

## 5.1. INTRODUCTION

Les chapitres 2 et 4 nous ont permis d'exprimer l'équilibre d'un solide *en un instant*. Pour représenter parfaitement l'évolution de ce solide, de ses déplacements, déformations, ... au cours du temps, il est nécessaire que l'équilibre soit respecté à tout instant.

Le chapitre 3 a été consacré à l'étude des lois constitutives. Bon nombre d'entre elles sont de type incrémental. Donc elles sont écrites à l'aide de *dérivées temporelles* des contraintes ou des déformations, et il faut en réaliser l'intégration temporelle. Ceci nécessite généralement l'utilisation d'une technique numérique, car il n'existe pas de solution analytique. Pour que l'intégration numérique soit exacte, elle doit utiliser des pas infiniment petits.

Il n'est pas possible d'exprimer l'équilibre à tout instant et d'intégrer numériquement exactement les lois constitutives. On est donc conduit à réaliser des pas de temps de durée finie. Economiquement, il semble nécessaire que cette durée soit la plus grande possible. Mais d'autre part, la précision des calculs et la convergence demandent de petits pas. La taille du pas résulte donc d'un compromis entre ces deux impératifs, et, pour une bonne part, de l'intuition de l'utilisateur du programme de calcul. Il en résulte que cette utilisation est généralement délicate et demande un long apprentissage.

Ce chapitre est consacré à la transformation des équations et principes présentés plus haut, de sorte qu'ils soient applicables dans le cas où les pas de temps ont une longueur finie. Nous utiliserons donc souvent le concept de temps. Dans certains problèmes, il a la signification classique d'horloge, de mesure, ... C'est le cas des déformations mécaniques élasto-visco-plastiques, de la conduction et des écoulements en régime transitoire. Dans d'autres problèmes, le temps se réduit à être une variable d'évolution. Son échelle n'a pas d'influence sur l'évolution du phénomène. C'est le cas des déformations mécaniques élastiques et elastoplastiques, de la conduction et des écoulements en régime permanent. Quoi qu'il en soit, nous nous référerons toujours à des *pas de temps*. Ceci implique de modifier un certain nombre de concepts établis ci-dessus. Citons-les rapidement.

L'équilibre ne peut être respecté à tout instant du pas de temps. Pratiquement, nous exprimons un équilibre par pas. Un des grands choix à réaliser est l'expression de cet équilibre. A ce niveau, l'ingénieur a beaucoup de liberté. Nous pouvons exprimer l'équilibre à la fin du pas de temps ou à tout autre instant, qui est ainsi privilégié. Ou bien nous pouvons exprimer un équilibre moyen, pondéré par une fonction du temps à déterminer (ZIENKIEWICZ [2]). Il faut toutefois se méfier du choix posé. Certains d'entre eux conduisent à des instabilités numériques, ou à une stabilité conditionnelle, c'est à dire fonction de la longueur du pas de temps. Nous supposons le lecteur familier de la notion de stabilité, et nous ne l'étudierons pas du tout, nous bornant à citer si tel ou tel schéma proposé est stable. Nous excluons également les schémas multi-pas, qui expriment un équilibre pondéré sur 2,3,.. pas successifs.

Remarquons que l'opération de discrétisation spatiale en éléments finis réalisée au chapitre 4 conduit à exprimer l'équilibre en moyenne du point de vue géométrique. Nous réalisons ici une opération semblable en exprimant l'équilibre en moyenne du point de vue temporel.

D'autre part, il faut intégrer temporellement un certain nombre de lois constitutives. Ces lois sont des équations exprimant la vitesse de contrainte en fonction de la vitesse de déformation. Il est donc nécessaire de connaître les déplacements (ou au moins les déformations) à tout instant du pas de temps. Pour cela, il faut définir leur forme pendant un pas. L'hypothèse la plus courante consiste à supposer que les déplacements évoluent linéairement pendant le pas. Mais dans certains cas, et en particulier en grandes déformations mécaniques, pour des raisons liées au mode d'intégration des lois constitutives, il est utile de définir d'autres formes d'évolution des déplacements ou des déformations. Remarquons que, physiquement, les déplacements sont continus dans le temps et dans l'espace, mais leurs dérivées temporelles peuvent présenter des discontinuités (c'est le cas lorsqu'on applique brusquement une force, lors d'un choc thermique,...).

La connaissance précise en tout instant des contraintes et leur intégration pose d'autres problèmes : il ne faut pas trop s'écarter de la loi théorique. En plasticité, il faut respecter en permanence le critère adopté (condition de cohérence). En grandes rotations, l'objectivité "incrémentale" doit être assurée, etc... Ces problèmes ont suscité beaucoup de recherches dans le monde. Nous les évoquerons rapidement.

## 5.2. LES GRANDES DEFORMATIONS MECANIQUES DU SOLIDE.

### 5.2.1. Introduction.

Le problème est statique, car l'expression de l'équilibre ne dépend pas de la dérivée temporelle des déplacements. Les effets d'amortissement et d'inertie sont négligés. Il est habituel dans ce cas d'exprimer l'équilibre à la fin de chaque pas de temps. Nous avons adopté ce choix dans le programme LAGAMINE, pour sa simplicité d'implantation et pour la bonne précision obtenue.

Le principal problème à traiter dans ce chapitre au sujet des grandes déformations mécaniques est l'intégration numérique des lois constitutives, qui sont toutes du type incrémental :

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{C} \dot{\underline{\epsilon}} + \underline{f}(\underline{\sigma}) \quad (5.1.)$$

où  $\underline{f}(\underline{\sigma})$  représente l'effet de la viscosité. La valeur initiale des tenseurs  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\epsilon}$  est connue : c'est la valeur au début du pas de temps étudié, donc à la fin du pas précédent. Si l'on connaît  $\underline{\epsilon}$  et  $\underline{C}(\underline{\sigma})$  à tout instant du pas, on peut donc intégrer (5.1.) pourvu que l'évolution soit suffisamment régulière.

Deux problèmes se posent :

- comment intégrer avec précision et sans coût excessif l'équation (5.1.)
- comment traiter le problème des grandes rotations et conserver, dans l'intégration numérique, l'objectivité de la loi constitutive, quelle que soit la taille de l'incrément de déformation adopté.

Le premier de ces problèmes se pose tant en petites qu'en grandes déformations. Il sera traité séparément du second, qui est spécifique aux grandes déformations.

Les contraintes finales dépendent généralement du chemin d'intégration suivi. Or nous nous situons dans le cadre d'un programme non linéaire, qui procède par itérations successives. Au cours de chaque itération, il faut évaluer un nouvel état final de contraintes. Certains programmes (NYSSSEN [113], FREY [47]) suivent un chemin qui, au cours d'une itération, part de la dernière approximation obtenue pour l'état final (chemin ACDB ..., figure 5.1.). Ceci n'est pas acceptable pour la diversité des cas que nous étudions. Il faut, à chaque itération, réaliser le chemin complet AC, AD, ... et enfin AB. Dès lors, le problème des vraies et fausses décharges, qui est d'origine purement numérique, ne se pose pas.

Nous appelons dans la suite A l'état du solide au début du pas et B l'état (inconnu) à la fin du pas. Nous affecterons les tenseurs d'indices supérieurs droits pour indiquer à quel moment ils se réfèrent :  $\underline{\sigma}^A, \underline{\sigma}^B$ ,

$\underline{\varepsilon}^A, \underline{\varepsilon}^B, \dots$

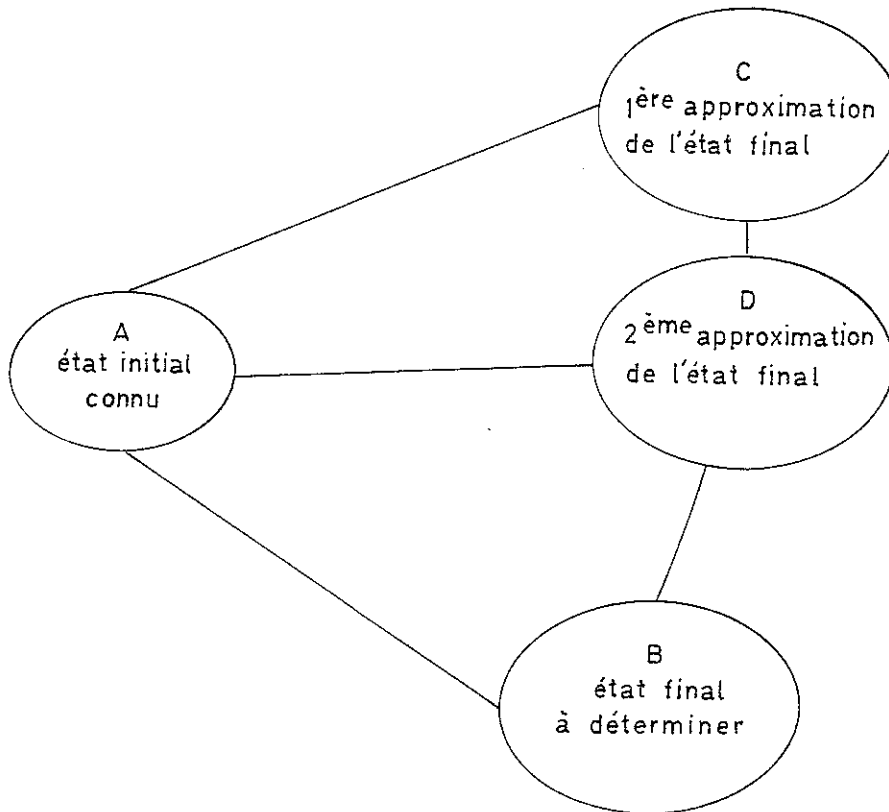


Figure 5.1. - Chemins d'intégration au cours d'un pas.

### 5.2.2. L'intégration des lois constitutives en petites déformations et rotations.

#### 5.2.2.1. Les lois constitutives élastiques.

L'intégration d'une loi constitutive élastique linéaire est très simple. On a immédiatement :

$$\Delta \underline{\varepsilon} = \int \dot{\underline{\varepsilon}} dt = \underline{\varepsilon}^B - \underline{\varepsilon}^A \quad (5.2.)$$

Si  $\dot{\underline{\varepsilon}}$  est constant, comme c'est souvent le cas en petites déformations (on suppose que les déplacements varient linéairement), alors

$$\Delta \underline{\varepsilon} = \dot{\underline{\varepsilon}} \Delta t \quad (5.3.)$$

L'intégration de la loi (3.48.), limitée aux petites déformations, donne

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}} \quad (5.4.)$$

$$\rightarrow \Delta \underline{\sigma} = \int \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}} dt \quad (5.5.)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \underline{\Delta\sigma} &= \underline{C}^e \underline{\Delta\varepsilon} \\ \underline{\sigma}^B &= \underline{\sigma}^A + \underline{C}^e \underline{\Delta\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.6.)$$

Si la loi élastique est non linéaire, le tenseur d'élasticité  $\underline{C}^e$  dépend de la contrainte, et ne peut donc sortir de l'intégrale (5.5.). Un schéma plus complexe doit être appliqué. Considérons le paramètre non dimensionnel  $\theta$  de mesure du temps. Pendant le pas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \in [0,1] \\ t = (1-\theta) t^A + \theta t^B \\ \Delta t = t^B - t^A \end{array} \right. \quad (5.7.)$$

Deux schémas d'intégration peuvent être développés. Dans le premier, nous utilisons une valeur moyenne du tenseur d'élasticité évaluée au temps  $\theta$ , notée  $\underline{C}^{e\theta}$  :

$$\underline{\Delta\sigma} = \underline{C}^{e\theta} \underline{\Delta\varepsilon} \quad (5.8.)$$

Dans le second schéma, nous utilisons une autre valeur moyenne du tenseur d'élasticité :

$$\begin{aligned} \underline{C}^{e\theta} &= (1-\theta) \underline{C}^{eA} + \theta \underline{C}^{eB} \\ \underline{\Delta\sigma} &= \underline{C}^{e\theta} \underline{\Delta\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.9.)$$

Dans les cas limites (si  $\theta = 0$  ou  $\theta = 1$ ) les deux schémas coïncident. Pour  $\theta = 0$ , ils sont explicites (tout est connu dans le membre de droite, la solution est donc immédiate) et conditionnellement stable. Pour  $\theta > 0$ , il sont implicites et nécessitent donc des itérations successives pour déterminer l'état en  $\theta$  ou en B utilisé dans le second membre. Une première approximation peut être l'état en A. Pour  $\theta \geq 0,5$ , les deux schémas sont inconditionnellement stables. Leur précision est maximale pour  $\theta = 0,5$ .

Nous avons implanté une seule loi élastique non linéaire. Elle s'applique aux argiles, et la non linéarité consiste en une dépendance du module de compressibilité vis-à-vis de la contrainte volumique et du volume des vides. Nous avons adopté dans LAGAMINE le schéma (5.8.) avec  $\theta = 0,5$ .

#### 5.2.2.2. Les lois constitutives élastoplastiques.

Nous étudions ici l'intégration numérique des trois lois constitutives élastoplastiques présentées au paragraphe 3.2.5. et de la loi de contact présentée au paragraphe 3.2.7.3.

De nombreux auteurs ont étudié l'intégration numérique des lois élastoplastiques. La raison semble être la nécessité de respecter la condition de cohérence, c'est-à-dire d'obtenir à la fin d'un chargement plastique, un état de contrainte situé sur la surface de plasticité actualisée par

l'écroutissement. Les pionniers sont RICE et TRACEY [111] qui ont proposé la méthode de la "normale moyenne", et KRIEG et KRIEG [110] qui ont développé la technique du "retour radial". Ces deux méthodes ont ensuite été discutées et généralisées par, notamment, MARQUES [112], NAGTEGAAL et REBELO [85], LORET et PREVOST [118], PALGEN [136], HUGHES [16], SCHREYER, KULAK et KRAMER [114], NYSSSEN [113], SIMO et TAYLOR [117], ORTIZ et SIMO [116], NAGTEGAAL et de JONG [124], GELIN et PICART [107], etc...

Si le modèle constitutif est élastoplastique, trois types de comportement peuvent apparaître dans un pas :

- la déformation est purement élastique ;
- la déformation est d'abord purement élastique, puis devient élastoplastique ;
- la déformation est en permanence élastoplastique.

Il est important de distinguer dans l'algorithme utilisé, ces trois cas. Quelque soit l'état initial  $\underline{\sigma}^A$ , la première étape consiste toujours à supposer la déformation purement élastique. On obtient alors, par les algorithmes présentés au paragraphe précédent, un état final  $\underline{\sigma}^e$ , qu'il faut comparer au critère de plasticité  $f$  tel qu'il est dans l'état A. Nous noterons dans ce paragraphe la variable d'écroutissement  $k$  en général, quelle que soit la loi envisagée, et nous n'aborderons plus le cas de l'élasticité non linéaire, qui peut être introduit sans difficulté, mais en alourdissant le formalisme. On a donc :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{\sigma}^e = \underline{\sigma}^A + \underline{C}^e \Delta \underline{\varepsilon} = \underline{\sigma}^A + \Delta \underline{\sigma}^e \\ \text{si } f(\underline{\sigma}^e, k^A) \leq 0 \quad \text{le pas est purement élastique} \\ \text{si } f(\underline{\sigma}^e, k^A) > 0 \quad \text{le pas est élastoplastique.} \end{array} \right. \quad (5.10.)$$

Si le pas est purement élastique, le problème est résolu. Sinon, il faut examiner si une partie du pas est élastique ou non. Si l'état initial est sur la surface de plasticité

$$f(\underline{\sigma}^A, k^A) = 0 \quad (5.11.)$$

alors la déformation est en permanence élasto-plastique. Sinon, nous divisons le pas et l'incrément de déformation en ses parties élastique et élastoplastique. Soit  $\underline{\sigma}^C$  la contrainte à l'entrée en plasticité et  $\alpha$  la proportion de trajet élastique (figure 5.2.).

On a :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{\sigma}^C = \underline{\sigma}^A + \alpha \Delta \underline{\sigma}^e \\ f(\underline{\sigma}^C, k^A) = 0 \end{array} \right. \quad (5.12.)$$

Ces équations se transforment en une équation du second degré en  $\alpha$  dont une seule racine (sauf si elles sont égales) est comprise entre 0 et 1,

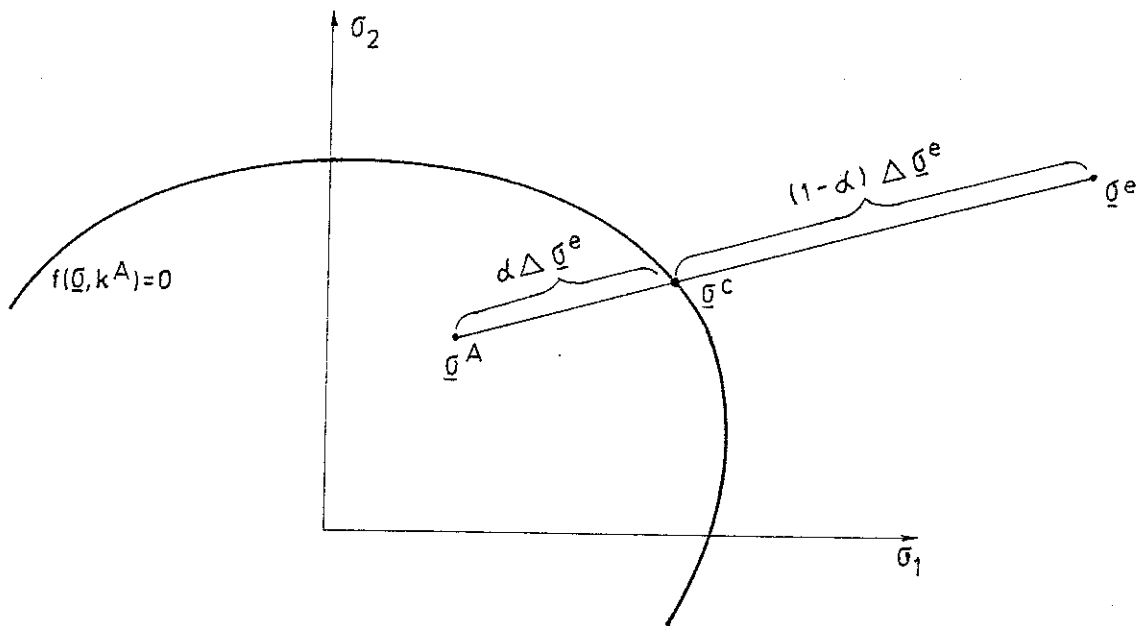


Figure 5.2. - Entrée en plasticité.

soit pour la loi n° 1 de von MISES

$$\alpha^2 II_{\Delta\hat{\sigma}^e} + \alpha \hat{\sigma}_{ij}^A \Delta\hat{\sigma}_{ij}^e + (II_{\hat{\sigma}^A} - k^{A2}) = 0 \quad (5.13.)$$

pour la loi n° 2 de DRUCKER-PRAGER

$$\begin{aligned} \alpha^2 (II_{\Delta\hat{\sigma}^e} - m^2 I_{\Delta\sigma}^2 e) + \alpha (\hat{\sigma}_{ij}^A \Delta\sigma_{ij}^e - 2 m^2 I_{\sigma^A} I_{\Delta\sigma} e + 2 m^2 c^A I_{\Delta\sigma} e) \\ + (II_{\hat{\sigma}^A} - m^2 I_{\sigma^A}^2 + 2 m^2 c^A I_{\sigma^A} - m^2 c^{A2}) = 0 \end{aligned} \quad (5.14.)$$

pour la loi n° 3 elliptique

$$\begin{aligned} \alpha^2 (II_{\Delta\hat{\sigma}^e} + m^2 I_{\Delta\sigma}^2 e) + \alpha (\hat{\sigma}_{ij}^A \Delta\sigma_{ij}^e + m^2 2 I_{\sigma^A} I_{\Delta\sigma} e \\ + 2 a^A m^2 I_{\Delta\sigma} e) + (II_{\hat{\sigma}^A} + m^2 I_{\sigma^A}^2 + 2 a^A m^2 I_{\sigma^A}) = 0 \end{aligned} \quad (5.15.)$$

pour la loi de contact avec frottement

$$\begin{aligned} \alpha^2 (\Delta\tau_S^2 + \Delta\tau_T^2 - \phi^2 \Delta p^2) + 2\alpha (\tau_S^A \Delta\tau_S^e + \tau_T^A \Delta\tau_T^e - \phi^2 p^A \Delta p^e) \\ + (\tau_S^{A2} + \tau_T^{A2} - \phi^2 p^{A2}) = 0 \end{aligned} \quad (5.16.)$$

Si l'état était initialement plastique (5.11.) nous notons

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^C &= \underline{\sigma}^A \\ \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (5.17.)$$

Dans la suite, sans nuire à la généralité, nous considérons que l'état C et l'état A coïncident. Nous notons  $\underline{\Delta\epsilon}$  l'incrément de déformation res-

tant et  $\Delta \underline{\sigma} = \underline{\sigma}^B - \underline{\sigma}^C \equiv \underline{\sigma}^B - \underline{\sigma}^A$  l'incrément de contrainte associé.

Rappelons la forme des équations constitutives en régime élastoplastique :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{\varepsilon}} &= \dot{\underline{\varepsilon}}^e + \dot{\underline{\varepsilon}}^p \\ \dot{\underline{\sigma}} &= \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{C}^e (\dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\underline{\varepsilon}}^p) \\ \dot{\underline{\varepsilon}}^p &= \dot{\lambda} \underline{n} \\ \underline{n} &= \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \text{ en plasticité associée (lois n° 1, 2, 3)} \\ \underline{n} &= \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \text{ en plasticité non associée (loi de contact)} \\ \dot{k} &= \dot{\lambda} k'(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (5.18.)$$

Nous pouvons remplacer ce processus par deux processus successifs, dont la somme est équivalente au processus précédent :

Processus n° 1, élasticité pure :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{\varepsilon}} &= \dot{\underline{\varepsilon}}^{ea} \\ \dot{\underline{\sigma}} &= \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}} = \dot{\underline{\sigma}}^e \\ \dot{\underline{\varepsilon}}^p &= 0, \quad \dot{k} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.19.)$$

Processus n° 2, plasticité :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{\varepsilon}} &= 0 \\ \dot{\underline{\varepsilon}}^p &= -\dot{\underline{\varepsilon}}^{eb} \\ \dot{\underline{\sigma}} &= \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}}^{eb} = -\underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}}^p = -\dot{\underline{\sigma}}^p \\ \dot{\underline{\varepsilon}}^p &= \dot{\lambda} \underline{n} \\ \dot{k} &= \dot{\lambda} k'(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (5.20.)$$

Cette décomposition équivaut à supposer que dans une première étape, la déformation est purement élastique, et aucune dissipation n'intervient. Dans la deuxième étape, la déformation globale est nulle, et le processus est uniquement interne. Par un mouvement des dislocations (NGUYEN DANG HUNG [24]), les contraintes issues de la première étape se relaxent jusqu'à ce qu'elles respectent le critère de plasticité actualisé par l'écrouissage. Cette idée suggérée par SCHREYER, KULAK et KRAMER [114] et ORTIZ et SIMO [116], rappelle les modèles rhéologiques d'élastovisco-plasticité. Elle permet d'exposer les principes de la plupart des schémas d'intégration numérique des lois élastoplastiques, si elle est généralisée à des pas de taille finie.

Le processus élastique est évidemment intégré selon les schémas propo-



sés ci-dessus. On obtient ainsi à la fin de la première étape les contraintes  $\underline{\sigma}^e$ , qui violent le critère de plasticité.

Dans la deuxième étape, nous devons évaluer les incréments de déformation plastique  $\Delta\underline{\varepsilon}^p$ , de contrainte plastique  $\Delta\underline{\sigma}^p$  et de taille de la surface  $\Delta k$ . L'incrément de déformation plastique a une direction  $\underline{n}$  et une norme finie  $\Delta\lambda$ . On a donc, à partir de (5.20.) :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta\underline{\varepsilon}^p = \Delta\lambda \underline{n} \\ \Delta k = \Delta\lambda k'(\lambda) \\ \Delta\underline{\sigma}^p = \underline{C}^e \Delta\underline{\varepsilon}^p \end{array} \right. \quad (5.21.)$$

Les trois schémas les plus courants diffèrent essentiellement par la direction de la normale  $\underline{n}$  adoptée.

- Le schéma de la "rigidité tangente" utilise la normale à l'état A, en  $\theta = 0$ . Il est explicite.
- Le schéma de la "normale moyenne" utilise la normale au milieu du pas, en  $\theta = 0,5$ . Il s'apparente au schéma du point milieu.
- Le schéma du "retour radial" utilise la normale à la fin du pas, en  $\theta = 1$ . Il est totalement implicite.

Considérons un cas particulier : la loi de von MISES sans écrouissage. La surface de plasticité est un cylindre centré sur l'axe de la contrainte moyenne (1ère trisectrice) dans l'espace des contraintes principales (fig. 3.6.). Le plan déviatorique est un plan perpendiculaire à cet axe. La trace de la surface de plasticité y est un cercle. Les 3 schémas proposés sont représentés dans ce plan à la figure 5.3. On voit ainsi que, pour un grand pas, les résultats peuvent être sensiblement différents. Le schéma de la rigidité tangente est explicite et donc sa stabilité est conditionnelle. Il faut donc effectuer de petits pas. Malgré sa simplicité, cette obligation et le danger que l'on court lorsqu'elle n'est pas respectée l'ont éliminée de la plupart des codes de calcul. Le schéma de la normale moyenne donne, intuitivement, la précision maximum. La normale moyenne peut être calculée, en première approximation en

$$\underline{\sigma}^D = \underline{\sigma}^C + \frac{1}{2} \Delta\underline{\sigma}^e \quad (5.22.)$$

Il est donc simple, mais nécessite un calcul matriciel. RICE et TRACEY [111]; qui semblent l'avoir créé, montrent qu'il est exact dans le cas envisagé à la figure 5.3. (von MISES sans écrouissage). Le retour radial est encore plus simple dans ce cas, car seul un calcul scalaire doit être effectué : la normale à la surface  $\underline{n}$  est colinéaire à  $\underline{\sigma}^e$ . Il suffit donc de mettre à l'échelle  $\underline{\sigma}^e$  de sorte qu'il respecte le critère de plasticité:

$$\underline{\sigma}^B = m \underline{\sigma}^e$$

avec  $f(\underline{\sigma}^B) = 0$  (5.23.)

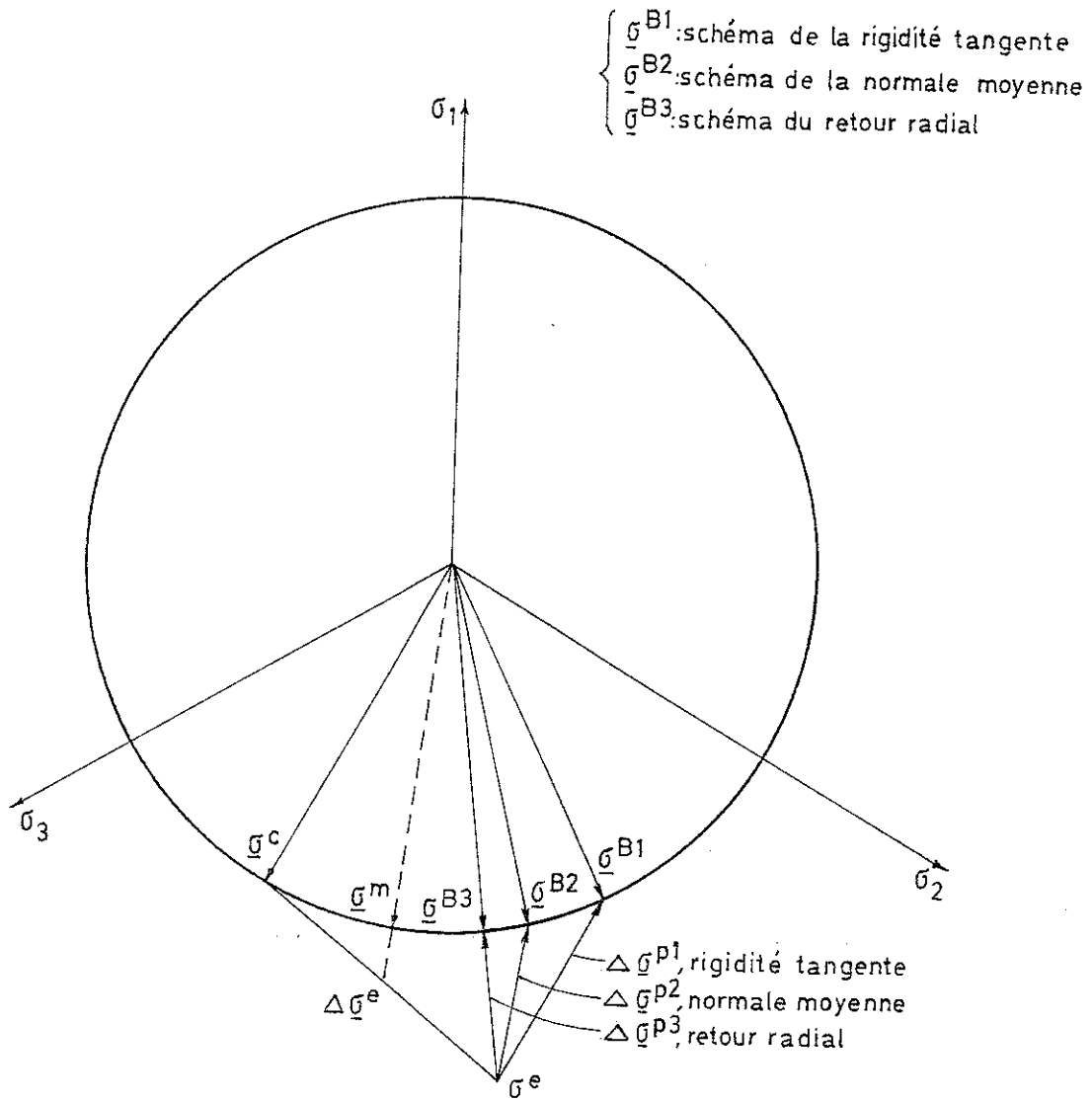


Figure 5.3. - Comparaison des 3 schémas.

Mais dès que l'on change de surface ou que l'on introduit un écrouissage, cette forme et sa simplicité disparaissent.

Les deux schémas de la normale moyenne du retour radial sont inconditionnellement stables, et ont en général une précision comparable (sauf dans le cas de la figure 5.3. !).

Remarquons encore que nous pouvons également formuler ces schémas sous les formes

$$\Delta \underline{\varepsilon}^P = \Delta \lambda [(1-\theta) \underline{n}^A + \theta \underline{n}^B]$$

ou  $\Delta \underline{\varepsilon}^P = \Delta \lambda \underline{n}^\theta$  (5.24.)

où  $\theta$  représente l'instant auquel est calculée la normale.

Le choix de la normale peut donc se généraliser ainsi.

Le schéma obtenu est inconditionnellement stable pour  $\theta \geq 0,5$ . Tous les schémas stables sont donc implicites. Hormis pour la loi de von MISES sans écrouissage il est nécessaire d'itérer pour trouver la normale  $\underline{n}^B$  ou  $\underline{n}^\theta$ .

Considérons à présent l'écrouissage  $\Delta k$  et l'amplitude  $\Delta \lambda$  de la déformation plastique  $\Delta \underline{\epsilon}^P$ . Les équations (5.21.a et b) montrent que  $\Delta k$  et  $\Delta \lambda$  doivent être évalués simultanément. Leur valeur doit être telle que la condition de cohérence soit respectée à la fin du pas

$$f(\underline{\sigma}^B, k^B) = f(\underline{\sigma}^C + \underline{C}^E \Delta \lambda \underline{n}, k^A + k' \Delta \lambda) = 0 \quad (5.25.)$$

En général, la cohérence n'est pas assurée pendant le pas. Si l'écrouissage est non-linéaire  $k' \neq \text{cste}$ , cette équation est fortement non linéaire et il est nécessaire d'utiliser une valeur moyenne de la dérivée  $k'(\lambda)$ . On peut donc prendre la valeur de  $k'(\lambda)$  en A, en B, en  $\theta = 0,5$  ou à un autre instant. Le choix du point milieu ( $\theta = 0,5$ ) est le plus fréquent et généralement le plus précis. Mais on remarquera qu'il y a une certaine incohérence logique à utiliser d'une part le retour radial, donc la normale en  $\theta = 1$ , et d'autre part la valeur moyenne de  $k'$  en  $\theta = 0,5$ . Ce mélange existe pourtant et ne semble pas poser de problème particulier.

Ayant choisi la valeur de  $k'$ , il nous reste à évaluer  $\Delta \lambda$ . A nouveau, plusieurs techniques sont possibles. Tout d'abord, on peut utiliser la matrice tangente évaluée au chapitre 3, avec les valeurs moyennes de  $\underline{n}$  et  $k'$  choisies, soit transformer

$$\dot{\underline{\sigma}}^P = \underline{C}^P \dot{\underline{\epsilon}} \quad (5.26.)$$

en

$$\Delta \underline{\sigma}^P = \underline{C}^P(\underline{n}, k') \Delta \underline{\epsilon} \quad (5.27.)$$

Si  $\underline{n}$  et  $k'$  sont évalués au milieu ou en fin de pas, il faut itérer jusqu'à convergence, en partant de valeurs calculées  $\underline{\sigma}^A$  ou  $\underline{\sigma}^E$ . Deux ou trois itérations suffisent, mais on n'est pas assuré d'obtenir un état B cohérent selon (5.25.), et on risque de s'écarter progressivement de la surface de plasticité, pas après pas. Il faut donc effectuer une correction supplémentaire. Plusieurs techniques sont à nouveau possibles. La plus rigoureuse consiste à faire le développement de TAYLOR de l'équation de la surface de plasticité autour de l'état légèrement incohérent qu'on vient d'obtenir, et à résoudre un système tel que ceux que nous présentons plus loin (5.34.). Une deuxième méthode consiste à effectuer un retour radial sans écrouissage pour terminer l'étape plastique. Cette technique est moins rigoureuse. Elle est fort utilisée. Elle demande la résolution d'un système simple d'équations. Il est plus simple de supposer que les contrain-

tes ne varient pas pendant la correction mais que seule la variable d'écroutissage est modifiée, de sorte que la cohérence soit finalement assurée. Une équation scalaire de second degré donne cette solution. Il semble que nous soyons seuls à utiliser cette méthode. Elle nous semble aussi exacte que la précédente, car il n'y a pas de raison de supposer que l'erreur de cohérence est commise sur les contraintes plutôt que sur l'écroutissage.

Une deuxième technique consiste à injecter dans (5.25.) les valeurs de  $\underline{n}$  et  $k'$  adoptées et de résoudre l'équation scalaire en  $\Delta\lambda$  qui en découle. Ainsi, dans le cas du retour radial avec la loi de von MISES, on a

$$\left| \begin{array}{l} k^B = k^A + k' \Delta\lambda \\ \underline{n}^e = \underline{\hat{\sigma}}^e \\ \underline{\sigma}^B = \underline{\sigma}^e - \underline{C}^e \Delta\lambda \underline{\hat{\sigma}}^e = \underline{\sigma}^e - 2G\Delta\lambda \underline{\hat{\sigma}}^e \end{array} \right. \quad (5.28.)$$

Cette forme est équivalente à (3.109.), mais est appliquée à un pas de taille finie. La condition de cohérence est alors

$$f(\underline{\sigma}^B, k^B) = II_{\underline{\hat{\sigma}}^B} - k^{B2} = 0 \quad (5.29.)$$

avec

$$II_{\underline{\hat{\sigma}}^B} = II_{\underline{\hat{\sigma}}^e} (1 - 2G\Delta\lambda)^2 \quad (5.30.)$$

Donc la condition de cohérence donne

$$\begin{aligned} II_{\underline{\hat{\sigma}}^e} (1 - 2G\Delta\lambda)^2 &= (k^A + k' \Delta\lambda)^2 \\ \rightarrow \Delta\lambda &= \frac{\sqrt{II_{\underline{\hat{\sigma}}^e}} - k^A}{k' + 2G \sqrt{II_{\underline{\hat{\sigma}}^e}}} \end{aligned} \quad (5.31.)$$

Ici  $\Delta\lambda$  dépend de la valeur adoptée pour  $k'$  et il faut donc itérer pour obtenir la solution correcte. Le même raisonnement pourrait être réalisé pour chacune des lois et des schémas présentés ci-dessus. La cohérence est toujours assurée en fin de pas et le formalisme est très simple.

La troisième technique a été utilisée par NYSSSEN [113] et GELIN et PICART [107]. Considérons l'état  $\underline{\sigma}^e$ . Il viole le critère de plasticité  $f(\underline{\sigma}^e, k^A) \neq 0$ . Effectuons un développement en série de TAYLOR du critère de plasticité  $f$  autour de l'état  $(\underline{\sigma}^e, k^A)$  :

$$f = f(\underline{\sigma}^e, k^A) + \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T \Delta\underline{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial k} \Delta k \quad (5.32.)$$

et utilisons les relations (5.21.) :

$$f = f(\underline{\sigma}^e, k^A) + \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T \underline{C}_e \Delta\lambda \underline{n} + \frac{\partial f}{\partial k} k' \Delta\lambda \quad (5.33.)$$

Nous cherchons le facteur  $\Delta\lambda$  qui donne  $f = 0$ . Il est donné par :

$$\Delta\lambda = \frac{f(\underline{\sigma}^e, k^A)}{\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}\right)^T \underline{C}_e \underline{n} + \frac{\partial f}{\partial k} k'} \quad (5.34.)$$

Comme (5.32.) est une linéarisation du critère, cette valeur de  $\Delta\lambda$  ne donne pas une cohérence parfaite. Il faut répéter le processus 2 ou 3 fois pour être précis. Dans cette formulation  $\underline{n}$  et  $k'$  sont évaluées dans le dernier état connu, c'est-à-dire l'état  $(\underline{\sigma}^e, k^A)$  pour la première itération. Dans le cas de la loi de von MISES, cette formulation est équivalente à un retour radial, mais ce n'est pas le cas pour des surfaces plus complexes.

La précision des schémas présentés a été analysée par KRIEG et KRIEG [110] pour une loi de von MISES sans écrouissage, par LORET et PREVOST [118] pour une loi de DRUCKER-PRAGER, par ORTIZ et SIMO [116] pour un modèle Cam Clay, et par NAGTEGAAL et de JONG [124] qui se sont intéressés aux conditions de stabilité. Il en résulte que les schémas de la normale moyenne et du retour radial sont toujours plus précis que celui de la raideur tangente, et que pour toutes les lois considérées, le retour radial a une bonne précision. La précision décroît lorsque la taille du pas augmente. Il est donc nécessaire de limiter la taille des pas, et certains auteurs (KRIEG et KRIEG [110], SCHREYER et al [114], NYSSSEN [113], MARQUES [112]) proposent des techniques de limitation automatique. Nous n'avons pas envisagé ces aspects. Seuls NAGTEGAAL et REBELO [85] abordent le problème de la précision et de la stabilité dans un contexte de grandes déformations. D'après eux, la méthode du retour radial est plus précise et converge plus vite, mais est moins robuste (elle diverge parfois) que celle de la normale moyenne. Cette dernière "passe partout", parfois avec difficulté, mais ne diverge jamais. Les auteurs ne justifient pas ces différences.

Dans le programme LAGAMINE, nous avons adopté, de manière générale, le schéma de la normale moyenne et du point milieu pour les lois élastoplastiques, y compris la loi de contact avec frottement. Après avoir déterminé  $\underline{\sigma}^e$ , nous réalisons deux itérations élastoplastiques, selon la formule (5.27.) et finalement, nous ajustons les variables d'écrouissage à l'état de contrainte (cet ajustement est toujours d'amplitude très faible).

#### 5.2.2.3. Les lois constitutives élastoviscoplastiques.

Nous étudions ici l'intégration numérique de la loi constitutive élastoviscoplastique présentée au paragraphe 3.2.6. Par beaucoup d'aspects, l'intégration des lois élastoviscoplastiques est semblable à celle des lois élastoplastiques. Le traitement de la partie élastique du pas et la

division du pas en ses parties élastiques et élastoviscoplastique sont identiques. Nous n'en parlerons donc guère, nous limitant ainsi à l'étude de la deuxième partie du pas et plus précisément de la déformation inélastique que nous continuons à noter  $\Delta \underline{\varepsilon}^p$ . De nombreux auteurs ont abordé ce point. Citons GERADIN et al [115], TAYLOR et BECKERS [129], BRAVDEL, ABOUAF et CHENOT [135], LUSH et ANAND [108], KRIEG [120], KUMAR, MORJARIA et MUKHERJEE [121], ZIRIN et KREMPL [122], SHIH, DELORENZI et MILLER [119], ZIENKIEWICZ [2] .

Par contre le cas viscoplastique diffère de la plasticité en ce sens qu'il n'existe pas de condition équivalente à la condition de cohérence plastique. L'intégration est donc plus simple, et en tout cas différente, puisqu'il existe une équation de moins à respecter.

Nous utilisons les mêmes notations qu'aux deux précédents paragraphes, et nous ne les rappelons pas.

On peut donc, comme précédemment, diviser le pas en deux processus, dans le style de (5.19.) et (5.20.) : Précisons cette forme :

Processus n° 1, élasticité pure :

$$\left| \begin{array}{l} \dot{\underline{\varepsilon}} = \dot{\underline{\varepsilon}}^e \\ \dot{\underline{\sigma}} = \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}}^e = \dot{\underline{\sigma}}^e \\ \dot{\underline{\varepsilon}}^p = 0, \quad \dot{k} = 0 \end{array} \right. \quad (5.19.)$$

Processus n° 2, élastoviscoplasticité :

$$\left| \begin{array}{l} \dot{\underline{\varepsilon}} = 0 \\ \dot{\underline{\varepsilon}}^p = - \dot{\underline{\varepsilon}}^e \\ \dot{\underline{\sigma}} = \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}}^e = - \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}}^p = - \dot{\underline{\sigma}}^p \\ \dot{\underline{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \\ \dot{k} = \frac{\partial k}{\partial \lambda} \lambda \\ \lambda = f(\underline{\sigma}, k) \end{array} \right. \quad (5.35.)$$

La principale différence avec la plasticité réside dans l'expression de  $\lambda$  (et non  $\lambda$ ) à la quatrième ligne de (5.35.).

La plupart des schémas sont basés sur une vitesse de déformation plastique moyenne et une vitesse d'écrouissage moyenne :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta \underline{\varepsilon}^p = [(1-\theta) \dot{\underline{\varepsilon}}^p A + \theta \dot{\underline{\varepsilon}}^p B] \Delta t \\ \Delta k = [(1-\theta) \dot{k}^A + \theta \dot{k}^B] \Delta t \end{array} \right. \quad (5.36.)$$

La forme

$$\Delta \underline{\varepsilon}^P = \Delta t \underline{\varepsilon}^{\dot{p}\theta} \quad (5.37.)$$

n'est guère utilisée pour ce type d'équation. Les divers schémas diffèrent par l'instant  $\theta$  privilégié et par la valeur de  $\underline{\varepsilon}^{\dot{p}\theta}$  utilisée.

Les schémas sont stables pour de petits pas de temps si  $\theta < 0,5$  et inconditionnellement stables pour  $\theta \geq 0,5$ . Si  $\theta = 0$ , le schéma est explicite, si  $\theta = 1/2$ , il est du type point milieu.  $\theta = 1$  correspond au schéma totalement implicite. Pour plus de détails on consultera par exemple Zienkiewicz [2].

Tel que présenté ci-dessus, le schéma (5.36.) demande, si  $\theta \neq 0$ , des itérations pour déterminer  $\underline{\varepsilon}^{\dot{p}B}$ . Aussi divers auteurs ont-ils cherché des simplifications pour éviter un problème à itérations trop nombreuses. Ainsi, la méthode dite "prédicteur-corrector" est-elle limitée à deux itérations :

1ère itération : prédiction

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\varepsilon}^P &= \Delta t \underline{\varepsilon}^{\dot{p}A} \\ \rightarrow \underline{\varepsilon}^{\dot{p}B1}, \underline{\sigma}^{B1}, k^{B1}, \underline{\varepsilon}^{\dot{p}B1} \end{aligned} \quad (5.38.)$$

2ème itération : correction

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\varepsilon}^P &= [\theta \underline{\varepsilon}^{\dot{p}A} + (1-\theta) \underline{\varepsilon}^{\dot{p}B1}] \Delta t \\ \rightarrow \underline{\varepsilon}^{\dot{p}B}, \underline{\sigma}^B, k^B \end{aligned} \quad (5.39.)$$

La méthode prédicteur-corrector présuppose qu'après la 2ème itération la précision est suffisante, et donc qu'une 3ème itération est inutile.

Une autre technique est aujourd'hui de plus en plus utilisée. Elle consiste à développer en série de TAYLOR autour de l'état A l'inconnue fondamentale  $\underline{\varepsilon}^{\dot{p}}$ . Elle est parfois appelée méthode du "gradient avant".

On a :

$$\underline{\varepsilon}^{\dot{p}B} = \underline{\varepsilon}^{\dot{p}A} + \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{\dot{p}}}{\partial \underline{\sigma}} \Delta \underline{\sigma} + \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{\dot{p}}}{\partial k} \Delta k \quad (5.40.)$$

et de même

$$k^B = k^A + \frac{\partial k}{\partial \underline{\sigma}} \Delta \underline{\sigma} + \frac{\partial k}{\partial k} \Delta k \quad (5.41.)$$

Dès lors, les incréments de déformation plastique et d'écrouissage sont, par (5.36.)

$$\left| \begin{aligned} \Delta \underline{\varepsilon}^P &= [\underline{\varepsilon}^{\dot{p}A} + \theta \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{\dot{p}}}{\partial \underline{\sigma}} \Delta \underline{\sigma} + \theta \frac{\partial \underline{\varepsilon}^{\dot{p}}}{\partial k} \Delta k] \Delta t \\ \Delta k &= [k^A + \theta \frac{\partial k}{\partial \underline{\sigma}} \Delta \underline{\sigma} + \theta \frac{\partial k}{\partial k} \Delta k] \Delta t \end{aligned} \right. \quad (5.42.)$$

Prémultiplions la première équation (5.42.) par le tenseur d'élasticité

et réordonnons les termes. D'après (5.35.), il vient :

$$\begin{cases} (\underline{I} + \theta \underline{C}^e \frac{\partial \dot{\underline{\epsilon}}^p}{\partial \underline{\sigma}} \Delta t) \Delta \underline{\sigma} + (\theta \underline{C}^e \frac{\partial \dot{\underline{\epsilon}}^p}{\partial k} \Delta t) \Delta k = - \underline{C}^e \dot{\underline{\epsilon}}^p \Delta t \\ (-\theta \frac{\partial \dot{k}}{\partial \underline{\sigma}} \Delta t) \Delta \underline{\sigma} + (1 - \theta \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} \Delta t) \Delta k = \dot{k}^A \Delta t \end{cases} \quad (5.43.)$$

Ce système peut-être inversé et donne en une itération les incréments de contrainte  $\Delta \underline{\sigma}$  et d'écrouissage  $\Delta k$  en fonction de l'état en A. Le schéma est inconditionnellement stable pour  $\theta \geq 0,5$ . Il est précis et donne de bons résultats sans être coûteux. Nous avons utilisé ce schéma dans le programme LAGAMINE.

#### 5.2.2.4. Les sous-intervalles d'intégration.

Du point de vue de l'intégration numérique des contraintes, plus les pas sont petits, plus la précision est grande. Économiquement, il faut par contre faire de grands pas. La technique des sous-intervalles permet d'obtenir un compromis intéressant entre les requêtes d'économie et de précision. Réalisons de grands pas. Mais divisons chacun d'eux en n "sous-intervalles" de même incrément de déformation. L'intégration numérique des lois est alors réalisée sous-intervalle après sous-intervalle, selon les techniques présentées ci-dessus. L'état de contrainte final ainsi obtenu peut être nettement différent de celui obtenu sans division du pas. La figure 5.4. illustre ces écarts dans le cas d'une loi élasto-plastique de von MISES sans écrouissage. Le schéma d'intégration est celui du retour radial.

Dans le programme LAGAMINE, la technique des sous-intervalles est utilisée dans l'intégration de toutes les lois constitutives mécaniques.

Certains auteurs ont essayé de mettre au point une méthode automatique de détermination du nombre optimum de sous-intervalles. Nous n'avons pas travaillé dans cette direction, et nous n'avons pas de critère de choix du nombre de division. Nous utilisons habituellement 10 à 20 sous-intervalles pour des pas où l'incrément de déformation dans une direction atteint 2 %. Il serait certainement utile d'approfondir ce point.



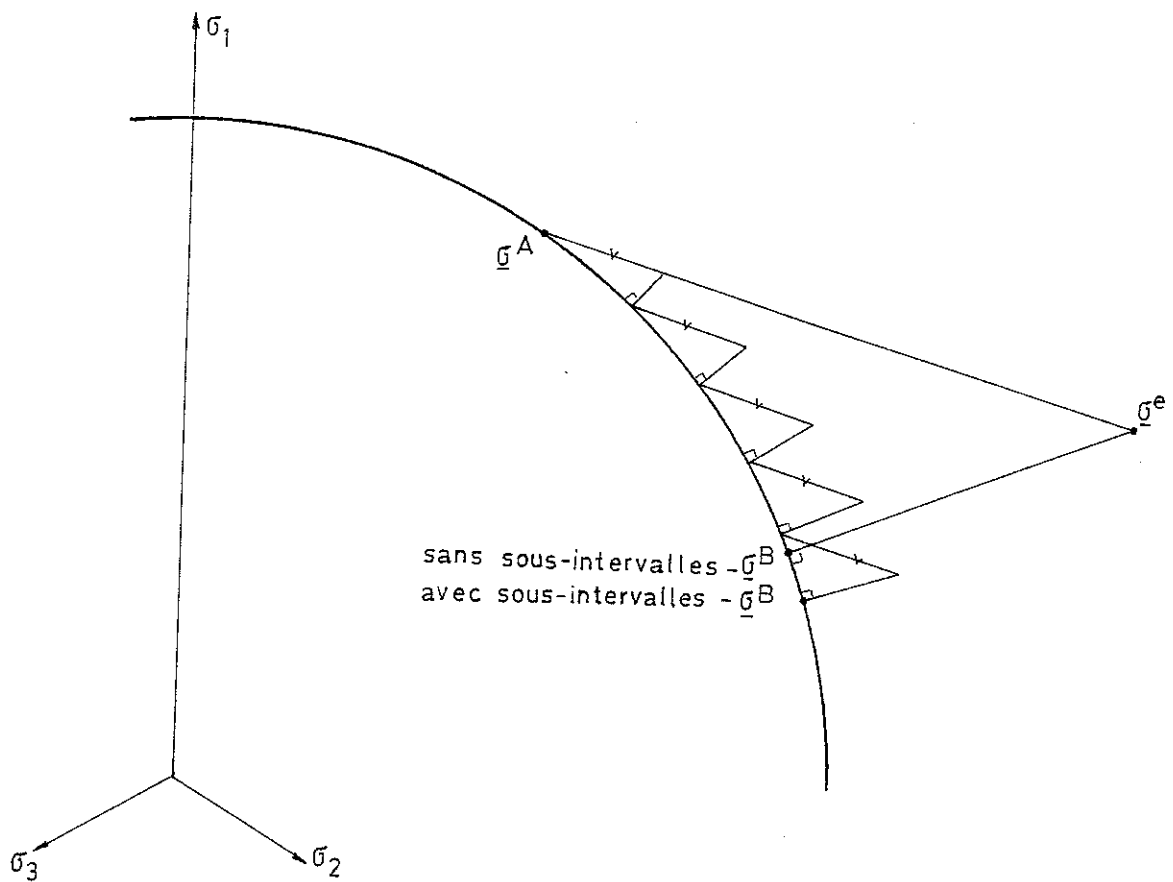


Figure 5.4. - Intégration avec sous-intervalles.

### 5.2.3. L'intégration des lois constitutives en grandes déformations et rotations.

#### 5.2.3.1. Introduction.

Les schémas d'intégration étudiés pour les petites déformations et rotations ne peuvent être transposés directement aux grandes déformations, car ils ne respectent pas le concept d'objectivité présenté aux chapitres 2 et 3. Dans ce chapitre, nous étudions l'intégration numérique des lois au cours d'un pas. Nous devons donc utiliser un nouveau concept, dérivé des précédents : l'objectivité incrémentale.

Considérons un barreau en rotation de corps rigide. Connaissant les coordonnées en A et B, il faut définir un chemin de coordonnées, de déformations et de contraintes, tel que dans l'état B, le tenseur contrainte soit simplement obtenu par rotation de celui qui existe à l'état A.

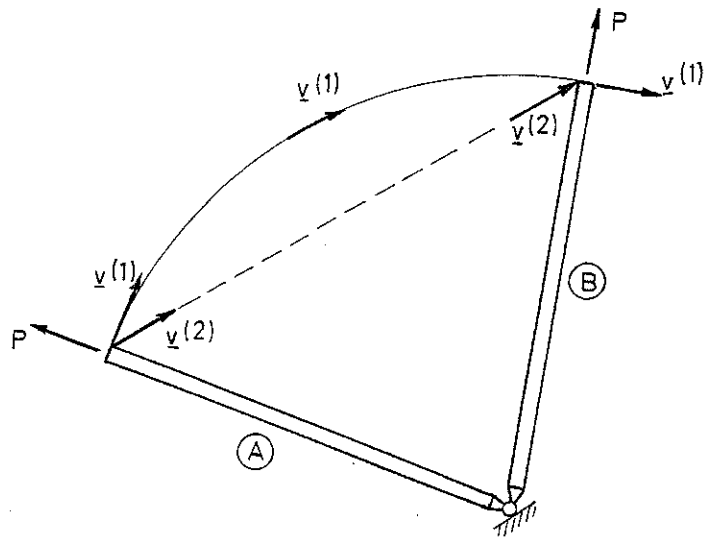


Figure 5.5. - Rotation de corps rigide pendant un pas.

Tous les chemins de déplacements ne conviennent manifestement pas. A la figure 5.5., le chemin (2) produit des déformations inacceptables, en particulier lorsqu'on utilise des lois constitutives irréversibles. Par contre, le chemin (1) suit la rotation et est donc incrémentalement objectif. Mais il correspond à un chemin de déplacements non linéaire.

Nous ferons diverses hypothèses sur la forme du chemin, et nous examinerons dans chaque cas si l'intégration est objective. D'abord, nous supposerons que les coordonnées varient linéairement. Puis nous rapporterons tous les tenseurs à une configuration unique, selon les idées de HUGHES et WINGET [30], HUGHES [16] et MINKY, ORTIZ et PISTER [126]. Nous examinerons également la méthode de la rotation instantanée finale, de BRAVDEL, ABOUAF et CHENOT [109] et la méthode du gradient de vitesse constant, de GODINAS [6]. Selon le cas, la vitesse objective de contrainte de JAUMAN se modifie ou disparaît.

Enfin, nous examinons le cas du contact. Nous précisons la notion de mouvement rigide, et nous présentons un schéma d'intégration objectif.

#### 5.2.3.2. La méthode linéaire ou de la moyenne.

La méthode d'intégration la plus simple consiste à utiliser la dérivée objective de JAUMAN avec des valeurs moyennes de  $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{\omega}$  et  $\underline{\dot{\sigma}}$ , évaluées à l'instant  $\theta$

$$\underline{\sigma}^B = \underline{\sigma}^A + \left( \underline{\dot{\sigma}}^\theta + \underline{\sigma}^\theta \underline{\omega}^\theta + \underline{\omega}^\theta \underline{\sigma}^\theta \right) \Delta t \quad (5.45.)$$

TAYLOR et BECKER [129] simplifient cette expression. Ils utilisent un schéma eulérien pour la partie issue des grandes rotations :

$$\underline{\sigma}^B = \underline{\sigma}^A + (\underline{\sigma}^{\nabla\theta} + \underline{\sigma}^A \underline{\omega}^{AT} + \underline{\omega}^A \underline{\sigma}^A) \Delta t \quad (5.46.)$$

Les limitations des schémas eulériens sont connues. Les auteurs les reconnaissent. Ils affirment, d'après des expériences numériques, que les erreurs induites ne sont pas significatives pour des incréments de rotation de moins de 5° par pas, ce qui est une taille généralement raisonnable.

Dans le programme LAGAMINE, nous avons implanté plusieurs schémas, dont l'un est dérivé de (5.45.). A la différence de TAYLOR et BECKER, nous utilisons une intégration de type implicite pour les rotations :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{\sigma}^{*B} = \underline{\sigma}^A + \underline{\sigma}^{\nabla\theta} \Delta t \\ \underline{\sigma}^B = \underline{\sigma}^{*B} + (\underline{\sigma}^{*B} \underline{\omega}^{BT} + \underline{\omega}^B \underline{\sigma}^{*B}) \Delta t \end{array} \right. \quad (5.47.)$$

$\underline{\sigma}^{\nabla\theta}$  est calculé par l'un des schémas présentés au paragraphe 5.2.2. La vitesse de rotation en fin de pas est donnée par :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{\omega}^B = \text{skw}(\underline{L}^B) \\ \underline{L}^B = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}^B} \\ \underline{v} = (\underline{x}^B - \underline{x}^A) / \Delta t \end{array} \right. \quad (5.48.)$$

Ce schéma a été perfectionné pour travailler par sous-intervalles.

Soit  $\underline{\sigma}^{(I)}$  les contraintes à la fin du sous-intervalle n° I. On a donc, si N est le nombre de sous-intervalles :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{\sigma}^{(0)} = \underline{\sigma}^A, \quad \underline{\sigma}^{(N)} = \underline{\sigma}^B \\ \underline{\sigma}^{*(I)} = \underline{\sigma}^{(I-1)} + \underline{\sigma}^{\nabla(I)\theta} \Delta t \\ \underline{\sigma}^{(I)} = \underline{\sigma}^{*(I)} + (\underline{\sigma}^{*(I)} \underline{\omega}^{(I)T} + \underline{\omega}^{(I)} \underline{\sigma}^{*(I)}) \Delta t \end{array} \right. \quad (5.49.)$$

Ainsi l'effet de la rotation sur le tenseur contrainte est intégré avec une précision semblable à celle obtenue précédemment dans l'intégration des contraintes.

On utilise donc le gradient des vitesses en fin de sous-intervalle,

$$\left| \begin{array}{l} \underline{L}^{(I)} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}^{(I)}} \\ \underline{v} = (\underline{x}^B - \underline{x}^A) / \Delta t \\ \underline{x}^{(I)} = \underline{x}^A + \underline{v} \frac{I}{N} \Delta t \end{array} \right. \quad (5.50.)$$

Ce gradient peut être calculé de manière récursive, en fonction du gradient au début du sous-intervalle :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{L}^{(I)} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}^{(I)}} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}^{(I-1)}} \frac{\partial \underline{x}^{(I-1)}}{\partial \underline{x}^{(I)}} \\ \underline{L}^{(I)} = \underline{L}^{(I-1)} \underline{F}^{(I)-1} \\ \underline{F}^{(I)} = \frac{\partial \underline{x}^{(I)}}{\partial \underline{x}^{(I-1)}} \end{array} \right. \quad (5.51.)$$

Le tenseur jacobien du sous-intervalle est calculé par :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{x}^{(I)} = \underline{x}^{(I-1)} + \underline{v} \frac{\Delta t}{N} \\ \underline{F}^{(I)} = \underline{I} + \underline{L}^{(I-1)} \frac{\Delta t}{N} \end{array} \right. \quad (5.52.)$$

On a donc finalement la formule de récurrence

$$\left| \begin{array}{l} \underline{L}^{(I)} = \underline{L}^{(I-1)} \left[ \underline{I} + \underline{L}^{(I-1)} \frac{\Delta t}{N} \right]^{-1} \\ \underline{L}^{(I)} = \left[ \underline{L}^{(I-1)-1} + \underline{I} \frac{\Delta t}{N} \right]^{-1} \end{array} \right. \quad (5.53.)$$

Ce schéma est-il objectif ? Pour le savoir, supposons que pendant le pas étudié, le solide subit une rotation rigide  $\underline{Q}$ . Par (2.19.), on a :

$$\begin{aligned} \underline{x}^B &= \underline{Q} \underline{x}^A \\ \rightarrow \underline{v} &= (\underline{x}^B - \underline{x}^A) / \Delta t = (\underline{Q} - \underline{I}) \underline{x}^A / \Delta t \end{aligned} \quad (5.54.)$$

Le tenseur jacobien sur le pas et le gradient de vitesse en début de pas sont :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{F}^{AB} = \frac{\partial \underline{x}^B}{\partial \underline{x}^A} = \underline{Q} \\ \underline{L}^A = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}^A} = (\underline{Q} - \underline{I}) / \Delta t \end{array} \right. \quad (5.55.)$$

Limitons-nous à des problèmes bidimensionnels. Dans ce cas la matrice de rotation peut être mise sous la forme

$$\left| \begin{array}{l} \underline{Q} = \begin{bmatrix} + \cos \beta & + \sin \beta \\ - \sin \beta & + \cos \beta \end{bmatrix} \\ \underline{Q}^T = \begin{bmatrix} \cos \beta & - \sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \underline{Q}^{-1} \end{array} \right. \quad (5.56.)$$

Dès lors, le gradient de vitesse initial vaut :

$$\underline{L}^A = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \cos \beta - 1 & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta - 1 \end{bmatrix} \quad (5.57.)$$

Ce tenseur n'est pas antisymétrique. La vitesse de déformation initiale n'est donc pas nulle

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^A = \frac{1}{2} (\underline{L}^A + \underline{L}^{AT}) = \frac{\cos \beta - 1}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.58.)$$

Evaluons la vitesse de déformation à la fin du premier sous-intervalle. Le tenseur jacobien pour ce sous-intervalle vaut (5.52.)

$$\underline{F}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{N} (\cos \beta - 1) & \frac{1}{N} \sin \beta \\ -\frac{1}{N} \sin \beta & 1 + \frac{1}{N} (\cos \beta - 1) \end{bmatrix} \quad (5.59.)$$

$$\det(\underline{F}^{(1)}) = \left[1 + \frac{1}{N} (\cos \beta - 1)\right]^2 + \left[\frac{1}{N} \sin \beta\right]^2$$

$$\det(\underline{F}^{(1)}) = 1 - \frac{2}{N} (1 - \cos \beta) \left(1 - \frac{1}{N}\right) \quad (5.60.)$$

$$\underline{F}^{(1)-1} = \det^{-1}(\underline{F}^{(1)}) \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{N} (\cos \beta - 1) & -\frac{1}{N} \sin \beta \\ \frac{1}{N} \sin \beta & 1 + \frac{1}{N} (\cos \beta - 1) \end{bmatrix}$$

par (5.51.b)

$$\underline{L}^{(1)} = \frac{\det^{-1}(\underline{F}^{(1)})}{\Delta t} \begin{bmatrix} (1 - \frac{2}{N})(\cos \beta - 1) & + \sin \beta \\ -\sin \beta & (1 - \frac{2}{N})(\cos \beta - 1) \end{bmatrix} \quad (5.61.)$$

Donc la vitesse de déformation à la fin du premier sous-intervalle est

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^{(1)} = \frac{1}{2} (\underline{L}^{(1)} + \underline{L}^{(1)T}) = \frac{\det^{-1}(\underline{F}^{(1)})}{\Delta t} (1 - \frac{2}{N})(\cos \beta - 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.62.)$$

Passons au cas tridimensionnel, et envisageons à nouveau une rotation rigide pendant le pas. Choisissons un système d'axes global tel que la rotation se fasse autour de l'axe  $\underline{e}_3$ . Ce choix est toujours possible et ne restreint en rien notre analyse, mais la simplifie. La matrice de rotation prend la forme

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} + \cos \beta & + \sin \beta & 0 \\ - \sin \beta & + \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient alors rapidement :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\varepsilon}}^A &= \frac{\cos \beta - 1}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{\dot{\varepsilon}}^{(1)} &= \frac{\det^{-1}(\underline{F}^{(1)})}{\Delta t} \left(1 - \frac{2}{N}\right) (\cos \beta - 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \det(\underline{F}^{(1)}) &= 1 - \frac{2}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right) (1 - \cos \beta) \end{aligned} \quad (5.63.)$$

Donc le schéma choisi n'est pas objectif. Mais seuls les termes diagonaux de la vitesse de déformation souffrent du manque d'objectivité. Donc, les angles ne sont pas modifiés pendant le pas, seules les longueurs dans le plan normal à l'axe de rotation sont affectées par la rotation rigide : la transformation est isomorphe.

Lorsque l'angle de rotation  $\beta$  reste faible pendant le pas, le schéma est quasi objectif. Prenons par exemple  $\beta = 5^\circ$ .

On obtient :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^A = - \frac{3,8 \cdot 10^{-3}}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si  $N = 1$

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^{(1)} = \underline{\dot{\varepsilon}}^B = \underline{\dot{\varepsilon}}^A$$

si  $N = 5$

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^{(1)} = - \frac{2,3 \cdot 10^{-3}}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La précision reste donc raisonnable dans ce cas.

### 5.2.3.3. La méthode de la configuration finale.

L'approche de HUGHES et WINGET [30], HUGHES [16], et PINSKY, ORTIZ et PISTER [126] consiste à rapporter tous les tenseurs à un repère unique. En effet,  $\underline{\sigma}^A$  est défini dans la configuration  $\gamma^A$  et  $\underline{\sigma}^B$  dans  $\gamma^B$ . De A à B le solide tourne. Donc  $\underline{\sigma}^A$  et  $\underline{\sigma}^B$  ne peuvent être comparés :

$$\Delta \underline{\sigma} = \underline{\sigma}^B - \underline{\sigma}^A$$

n'a pas de signification. Choisissons un repère privilégié. Rapportons tout à la configuration initiale  $\Gamma$ . Les contraintes de CAUCHY se transforment en contraintes de PK2 : (2.62.) :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{S}^A = \det(\underline{F}^A) \underline{F}^{A-1} \underline{\sigma}^A \underline{F}^{A-T} \\ \underline{S}^B = \det(\underline{F}^B) \underline{F}^{B-1} \underline{\sigma}^B \underline{F}^{B-T} \end{array} \right. \quad (5.64.)$$

On peut alors écrire

$$\underline{S}^B = \underline{S}^A + \int_0^{\Delta t} \underline{\dot{S}} dt \quad (5.65.)$$

Utilisons une valeur de moyenne de la vitesse des contraintes,  $\underline{\dot{S}}^\theta$  ; prise à l'instant  $\theta$  :

$$\underline{S}^B = \underline{S}^A + \underline{\dot{S}}^\theta \Delta t \quad (5.66.)$$

Comme nous l'avons montré au chapitre 3, la dérivée de TRUESDELL des contraintes de CAUCHY est égale à la dérivée matérielle des contraintes de PK2 :

$$\underline{\dot{S}}^\theta = \det(\underline{F}^\theta) \underline{F}^{\theta-1} \underline{T}^\theta \underline{F}^{\theta-T} \quad (5.67.)$$

Introduisons (5.64.) et (5.67.) dans (5.66.) :

$$\det(\underline{F}^B) \underline{F}^{B-1} \underline{\sigma}^B \underline{F}^{B-T} = \det(\underline{F}^A) \underline{F}^{A-1} \underline{\sigma}^A \underline{F}^{A-T} + \det(\underline{F}^\theta) \underline{F}^{\theta-1} \underline{T}^\theta \underline{F}^{\theta-T} \Delta t \quad (5.68.)$$

Cette expression peut être modifiée en utilisant les propriétés des tenseurs jacobiens que nous allons développer. Supposons que les coordonnées évoluent linéairement pendant un pas. La vitesse est donc constante :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{x}^\theta = (1-\theta) \underline{x}^A + \theta \underline{x}^B = \underline{x}^A + \underline{v} \theta \Delta t \\ \underline{v} = \frac{\underline{x}^B - \underline{x}^A}{\Delta t} \end{array} \right. \quad (5.69.)$$

Dès lors les tenseurs jacobiens apparaissant dans (5.68.) valent

$$\left| \begin{array}{l} \underline{F}^A = \frac{\partial \underline{x}^A}{\partial \underline{X}} \\ \underline{F}^B = \frac{\partial \underline{x}^B}{\partial \underline{X}} \\ \underline{F}^\theta = \frac{\partial \underline{x}^\theta}{\partial \underline{X}} = (1-\theta) \underline{F}^A + \theta \underline{F}^B \end{array} \right. \quad (5.70.)$$

Ces tenseurs sont liés entre eux :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{F}^B = \frac{\partial \underline{x}^B}{\partial \underline{x}^A} \frac{\partial \underline{x}^A}{\partial \underline{X}} = \underline{F}^{AB} \underline{F}^A \\ \underline{F}^{AB} = \frac{\partial \underline{x}^B}{\partial \underline{x}^A} \end{array} \right. \quad (5.71.)$$

$$\left| \begin{aligned} \underline{F}^\theta &= \underline{F}^{A\theta} \underline{F}^A \\ \underline{F}^{A\theta} &= \frac{\partial \underline{x}^\theta}{\partial \underline{x}^A} \end{aligned} \right. \quad (5.72.)$$

$$\left| \begin{aligned} \underline{F}^{AB} &= \underline{F}^{\theta B} \underline{F}^{A\theta} \\ \underline{F}^{\theta B} &= \frac{\partial \underline{x}^B}{\partial \underline{x}^\theta} \end{aligned} \right. \quad (5.73.)$$

A l'aide de ces relations, on peut transformer (5.68.) de sorte à obtenir directement  $\underline{\sigma}^B$  à l'aide de grandeurs relatives au pas étudié :

$$\left| \begin{aligned} \underline{\sigma}^B &= \det^{-1}(\underline{F}^{AB}) \underline{F}^{AB} \underline{\sigma}^A \underline{F}^{ABT} \\ &+ \det^{-1}(\underline{F}^{\theta B}) \underline{F}^{\theta B} \underline{\sigma}^\theta \underline{F}^{\theta BT} \Delta t \end{aligned} \right. \quad (5.74.)$$

Cette expression est cohérente avec l'évolution géométrique de la structure. Elle est à la base des principes que HUGHES et al, PINSKY et al, implantent dans leurs programmes. La dérivée de TRUESDELL des contraintes de CAUCHY occupe, ici comme au chapitre 3, une position privilégiée. Elle peut toutefois être remplacée par la dérivée de JAUMAN au prix des mêmes approximations et hypothèses que précédemment. (Les promoteurs de la méthode n'effectuent pas cette modification).

Quelle que soit la dérivée objective des contraintes adoptée, elle peut être liée aux contraintes et à la vitesse de déformation. Dans l'expression de la relation constitutive, il faut utiliser les contraintes et la vitesse de déformation à l'instant  $\theta$  :

$$\underline{\sigma}^\theta = \text{fct}(\underline{\sigma}^\theta, \underline{\varepsilon}^\theta, k^\theta) \quad (5.75.)$$

La vitesse de déformation est :

$$\underline{\varepsilon}^\theta = \text{sym}(\underline{L}^\theta) \quad (5.76.)$$

Le gradient de vitesse vaut :

$$\underline{L}^\theta = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}^\theta} \quad (5.77.)$$

car la vitesse est constante. Par (5.69.), il vient :

$$\left| \begin{aligned} \underline{L}^\theta &= \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \underline{x}^B}{\partial \underline{x}^\theta} - \frac{\partial \underline{x}^A}{\partial \underline{x}^\theta} \right) \\ \underline{L}^\theta &= \frac{1}{\Delta t} (\underline{F}^{\theta B} - \underline{F}^{A\theta-1}) \end{aligned} \right. \quad (5.78.)$$



Le schéma ainsi développé est stable si  $\theta \geq 0,5$  et a une précision du second ordre si  $\theta = 0,5$ . De plus, par un long développement mathématique qu'il ne nous semble pas utile de reproduire ici, PINSKY et al [126] montrent que le schéma possède l'objectivité incrémentale si et seulement si  $\theta = 0,5$ :

$$\left| \begin{array}{l} \text{si } \underline{F}^{AB} = \underline{R}^{AB} \\ \rightarrow \underline{\varepsilon}^{\theta} = 0 \quad \text{ssi } \theta = 0,5 \end{array} \right. \quad (5.79.)$$

Seul le schéma du point-milieu convient donc. Il permet de faire des pas de taille quelconque, du point de vue géométrique des rotations.

Si l'on décompose comme précédemment les lois élastoplastiques et élastoviscoplastiques en deux processus successifs, il apparaît que tous les schémas d'intégration numérique des lois peuvent être utilisés ici, malgré la restriction précédente (5.79.). En effet, le premier processus est purement élastique et accompagne la déformation d'ensemble du solide, en particulier ses rotations. La vitesse de contraintes élastiques doit être calculée par le schéma du point milieu. On obtient ainsi l'état de contraintes  $\underline{\sigma}^e$  dans la configuration finale  $\gamma^B$ . Ensuite, les contraintes se relaxent, sans mouvement global de la structure, à vitesse de déformation totale nulle, de sorte qu'elles respectent le critère de plasticité, ou en fonction des phénomènes visqueux intervenus pendant le pas. Pendant ce deuxième processus aucune rotation n'intervient. Tout se passe dans la configuration  $\gamma^B$ , supposée globalement "gelée". Le processus est donc objectif, quel que soit le schéma adopté (retour radial, normale moyenne,...).

L'approche suivie ci-dessus, et particulièrement l'équation (5.74.) qui la synthétise, peut être modifiée par l'une ou l'autre approximation dans l'esprit de celles que nous avons faites au chapitre 3. Supposons que dans un pas, les déformations soient faibles devant les rotations :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{F}^{AB} = \underline{R}^{AB} \underline{U}^{AB} \approx \underline{R}^{AB}, \quad \det(\underline{F}^{AB}) \approx 1 \\ \underline{F}^{\theta B} = \underline{R}^{\theta B} \underline{U}^{\theta B} \approx \underline{R}^{\theta B}, \quad \det(\underline{F}^{\theta B}) \approx 1 \end{array} \right. \quad (5.80.)$$

Alors, on obtient l'équation constitutive incrémentale :

$$\underline{\sigma}^B = \underline{R}^{AB} \underline{\sigma}^A \underline{R}^{ABT} + \underline{R}^{\theta B} \underline{\sigma}^{\theta} \underline{R}^{\theta BT} \Delta t \quad (5.81.)$$

où on utilise la dérivée objective de GREEN-NAGHDI

$$\underline{\overset{G}{\sigma}} = \underline{\dot{\sigma}} - \underline{\dot{R}} \underline{R}^T \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{R} \underline{\dot{R}}^T \quad (5.82.)$$

dont DIENES [59] a prôné l'utilisation et montré les avantages (elle évite les oscillations en cisaillement pur). Si l'on préfère utiliser la déri-

vée de JAUMAN, il est plus cohérent d'écrire :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{\sigma}^B = \underline{Q}^{AB} \underline{\sigma}^A \underline{Q}^{ABT} + \underline{Q}^{\theta B} \underline{\sigma}^{\nabla_{\theta}} \underline{Q}^{\theta BT} \Delta t \\ \underline{\omega} = \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T = \text{skw}(\underline{L}) \end{array} \right. \quad (5.83.)$$

$\underline{Q}$  est donc la matrice de rotation issue de l'intégration temporelle de la partie antisymétrique du gradient de vitesse.

HUGHES [16] a montré que dans les deux cas (5.81.) et (5.83.) le schéma est incrémentalement objectif si et seulement si  $\theta = 0,5$ .

Cette méthode n'a pas été utilisée dans le programme LAGAMINE.

#### 5.2.3.4. La méthode de la rotation instantanée finale.

Effectuons la décomposition polaire du tenseur jacobien de la déformation pendant un pas :

$$\underline{F}^{AB} = \frac{\partial x^B}{\partial X^A} = \underline{R}^{AB} \underline{U}^{AB} \quad (5.84.)$$

Extrayons les valeurs propres  $\lambda_i$  du tenseur de déformation pure  $\underline{U}^{AB}$ . Il peut alors être exprimé sous la forme

$$\underline{U}^{AB} = \underline{Q}^{AB} \underline{\underline{U}}^{AB} \underline{Q}^{ABT}$$

$$\underline{\underline{U}}^{AB} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (5.85.)$$

BRANDEL, ABOUAF et CHENOT [109] proposent le schéma d'évolution suivant :  
1ère partie du pas

$$\left| \begin{array}{l} t \in [t^A, t^B], \theta \in [0, 1[ \\ \underline{F}^{(\theta)} = \underline{Q}^{AB} (\underline{\underline{U}}^{AB})^{\theta} \underline{Q}^{ABT} \end{array} \right. \quad (5.86.)$$

2ème partie du pas

$$\left| \begin{array}{l} t = t^B, \theta = 1 \\ \underline{F}^{BB} = \underline{R}^{AB} \end{array} \right.$$

Selon cette hypothèse la rotation apparaît instantanément à la fin du pas. Elle est calculée exactement et découplée de la déformation par la décomposition polaire. Le schéma est donc objectif par hypothèse.

La déformation se réalise avec des directions principales constantes. Donc il est possible d'intégrer la vitesse de déformation de CAUCHY durant le pas, et de calculer le tenseur incrément de déformation naturelle:

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{F}}(\theta) &= \underline{Q} \dot{\underline{U}} \underline{Q}^T \\
 \underline{F}(\theta)^{-1} &= \underline{Q} \underline{U}^{-1} \underline{Q}^T \\
 \underline{L}(\theta) &= \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} = \underline{Q} \dot{\underline{U}} \underline{U}^{-1} \underline{Q}^T \\
 \underline{L}(\theta) &= \underline{Q} \begin{bmatrix} \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} \end{bmatrix} \underline{Q}^T = \dot{\underline{\epsilon}}(\theta) \\
 \int_A^B \underline{\epsilon} \cdot dt &= \underline{Q} \ln \underline{U}^{AB} \underline{Q}^T = \ln \underline{U}^{AB} = \underline{G}^{AB} \quad (5.87.)
 \end{aligned}$$

Un tel schéma permet donc de traiter simplement bon nombre de lois constitutives et de s'affranchir de divers schémas d'intégration (en particulier en élasticité).

D'après BRAVDEL et al, le schéma possède d'autres propriétés remarquables. Si le volume est constant pendant la déformation, il n'est pas modifié par le schéma d'intégration (Ce n'est pas le cas dans la méthode linéaire (5.60.)). Le chemin de déformation proposé minimise le deuxième invariant de la vitesse de déformation. Il est exact en traction uniaxiale et précis au second ordre en cisaillement.

Ce schéma est très séduisant par sa simplicité formelle. Mais il n'est pas plus simple à implanter que ceux qui ont été présentés ci-dessus. Remarquons qu'au contraire de ceux-là, il ne respecte pas la continuité des déplacements pendant le pas, mais seulement à sa fin.

Ce schéma n'a pas été implanté dans le programme LAGAMINE.

#### 5.2.3.5. La méthode du gradient de vitesses constant.

GODINAS [6] propose d'utiliser un chemin de déformation de A à B tel que le gradient de vitesses soit constant pendant le pas. On connaît donc:

$$\begin{aligned}
 \underline{x}^B &= \underline{F}^{AB} \underline{x}^A \\
 \underline{F}^{AB} &= \frac{\partial \underline{x}^B}{\partial \underline{x}^A} \quad (5.88.)
 \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{cases}
 \underline{x}^{(\theta)} = \underline{F}^{A\theta} \underline{x}^A \\
 \dot{\underline{x}}^{(\theta)} = \underline{v}^{(\theta)} = \dot{\underline{F}}^{A\theta} \underline{x}^A \\
 \underline{L} = \frac{\partial \underline{v}^{(\theta)}}{\partial \underline{x}^{(\theta)}} = \dot{\underline{F}}^{A\theta} \underline{F}^{A\theta-1}
 \end{cases} \quad (5.89.)$$

Nous souhaitons trouver  $\underline{L} = \text{constante}$  pendant le pas. Cherchons les valeurs propres de  $\underline{L}$

$$\underline{L} = \underline{Q}^{-1} \underline{I} \underline{Q} \quad (5.90.)$$

$\underline{I}$  est un tenseur diagonal composé des valeurs propres de  $\underline{L}$ , et  $\underline{Q}$  est un tenseur de rotation composé des vecteurs propres de  $\underline{L}$ . Inversons cette relation :

$$\begin{cases}
 \underline{I} = \underline{Q} \underline{L} \underline{Q}^{-1} \\
 \underline{I} = (\underline{Q} \dot{\underline{F}}^{A\theta} \underline{Q}^{-1}) (\underline{Q} \underline{F}^{A\theta-1} \underline{Q}^{-1}) \\
 \underline{I} = \dot{\underline{f}}^{A\theta} \underline{f}^{A\theta-1}
 \end{cases} \quad (5.91.)$$

Supposons que  $\dot{\underline{f}}^{A\theta}$  et  $\underline{f}^{A\theta}$  soient diagonaux. Le fait qu'on puisse les déterminer ci-dessous justifie cette hypothèse. Dès lors, on obtient un système d'équations différentielles découplées :

$$\begin{cases}
 l_i = \dot{f}_i^{A\theta} / f_i^{A\theta} \\
 f_i^{A\theta} = e^{l_i \theta \Delta t}
 \end{cases} \quad (5.92.)$$

Donc l'hypothèse du gradient de vitesses constant conduit à un tenseur jacobien dont les directions principales sont constantes pendant le pas, et dont les valeurs propres varient exponentiellement. Le tenseur jacobien est coaxial au gradient de vitesse :

$$\underline{F}^{A\theta} = \exp(\theta \Delta t \underline{L}) \quad (5.93.)$$

Utilisons les conditions aux limites,

$$\begin{aligned}
 \text{en } \theta = 0 \quad \underline{F}^{A\theta} &= \underline{I} \\
 f_i^{A\theta} &= 1
 \end{aligned} \quad (5.94.a)$$

Cette condition est respectée par (5.92.) et (5.93.)

$$\text{en } \theta = 1 \quad \underline{F}^{A\theta} = \underline{F}^{AB} \quad (5.94.b)$$

Les directions principales de  $\underline{F}^{AB}$  sont celles de  $\underline{F}^{A\theta}$  et de  $\underline{L}$ .

Les valeurs propres permettent d'obtenir celles de  $\underline{L}$  :

$$l_i = \frac{1}{\Delta t} \ln(f_i^{AB}) \quad (5.95.)$$

Comme  $\underline{F}^{AB}$  n'est pas symétrique, ses valeurs propres peuvent être imagi-

naires.

GODINAS a appliqué cette méthode aux problèmes bidimensionnels. Nous ne présentons pas ici les développements, mais seulement les résultats. On obtient :

$$l_{1,2} = \frac{1}{\Delta t} \ln \left[ \frac{F_{11}^{AB} + F_{22}^{AB}}{2} \pm \sqrt{A} \right]$$

$$A = \left( \frac{F_{11}^{AB} - F_{22}^{AB}}{2} \right)^2 + F_{12}^{AB} F_{21}^{AB} \quad (5.96.)$$

$$\underline{L} = \frac{l_1 - l_2}{4\sqrt{A}} \begin{bmatrix} F_{11}^{AB} - F_{22}^{AB} & 2 F_{12}^{AB} \\ 2 F_{21}^{AB} & F_{11}^{AB} - F_{22}^{AB} \end{bmatrix} + \frac{l_1 + l_2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le même processus pourrait être appliqué au cas tridimensionnel.

Appliquons ces résultats au cas de la rotation rigide pendant le pas. Comme on l'a vu plus haut, le tenseur jacobien vaut :

$$\underline{F}^{AB} = \begin{bmatrix} + \cos \beta & + \sin \beta \\ - \sin \beta & + \cos \beta \end{bmatrix} \quad (5.56.a)$$

Introduisons ces valeurs dans (5.96.) :

$$A = - \sin^2 \beta$$

$$\rightarrow l_{1,2} = \frac{1}{\Delta t} \ln [\cos \beta \pm i \sin \beta] = \frac{1}{\Delta t} \ln e^{\pm i\beta} = \frac{\pm i\beta}{\Delta t}$$

$$\rightarrow \underline{L} = \frac{2 i \beta}{4\Delta t \cdot i \sin \beta} \begin{bmatrix} 0 & 2 \sin \beta \\ - 2 \sin \beta & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{L} = \frac{\beta}{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.97.)$$

Le gradient des vitesses est donc antimétrique. Il résulte de ceci que, en état bidimensionnel, le schéma du gradient constant est objectif incrémentalement. Nous n'avons pas développé à ce jour la méthode pour l'état tridimensionnel.

La vitesse de déformation de CAUCHY, partie symétrique de  $\underline{L}$ , est constante. Il s'en suit que ses directions principales sont constantes, et qu'il est donc possible de l'intégrer. Elle n'est toutefois pas liée au tenseur déformation pure, et on ne peut l'associer au tenseur déformation

naturelle.

L'intégration numérique des lois constitutives peut se faire de façon classique, telle que décrite plus haut. En particulier, la division du pas en sous-intervalles ne pose aucun problème. On a donc, par exemple :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(\theta) &= \underline{\sigma}^A, \quad \underline{\sigma}(N) = \underline{\sigma}^B \\ \underline{\sigma}^*(I) &= \underline{\sigma}^{(I-1)} + \frac{\nabla(I)\theta}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5.98.)$$

$$\underline{\sigma}(I) = \underline{\sigma}^*(I) + \left( \underline{\sigma}^*(I) \underline{\omega}_T + \underline{\omega} \underline{\sigma}^*(I) \right) \Delta t$$

$\underline{\omega}$  est constant pendant le pas.  $\frac{\nabla(I)\theta}{\Delta t}$  est calculé en fonction de la vitesse de déformation constante  $\underline{\varepsilon}$ .

Cette méthode a été appliquée dans le programme LAGAMINE aux cas des états plans de déformation et axisymétriques.

#### 5.2.3.6. L'objectivité dans les problèmes de contact.

Le phénomène de contact avec frottement associe les déplacements des surfaces d'un solide et de sa fondation. Par définition, un déplacement *rigide* est une translation et ou une rotation qui affectent simultanément et de façon uniforme l'ensemble du solide, sa frontière et la fondation. Les formes des surfaces du solide et de la fondation et leur position relative ne sont pas affectées par le déplacement rigide.

Considérons donc un pas tel que, à l'instant initial et à l'instant final, les formes des surfaces en contact et leur position relative sont identiques. Il faut utiliser pendant le pas un champ de déplacement tel que ces formes et position ne varient à aucun moment, et donc tel que la vitesse de déformation au sens du contact (3.125.) soit nulle.

Supposons que les coordonnées du solide et de la fondation varient linéairement du début à la fin du pas :

$$\begin{aligned} \underline{x}^\theta &= (1-\theta) \underline{x}^A + \theta \underline{x}^B \\ \underline{v} &= (\underline{x}^B - \underline{x}^A) / \Delta t \end{aligned} \quad (5.99.)$$

Soit un déplacement de corps rigide. Dans ce cas, cette transformation affecte la forme des solides, ou, plus précisément, cette taille, ainsi que le montre la figure 5.6. En effet,

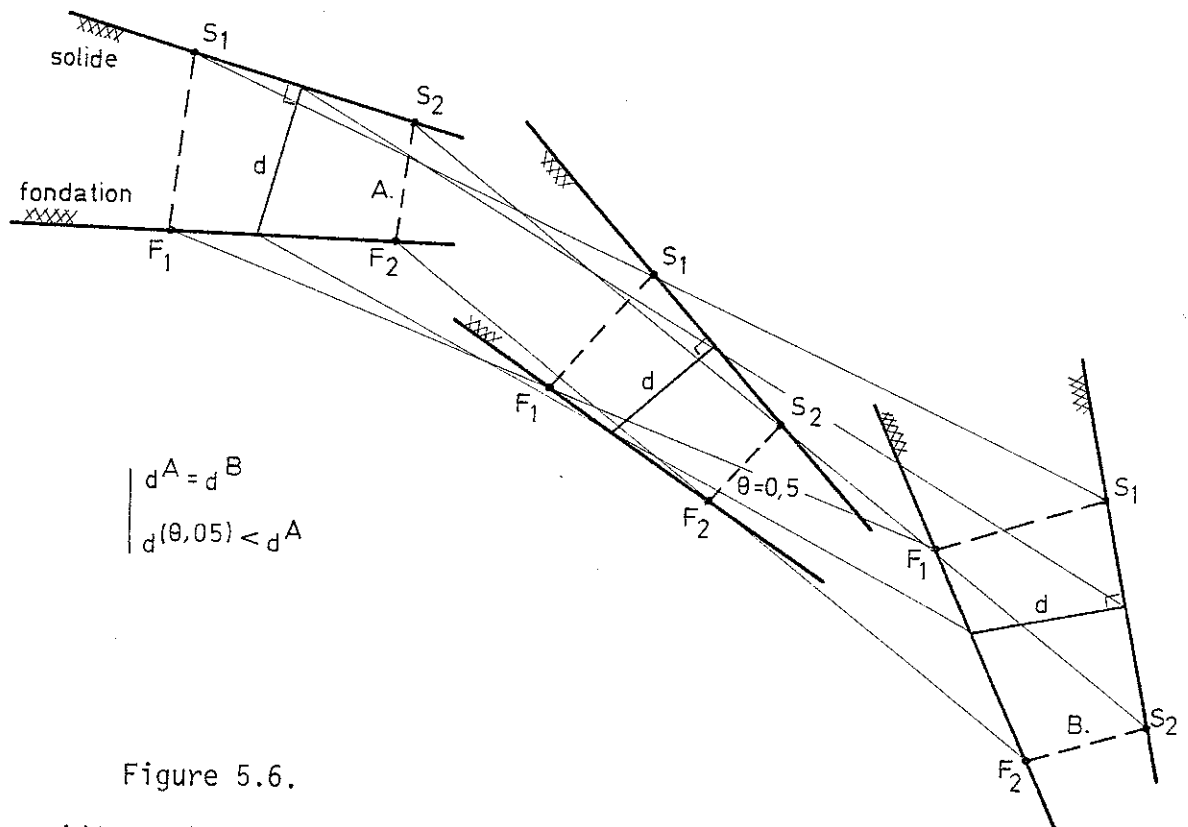


Figure 5.6.

considérons le quadrilatère (S1 - S2 - F2 - F1). Si ses formes initiale et finale sont égales, mais la transformation (5.99.) le modifie au cours du pas. Ce fait a d'ailleurs été mis en évidence au paragraphe 5.2.3.2., dans l'étude de la déformation du solide. Que le quadrilatère soit constitué de métal, d'un matériau fictif de *blocage* (tel qu'introduit par de SAXCE et DANG [90, 91]) ou soit vide n'y change rien. Comme on l'a vu ci-dessus, la transformation est isomorphe. Les longueurs sont modifiées, mais les angles sont conservés. Il en résulte que, pour un déplacement rigide, le schéma (5.99.) donne une vitesse tangentielle relative (2e et 3e composantes de  $\underline{\epsilon}$ ) nulle, et une valeur non nulle de la vitesse de pénétration normale  $\epsilon_1$ . Le schéma est objectif pour la vitesse tangentielle mais pas pour la vitesse normale.

Nous pouvons aisément le corriger afin de le rendre totalement objectif. Modifions simplement le calcul de la première composante  $\epsilon_1$  de la vitesse de déformation. Soit  $d^A$  et  $d^B$  les profondeurs de pénétration au début et à la fin du pas. La vitesse de pénétration

$$\dot{\epsilon}_1 = (d^B - d^A) / \Delta t \quad (5.100.)$$

est objective. De plus, elle est cohérente avec les choix que nous avons posé au paragraphe 3.2.7.2.: la profondeur de pénétration est calculée directement et non par intégration de la vitesse instantanée de pénétration.

### 5.3. LA CONDUCTION THERMIQUE ET LES ECOULEMENTS EN MILIEU POREUX.

#### 5.3.1. Introduction.

Les problèmes d'écoulement et de conduction diffèrent de ceux de grandes déformations mécaniques notamment en ce que les contraintes généralisées, telles que nous les avons définies au chapitre 2, ne dépendent généralement pas de l'histoire, mais sont définies en un instant, en fonction uniquement des déformations généralisées. Les lois constitutives ne doivent pas être intégrées, il n'est donc pas nécessaire de développer des techniques semblables à celles que nous avons présentées au paragraphe 5.2.2. Comme nous ne réalisons pas d'analyse du couplage entre les déformations et la conduction ou les écoulements, la géométrie est invariable. Aucun problème d'objectivité ne se pose donc, et les considérations du type de celles du paragraphe 5.2.3. sont inutiles.

Contrairement au problème mécanique, dont nous exprimons toujours l'équilibre en fin de pas, nous envisageons ici deux types d'équilibre : l'équilibre moyen sur le pas, et l'équilibre en un instant privilégié pendant le pas. Nous excluons ici les schémas d'ordre supérieur, tels les schémas multi-pas, (LEES [10]), ou les schémas basés sur la méthode des moindres carrés (ZIENKIEWICZ [2]), etc... Nous avons donc moins investi dans ce domaine que dans celui des déformations mécaniques. Notre étude est très loin d'être exhaustive. Nous nous sommes essentiellement intéressé aux schémas qu'il est possible d'intégrer dans le programme LAGAMINE sans trop en modifier le squelette, la structure.

La notion d'équilibre moyen sur le pas s'apparente à la méthode des résidus pondérés et est proposée par ZIENKIEWICZ [2] notamment.

Dans la suite nous parlerons de pression et non de température. Bien entendu tous les développements sont valables pour les écoulements et pour la conduction.

#### 5.3.2. L'équilibre en un instant.

Une des techniques les plus fréquemment utilisées consiste à exprimer l'équilibre en un instant privilégié. Considérons à nouveau la coordonnée temporelle non dimensionnelle  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \theta &\in [0,1] \\ t &= (1-\theta) t^A + \theta t^B \end{aligned} \quad (5.101.)$$

Exprimer l'équilibre à l'instant  $\theta$  consiste à calculer les forces nodales  $F_L^{(\theta)}$  énergétiquement équivalentes aux flux à cet instant. Travaillons



par simplicité en état plan. Les forces nodales sont fonction de la géométrie, qui est invariable, et des flux :

$$F_L = \sum_{PI} (f^V \phi_L - f_1 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2}) t \det(\underline{J}) W \quad (4.82.)$$

Seuls  $f^V$ ,  $f_1$  et  $f_2$  varient au cours du temps. Nous calculons donc

$$F_L^{(\theta)} = \sum_{PI} (f^{V(\theta)} \phi_L - f_1^{(\theta)} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} - f_2^{(\theta)} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2}) t \det(\underline{J}) W \quad (5.102.)$$

Ceci équivaut donc à utiliser une valeur moyenne des flux,  $f^{V(\theta)}$  et  $f_i^{(\theta)}$ .

Ceux-ci peuvent être évalués selon deux techniques :

$$\left| \begin{array}{l} f^{V(\theta)} = (1-\theta) f^{VA} + \theta f^{VB} \\ f_i^{(\theta)} = (1-\theta) f_i^A + \theta f_i^B \end{array} \right. \quad (5.103.)$$

ou

$$\left| \begin{array}{l} p^{(\theta)} = (1-\theta) p^A + \theta p^B \\ \dot{p} = (p^B - p^A) / \Delta t \\ f^{V(\theta)} = f(p^{(\theta)}, \dot{p}^{(\theta)}) \\ f_i^{(\theta)} = f_i(p^{(\theta)}, \dot{p}^{(\theta)}) \end{array} \right. \quad (5.104.)$$

Dans cette seconde hypothèse, les flux sont calculés en fonction des déformations généralisées à l'instant  $\theta$ . Nous avons implanté cette dernière technique dans le programme LAGAMINE.

Le même développement doit évidemment être posé pour les frontières à flux imposé et les frontières où une relation entre le flux et la pression est imposée. Le flux  $q$  doit être évalué selon (5.104.) à l'instant  $\theta$ . En état plan, (4.85.) devient :

$$F_L = \sum_{PI} q^{(\theta)} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \phi_L W \quad (5.105.)$$

Les expressions développées ci-dessus ((5.102.) à (5.105.)) conduisent à des oscillations numériques lorsque  $\theta < 0,5$  et que les pas de temps sont trop grands. Elles sont inconditionnellement stables pour  $\theta \geq 0,5$  (ZIENKIEWICZ [2], HOGGE [137]).

Lorsque les flux ne varient pas trop pendant le pas de temps considéré, l'expression de l'équilibre en un instant donne de très bons résultats. Par contre, lorsque l'expression des flux en fonction des gradients de pression (de température) et de la vitesse de variation de la pression (de la température) est fortement non-linéaire, ce n'est plus le cas. En particulier, lorsque des changements de phase se produisent ou lors-

qu'on modélise les écoulements avec surface libre, le flux volumique absorbé  $f^V$  subit des ressauts importants et rapides. Dans ce cas, l'utilisation d'une valeur instantanée fournit de mauvais résultats. Ceci nous conduit à utiliser une autre forme de valeurs moyennes des flux.

### 5.3.3. L'équilibre moyen ou pondéré.

Au lieu d'exprimer l'équilibre en un instant privilégié, exprimons un équilibre *moyen* sur le pas, en pondérant l'expression de l'équilibre telle que définie aux chapitres 2 et 4 par une fonction  $g(\theta)$ . Les forces nodales intérieures moyennes deviennent, en état plan,

$$\bar{F}_L = \int_0^1 \left[ \sum_{PI} (f^V \phi_L - f_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}) t \det(\underline{J}) W g(\theta) \right] d\theta \quad (5.106.)$$

Comme seules les contraintes varient pendant le pas, cette expression peut être transformée :

$$\left| \begin{aligned} \bar{F}_L &= \sum_{PI} \left( \bar{F}^V \phi_L - \bar{F}_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} - \bar{F}_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \right) t \det(\underline{J}) W \\ \bar{F}^V &= \int_0^1 f^V g(\theta) d\theta \\ \bar{F}_i &= \int_0^1 f_i g(\theta) d\theta \end{aligned} \right. \quad (5.107.)$$

Ainsi, on obtient une expression semblable à celle (5.102.) obtenue selon l'hypothèse d'équilibre instantané. Simplement, les flux ne sont plus calculés en un instant, mais en moyenne sur le pas. De même, sur les frontières où on impose soit le flux soit une relation entre le flux et la pression, les forces nodales extérieures deviennent :

$$\left| \begin{aligned} \bar{F}_L &= \sum_{PI} \bar{q} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \phi_L W \\ \bar{q} &= \int_0^1 q g(\theta) d\theta \end{aligned} \right. \quad (5.108.)$$

Diverses formes de la fonction de pondération  $g(\theta)$  peuvent être choisies. En particulier, le choix d'une fonction de collocation ramène aux équations de l'équilibre instantané. Le choix le plus intéressant est celui d'une fonction de pondération linéaire (Des fonctions d'ordre plus élevé n'apportent généralement pas de précision supplémentaire). Supposons la fonction normée :

$$\left| \begin{aligned} \int_0^1 g d\theta &= 1 \\ g &= 1 + \alpha (\theta - 1/2) \end{aligned} \right. \quad (5.109.)$$

Selon la valeur de  $\alpha$ , la forme de la pondération et les résultats varient. Nous retiendrons trois cas fondamentaux (figure 5.7.).

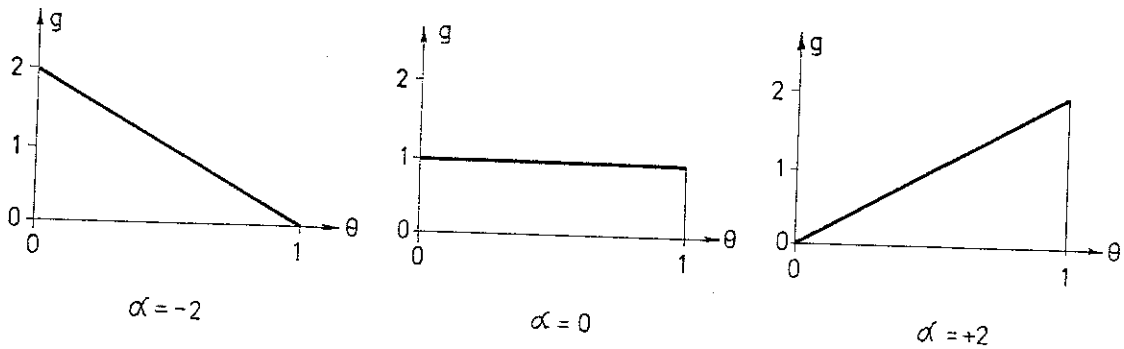


Figure 5.7. - Trois fonctions de pondération.

Dans les analyses linéaires, les caractéristiques matérielles  $\lambda, c, \dots$  sont constantes, et ces schémas sont équivalents à exprimer l'équilibre aux instants privilégiés suivants :

$$\begin{aligned} \alpha = -2 &\rightarrow \theta = 1/3 \\ \alpha = 0 &\rightarrow \theta = 1/2 \\ \alpha = +2 &\rightarrow \theta = 2/3 \end{aligned}$$

Dans le calcul des contraintes moyennes, nous supposons toujours une évolution linéaire des pressions :

$$p(\theta) = (1-\theta) p^A + \theta p^B \quad (5.104.a)$$

$$\dot{p} = (p^B - p^A)/\Delta t \quad (5.104.b)$$

Dès lors, selon la forme de la dépendance des caractéristiques matérielles  $\lambda, c, \dots$  vis-à-vis de la pression, de la température, il est possible d'intégrer les relations (5.107.b et c) et (5.108.b). A titre d'exemple, considérons l'écoulement  $f_1$  lorsque la perméabilité  $\lambda$  est une fonction linéaire de la pression : Pendant le pas, on a donc :

$$\begin{aligned} \lambda(\theta) &= (1-\theta) \lambda^A + \theta \lambda^B \\ \underline{f}(\theta) &= [(1-\theta) \underline{M}^A + \theta \underline{M}^B] [(1-\theta) \lambda^A + \theta \lambda^B] / \gamma \end{aligned}$$

$\underline{M}^A$  et  $\underline{M}^B$  sont les gradients de pression au début et à la fin du pas.

$$\begin{aligned} \underline{\bar{f}} &= \int_0^1 g(\theta) \underline{f}(\theta) d\theta \\ \rightarrow \underline{\bar{f}} &= -\frac{\alpha}{12} \lambda^A \underline{M}^A + \frac{1}{2} (\lambda^A \underline{M}^A + \lambda^B \underline{M}^B) + \frac{\alpha}{12} \lambda^B \underline{M}^B \end{aligned} \quad (5.110.)$$

Le même développement peut être réalisé pour chaque loi constitutive présentée au chapitre 3. Lorsqu'on utilise la formulation enthalpique, le

calcul est un peu plus complexe. On a :

$$\begin{aligned} f^V &= dH/dt \\ \rightarrow \bar{f}^V &= \int_0^1 \frac{dH}{dt} g(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.210.)$$

Il est particulièrement intéressant dans ce cas d'utiliser une fonction de pondération constante :

$$\begin{aligned} g(\theta) &= 1 \\ \rightarrow \bar{f}^V &= \int_0^1 \frac{dH}{dt} d\theta = (H^B - H^A) / \Delta t \end{aligned} \quad (5.111.)$$

Donc, quelque soit la rapidité d'un changement de phase ou l'ampleur du coefficient d'emmagasinement, le flux absorbé est calculé avec précision. Grâce à cette formulation, on ne passe jamais "à côté" du ressaut. C'est là son principal intérêt.