (1 - D) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{\partial D}{\partial J} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dD} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{B.78})$$

D'autre part, la partie déviatorique s'écrit :

$$\mathbf{H}^{dev} = 2G^* (1 - D) \left( \beta \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \left( \frac{1}{\kappa} + \beta - 1 \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right) + \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dD} \otimes \left( \frac{\partial D}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad (\text{B.79})$$

avec

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dD} = -\tilde{p}^{el,*} \mathbf{I} - \left( 1 + \frac{\beta - 1}{\kappa} \right) \tilde{\mathbf{S}}^{el,*} \quad (\text{B.80})$$

$$\frac{\partial D}{\partial J} = \frac{1}{\zeta} \left( \frac{\partial g}{\partial J} + K^* (1 - D) \frac{\partial g}{\partial p} \right) \quad (\text{B.81})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{\zeta} \left[ \frac{\partial g}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1 - D}{\kappa} \mathbf{N} + 2G^* (1 - D) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \left( \beta \boldsymbol{\Delta} - \left( \frac{1}{\kappa} + \beta - 1 \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right) \right] \quad (\text{B.82})$$

$$\zeta = 1 + \left( \frac{\beta - 1}{\kappa} + 1 \right) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*} - \frac{\partial g}{\partial \Delta r} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\beta - 1}{3G^* \kappa} \sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}} + \frac{\partial g}{\partial p} \tilde{p}^{el,*} - \frac{\partial g}{\partial D} \quad (\text{B.83})$$

$$\kappa = 1 + \frac{\tilde{h} (1 - D)}{3G^*} \quad (\text{B.84})$$

$$\beta = 1 - \frac{2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta r}{1 - D}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{S}}^{el,*} : \tilde{\mathbf{S}}^{el,*}}} \quad (\text{B.85})$$

$$\Delta_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (\text{B.86})$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \Delta - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{B.87})$$





# Bibliographie

- [1] S. Abdel-Malek, T. Halle, and L.W. Meyer. Ductile failure of steel HY80 under high strain rates and triaxial stress states, experimental results and damage description. *Journal de Physique IV*, 110 :183–188, 2003.
- [2] L. Adam. *Modélisation du comportement thermo-élasto-viscoplastique des métaux soumis à grandes déformations. Application au formage superplastique*. PhD thesis, Université de Liège, 2003.
- [3] S.A.A. Akbari Mousavi, A.R. Shahab, and M. Mastoori. Computational study of Ti-6Al-4V flow behaviors during the twist extrusion process. *Materials and Design*, 2007.
- [4] K.J. Allen, W.K. Rule, and S.E. Jones. Optimizing material strength constants numerically extracted from taylor impact data. *Experimental Mechanics*, 37(3) :333–338, 1997.
- [5] O. Allix and J.F. Deü. Delay-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions*, 45 :29–46, 1997.
- [6] O. Allix, P. Feissel, and P. Thévenet. A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues. *Computers & Structures*, 81(12) :1177–1191, 2003.
- [7] M. Alves. Material constitutive law for large strains and strain rates. *Journal of Engineering Mechanics*, 126 :215–218, 2000.
- [8] U. Andelfinger and E. Ramm. Eas-elements for two-dimensional and three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to hr-elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36 :1311–1337, 1993.
- [9] H. Andersson. An implicit formulation of the bodner-partom constitutive equations. *Computers and Structures*, 81 :1405–1414, 2003.
- [10] S. Aoki, K. Amaya, T. Noguchi, P. Ståhle, and K-G. Sundin. Identification of elastic/visco-plastic material constants under impact loading. In *IUTAM-symposium "Field analysis for determination of material parameters- Experimental and numerical aspects"*, July 2000.

- [11] I. Arias, J. Knap, V.B. Chalivendra, S. Hong, M. Ortiz, and A.J. Rosakis. Numerical modelling and experimental validation of dynamic fracture events along weak planes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :3833–3840, 2007.
- [12] F. Armero and J.C. Simo. A new unconditionally stable fractional step method for non-linear coupled thermomechanical problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35 :737–766, 1992.
- [13] A.G. Atkins. Possible explanation for unexpected departures in hydrostatic tension-fracture strain relations. *Metal Science*, 81 :81–83, February 1981.
- [14] D.J. Bammann. Modeling temperature and strain rate dependent large deformation of metals. *Applied Mechanics Review*, 43(5) :312–319, 1990.
- [15] Y. Bao and T. Wierzbicki. A comparative study on various ductile crack formation criteria. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 126(3) :314–324, July 2004.
- [16] D.C. Barton. The high strain rate fracture properties of ductile materials - a combined experimental-numerical approach. In *Plasticity and Impact Mechanics. Proceedings of 8th International Symposium on IMPLAST 2003*, March 16-19, 2003.
- [17] R.C. Batra and L. Chen. Instability analysis and shear band spacing in gradient-dependent thermoviscoplastic materials with finite speeds of thermal waves. *Archives of Mechanics*, 53 :167–192, 2001.
- [18] R.C. Batra and Li Chen. Effect of viscoplastic relations on the instability strain, shear band initiation strain, the strain corresponding to the minimum shear band spacing, and the band width in a thermoviscoplastic material. *International Journal of Plasticity*, 17 :1465–1489, 2001.
- [19] R.C. Batra and M.H. Lear. Adiabatic shear banding in plane strain tensile deformations of 11 thermoelastoviscoplastic materials with finite thermal wave speed. *International Journal of Plasticity*, 21 :1521–1545, 2005.
- [20] C.E. Becze, M.J. Worswick, and M.A. Elbestawi. High strain rate shear evaluation and characterization of AISI d2 tool steel in its hardened state. *Journal of Machining Science and Technology*, 5(1) :131–149, 2001.
- [21] T. Belytschko and T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45 :601–620, 1999.
- [22] T. Belytschko and T. Hugues. *Computational methods for transient analysis*. North-Holland, 1983.

- [23] T. Belytschko, W. Liu, and B. Moran. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley and Sons, 2000.
- [24] T. Belytschko and M. Tabbara. H-adaptive finite element methods for dynamic problems, with emphasis on localization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36 :4245–4265, 1993.
- [25] G.C. Bessette, E.B. Becker, L.M. Taylor, and D.L. Littlefield. Modeling of impact problems using an h-adaptive, explicit Lagrangian finite element method in three dimensions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :1649–1679, 2003.
- [26] S.R. Bodner and Y. Partom. Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials. *Journal of Applied Mechanics*, 42 :385–389, June 1975.
- [27] S.H.A Boers, P.J.G Schreurs, and M.G.D Geers. Operator-split damage-plasticity applied to groove forming in food can lids. *International Journal of Solids and Structures*, 42 :4154–4178, 2005.
- [28] X. Boidin, P. Chevrier, J.R. Klepaczko, and H. Sabar. Identification of damage mechanism and validation of a fracture model based on mesoscale approach in spalling of titanium alloy. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :4595–4615, 2006.
- [29] A.S. Bonnet-Lebouvier and J.R. Klepaczko. Numerical study of shear deformation in Ti-6Al-4V at medium and high strain rates, critical impact velocity in shear. *International Journal of Impact Engineering*, 27 :755–769, 2002.
- [30] N. Bonora, D. Gentile, A. Pirondi, and G. Newaz. Ductile damage evolution under triaxial state of stress : theory and experiments. *International Journal of Plasticity*, 21 :981–1007, 2005.
- [31] N. Bonora and A. Ruggiero. Micromechanical modeling of ductile cast iron incorporating damage. part i : Ferritic ductile cast iron. *International journal of solids and structures*, 42 :1401–1424, 2005.
- [32] B. Bourne, K.G. Cowan, and J.P. Curtis. Shaped charge warheads containing low melt energy metal liners. In *19th International Symposium of Ballistics*, Interlaken, Switzerland, 7-11 May 2001.
- [33] P. Brozzo, B. Deluca, and R. Rendina. A new method for the prediction of formability in metal sheet, sheet metal forming and formability. In *7th biennial conference of the IDDRG*, 1972.
- [34] T. Børvik, A.H. Clausen, M. Eriksson, T. Berstad, O.S. Hopperstad, and M. Langseth. Experimental and numerical study on the perforation of aa6005-t6 panels. *International Journal of Impact Engineering*, 32 :35–64, 2005.

- [35] T. Børvik, O.S. Hopperstad, and T. Berstad. On the influence of stress triaxiality and strain rate on the behaviour of a structural steel. part II. numerical study. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 22 :15–32, 2003.
- [36] T. Børvik, O.S. Hopperstad, T. Berstad, and M. Langseth. A computational model of viscoplasticity and ductile damage for impact and penetration. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 20 :685–712, 2001.
- [37] T. Børvik, O.S. Hopperstad, T. Berstad, and M. Langseth. Numerical simulation of plugging failure in ballistic penetration. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :6241–6264, 2001.
- [38] T. Børvik, O.S. Hopperstad, S. Dey, E.V. Pizzinato, M. Langseth, and C. Albertini. Strength and ductility of weldox 460 e steel at high strain rates, elevated temperatures and various stress triaxialities. *Engineering Fracture Mechanics*, 72 :1071–1087, 2005.
- [39] T. Børvik, M. Langseth, O.S. Hopperstad, and K.A. Malo. Ballistic penetration of steel plates. *International Journal of Impact Engineering*, 22 :855–886, 1999.
- [40] T. Børvik, M. Langseth, O.S. Hopperstad, and K.A. Malo. Perforation of 12mm thick steel plates by 20mm diameter projectiles with flat, hemispherical and conical noses. part i : Experimental study. *International Journal of Impact Engineering*, 27 :19–35, 2002.
- [41] T. Børvik, M. Langseth, O.S. Hopperstad, and K.A. Malo. Perforation of 12mm thick steel plates by 20mm diameter projectiles with flat, hemispherical and conical noses. part ii : numerical simulations. *International Journal of Impact Engineering*, 27 :37–64, 2002.
- [42] M. Calamaz, D. Coupard, and F. Girot. A new material model for 2d numerical simulation of serrated chip formation when machining titanium alloy Ti-6Al-4V. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 48 :275–288, 2008.
- [43] G.T. Camacho and M. Ortiz. Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22) :2899–2938, August 1996.
- [44] G.T. Camacho and M. Ortiz. Adaptive lagrangian modelling of ballistic penetration of metallic targets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142 :269–301, 1997.
- [45] J.-L. Chaboche. *Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1978.

- [46] K.S. Chan, S.R. Bodner, A.F. Fossum, and D.E. Munson. A constitutive model for inelastic flow and damage evolution in solids under tri-axial compression. *Mechanics of Materials*, 14 :1–14, 1992.
- [47] K.S. Chan, N.S. Brodsky, A.F. Fossum, S.R. Bodner, and D.E. Munson. International journal of plasticity, volume 10, issue 6, 1994, pages 623-642. *International Journal of Plasticity, Volume 10, Issue 6, 1994, Pages 623-642*, 10(6) :623–642, 1994.
- [48] M.D. Chapetti. Application of a threshold curve model to high-cycle fatigue behavior of small cracks induced by foreign-object damage in Ti-6Al-4V. *International Journal of Fatigue*, 27 :493–501, 2005.
- [49] Y.P. Chen, A. Eskandarian, M. Oskard, and J.D. Lee. Meshless analysis of high-speed impact. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 44 :201–207, 2005.
- [50] B.H. Cheong, J. Lin, and A.A. Ball. Modelling the effects of grain-size gradients on necking in superplastic forming. *Journal of Materials Processing Technology*, 134 :10–18, 2003.
- [51] J. Chung and G. Hulbert. A time integration algorithms for structural dynamics with improved numerical dissipations : the generalized- $\alpha$  method. *Journal of Applied Mechanics*, 60 :371–375, 1993.
- [52] L.C. Chung and J.-H. Cheng. Fracture criterion and forming pressure design for superplastic bulging. *Materials Science and Engineering A*, 333 :146–154, 2002.
- [53] P. Church, I. Cullis, R Townsley, and W. Huntington-Tresher. Underwater plate holing studies. In *Proceedings of 16th Technical Dymat Meeting*, pages 139–144, Brussels, Belgium, October 27-28 2005.
- [54] A.H. Clausen, T. Børvik, O.S. Hopperstad, and M. Langseth. Impact resistance of AA6005 panels. *Journal de Physique IV*, 110 :693–698, 2003.
- [55] S.E. Clift, P. Hartley, T.E.N Sturgess, and G.W. Rowe. Fracture predictions in plastic deformation processes. *International Journal of Mechanical Sciences*, 32 :1–17, 1990.
- [56] R.J. Clifton. Response of materials under dynamic loading. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :105–113, 2000.
- [57] S. Cochran and D. Banner. Spall studies in uranium. *Journal of Applied Physics*, 48 :2729–2737, 1977.
- [58] M. G. Cockcroft and D.J. Latham. Ductility and the workability of metals. *Journal of Japan Institute Metals*, 96 :33–39, 1968.
- [59] J.P. Cordebois. *Critères d'instabilité plastique et endommagement ductile en grandes déformations, application à l'emboutissage*. Docteur ès sciences physiques, Université Paris 6, 1983.

- [60] J.P. Cordebois and F. Sidoroff. Damage induced elastic anisotropy. In *EUROMECH 115*, Villard de Lans, 1979.
- [61] G.R. Cowper and P.S. Symonds. Strain hardening and strain rate effect in the impact loading of cantilever beams. Technical Report 28, Brown University, Division of Applied Mathematics, 1957.
- [62] P. Croix, F. Lauro, J. Oudin, and J. Christlein. Improvement of damage prediction by anisotropy of microvoids. *Journal of Materials Processing Technology*, 143-144(20) :202–208, December 2003.
- [63] P.-J. Cunat. Stainless steel properties for structural automotive applications. In *Metal Bulletin International Automotive Materials Conference*, Cologne, June 21-23 2000.
- [64] W. Dabboussi and J.A. Nemes. Modeling of ductile fracture using the dynamic punch test. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47 :1282–1299, 2005.
- [65] C. Danian, Y. Yuying, Y. Zhihua, Huanran W., L. Guoqing, and X. Shugang. A modified cochran-banner spall model. *International Journal of Impact Engineering*, 31 :1106–1118, 2005.
- [66] L. Daridon, O. Oussouaddi, and S. Ahzi. Influence of the material constitutive models on the adiabatic shear band spacing : Mts, power law and Johnson-Cook models. *International Journal of Solids and Structures*, 41 :3109–3124, 2004.
- [67] B. Daudonnet, M. Mosnier, K. Woznica, and F. Mercier. Etude numérique de la rupture dynamique de structures métalliques. In *Colloque national en calcul des structures*, Giens, 2005.
- [68] E.A. de Souza Neto. A fast, one-equation integration algorithm for the Lemaitre ductile damage model. *Communications in numerical methods in engineering*, 18 :541–554, 2002.
- [69] E.A. de Souza Neto, D. Peric, and D.R.J. Owen. A model for elasto-plastic damage at finite strains : computational issues and applications. *Engineering Computations*, 11(3) :257–281, 1994.
- [70] T. De Vuyst, R. Vignjevic, J. Mirkovic, and J. Campbell. A material model for anisotropic metals. *Journal de Physique IV*, 110 :21–26, 2003.
- [71] L. Debnath and P. Mikusinski. *Introduction to Hilbert spaces with applications*. Elsevier, Academic Press, 3rd edition, November 2005.
- [72] A. Deng and A.J. Rosakis. Dynamic crack propagation in elastic-plastic solids under non-k-dominance conditions. *European Journal of Mechanics. A. Solids.*, 13 :327–350, 1994.

- [73] S. Dey, T. Børvik, O.S. Hopperstad, and M. Langseth. On the influence of constitutive relation in projectile impact of steel plates. *International Journal of Impact Engineering*, 34(3) :464–486, March 2007.
- [74] T. Dick. *Modélisation multiéchelle du phénomène de fretting dans le contact aube-disque*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2006.
- [75] J. Ding, R. Hall, and J. Byrne. Effects of stress ratio and temperature on fatigue crack growth in a Ti-6Al-4V alloy. *International Journal of Fatigue*, 27 :1551–1558, 2005.
- [76] R. Ding, Z.X. Guo, and M. Qian. Coupled mesoscopic constitutive modelling and finite element simulation for plastic flow and microstructure of two-phase alloys. *Computational Materials Science*, 40 :201–212, 2007.
- [77] M. Doblaré and J.M. García. Anisotropic bone remodelling model based on a continuum damage-repair theory. *Journal of Biomechanics*, 35(1) :1–17, 2002.
- [78] L. Driemeier, S.P. Baroncini Proença, and M. Alves. A contribution to the numerical nonlinear analysis of three-dimensional truss systems considering large strains, damage and plasticity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 10 :515–535, 2005.
- [79] J. Eftis, C. Carrasco, and R.A. Osegueda. A constitutive-microdamage model to simulate hypervelocity projectile-target impact, material damage and fracture. *International Journal of Plasticity*, 19 :1321–1354, 2003.
- [80] E. El-Magd and M. Abouridouane. Characterization, modelling and simulation of deformation and fracture behaviour of the light-weight wrought alloys under high strain rate loading. *International Journal of Impact Engineering*, 32 :741–758, 2006.
- [81] M.S. ElTobgy, E. Ng, and M.A. Elbestawi. Finite element modeling of erosive wear. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 45 :1337–1346, 2005.
- [82] R.A.B Engelen, M.G.D Geers, and F.P.T Baaijens. Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour. *International Journal of Plasticity*, 19(4) :403–433, 2003.
- [83] H.A. Fadag, S. Mall, and V.K. Jain. A finite element analysis of fretting fatigue crack growth behavior in Ti-6Al-4V. *Engineering Fracture Mechanics*, 75 :1384–1399, 2008.
- [84] J.E. Field, S.M. Walley, W.G. Proud, H.T. Goldrein, and C.R. Siviour. Review of experimental techniques for high rate deformation and shock studies. *International Journal of Impact Engineering*, 30 :725–775, 2004.
- [85] S. Fouvry, P. Duó, and P. Perruchaut. A quantitative approach of Ti-6Al-4V fretting damage : friction, wear and crack nucleation. *Wear*, 257 :916–929, 2004.

- [86] A.M. Freudenthal. *The inelastic behaviour of engineering materials and structures*. Wiley, New-York, 1950.
- [87] V. Fridrici, S. Fouvry, P. Kapsa, and P. Perruchaut. Prediction of cracking in Ti-6Al-4V alloy under fretting-wear : use of the SWT criterion. *Wear*, 259 :300–308, 2005.
- [88] A. Gavrus, E. Ragneau, and P. Caestecker. Analysis of a constitutive model for the simulation of dynamic forming processes. *International Journal of Forming Processes*, 6 (1) :33–52, 2003.
- [89] M.G.D. Geers. Finite strain logarithmic hyperelasto-plasticity with softening : a strongly non-local implicit gradient framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :3377–3401, 2004.
- [90] M.G.D. Geers, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, and R.H.J. Peerlings. Validation and internal length scale determination for a gradient damage model : application to short glass-fibre-reinforced polypropylene. *International Journal of Solids and Structures*, 36 :2557–2583, 1999.
- [91] M.G.D Geers, R.L.J.M. Ubachs, and Engelen R.A.B. Strongly nonlocal gradient-enhanced finite strain elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56(14) :2039–2068, 2003.
- [92] A.K. Ghosh. A criterion for ductile fracture in sheets under biaxial loading. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 7(3) :523–533, March 1976.
- [93] G.I. Giannopoulos, D. Karagiannis, and N.K. Anifantis. Micromechanical modeling of mechanical behavior of Ti $\dot{U}$ 6Al $\dot{U}$ 4V/TiB composites using FEM analysis. *Computational Materials Science*, 39 :437–445, 2007.
- [94] S. Glaser and F. Armero. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engineering Computations*, 14(7) :759–791, 1997.
- [95] A.M. Goijaerts, L.E. Govaert, and F.P.T. Baaijens. Evaluation of ductile fracture models for different metals in blanking. *Journal of Materials Processing Technology*, 11 :312–323, 2001.
- [96] P.J. Golden and J.R. Calcaterra. A fracture mechanics life prediction methodology applied to dovetail fretting. *Tribology International*, 39 :1172–1180, 2006.
- [97] B.D. Goldthorpe. Mechanical and physical behaviour of materials under dynamic loading. *Journal de Physique IV*, Colloque C3, Vol. 1 :829–835, 1991.
- [98] B.D. Goldthorpe. A path dependent model for ductile fracture. *Journal de Physique VII*, C3 :705–710, 1997.



- [99] M. G eradin and D. Rixen. *Mechanical vibrations*. John Wiley and Sons, 2000.
- [100] G.T. Gray III. Classic split Hopkinson pressure bar testing. In H. Kuhn and D. Medlin, editors, *ASM handbook, Mechanical Testing and Evaluation*, volume 8, pages 462–476. ASM International, Materials Park, OH, 2000.
- [101] Y.B. Guo, Q. Wen, and M.F. Horstemeyer. An internal state variable plasticity-based approach to determine dynamic loading history effects on material property in manufacturing processes. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47 :1423–1441, June 2005.
- [102] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile fracture by void nucleation and growth : Part i - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99 :2–15, 1977.
- [103] A.-M. Habraken. Contributions to constitutive laws of metals : micro-macro and damage models. Thèse d’agr egation de l’enseignement supérieur, Université de Liège, 2000-2001.
- [104] H. Haddadi, S. Bouvier, M. Banu, C. Maier, and C. Teodosiu. Towards an accurate description of the anisotropic behaviour of sheet metals under large plastic deformations : Modelling, numerical analysis and identification. *International Journal of Plasticity*, 22(12) :2226–2271, December 2006.
- [105] J.O. Hallquist. *A non-linear, explicit, 2-dimensional finite element code for solid and structural mechanics, DYNA-2D*. Lawrence Livermore Laboratories, The University of California, USA, 1995.
- [106] JO Hallquist. *LS-DYNA user manual*. Livermore software technology corporation, 1998.
- [107] R. Hambli and M. Reszka. Fracture criteria identification using an inverse technique method and blanking experiment. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44(7) :1349–1361, July 2002.
- [108] Y. Hammi and M.F. Horstemeyer. A physically motivated anisotropic tensorial representation of damage with separate functions for void nucleation, growth, and coalescence. *International Journal of Plasticity*, 23(10-11) :1641–1678, 2007.
- [109] J.W. Hancock and A.C. Mackenzie. On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24 :147–160, 1976.
- [110] T. Harth, S. Schwan, J. Lehn, and F.G. Kollmann. Identification of material parameters for inelastic constitutive models : statistical analysis and design of experiments. *International Journal of Plasticity*, 20 :1403–1440, 2004.

- [111] Hibbit, Karlsson and Sorensen inc., Pawtucket, Rhode Island, USA. *Abaqus, User's Manual; Version 6.4*, 2003.
- [112] H. Hilber, T. Hugues, and R. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5 :283–292, 1977.
- [113] R. Hill. *The mathematical theory of plasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1950.
- [114] M. Hogge. Modélisation des transferts de chaleur et de matière. Notes de cours - LTAS-MC&T - Université de Liège.
- [115] M.A. Hogge. Integration operators for first order linear matrix differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 11(3) :281–294, 1977.
- [116] T.J. Holmquist and G.R. Johnson. Determination of constants and comparison of results for various constitutive models. *Journal de Physique IV*, 1(3) :C3.853–C3.860, 1991.
- [117] T.J.R. Hugues. *The finite element method*. Prentice Hall, 1987.
- [118] H. Huh, J.H. Lim, J.H. Song, K.-S. Lee, Y.-W. Lee, and S.S. Han. Crashworthiness assessment of side impact of an auto-body with 60trip steel for side members. *International Journal of Automotive Technology*, 4 :149–156, 2003.
- [119] G. Hulbert and J. Chung. Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137 :175–188, 1996.
- [120] A. Ibrahimbegovic and S. Melnyk. Embedded discontinuity finite element method for modeling of localized failure in heterogeneous materials with structured mesh : an alternative to extended finite element method. *Computational Mechanics*, 40 :149–155, 2007.
- [121] P.-P. Jeunechamps, J. Walmag, V. Mathonet, E. Delhez, A.M. Habraken, J.-P. Ponthot, P. Tossings, and P. Duysinx. Identification of elastoplastic model parameters in large deformation problems. In C. Cinquini et al., editor, *Proceedings of The Fifth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, ISBN 88-88412-27-1, Lido di Jesolo, Venice, Italy, mai 2003. ISSMO.
- [122] Z.H. Jin, G.H. Paulino, and R.H. Dodds. Finite element investigation of quasi-static crack growth in functionally graded materials using a novel cohesive zone fracture model. *Journal of Applied Mechanics - Trans. ASME*, 69(3) :370–379, 2002.
- [123] G.R. Johnson and W.H. Cook. A constitutive model and data for metals subjected to large strains high strain rates. In *Seventh International Symposium on Ballistics*, pages 541–547, The Hague, The Netherlands, April 19-21 1983.

- [124] G.R. Johnson and W.H. Cook. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures, and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*, 21 :31–48, 1985.
- [125] N. Jones. Material properties for structural impact problems. In *Advances in materials and their applications*, pages 151–163. P. Rama Rao, Eds Wiley Eastern Ltd., 1993.
- [126] N. Jones. Recent progress on dynamic inelastic structural response. In *Plasticity and Impact Mechanics. Proceedings of 8th International Symposium on IMPLAST 2003*, March, 16-19, 2003.
- [127] L.M. Kachanov. On creep rupture time. *Izv. Acad. Nauk SSSR, Otd. Techn. Nauk.*, 8 :26–31, 1958.
- [128] W.J. Kang and H. Huh. Crash analysis of auto-body structures considering the strain-rate hardening effect. *International Journal of Automotive Technology*, 1 :35–41, 2000.
- [129] A. Kermanpur, H. Sepehri Amin, S. Ziaei-Rad, N. Nourbakhshnia, and M. Mosaddeghfar. Failure analysis of Ti-6Al-4V gas turbine compressor blades. *Engineering Failure Analysis*, 2008.
- [130] A.S. Khan, R. Rehan Kazmi, and B. Farrokh. Multiaxial and non-proportional loading responses, anisotropy and modeling of Ti-6Al-4V titanium alloy over wide ranges of strain rates and temperatures. *International Journal of Plasticity*, 23 :931–950, 2007.
- [131] A.S. Khan, Y.S. Suh, and R. Kazmi. Quasi-static and dynamic loading responses and constitutive modeling of titanium alloys. *International Journal of Plasticity*, 20 :2233–2248, 2004.
- [132] H.S. Kim and T. Wierzbicki. Crush behavior of thin-walled prismatic columns under combined bending and compression. *Computers and Structures*, 79 :1417–1432, 2001.
- [133] K. P. Kim and H. Huh. Dynamic limit analysis formulation for impact simulation of structural members. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :6488–6501, 2006.
- [134] J.-P. Kleiner mann. *Identification paramétrique et optimisation des procédés de mise à forme par problèmes inverses*. PhD thesis, Université de Liège, 2001.
- [135] J.R. Klepaczko. Effects of impact velocity and stress concentration in titanium on failure by adiabatic shearing. Technical report, European Research Office of the US-Army, Metz, 1999.

- [136] R.W. Klopp, R.J. Clifton, and T.G. Shawki. Pressure-shear impact and the dynamic viscoplastic response of metals. *Mechanics of Materials*, 4 :375–385, 1985.
- [137] H. Kobayashi and B. Dodd. A numerical analysis for the formation of adiabatic shear bands including void nucleation and growth. *International Journal of Impact Engineering*, 1 :1–13, 1989.
- [138] U.F. Kocks. Laws for work hardening and low-temperature creep. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 98 :76–85, 1976.
- [139] P. Ladevèze, O. Allix, J.-F. Deü, and D. Lévêque. A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(1-2) :105–122, 2000.
- [140] G.S. Langdon and G.K. Schleyer. Deformation and failure of profiled stainless steel blast wall panels - part iii finite element simulations and overall summary. *International Journal of Impact Engineering*, 32 :988–1012, 2006.
- [141] B. Langrand, P. Geoffroy, J.-L. Petitniot, J. Fabis, E. Markiewicz, and P. Drazetic. Identification technique of constitutive model parameters for crashworthiness modelling. *Aerospace Science and Technology*, 4 :215–227, 1999.
- [142] J.-B. Leblond. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermes Science, 2003.
- [143] W.-S. Lee and C.-F. Lin. High-temperature deformation behaviour of Ti-6Al-4V alloy evaluated by high strain-rate compression tests. *Journal of Materials Processing Technology*, 75 :127–136, 1998.
- [144] W.-S. Lee and C.-F. Lin. Plastic deformation and fracture behaviour of Ti-6Al-4V alloy loaded with high strain rate under various temperatures. *Materials Science and Engineering A*, 241 :48–59, 1998.
- [145] W.-S. Lee, W.-C. Sue, C.-F. Lin, and C.-J. Wu. The strain rate and temperature dependence of the dynamic impact properties of 7075 aluminum alloy. *Journal of Materials Processing Technology*, 100 :116–122, 2000.
- [146] J. Lemaitre. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107 :9–83, 1985.
- [147] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*, chapter 7, pages 343–444. Dunod, 2ème edition, 1988.
- [148] J. Lemaitre and R. Desmorat. *Engineering Damage Mechanics*, chapter 2, pages 90–103. Springer, 2005.
- [149] J. A Lemaitre. *A course on damage mechanics*. Springer-Verlag, 1992.

- [150] G. LeRoy, J.D. Embury, G. Edward, and M.F. Ashby. A model of ductile fracture based on the nucleation and growth of voids. *Journal de physique 3, Acta Metal*, 29 :1509–1522, 1981.
- [151] T. Li, F. Jiang, E.A. Olevsky, K.S. Vecchio, and M.A. Meyers. Damage evolution in Ti-6Al-4V - Al3-Ti metal-intermetallic laminate composites. *Materials Science and Engineering A*, 443 :1–15, 2007.
- [152] R. Liang and A.S. Khan. A critical review of experimental results and constitutive models for bcc and fcc metals over a wide range of strain rates and temperatures. *International Journal of Plasticity*, 15 :963–980, 1999.
- [153] I.L. Lim, I.W. Jonhston, and Choi S.K. A finite element code for fracture propagation analysis within elasto-plastic continuum. *Engineering Fracture Mechanics*, 53 :193–211, 1996.
- [154] U.S. Lindholm. Some experiments with the split hopkinson pressure bar. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 2 :317–335, 1964.
- [155] P. Longère, A. Dragon, H. Trumel, T. de Resseguier, X. Deprince, and E. Petitpas. Modélisation 3d des effets dégradants du cisaillement adiabatique sur la réponse d'un matériau viscoplastique.
- [156] P. Longère, A. Dragon, H. Trumel, T. de Rességuier, X. Deprince, and E. Petitpas. High strain rate model involving damage by adiabatic shear banding and related anisotropy. *Journal de Physique IV*, 110 :317–322, 2003.
- [157] B.M. Love and R.C. Batra. Determination of effective thermomechanical parameters of a mixture of two elastothermoviscoplastic constituents. *International Journal of Plasticity*, 22 :1026–1061, 2006.
- [158] LS-DYNA. *LS-DYNA Keyword User's Manual, Version 970*, 2003.
- [159] D.A.S. Mac Dougall and J. Harding. A constitutive relation and failure criterion for Ti6Al4V alloy at impact rates of strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47(5) :1157–1185, April 1999.
- [160] A.C. Mackenzie, J.W. Hancock, and D.K. Brown. On the influence of state of stress on ductile failure initiation in high strength steels. *Engineering Fracture Mechanics*, 9 :167–168, 1977.
- [161] J.K. Mackenzie. The elastic constants of a solid containing spherical holes. *Proceedings of the Physical Society*, 63(A) :2–11, January 1950.
- [162] Mahnken. A comprehensive study of a multiplicative elastoplasticity model coupled to damage including parameter identification. *Computers and Structures*, 74 :179–200, 2000.

- [163] R. Mahnken and E. Stein. A unified approach for parameter identification of inelastic material models in the frame of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136 :225–258, 1996.
- [164] J. Majta, A.K. Zurek, C.P. Trujillo, and A. Bator. Study of high strain rate plastic deformation of low carbon microalloyed steels using experimental observation and computational modeling. *Journal de Physique IV*, 110 :117–122, 2003.
- [165] O.L. Manzoli and P.B. Shing. A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements. *Computers and Structures*, 84 :742–757, 2006.
- [166] E. Markiewicz, P. Ducrocq, and P. Drazetic. An inverse approach to determine the constitutive model parameters from axial crushing of thin-walled square tubes. *International Journal of Impact Engineering*, 21(6) :433–449, June 1998.
- [167] E. Markiewicz and B. Langrand. Coupling process and structural collapse to access of the material history and improve crashworthiness modelling of assembled structures. In *Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering*, Santorini Island, Greece, May, 25-28 2005.
- [168] C.M. Martinez, D. Eylon, T. Nicholas, S.R. Thompson, J.J. Ruschau, J. Birkbeck, and W.J. Porter. Effects of ballistic impact damage on fatigue crack initiation in Ti-6Al-4V simulated engine blades. *Materials Science and Engineering A*, 325 :465–477, 2002.
- [169] M. Mashayekhi, S. Ziaei-Rad, J. Parvizian, K. Nikbin, and H. Hadavinia. Numerical analysis of damage evolution in ductile solids. *Structural Integrity & Durability*, 1(1) :67–82, 2005.
- [170] M. Mashayekhi, S. Ziaei-Rad, J. Parvizian, J. Niklewicz, and H. Hadavinia. Ductile crack growth based on damage criterion : Experimental and numerical studies. *Mechanics of Materials*, 39 :623–636, 2007.
- [171] C. Mason and M.J. Worswick. Adiabatic shear in annealed and shock-hardened iron and in quenched and tempered 4340 steel. *International Journal of Fracture*, 111 :29–51, 2001.
- [172] K.K. Mathur, A. Needleman, and V. Tvergaard. Three dimensional analysis of dynamic ductile crack growth in a thin plate. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44 :439–464, 1995.
- [173] F.A. McClintock. A criterion of ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :363–371, 1968.
- [174] J. Mediavilla. *Continuous and discontinuous modelling of ductile fracture*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2005.

- [175] J. Mediavilla, R.H.J. Peerlings, and M.G.D Geers. An integrated continuous-discontinuous approach towards damage engineering in sheet metal forming processes. *Engineering Fracture Mechanics*, 73 :895–916, 2006.
- [176] J. Mediavilla, R.H.J. Peerlings, and M.G.D Geers. A nonlocal triaxiality-dependent ductile damage model for finite strain plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :4617–4634, 2006.
- [177] J. Mediavilla, R.H.J. Peerlings, and M.G.D. Geers. A robust and consistent remeshing-transfer operator for ductile fracture simulations. *Computers and Structures*, 84 :604–623, 2006.
- [178] M. Mengoni and J.P. Ponthot. A continuum damage model for alveolar bone remodeling. In *Fourth International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering*, 2008.
- [179] H.W. Meyer, , and D.S. Kleponis. An analysis of parameters for the johnson-cook model for 2-inch thick rolled homogeneous armor. In Michael J. Chinni, editor, *Advanced Simulation Technologies Conference*, volume 30 (4) of *Military, Government and Aerospace Simulation Series*, April 1998.
- [180] H.W. Meyer Jr. and D.S. Kleponis. Modeling the high strain rate behavior of titanium undergoing ballistic impact and penetration. *International Journal of Impact Engineering*, 26 :509–521, 2001.
- [181] M.A. Meyers. *Dynamic behavior of materials*. Wiley, New-York, 1994.
- [182] A. Molinari. Instabilité thermo-visco-plastique en cisaillement simple. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 4 :659–684, 1985.
- [183] A. Molinari and S. Mercier. Micromechanical modelling of porous materials under dynamic loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 :1497–1516, 2001.
- [184] A. Molinari and T.W. Wright. A physical model for nucleation and early growth of voids in ductile materials under dynamic loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53 :1476–1504, 2005.
- [185] J.F. Molinari, G. Gazonas, R. Raghupathy, A. Rusinek, and F. Zhou. The cohesive element approach to dynamic fragmentation : the question of energy convergence. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(3) :484–503, January 2007.
- [186] Y. Monerie. *Fissuration des matériaux composites : rôle de l'interface fibre/matrice*. PhD thesis, Université Aix-Marseille II, 2000.

- [187] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150, 1999.
- [188] J. Mosler. On advanced solution strategies to overcome locking effects in strong discontinuity approaches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63 :1313–1341, 2005.
- [189] P. Moureaux, S. Moto Mpong, M. Remy, C. Bouffieux, J. Lecomte-Beckers, and A.M. Habraken. Identification d’une loi thermo-élasto-viscoplastique en vue de la modélisation du laminage à chaud du cuivre. *Journal de Physique IV - Proceedings*, 12 :361–368, 2002.
- [190] K. Muszka, P.D. Hodgson, and J. Majta. A physical based modeling approach for the dynamic behavior of ultrafine grained structures. *Journal of Materials Processing Technology*, 177(1-3) :456–460, July 2006.
- [191] S. Nemat-Nasser, W.-G. Guo, V. F. Nesterenko, S.S. Indrakanti, and Y.-B. Gu. Dynamic response of conventional and hot isostatically pressed Ti-6Al-4V alloys : experiments and modeling. *Mechanics of Materials*, 33 :425–439, 2001.
- [192] N. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*, 85 :67–94, 1959.
- [193] I. Nistor, O. Pantalé, S. Caperaa, and C. Sattouf. Identification of a dynamic viscoplastic flow law using a combined levenberg-marquardt and monte-carlo algorithm. In CIMNE, editor, *VII International Conference on Computational Plasticity, COMPLAS 2003*, Barcelona, Spain, 2003.
- [194] J.P. Noble, B.D. Goldthorpe, P. Church, and J. Harding. The use of the Hopkinson bar to validate constitutive relations at high rates of strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47 :1187–1206, 1999.
- [195] L. Noels. *Contributions aux algorithmes d’intégration temporelle conservant l’énergie en dynamique non-linéaire des structures*. PhD thesis, Université de Liège, 2004.
- [196] D.M. Norris, J.E. Reaugh, B. Moran, and D.F. Quinones. A plastic-strain, mean-stress criterion for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology, ASME*, 100 :279–293, 1978.
- [197] S. Oh, C. C. Chen, and S. Kobayashi. Ductile failure in axisymmetric extrusion and drawing, part 2, workability in extrusion and drawing. *Journal of engineering for industry (currently Journal of Manufacturing Science and Engineering)*, 101 :36–44, 1979.



- [198] J. Oliver. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1 : fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :3575–3623, 1996.
- [199] J. Oliver. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 2 : numerical simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :3601–3623, 1996.
- [200] E. Omerspahic and K. Mattiasson. Orthotropic damage in high-strength steel sheets. an elasto-viscoplastic material model with mixed hardening. *Journal de Physique IV*, 110 :177–182, 2003.
- [201] M. Ortiz and A. Pandolfi. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(9) :1267–1282, 1999.
- [202] M. Oyane. Criteria of ductile fracture strain. *Bulletin of JSME*, 15 :1507–1513, 1972.
- [203] M. Oyane, T. Sato, K. Okimoto, and S. Shima. Criteria for ductile fracture and their applications. *Journal of Mechanical Working Technology*, 4 :65–81, 1980.
- [204] O. Pantalé, J.-L. Bacaria, O. Dalverny, R. Rakotomalala, and S. Caperaa. 2D and 3D numerical models of metal cutting with damage effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :4383–4399, 2004.
- [205] K.D. Papoulia, S.A. Vavasis, and P. Ganguly. Spatial convergence of crack nucleation using a cohesive finite-element model on a pinwheel-based mesh. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(1) :1–16, January 2006.
- [206] C. Paulin, S. Fouvry, and C. Meunier. Finite element modelling of fretting wear surface evolution : Application to a Ti-6Al-4V contact. *Wear*, 264 :26–36, 2008.
- [207] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, and J.H.P. de Vree. Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39 :3391–3403, 1996.
- [208] R.H.J. Peerlings, M.G.D. Geers, R. de Borst, and W.A.M. Brekelmans. A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :7723–7746, 2001.
- [209] N. Peixinho, N. Jones, and A. Pinho. Determination of crash-relevant material properties of dual-phase and trip steels. In *8th International Symposium on IMPLAST 2003*, March 16-19 2003.
- [210] L. Penazzi and D. Bois. Lois de comportement utilisables dans la simulation numérique des phénomènes dynamiques. In *Document DYMAT*, ETCA, Arcueil, France, 1993.

- [211] O. Pennetier, K. Woznica, M. Mosnier, B. Daudonnet, J. Renard, and F.M.B Mercier. Behaviour of metallic plates subjected to explosions. experiments and modelling in the field of large deformations and rupture. In *16th Technical Dymat Meeting*, pages 123–138, Brussels, Belgium, October 27-28 2005.
- [212] D Peric, C. Hochard, M. Dutko, and D.R.J. Owen. Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137 :331–344, 1996.
- [213] P. Perzyna. Fundamental problems in visco-plasticity. *Advances in Applied Mechanics*, 9 :243–377, 1966.
- [214] P. Perzyna. Internal state variable description of dynamic fracture of ductile solids. *International Journal of Solids and Structures*, 22(7) :797–818, 1986.
- [215] J. Petit and J.-L. Dequiedt. Modélisation du comportement dynamique d’un cuivre pour applications sous chocs et grandes déformations.
- [216] R.C. Picu and A. Majorell. Mechanical behavior of Ti-6Al-4V at high and moderate temperatures - part ii : constitutive modeling. *Materials Science and Engineering A*, 326 :306–316, 2002.
- [217] J.-P. Ponthot. *Mécanique des milieux continus solides en grandes transformations et traitement unifié par la méthode des éléments finis*. PhD thesis, Université de Liège, 1995.
- [218] J.-P. Ponthot. Unified stress update algorithms for the numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes. *International Journal of Plasticity*, 18(1) :91–126, January 2002.
- [219] J.-P. Ponthot and J.-P. Kleinermann. A cascade optimization methodology unified for automatic parameter identification and shape/process optimization in metal forming simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :5472–5508, 2006. John ARGYRIS Memorial Issue.
- [220] D. Priadi. Introduction of strain rates effects in constitutive equations suitable for metal sheet stamping. In *MECAMAT 91*, Fontainebleau, France, 1991.
- [221] H. Qiu, Y. Enoki, M. andi Kawaguchi, and T. Kishi. A model for the dynamic fracture toughness of ductile structural steel. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(5) :589–598, March 2002.
- [222] T. Rabczuk and T. Belytschko. A three-dimensional large deformation meshfree method for arbitrary evolving cracks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(29-30) :2777–2799, May 2007.

- [223] A.R. Ragab and J.L. Duncan. Superplasticity : Constitutive equations and forming problems. In *International Symposium on Foundations of Superplasticity*, Warsaw, 1972. Noordhoff International Publishing - Leiden.
- [224] P. Rahulkumar, A. Jagota, S.J. Bennison, and S. Saigal. Cohesive element modeling of viscoelastic fracture : application to peel testing of polymers. *International Journal of Solids and Structures*, 37(13) :1873–1897, 2000.
- [225] J.R. Rice and D.M. Tracey. On the ductile enlargements of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17 :201–217, 1969.
- [226] A.J. Rosakis and G. Ravichandran. Dynamic failure mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :331–348, 2000.
- [227] L. Rota. Lois de comportement en dynamique. In *Colloque National MECAMAT*, Aussois, France, January 2005.
- [228] A. Rouquand and C. Pontiroli. A model for geologic materials (rock, soil and concrete), presentation and validation for a large range of dynamic loads. In *16th Technical Dymat Meeting*, pages 101–121, October 27-28 2005.
- [229] G. Ruiz, M. Ortiz, and A. Pandolfi. Three-dimensional finite-element simulation of the dynamic brazilian tests on concrete cylinders. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(7) :963–994, 2000.
- [230] W.K. Rule and S.E. Jones. A revised form for the Johnson-Cook strength model. *International Journal of Impact Engineering*, 21 :609–624, 1998.
- [231] A. Rusinek and J.R. Klepaczko. Shear testing of a sheet steel at wide range of strain rates and a constitutive relation with strain-rate and temperature dependence of the flow stress. *International Journal of Plasticity*, 17 :87–115, 2001.
- [232] A. Rusinek, W.K. Nowacki, P. Gadaj, and J.R. Klepaczko. Measurement of temperature coupling by thermovision and constitutive relation at high strain rates for the dual phase sheet steel. *Journal de Physique IV*, 110 :411–416, 2003.
- [233] A. Rusinek, Zaera R., J.R. Klepaczko, and R. Cheriguene. Analysis of inertia and scale effects on dynamic neck formation during tension of sheet steel. *Acta Materialia*, 53(20) :5387–5400, December 2005.
- [234] A. Rusinek and R. Zaera. Numerical analysis of the dynamic plastic instabilities in steel rings submitted to explosive radial expansion. In *16th Technical Dymat Meeting*, pages 71–83, Brussels, Belgium, October 27-28 2005.
- [235] C. Sattouf, O. Dalverny, and R. Rakotomalala. Identification and comparison of different constitutive laws for high speed solicitation. *Journal de Physique IV*, 110 :201–206, 2003.

- [236] A. Söderberg and U. Sellgren. Modelling strain hardening and strain rate hardening of dual phase steels in finite element analysis of energy absorbing components. In *NAFEMS World Congress*, St Julian, Malta, May 17-20 2005.
- [237] S. Seo, O. Min, and H. Yang. Constitutive equation for Ti-6Al-4V at high temperatures measured using the SHPB technique. *International Journal of Impact Engineering*, 31 :735–754, 2005.
- [238] S. Serebrinsky and M. Ortiz. A hysteretic cohesive-law models of fatigue crack nucleation. *Scripta Mater.* 53, 53(10) :1193–1196, 2005.
- [239] S. Shademan, A.B.O. Soboyejo, J.F. Knott, and W.O. Soboyejo. A physically-based model for the prediction of long fatigue crack growth in Ti-6Al-4V. *Materials Science and Engineering A*, 315 :1–10, 2001.
- [240] J. Sheikh-Ahmad and J. Twomey. ANN constitutive model for high strain-rate deformation of Al 7075-T6. *Journal of Materials Processing Technology*, 186 :339–345, 2007.
- [241] T. Siegmund and W. Brocks. A numerical study on the correlation between the work of separation and the dissipation rate in ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 67(2) :139–154, September 2000.
- [242] D.C. Simkins and S. Li. Meshfree simulations of thermo-mechanical ductile fracture. *Computational Mechanics*, 38(3) :235–249, August 2006.
- [243] J. Simo, J. Oliver, and F. Armero. An analysis of strong discontinuities induced by strain softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12 :277–296, 1993.
- [244] J.C. Simo and F. Armero. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7) :1413–1449, 1992.
- [245] J.C. Simo and J.W. Ju. Strain- and stress-based continuum damage models - i. formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 23(7) :821–840, 1987.
- [246] J.C. Simo and J.W. Ju. Strain- and stress-based continuum damage models - ii. computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 23(7) :841–869, 1987.
- [247] J.C. Simo and C. Miehe. Associative coupled thermoplasticity at finite strains - formulation, numerical analysis and implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98 :41–104, 1992.

- [248] J.C. Simo and M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(8) :1595–1638, 1990.
- [249] K.N. Singh, R. Sievert, H.-D. Noack, R. Clos, U. Schreppel, P. Veit, A. Hamann, and D. Klingbeil. Simulation of failure under dynamic loading at different states of triaxiality for a nickel-base superalloy. *Journal de Physique IV*, 110 :275–280, 2003.
- [250] S.C. Song, Z.P. Duan, and D.W. Tan. The application of b-p constitutive equations in finite element analysis of high velocity impact. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :5215–5222, 2001.
- [251] Z. Soumaharo and H. Maigre. Couplage thermomécanique en rupture dynamique. In *Colloque national en calcul des structures*, Giens, France, May 17-20 2005.
- [252] L. Stainier. *Modélisation numérique du comportement irréversible des matériaux ductiles soumis à grandes déformations avec endommagement*. PhD thesis, Université de Liège, 1997.
- [253] P. Steinmann, C. Miehe, and E. Stein. Comparison of different finite deformation inelastic damage models within multiplicative elastoplasticity for ductile metals. *Computational Mechanics*, 13 :458–474, 1994.
- [254] A. Suffis and A. Combescure. Modèle d’endommagement à effet retard. etude numérique et analytique de l’évolution de la longueur caractéristique. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 11(5) :593–619, 2002.
- [255] A. Suffis, T.A.A. Lubrecht, and A. Combescure. Damage model with delay effect. analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length. *International Journal of Solids and Structures*, 40(3-4) :3463–3476, 2003.
- [256] N. Sukumar, N. Moës, B. Moran, and T. Belytschko. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 :1549–1570, 2000.
- [257] B. Tchamwa. *Contribution à l’étude des méthodes d’intégration directe explicite en dynamique non-linéaire des structures*. PhD thesis, Université de Nantes, 1998.
- [258] Wierzbicki T. Teng X., Hiermaier S., and Rohr I. Numerical prediction of fracture in the taylor test. *International Journal of Solids and Structures*, 42 :2929–2948, 2005.
- [259] V. Tvergaard. Influence of voids on shear bands instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture*, 17 :389–401, 1981.
- [260] V. Tvergaard. Material failure by void coalescence in localized shear bands. *International Journal of Solids and Structures*, 18 :659–672, 1982.

- [261] V. Tvergaard and A. Needleman. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32(1) :157–169, 1984.
- [262] A. Uenishi. *Thermodynamical behaviour of solution hardened interstitial free steels at high strain rates*. PhD thesis, Université Paris 13, 2003.
- [263] A. Uenishi and C. Teodosiu. Constitutive modelling of the high strain rate behaviour of interstitial-free steel. *International Journal of Plasticity*, 20(4-5) :915–936, April 2004.
- [264] D. Umbrello. Finite element simulation of conventional and high speed machining of Ti-6Al-4V alloy. *Journal of Materials Processing Technology*, 196 :79–87, 2008.
- [265] M. Unosson, L. Olovsson, and K. Simonsson. Failure modelling in finite element analyses : Element erosion with crack-tip enhancement. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42 :283–297, 2006.
- [266] M. Vanderhasten, L. Rabet, and B. Verlinden. Ti-6Al-4V : Deformation map and modelisation of tensile behaviour. *Materials and Design*, 2007.
- [267] R.A. Vasin, F.U. Enikeev, M. Tokuda, and R.V. Safiullin. Mathematical modelling of the superplastic forming of a long rectangular sheet. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38 :799–807, 2003.
- [268] M. Vaz Jr. and DRJ. Owen. Aspects of ductile fracture and adaptive mesh refinement in damaged elasto-plastic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :29–54, 2001.
- [269] A. Vilkauskas. Research and simulation of ballistics processes of small arms ammunition bullets. Technical report, Kaunas University of Technology, 2005.
- [270] G.Z. Voyiadjis and F.H. Abed. Microstructural based models for bcc and fcc metals with temperature and strain rate dependency. *Mechanics of Materials*, 37 :355–378, 2005.
- [271] X. Wang. Quantitative calculation of local shear deformation in adiabatic shear band for Ti-6Al-4V. *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*, 17 :698–704, 2007.
- [272] L. Weber, M. Kouzeli, C. San Marchi, and A. Mortensen. On the use of Considere’s criterion in tensile testing of materials which accumulate internal damage. *Scripta Materialia*, 4(5) :549–551, 1999.
- [273] Z. Wei and R.C. Batra. Dependence of instability strain upon damage in thermoviscoplastic materials. *Archives of Mechanics*, 54 :691–707, 2002.

- [274] B.W. Williams, D.A. Oliveira, C.H.M. Simha, and B. Worswicka, M.J. and Mayer. Crashworthiness of straight section hydroformed aluminium tubes. *International Journal of Impact Engineering*, 34(8) :1451–1464, August 2007.
- [275] W. Wood, M. Bossak, and O. Zienkiewicz. An alpha modification of newmark's method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 15 :1562–1566, 1981.
- [276] X.P. Xu and A. Needleman. Numerical simulations of fast crack-growth in brittle solids. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 42(9) :1397–1434, 1994.
- [277] L. Xue. Damage accumulation and fracture initiation in uncracked ductile solids subject to triaxial loading. *International Journal of Solids and Structures*, 44(16) :5163–5181, August 2007.
- [278] S.C.K. Yuen and G.N. Nurick. Modelling of the deformation and tearing of thin and thick plates subjected to localised blast loads. In *8th International Symposium on IMPLAST 2003*, March 16-19 2003.
- [279] R. Zaera and J. Fernandez-Saez. An implicit consistent algorithm for the integration of thermoviscoplastic constitutive equations in adiabatic conditions and finite deformations. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :1594–1612, 2006.
- [280] F.J. Zerilli and R.W. Armstrong. Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations. *Journal of Applied Physics*, 61(5) :1816–1825, March 1987.
- [281] H. Zhao. A constitutive model for metals over a large range of strain rates. identification for mild-steel and aluminium sheets. *Materials Science and Engineering : A*, 230 :95–99, 1997.
- [282] H. Zhao. Material behaviour characterisation using SHPB techniques, tests and simulations. *Computers and Structures*, 81 :1301–1310, 2003.
- [283] Y.Y. Zhu. *Contribution to the local approach of fracture in solid dynamics*. PhD thesis, Université de Liège, 1992.
- [284] Y.Y. Zhu, S. Cescotto, and A.M. Habraken. A fully coupled elastoplastic damage modeling and fracture criteria in metalforming processes. *Journal of Materials Processing Technology*, 32 :197–204, 1992.
- [285] Y.Y. Zhu, S. Cescotto, and A.M. Habraken. A fully coupled elastoplastic damage theory based on the energy equivalence. In Onate Owen and Hilton, editors, *3rd International Conference on Computational Plasticity : Fundamental and Applications*, pages 1455–1467, Barcelona, 1992.