

## 2.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous avons pour but d'étudier des solides en un instant, sans relation avec l'histoire. Que le solide subisse de grandes déformations, qu'il soit le siège de transferts de chaleur par conduction ou de l'écoulement d'un fluide au travers de pores, nous essayons d'exprimer les mêmes idées selon un canevas identique, et pour ce faire, nous utilisons la plupart du temps le langage de la mécanique du solide. Nous définissons donc, dans les trois cas envisagés, les notions de forces, de déplacements, de contraintes et de déformations. A tout moment les forces et contraintes sont en *équilibre*. Nous précisons ce que nous entendons par équilibre, et nous l'exprimons localement en surface et en volume. La notion de puissance virtuelle permet de passer du concept local au concept global d'équilibre, et est une très belle voie vers la discrétisation en éléments finis. Nous écrivons le principe des puissances virtuelles en mécanique et nous l'étendons aux problèmes d'écoulements et de conduction. Nous montrons qu'il constitue une relation entre les quatre grandeurs fondamentales : les forces, les déplacements, les contraintes et les déformations. Ainsi, nous montrons que les contraintes et les déformations sont *conjuguées* via la puissance virtuelle. Il en résulte que le principe de la puissance virtuelle, par sa généralité, nous semble remarquable, fondamental et strictement nécessaire dans l'étude numérique des solides.

La similitude du développement théorique des trois phénomènes étudiés nous semble également remarquable. Deux différences essentielles subsistent. Dans un cas les forces et déplacements sont des vecteurs, les contraintes et déformations sont des tenseurs. Dans l'autre cas, il s'agit de scalaires et de vecteurs. Dans l'étude des grandes déformations, nous supposons que les effets dynamiques sont négligeables. Dans l'étude des écoulements et de la conduction, l'aspect transitoire est pris en compte.

## 2.2. LES GRANDES DEFORMATIONS MECANQUES DU SOLIDE.

Il est bien connu que lorsqu'on quitte le domaine des petits déplacements et déformations des solides, les définitions de contraintes et de déformations infinitésimales associées doivent être revues. En effet, il n'est plus équivalent de travailler dans la configuration initiale ou dans la configuration déformée.

Les notions qui suivent ont été développées par de nombreux auteurs à commencer par CAUCHY, LAGRANGE, GREEN et KIRCHHOFF, à la fin du 18e siècle et au 19e siècle. Les travaux consacrés aux grandes déformations ont connu une croissance considérable pendant les dernières décennies. Depuis peu sont apparus quelques travaux rassemblant et unifiant les diverses contributions, souvent produites en ordre dispersé. Nous nous sommes ici basés essentiellement sur trois de ces synthèses, dues à CESCOTTO [1], CURNIER [45], et SIDOROFF [42].

### 2.2.1. Aspects géométriques

#### 2.2.1.1. Généralités.

Au fur et à mesure du chargement, par définition des grandes déformations, la forme et la géométrie du solide étudié évoluent de façon significative. Nous distinguerons deux configurations fondamentales :

- $\Gamma$ , la configuration initiale, fixe. C'est une référence géométrique. Généralement, elle est non contrainte. Toutefois, dans certains cas (en mécanique des sols, notamment), la seule configuration initiale connue est le siège de contraintes.
- $\gamma$ , une configuration arbitraire déformée, soumise à des forces et déplacements imposés (par rapport à  $\Gamma$ ). Le champ de contrainte est non nul. Nous exprimerons sous quelles conditions  $\gamma$  est en équilibre.

et deux types de systèmes d'axes de référence :

- les systèmes orthogonaux fixes. En pratique, nous travaillerons la plupart du temps dans un tel système d'axes global  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ . En effet, dans l'étude des solides tridimensionnels (éventuellement en état plan ou axisymétrique de sollicitation), ce sont les seuls axes significatifs pour l'ingénieur. (Dans quel autre système exprimer les contraintes et déformations ?).

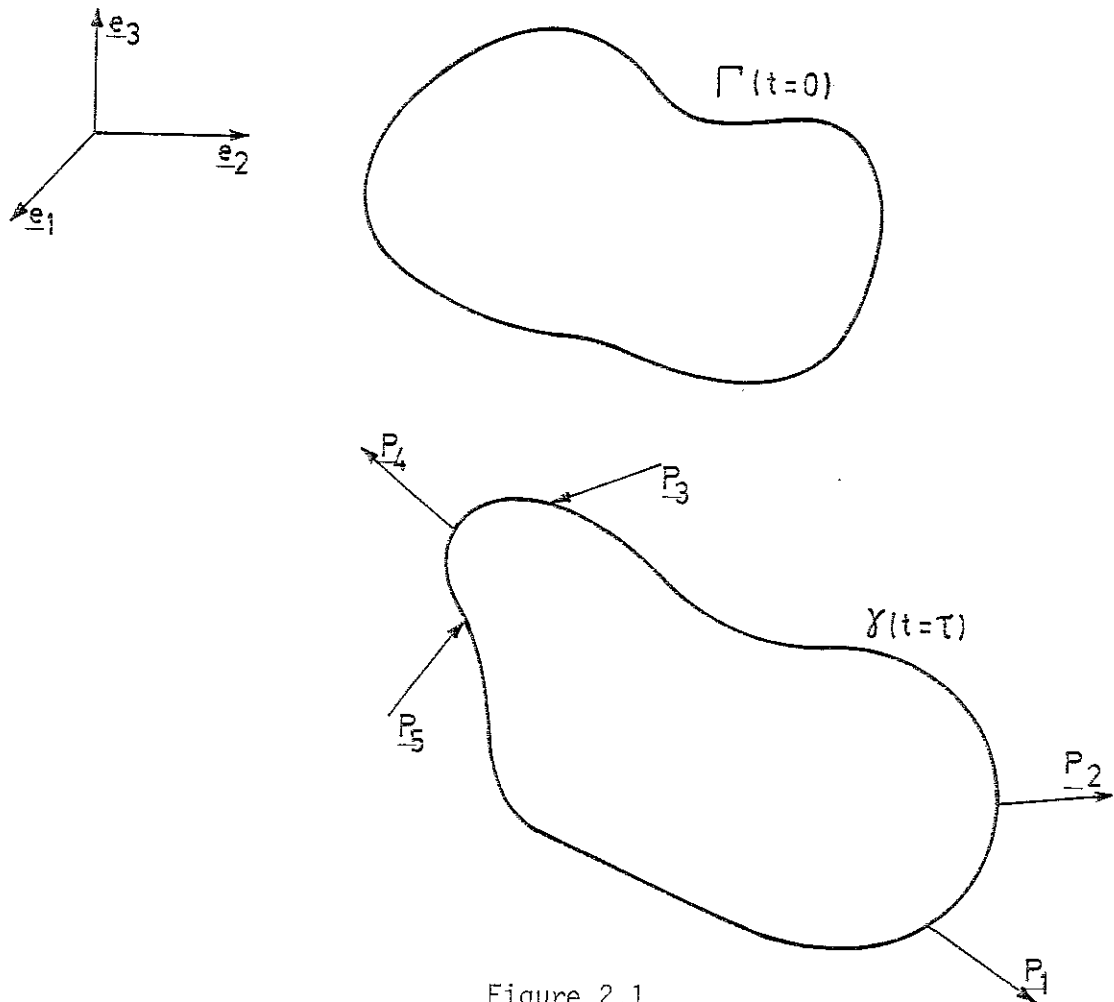


Figure 2.1.

- les systèmes d'axes matériels, liés aux fibres de la structure. Ces systèmes évoluent avec la structure dans toutes leurs composantes : orientation, position de l'origine, longueur des vecteurs de référence, angles entre les vecteurs de référence. Dans de tels systèmes d'axes, on peut encore définir des contraintes, mais elles perdent leur signification physique habituelle. De plus, le calcul de l'état de déformation nécessite de distinguer les dérivées covariantes et contravariantes, et le formalisme en est fort alourdi. Il est bien entendu possible de créer d'autres systèmes plus "normaux". Par exemple, un système orthonormé (vecteurs de référence orthogonaux et de longueur unitaire) lié également à la structure. Dans ce dernier, seules l'origine et l'orientation évoluent. Un tel système est d'une grande puissance dans l'étude des corps orientés (poutre et coques), où les contraintes peuvent s'interpréter aisément, uniquement dans un système lié au corps. De même, les développements de conditions aux limites de type pression et frottement en surface demandent à être exprimés dans des axes matériels. Nous aurons l'occasion d'y revenir.

### 2.2.1.2. Le tenseur jacobien.

Revenons à l'étude du solide dans des axes globaux. Considérons un point matériel  $p$  et le petit voisinage qui l'entoure. Etudions ses déformations. Le vecteur coordonnée est :

$$\begin{array}{l} \underline{X} \text{ dans } \Gamma \\ \underline{x} \text{ dans } \gamma \end{array}$$

La vitesse de  $p$  est

$$\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt} \quad (2.1.)$$

Nous pouvons exprimer les coordonnées  $\underline{X}$  et  $\underline{x}$  dans le voisinage de  $p$  par

$$d\underline{x} = \underline{F} d\underline{X} \quad (2.2.)$$

et inversement

$$d\underline{X} = \underline{F}^{-1} d\underline{x}$$

Ainsi apparaît le tenseur jacobien

$$\underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}, \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.3.)$$

appelé souvent gradient de déformation, car il est le gradient dans  $\Gamma$  des coordonnées de  $\gamma$ .

Supposons à présent qu'en point du corps, dans la configuration initiale, soient gravés des axes parallèles aux axes globaux  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ . Pendant la déformation, ces axes s'incurvent. Leurs longueurs et leurs angles relatifs évoluent. Ils deviennent  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$  dans  $\gamma$ . Le tenseur  $\underline{F}$  est la matrice jacobienne transformant  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  en  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$  :

$$\begin{bmatrix} \underline{g}_1 \\ \underline{g}_2 \\ \underline{g}_3 \end{bmatrix} = \underline{F} \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix} \quad (2.4.)$$

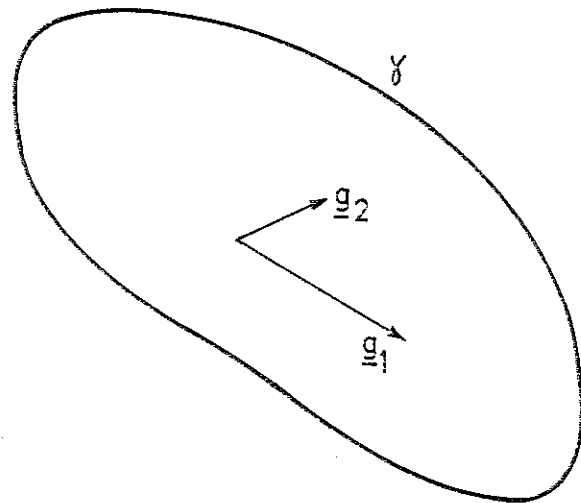
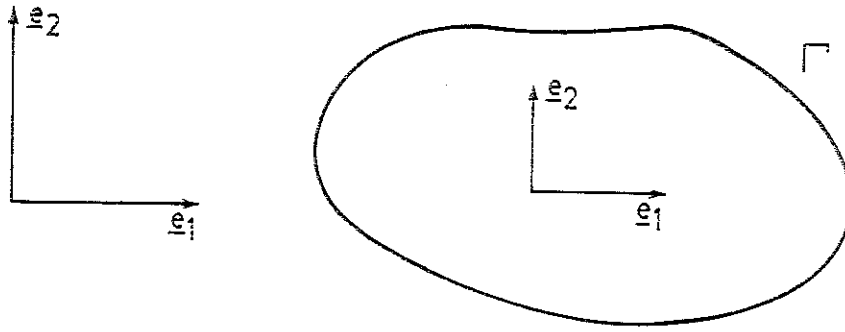


Figure 2.2.

### 2.2.1.3. La mesure des surfaces.

Une surface orientée infinitésimale est un parallélogramme délimité par deux fibres distinctes,  $\underline{dX}^a$  et  $\underline{dX}^b$  issues du point étudié.

Sa mesure initiale est :

$$\underline{dA} = \underline{dX}^A \wedge \underline{dX}^B \quad (2.5.)$$

où  $\wedge$  représente le produit vectoriel.

Après déformation, dans la configuration actuelle, la mesure est :

$$\begin{aligned} \underline{da} &= \underline{dx}^A \wedge \underline{dx}^B \\ &= (\underline{F} \underline{dX}^A) \wedge (\underline{F} \underline{dX}^B) \end{aligned}$$

A l'aide de la notation indicielle, on peut montrer que

$$\underline{da} = \det(\underline{F}) \underline{F}^{-T} \underline{dA} \quad (2.6.)$$

Cette équation est connue sous le nom de formule de NANSON.

#### 2.2.1.4. La mesure des volumes.

Le changement de volume peut à présent être évalué. Aux deux fibres  $d\underline{X}^A$ ,  $d\underline{X}^B$  utilisées pour la mesure des surfaces, joignons une troisième fibre  $d\underline{X}^C$ , distincte des deux précédentes et issue du même point. Un volume, parallélépipède infinitésimal peut être construit sur ces trois fibres.

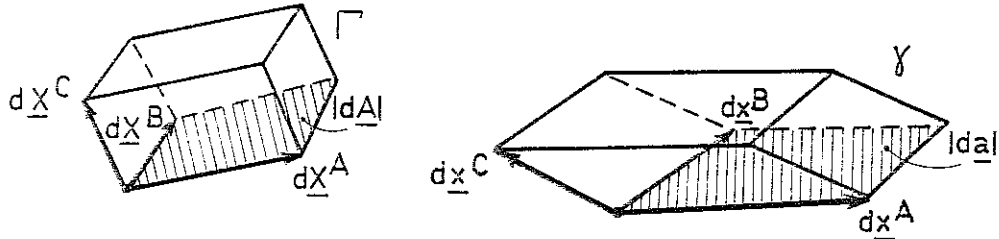


Figure 2.3.

Le volume initial est :

$$dV = d\underline{a}^T d\underline{X}^C = (d\underline{X}^A \wedge d\underline{X}^B)^T d\underline{X}^C \quad (2.7.)$$

Le volume dans  $\gamma$  est

$$\begin{aligned} dv &= d\underline{a}^T d\underline{x}^C = d\underline{a}^T (\underline{F} d\underline{X}^C) \\ &= \det(\underline{F}) d\underline{a}^T d\underline{X}^C \\ dv &= \det(\underline{F}) dV \end{aligned} \quad (2.8.)$$

Le déterminant du gradient de déformation mesure donc le changement de volume.

Il est clair que le volume est toujours positif :

$$\det(\underline{F}) > 0 \quad (2.9.)$$

Si le matériau est incompressible, son volume est constant

$$\det(\underline{F}) = 1 \quad (2.10.)$$

Lors de toute déformation, la masse se conserve :

$$\rho^o = \rho \det(\underline{F}) \quad (2.11.)$$

où  $\rho^o$  est la masse spécifique initiale

$\rho$  est la masse spécifique dans  $\gamma$ .

#### 2.2.1.5. La mesure des déformations.

Le carré de la longueur d'une fibre infinitésimale  $d\underline{x}^A$  déformée est mesuré par le produit scalaire :

$$l^2 = \underline{dx}^{AT} \underline{dx}^A \quad (2.13.)$$

$$\begin{aligned} &= \underline{dx}^{AT} \underline{F}^T \underline{F} \underline{dx}^A \\ &= \underline{dx}^{AT} \underline{C} \underline{dx}^A \end{aligned} \quad (2.14.)$$

De même, l'angle entre deux fibres  $\underline{dx}^A$  et  $\underline{dx}^B$  est mesuré par le même produit scalaire :

$$\underline{dx}^{AT} \underline{dx}^B = \underline{dx}^{AT} \underline{C} \underline{dx}^B$$

avec

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} \quad (2.15.)$$

Ainsi apparaît naturellement  $\underline{C}$ , le tenseur de CAUCHY-GREEN droit, encore appelé tenseur de GREEN, des dilatations ou matériel des déformations.

Il est également possible de définir la relation inverse

$$\begin{aligned} \underline{dx}^{AT} \underline{dx}^B &= \underline{dx}^{AT} \underline{F}^{-T} \underline{F}^{-1} \underline{dx}^B \\ &= \underline{dx}^{AT} \underline{B}^{-1} \underline{dx}^B \end{aligned} \quad (2.16.)$$

avec

$$\underline{B}^{-1} = \underline{F}^{-T} \underline{F}^{-1}, \quad (2.17.)$$

$$\underline{B} = \underline{F} \underline{F}^T$$

$\underline{B}$  est le tenseur de CAUCHY-GREEN gauche.

Les deux tenseurs de CAUCHY-GREEN sont symétriques:

$$\underline{C}^T = \underline{C} \quad (2.18.)$$

$$\underline{B}^T = \underline{B}$$

alors que le tenseur jacobien ne l'est pas

$$\underline{F}^T \neq \underline{F}$$

Considérons le cas particulier d'un déplacement rigide du corps étudié. Si  $t$  est un paramètre d'évolution, par exemple le temps,

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{x}(\underline{X}, t) \\ &= \underline{C}(t) + \underline{Q}(t) \underline{X} \end{aligned} \quad (2.19.)$$

$\underline{C}(t)$  mesure la translation

$\underline{Q}(t)$  mesure la rotation. C'est un tenseur orthogonal vérifiant :

$$\underline{Q} \underline{Q}^T = \underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{I} \quad (2.20.)$$

$$\det(\underline{Q}) = 1$$

et donc :

$$\underline{Q}^T = \underline{Q}^{-1} \quad (2.21.)$$

Le tenseur jacobien est alors :

$$\underline{F}(\underline{X}, t) = \frac{dx}{dX} = \underline{Q}(t) \quad (2.22.)$$

et les tenseurs de CAUCHY-GREEN :

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} = \underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{I} \quad (2.23.)$$

$$\underline{B} = \underline{Q} \underline{Q}^T = \underline{I}$$

Ainsi, dans un mouvement de corps rigide, le tenseur jacobien évolue. Par contre les tenseurs de CAUCHY-GREEN restent constants.

Considérons à présent une déformation triaxiale homogène (sans rotation, translation ni cisaillement) :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1(t) X_1 \\ x_2 = \lambda_2(t) X_2 \\ x_3 = \lambda_3(t) X_3 \end{cases} \quad (2.24.)$$

Alors :

$$\underline{F}(\underline{X}, t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.25.)$$

et

$$\underline{C} = \underline{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2(t) \end{bmatrix} \quad (2.26.)$$

La variation est donc purement diagonale.

Remarquons que, si  $\lambda_2 = \lambda_3$ , on obtient une déformation triaxiale de révolution. C'est en particulier le cas lorsqu'on réalise un essai triaxial idéal en mécanique des sols.

Enfin, étudions le cisaillement simple :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \gamma(t) X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad (2.27.)$$



alors :

$$\underline{F}(\underline{X}, t) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.28.)$$

et

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma(t) & 0 \\ \gamma(t) & 1 + \gamma^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.29.)$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 + \gamma^2(t) & \gamma(t) & 0 \\ \gamma(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30.)$$

Cette fois, les tenseurs de CAUCHY GREEN droit et gauche diffèrent par leurs termes diagonaux.

#### 2.2.1.6. La décomposition polaire du tenseur jacobien.

Nous avons vu que le tenseur jacobien est affecté par la rotation de corps rigide. Il est possible de séparer de manière univoque les rotations des déformations :

$$\underline{F} = \underline{V} \underline{R} = \underline{R} \underline{U} \quad (2.31.)$$

où  $\underline{R}$  est un tenseur de rotation orthogonal ;

$\underline{U}$  est le tenseur de déformation pure droit (stretch tensor) ;

$\underline{V}$  est le tenseur de déformation pure gauche ;

$\underline{U}$  et  $\underline{V}$  sont symétriques et définis positifs.

En effet, il vient alors :

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \underline{F}^T \underline{F} = \underline{U}^T \underline{U} = \underline{U}^2 \\ \underline{B} &= \underline{F} \underline{F}^T = \underline{V} \underline{V}^T = \underline{V}^2 \end{aligned} \quad (2.32.)$$

$\underline{U}$ ,  $\underline{V}$ ,  $\underline{C}$  et  $\underline{B}$  sont donc des tenseurs coaxiaux deux à deux.

$\underline{U}$  et  $\underline{V}$  ont pour valeurs propres les racines carrées de celles de  $\underline{C}$  et  $\underline{B}$ .

Ayant ainsi trouvé un moyen de construire  $\underline{U}$  et  $\underline{V}$  symétriques et définis positifs, il en découle :

$$\underline{R} = \underline{F} \underline{U}^{-1} = \underline{V}^{-1} \underline{F}$$

A nouveau, ceci montre que les tenseurs de CAUCHY-GREEN  $\underline{C}$  et  $\underline{B}$  sont indépendants de la rotation de corps rigide.

#### 2.2.1.7. Les tenseurs de mesure de déformations.

Une mesure des déformations doit avoir un certain nombre de qualités pour être utilisable aisément par l'ingénieur.

L'objectivité : la mesure doit être indépendante des rotations de corps rigide. Nous avons vu que les tenseurs  $\underline{C}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{U}$ ,  $\underline{V}$  sont objectifs, au contraire de  $\underline{F}$ .

L'annulation dans la configuration initiale  $\Gamma$  : ces quatre tenseurs  $\underline{C}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{U}$ ,  $\underline{V}$  sont égaux au tenseur unité  $\underline{I}$  dans la configuration  $\Gamma$ . On sera donc amené à leur soustraire le tenseur unité dans la configuration initiale. Ceci est absolument nécessaire pour obtenir une relation simple entre les contraintes et les déformations. Cette notion est appelée "consistency" par CURNIER [45]. En français, nous parlerons de cohérence : cohérence à l'hypothèse que la configuration initiale n'est pas déformée.

On obtient, sur base des propriétés énoncées précédemment, les tenseurs de déformation suivants :

Le tenseur de BIOT :

$$\underline{E}^B = \underline{U} - \underline{I} \quad (2.33.)$$

et le tenseur de GREEN (ou de GREEN-LAGRANGE)

$$\underline{E}^G = \frac{1}{2} (\underline{C} - \underline{I}) = \frac{1}{2} (\underline{U}^2 - \underline{I}) \quad (2.34.)$$

Les inverses de  $\underline{U}$  et  $\underline{C}$  peuvent également être à la base de "bons" tenseurs de déformation :

Le tenseur de HILL :

$$\underline{E}^H = \underline{I} - \underline{U}^{-1} \quad (2.35.)$$

et le tenseur de KARNI :

$$\underline{E}^K = \frac{1}{2} (\underline{I} - \underline{C}^{-1}) = \frac{1}{2} (\underline{I} - \underline{U}^{-2}) \quad (2.36.)$$

Ainsi est apparue une famille de tenseurs :

$$\underline{E}^{(m)} = \frac{1}{m} (\underline{U}^m - \underline{I}) \quad , \quad m = +2, +1, -1, -2 \quad (2.37.)$$

appelée famille de SETH par CURNIER.

D'autres tenseurs peuvent être construits comme fonction du tenseur de base  $\underline{U}$ . Le plus connu est le tenseur déformation naturelle :

$$\underline{G} = \ln \underline{U} = \frac{1}{2} \ln \underline{C} = (\underline{U} - \underline{I}) + \frac{1}{2} (\underline{U} - \underline{I})^2 + \dots \quad (2.38.)$$

construit à l'aide des logarithmes naturels des valeurs propres et des vecteurs propres de  $\underline{U}$ .

D'autre part, les mêmes développements peuvent être effectués à partir des tenseurs  $\underline{V}$  et  $\underline{B}$ . Le tenseur déformation le plus connu est, dans cette optique, le tenseur d'EULER-ALMANSI :

$$\underline{E}^A = \frac{1}{2} (\underline{I} - \underline{B}^{-1}) = \underline{F}^{-T} \underline{E}^G \underline{F}^{-1}$$

qui est proche du tenseur de KARNI.

Remarquons que le tenseur de GREEN est celui qui demande le moins de développements mathématiques, puisqu'il vaut :

$$\underline{E}^G = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I}) \quad (2.39.)$$

Il peut également s'interpréter comme une variation de longueur et d'angles. En effet, suivant des développements précédents (2.13. à 2.15.), il vient :

$$\begin{aligned} d\underline{x}^{AT} d\underline{x}^B - d\underline{x}^{AT} d\underline{x}^B &= d\underline{x}^A (\underline{C} - \underline{I}) d\underline{x}^B \\ &= 2 d\underline{x}^A \underline{E}^G d\underline{x}^B \end{aligned}$$

Ceci justifie probablement sa grande popularité dans les applications géométriquement non linéaires.

Les tenseurs de déformation ainsi développés sont  
- objectifs :

$$\underline{E} = \underline{E}(\underline{U})$$

car ils dépendent uniquement de  $\underline{U}$ , qui est lui-même indépendant d'une rotation de corps rigide

- isotropes :

$$\text{si } \underline{Q} \text{ est une rotation arbitraire } (\underline{Q}^T \underline{Q} = \underline{I})$$

alors

$$\underline{Q} \underline{E}(\underline{U}) \underline{Q}^T = \underline{E}(\underline{Q} \underline{U} \underline{Q}^T)$$

En d'autres termes, une déformation  $\underline{U}$  de valeurs propres données produit un tenseur de valeurs propres également bien déterminées, et ce quelque soient les directions propres de la déformation.

Il n'y a donc pas de fibre privilégiée.

- cohérents :

Dans la configuration initiale,

$$\underline{U} = \underline{I}$$

et

$$\underline{E}(\underline{I}) = \underline{0}$$

- régulier :

$$\exists \underline{E}^{-1}$$

donc le tenseur de déformation est inversible, la relation  $\underline{E} = \underline{E}(\underline{U})$  est bien bi-univoque.

Notons enfin que, ainsi que le montre CURNIER, il est également possible de combiner les précédentes mesures. Par exemple, on peut obtenir ainsi le tenseur de MOONEY, comme moyenne des tenseurs de GREEN et de KARNI :

$$\underline{E}^M = \frac{1}{2} (\underline{E}^G + \underline{E}^K) = \frac{1}{4} (\underline{C} - \underline{C}^{-1})$$

qui a évidemment les propriétés précédentes. Nous ne nous étendrons pas plus sur ce type de développement.

#### 2.2.1.8. Le tenseur déformation de CAUCHY.

Une autre technique de construction du tenseur de mesure des déformations à partir du tenseur jacobien est la suivante :

au lieu d'en effectuer la décomposition polaire (qui est multiplicative), décomposons-le par addition en ses parties symétriques et antisymétriques :

$$\underline{F} = (\underline{\tilde{U}} + \underline{\tilde{R}}) = \frac{1}{2} (\underline{F} + \underline{F}^T) + \frac{1}{2} (\underline{F} - \underline{F}^T) \quad (2.40.)$$

Ainsi apparaît le pseudo-tenseur de déformation pure, symétrique

$$\underline{\tilde{U}} = \underline{\tilde{U}}^T \quad (2.41.)$$

et le pseudo-tenseur de rotation

$$\underline{\tilde{R}} = -\underline{\tilde{R}}^T \quad (2.42.)$$

Le tenseur déformation approché  $\underline{\tilde{U}}$  tend vers le tenseur de déformation pure  $\underline{U}$  lorsque les rotations disparaissent

si  $\underline{R} \rightarrow \underline{I}$

$$\begin{aligned} \text{alors } \underline{F} &\rightarrow \underline{U} \\ \underline{\tilde{U}} &\rightarrow \underline{U} \\ \underline{\tilde{R}} &\rightarrow \underline{0} \end{aligned} \quad (2.43.)$$

Le tenseur  $\underline{\tilde{U}}$  est donc une approximation du tenseur  $\underline{U}$  dans le cas des petites rotations.

Considérons une rotation de corps rigide (2.22.). On a :

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{Q}(t), & \underline{Q} \underline{Q}^T &= \underline{I} \\ \rightarrow \underline{\tilde{U}} &= \frac{1}{2} (\underline{Q} + \underline{Q}^T) \neq \underline{0} \\ \underline{\tilde{R}} &= \frac{1}{2} (\underline{Q} - \underline{Q}^T) \neq \underline{0} \end{aligned}$$

Le tenseur déformation approché  $\underline{\tilde{U}}$  n'est donc pas objectif.

CAUCHY a construit sur  $\underline{\tilde{U}}$  un tenseur mesure des déformations :

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \underline{\tilde{U}} - \underline{I} \\ &= \frac{1}{2} (\underline{F} + \underline{F}^T) - \underline{I} \end{aligned} \quad (2.44.)$$

qui n'est pas plus objectif que le précédent.

Il n'a donc pas de signification physique dans le domaine des grandes rotations et grandes déformations.

2.2.1.9. Un cas particulier : la déformation triaxiale homogène.

Evaluons à présent la valeur des tenseurs présentés ci-dessus lors d'une déformation triaxiale homogène.

Soit

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1(t) x_1 & , & \lambda_1(0) = 1 \\ x_2 = \lambda_2(t) x_2 & , & \lambda_2(0) = 1 \\ x_3 = \lambda_3(t) x_3 & , & \lambda_3(0) = 1 \end{cases}$$

dès lors :

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \underline{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{R} = \underline{I}$$

$$\underline{F} = \underline{U} = \underline{V}$$

et on obtient les tenseurs déformation  
de BIOT et de CAUCHY

$$\underline{\varepsilon} = \underline{E}^B = \begin{bmatrix} \lambda_1(t)-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t)-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(t)-1 \end{bmatrix}$$

de GREEN

$$\underline{E}^G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (\lambda_1^2(t)-1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} (\lambda_2^2(t)-1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} (\lambda_3^2(t)-1) \end{bmatrix}$$

de HILL

$$\underline{E}^H = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\lambda_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\lambda_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\lambda_3(t)} \end{bmatrix}$$

de KARNI et d'ALMANSI

$$\underline{A} = \underline{E}^K = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2(t)}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2^2(t)}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_3^2(t)}\right) \end{bmatrix}$$

de MOONEY

$$\underline{E}^M = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \left(\lambda_1^2(t) - \frac{1}{\lambda_1^2(t)}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \left(\lambda_2^2(t) - \frac{1}{\lambda_2^2(t)}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \left(\lambda_3^2(t) - \frac{1}{\lambda_3^2(t)}\right) \end{bmatrix}$$

naturelle

$$G = \begin{bmatrix} \ln \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \ln \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \ln \lambda_3(t) \end{bmatrix}$$

Ainsi, nous voyons que lors d'une déformation triaxiale homogène, tous les tenseurs mesure des déformations sont coaxiaux. Seules leurs va-

Leurs propres changent.

## 2.2.2. Tenseurs contraintes en grandes déformations.

### 2.2.2.1. Introduction.

De même que les déformations, les contraintes existant dans la configuration déformée  $\gamma$  peuvent être exprimées par rapport à des facettes liées à la configuration initiale de la structure  $\Gamma$  ou à une configuration quelconque déformée en équilibre ou à la configuration déformée actuelle  $\gamma$ .

Les contraintes peuvent également être exprimées dans des axes cartésiens fixes de référence pour toute la structure, ou dans des axes intrinsèques non orthogonaux et variant d'un point à l'autre de la structure. A première vue, ces derniers sont peu intéressants. Toutefois, ils ont deux grands avantages :

- ils sont liés aux fibres de la structure, et suivent donc aisément les grands déplacements ;
- ils apparaissent naturellement lors du développement d'éléments finis isoparamétriques.

Il existe donc un grand nombre de mesures de contraintes toutes différentes, combinant les diverses possibilités de configuration de référence et de systèmes d'axes. Tous les choix sont valables.

Lorsqu'on a recours à la technique des éléments finis, certains de ces choix conduisent à des matrices de rigidité non symétriques, qui ont longtemps été considérées avec méfiance. Mais, pour d'autres raisons, nous serons souvent amenés à résoudre des systèmes d'équations non symétriques. Cette appréhension disparaît donc.

Certains choix de contraintes sont également plus proches de la perception physique de l'ingénieur, dans un cas ou l'autre d'analyse. Ainsi, lorsqu'on analyse des barres de treillis, des poutres, des membranes ou des coques, donc des corps orientés, il est tout à fait naturel de prendre des axes de référence liés à la fibre moyenne ou au plan moyen des corps. Par contre, lorsqu'on étudie des volumes (éventuellement en état plan ou axisymétrique), il est intéressant de travailler en coordonnées cartésiennes globales, afin de voir (ou percevoir) l'évolution de l'état de contrainte dans les directions globales et permanentes de la structure.

On trouvera une description fort complète des divers choix possibles dans [1] et [45].

### 2.2.2.2. Le vecteur-contrainte sur une facette.

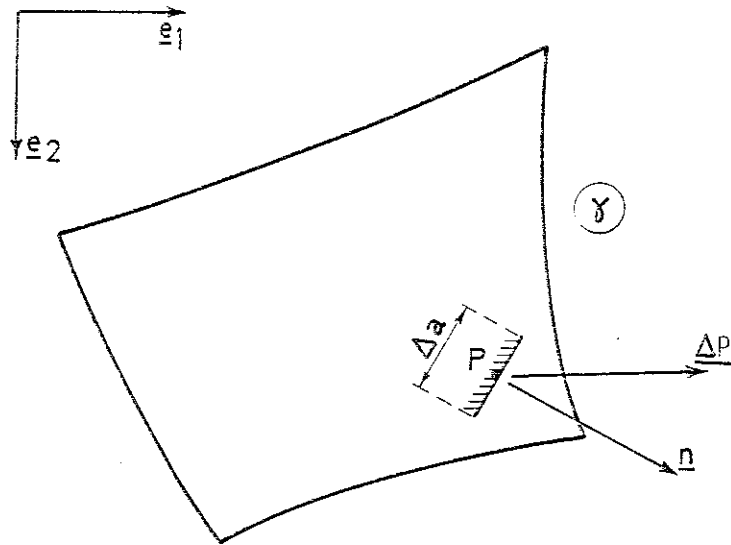


Figure 2.4.

Soit, en un point du corps déformé, une facette d'aire  $\Delta a$  dont l'orientation est déterminée par sa normale unitaire  $\vec{n}$ . Soit  $\Delta P$  l'effort exercé au travers de cette facette par les molécules du corps les unes sur les autres.

On définit le *vecteur-contrainte* sur une facette d'orientation  $n$  par

$$\underline{t} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta a} \quad (2.45.)$$

### 2.2.2.3. Le tenseur contrainte de CAUCHY.

Les contraintes de CAUCHY sont exprimées en axes cartésiens globaux immuables pendant la déformation.

Considérons (fig. 2.5.) le mouvement d'une facette matérielle donnée  $M_0 N_0 \rightarrow MN \rightarrow M^* N^*$  dans les configurations successives  $\Gamma \rightarrow \gamma \rightarrow \gamma^*$ .



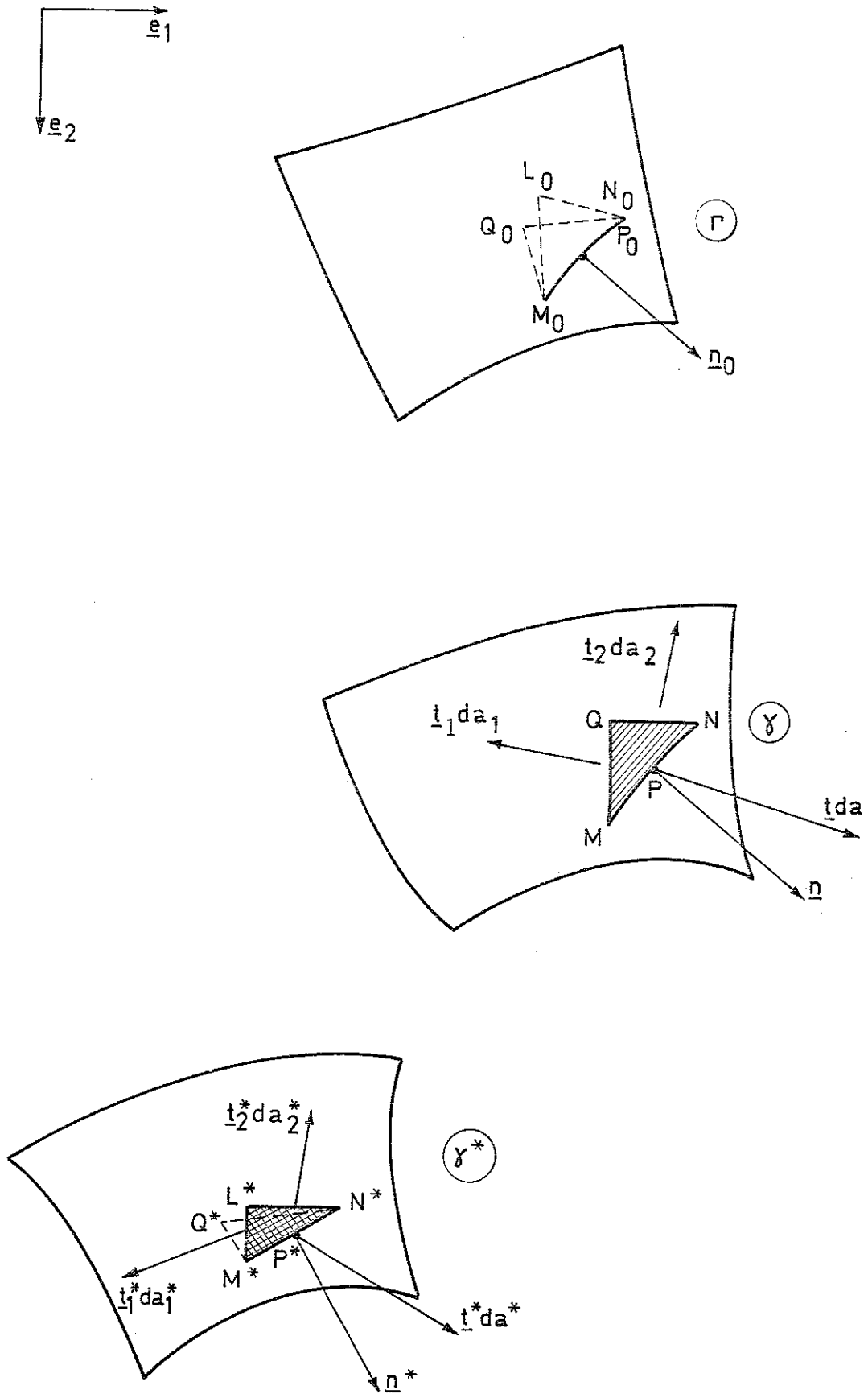


Figure 2.5.

Dans la configuration déformée  $\gamma$ , on étudie l'équilibre du triangle QMN (si on avait fait un dessin pour un espace à 3 dimensions, on aurait eu un tétraèdre).

Les côtés QN et QM sont parallèles aux axes globaux  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ .

L'équilibre de ce triangle (tétraèdre) s'écrit :

$$\underline{t} da = \underline{t}_1 da_1 + \underline{t}_2 da_2 + \underline{t}_3 da_3 = \underline{t}_i da_i \quad (2.46.)$$

Si on exprime les composantes de la normale  $\underline{n}$  en axes globaux :

$$\underline{n} = n_1 \underline{e}_1 + n_2 \underline{e}_2 + n_3 \underline{e}_3 = n_i \underline{e}_i \quad (2.47.)$$

on a :

$$da_i = n_i da \quad (2.48.)$$

d'où :

$$\underline{t} = n_i \underline{t}_i \quad (2.49.)$$

On décompose maintenant les vecteurs  $\underline{t}_i$  dans les axes globaux :

$$\underline{t}_i = \sigma_{ij} \underline{e}_j \quad (2.50.)$$

d'où

$$\underline{t} = n_i \sigma_{ij} \underline{e}_j \quad (2.51.)$$

Par définition, les  $\sigma_{ij}$  forment le tenseur des contraintes de CAUCHY au point P.

Ces contraintes sont donc relatives à des facettes (QN, QM) parallèles aux axes globaux, dans la configuration déformée  $\gamma$ .

Dans une autre configuration déformée  $\gamma^*$ , la facette MN devient  $M^*N^*$  et on déterminera les contraintes de CAUCHY à l'aide du triangle (tétraèdre)  $L^*M^*N^*$ .

Il est fondamental de remarquer que les *facettes*  $L^*M^*$  et  $L^*N^*$  ne résultent pas de la déformation de QM et QN.

Ce n'est donc pas sur les mêmes facettes matérielles que les contraintes  $\sigma_{ij}$  et  $\sigma_{ij}^*$  sont définies dans  $\gamma$  et  $\gamma^*$ .

Les contraintes de CAUCHY sont souvent appelées contraintes "vraies", car elles sont définies sur une surface "vraie", relative à la configuration dans laquelle les contraintes existent.

Le cas du tenseur contrainte de CAUCHY nous montre quels sont les ingrédients de la construction d'un tenseur contrainte.

1. On étudie une facette infinitésimale, sur laquelle agit un vecteur contrainte, limite de la force action du reste du corps, lorsque la surface de la facette tend à s'annuler.
2. On projette la facette suivant les 3 axes d'un repère de référence, et on projette le vecteur contraintes sur les 3 facettes de référence ainsi créées.
3. Chacun des 3 vecteurs contraintes associé à une facette de référence est décomposé en ses 3 composantes, selon les 3 axes de référence. On obtient ainsi 9 composantes, caractérisant un tenseur contrainte.

Selon ce mode d'emploi, on voit qu'il est possible de réaliser plusieurs variantes.

1. Il est possible de multiplier le tenseur contrainte de CAUCHY par un facteur d'échelle scalaire. Ce facteur, pour fournir un apport constructif, ne peut être constant. Il doit donc dépendre de la déformation.
2. Il est possible de changer de systèmes d'axes de référence. La modification la plus intéressante consiste à choisir un nouveau système lié d'une façon ou d'une autre à la structure. Par exemple, des axes subissant uniquement une rotation égale à la rotation de corps rigide de la structure, donnée par la décomposition polaire du gradient de déformation (2.31.). Ou encore des axes "gravés" sur la structure et se déformant avec elle (base  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$ , (2.4.)). Ou encore des axes liés à un système de coordonnées intrinsèques suggéré par la formulation isoparamétrique des éléments finis.

Le système d'axes de référence doit être tel que dans la configuration initiale, les diverses mesures de contraintes soient "sensées", et si possible coïncident.

Ce changement d'axes peut influencer, soit le vecteur aire infinitésimale  $\underline{da} = \underline{n} da$ , soit le vecteur contrainte, soit les deux vecteurs.

Ces diverses possibilités peuvent être combinées à volonté, mais seuls certains choix sont féconds. Nous limitons notre présentation aux choix les plus populaires et les plus intéressants.

#### 2.2.2.4. Les tenseurs contrainte corotationnelle et de KIRCHHOFF.

Les contraintes de KIRCHHOFF sont semblables aux contraintes de CAUCHY si ce n'est qu'elles sont corrigées par le changement de volume, soit

$$\underline{t} = (\det \underline{F}) \cdot \underline{\sigma} \quad (2.52.)$$

Les contraintes  $\underline{\sigma}$  de CAUCHY et  $\underline{t}$  de KIRCHHOFF ont une particularité commune : elles sont exprimées en axes globaux dans la structure déformée. Donc, si celle-ci subit une rotation de corps rigide, les contraintes changent. Les contraintes de CAUCHY et de KIRCHHOFF ne sont pas *objectives*, mais elles sont aisément interprétables.

Une première technique pour obtenir un tenseur contrainte objectif consiste à exprimer les contraintes par unité d'aire déformée dans des axes insensibles à une rotation de corps rigide. Soient ces axes les axes principaux de la déformation, données par la rotation  $\underline{R}$ , avec

$$\underline{F} = \underline{R} \underline{U} \quad (2.31.)$$

Le tenseur contraintes corotationnelles s'obtient par rotation du tenseur de KIRCHHOFF :

$$\underline{I} = \underline{R}^T \underline{t} \underline{R} = (\det \underline{F}) \underline{R}^T \underline{\sigma} \underline{R} \quad (2.53.)$$

Il est objectif.

#### 2.2.2.5. Le tenseur contrainte de LAGRANGE.

Exprimons à présent le vecteur contrainte par unité d'aire initiale.

Considérons (figure 2.6.) le mouvement d'une facette matérielle donnée  $M_0 N_0 \rightarrow M N$ , de la configuration initiale  $\Gamma$  à la configuration actuelle  $\gamma$ .

Au cours de la déformation, un triangle initialement rectangle  $Q_0 M_0 N_0$  dans  $\Gamma$  devient un triangle curviligne  $Q M N$  dans  $\gamma$ . Sur  $M N$  agit le vecteur-force  $\underline{t} da$ .

On transporte  $\underline{t} da$  parallèlement à lui-même sur  $M_0 N_0$  et on effectue sa décomposition (par équilibre) à l'aide du triangle  $Q_0 M_0 N_0$ .

$$\underline{t} da = \underline{I} da = \underline{I}_1 da_1 + \underline{I}_2 da_2 + \underline{I}_3 da_3 = \underline{I}_i da_i \quad (2.54.)$$

$\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$  sont donc des vecteurs contraintes fictifs agissant sur les facettes  $da_1, da_2, da_3$  respectivement perpendiculaires aux axes  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  et  $\underline{I}$  est le vecteur contrainte par unité d'aire initiale non déformée.

Si on exprime les composantes de la normale  $\underline{n}_0$  en axes globaux

$$\underline{n}_0 = n_{01} \underline{e}_1 + n_{02} \underline{e}_2 + n_{03} \underline{e}_3$$

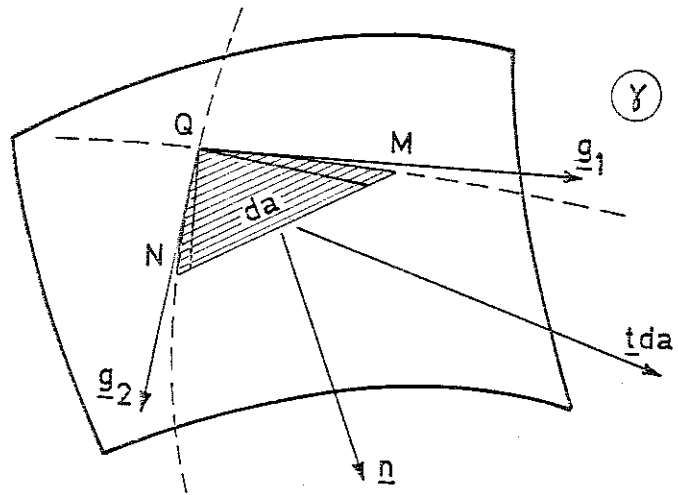
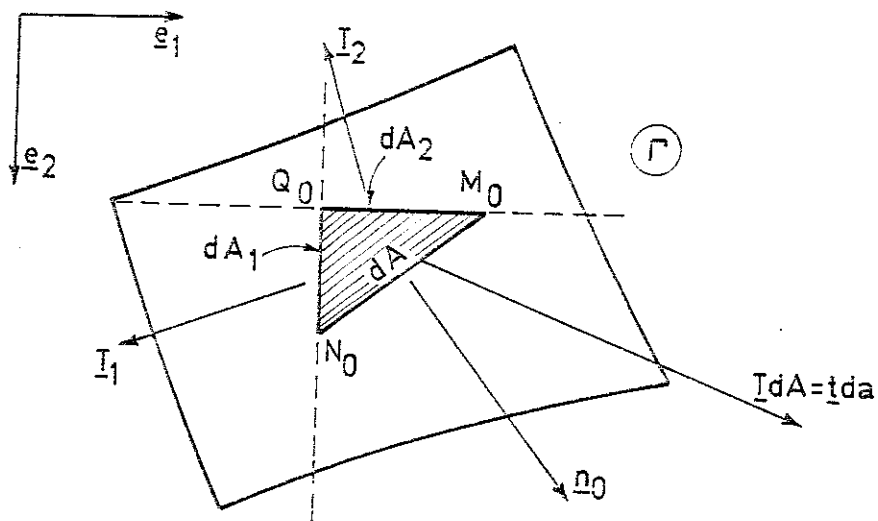


Figure 2.6.

on a :

$$dA_i = n_{0i} dA$$

il vient :

$$\underline{I} = n_{0i} \underline{I}_i \quad (2.55.)$$

On peut décomposer  $\underline{I}_i$  dans la base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ , cartésienne globale. On obtient les contraintes de LAGRANGE  $L_{ij}$

$$\underline{I}_i = L_{ij} \underline{e}_j \quad (2.56.)$$

On a ainsi exprimé le vecteur contrainte  $\underline{t}$  par des contraintes mesurées par

unité d'aire non déformée. Les contraintes de LAGRANGE sont donc des contraintes *nominales*.

Nous pouvons relier le tenseur de LAGRANGE au tenseur de CAUCHY :

$$\underline{t} \, da = \underline{I} \, da$$

$$\rightarrow \underline{\sigma}^T \underline{n} \, da = \underline{L}^T \underline{n}_0 \, dA$$

Or, la formule de NANSON (2.6.) donne l'évolution de la surface :

$$\underline{n} \, da = (\det \underline{F}) \cdot \underline{F}^{-T} \underline{n}_0 \, dA$$

$$\rightarrow (\det \underline{F}) \underline{\sigma}^T \underline{F}^{-T} \underline{n}_0 \cdot dA = \underline{L}^T \underline{n}_0 \, dA$$

$$\rightarrow \underline{L} = (\det \underline{F}) \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} = (\det \underline{F}) \underline{U}^{-1} \underline{R} \underline{\sigma} \quad (2.57.)$$

Le tenseur jacobien n'étant pas symétrique, le tenseur de LAGRANGE ne l'est pas non plus.

Ce tenseur est également souvent appelé tenseur de PIOLA KIRCHHOFF n° 1 ou tenseur de BOUSSINESQ.

Il n'est pas objectif.

#### 2.2.2.6. Le tenseur contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF n° 2

Le tenseur de LAGRANGE a été obtenu par transformation de la surface de référence à l'aide du facteur

$$(\det \underline{F}) \underline{F}^{-1}$$

sans transformer le vecteur contrainte. Il en résulte un tenseur dissymétrique.

Transformons à présent le vecteur contrainte de la même façon que la surface, ou de la même façon que le vecteur coordonnées, de la configuration actuelle vers la configuration de référence (relation géométrique) :

$$\underline{I}_0 \, dA = \underline{F}^{-1} \underline{t} \, da \quad (2.58.)$$

et décomposons  $\underline{I}_0$  comme précédemment :

$$\underline{I}_0 = n_{0i} \underline{I}_{0i} \quad (2.59.)$$

$$\underline{I}_{0i} = S_{ij} \underline{e}_j \quad (2.60.)$$

ou

$$\underline{I}_0 = \underline{S}^T \underline{n}_0 \, dA \quad (2.61.)$$

$\underline{S}$  est le tenseur contrainte de PIOLA KIRCHHOFF n° 2, ou PK2, ou encore PIOLA-LAGRANGE. Nous pouvons le relier au tenseur de CAUCHY.

$$\begin{aligned} \underline{T}_0 dA &= \underline{F}^{-1} \underline{t} da \\ \underline{S}^T \underline{n}_0 dA &= \underline{F}^{-1} \underline{\sigma}^T \underline{n} da \end{aligned}$$

par la formule de NANSON

$$\begin{aligned} \underline{S}^T \underline{n}_0 dA &= \underline{F}^{-1} \underline{\sigma}^T (\det F) \underline{F}^{-T} \underline{n}_0 dA \\ \underline{S} &= \det(\underline{F}) \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} \end{aligned} \quad (2.62.)$$

Le tenseur  $\underline{S}$  de PK2 est donc symétrique, car il résulte d'une transformation symétrique du tenseur symétrique de CAUCHY.

Remarquons que le tenseur contrainte de PK2 peut également s'interpréter comme la décomposition du vecteur contrainte  $\underline{t}$  dans les axes liés à la structure et initialement globaux

$$\underline{g} = \underline{F}^T \underline{e}$$

Rappelons-nous la décomposition polaire du gradient de déformation :

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{V} \underline{R} = \underline{R} \underline{U} \\ \underline{F}^{-1} &= \underline{R}^T \underline{V}^{-1} = \underline{U}^{-1} \underline{R}^T \end{aligned} \quad (2.31.)$$

donc la relation (2.62.) entre les contraintes de PK2 et de CAUCHY peut s'écrire :

$$\underline{S} = (\det \underline{U}) \underline{U}^{-1} \underline{R}^T \underline{\sigma} \underline{R} \underline{U}^{-1}$$

où apparaissent les contraintes corotationnelles  $\underline{T}$ . On a donc la relation :

$$\underline{S} = \underline{U}^{-1} \underline{T} \underline{U}^{-1} \quad (2.63.)$$

Entre les contraintes corotationnelles et de PK2 existe uniquement une transformation d'échelle, de taille.

Les deux mesures sont objectives.

Les contraintes corotationnelles ont une mesure "vraie", c'est-à-dire par unité de surface dans la configuration par opposition aux contraintes de PK2.

#### 2.2.2.7. Le tenseur contrainte de GREEN-RIVLIN.

De façon analogue au cas des contraintes de PK2, on peut transformer le vecteur contrainte et l'aire élémentaire par l'inverse du gradient de déformation. On obtient ainsi le tenseur de GREEN-RIVLIN<sup>(x)</sup>,

---

(x) E. GREEN, associé de RIVLIN, est un de nos contemporains, à la différence de GREEN, inventeur de la *déformation* qui porte son nom.

lié au tenseur des contraintes corotationnelles par la relation

$$\underline{S}^H = \underline{U} \underline{T} \underline{U} \quad (2.64.)$$

La même procédure peut être poursuivie pour donner de nouveaux tenseurs contraintes, dont l'intérêt est généralement assez limité (CURNIER [45]).

#### 2.2.2.8. Analyse des tenseurs contraintes. Choix.

Nous avons présenté une série de tenseurs mesure des déformations et des contraintes. Lequel faut-il choisir ? Quelques critères existent ?

Il n'est pas possible de choisir indépendamment les tenseurs des contraintes et des déformations : un lien existe, il sera développé aux prochains paragraphes à l'aide du principe des travaux virtuels.

Il est nécessaire que tous les tenseurs contraintes soient cohérents, c'est-à-dire égaux dans un voisinage arbitrairement petit de la configuration initiale.

Il est utile pour la *formulation* qu'un tenseur contrainte soit objectif. Par contre, il en résulte souvent un résultat *peu lisible*.

Il est utile que les valeurs propres soient toujours toutes réelles et que les vecteurs propres soient orthogonaux. Ces propriétés ne sont vérifiées que dans le cas des tenseurs *symétriques*. En particulier, ce n'est pas le cas du tenseur de LAGRANGE ! Ceci justifie le peu d'intérêt porté en général aux tenseurs non symétriques.

Ces quelques aspects ont été abondamment étudiés par CURNIER [45]. Son étude est longue et ardue, mais passionnante par les perspectives et l'homogénéité qu'elle présente.

Nous basons notre choix sur la représentation des contraintes. L'objet principal de ce travail est l'étude de solides. En règle générale, nous n'étudions pas de poutre, plaque ou coque. Dès lors, l'orientation privilégiée de mesure des contraintes est l'orientation des axes globaux.

Nous travaillerons beaucoup dans le domaine des grandes déformations. La différence entre la taille actuelle d'un petit élément de surface et sa taille initiale peut donc être importante. Dès lors, seule la contrainte vraie, par unité de surface actuelle, est aisément interprétable.



### 2.2.3.1. Les forces appliquées.

Le corps étudié peut être soumis à deux types d'actions extérieures :

-des forces par unité de masse,  $\underline{p}$  (par exemple, la gravité).

La force par unité de volume est donc  $\rho \underline{p}$

-des forces par unité de surface  $\underline{p}$ .

Ces dernières se subdivisent en plusieurs catégories, selon les conditions imposées à la surface.

Sur les surfaces à déplacements imposés, les forces par unité de surface sont les réactions du milieu extérieur sur le solide étudié.

Sur les surfaces à forces imposées, la force est donnée en axes globaux et par unité de surface initiale ou en axes liés à la structure et par unité de surface déformée. Dans ce dernier cas, les forces appliquées résultent de la pression d'un fluide, ou d'un frottement appliqué tangentiellement à la surface.

Enfin, un troisième type de surfaces sera considéré. Sur ces surfaces, on n'impose ni une force, ni un déplacement, mais une relation entre forces et déplacements. Une fondation élastique se modélise ainsi. Une condition de contact unilatéral avec frottement entre également dans cette catégorie : selon la distance de la structure à une frontière donnée que nous appellerons fondation (évoluant éventuellement), le contact existe et des forces de surface apparaissent, ou le contact n'existe pas et aucune force n'est appliquée.

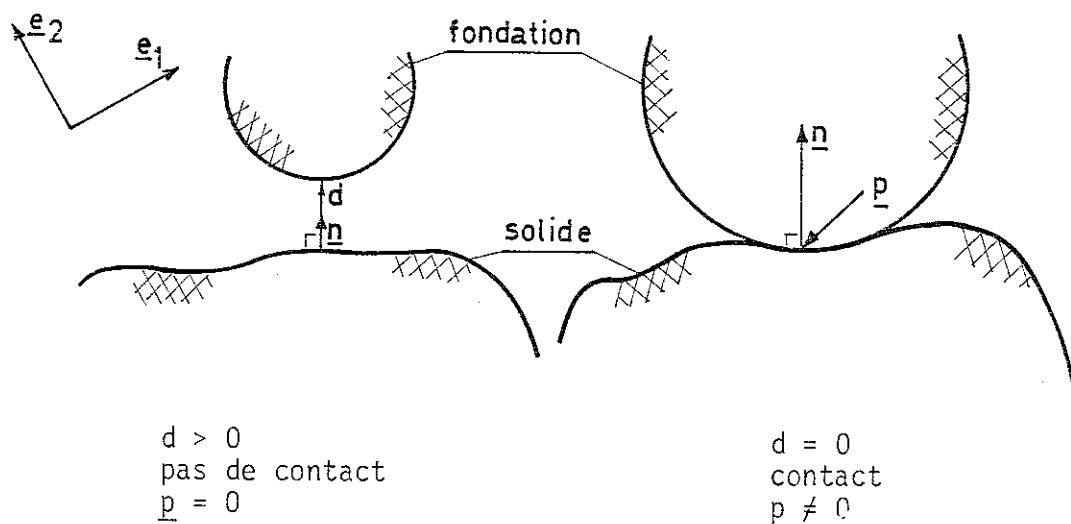


Figure 2.7. - Le problème de contact unilatéral.

### 2.2.3.2. L'équilibre local en surface.

Nous travaillons dans la configuration déformée actuelle  $\gamma$ . Le vecteur force  $\underline{p}$  par unité de surface déformée est absolument équivalent au vecteur contrainte  $\underline{t}$  (2.45.). Il est donc équilibré par les contraintes intérieures à la structure selon la formule fondamentale (2.51.)

$$\underline{p} = n_i \sigma_{ij} \underline{e}_j \quad (2.65.)$$

où  $\underline{n}$  est la normale extérieure.

Cette équation exprime l'équilibre d'un petit volume infinitésimal construit dans le solide autour de la portion infinitésimale de surface étudiée.

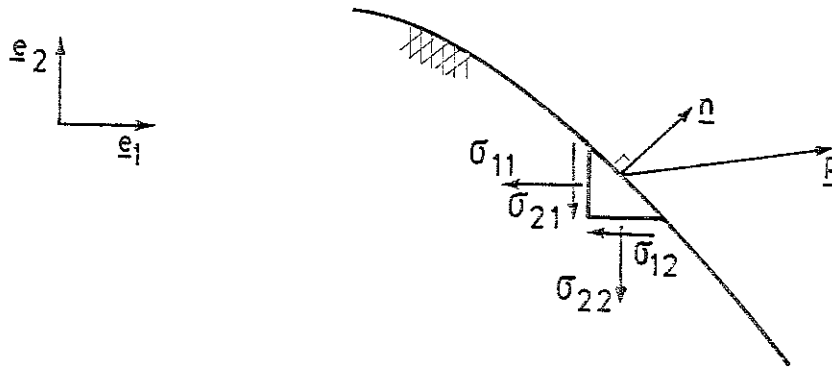


Figure 2.8. - Equilibre en surface.

### 2.2.3.3. L'équilibre local en volume.

Considérons un élément de volume  $v$  dans le solide déformé. En exprimant son équilibre en translation et en rotation, on trouve respectivement :

$$\rho P_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad (2.66.)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.67.)$$

### 2.2.3.4. L'équilibre global - Les puissances virtuelles.

Pour exprimer que l'ensemble du solide étudié est en équilibre, il suffit d'écrire que, lors de toute perturbation virtuelle des coordonnées  $\underline{x}$  dans la configuration déformée  $\gamma$ , la puissance virtuelle extérieure est égale à la puissance virtuelle intérieure.

La perturbation virtuelle doit être cinématiquement admissible : elle doit respecter les conditions de déplacements imposés au contour et la continuité du solide, c'est-à-dire être continûment dérivable en son sein. Soit  $\underline{\delta v}$  la vitesse de perturbation.

La puissance virtuelle extérieure  $\delta W_E$  est le travail accompli par les forces de volume  $\rho \underline{P}$  et de surface  $\underline{p}$  :

$$\delta W_E = \int_V \rho \underline{P}^T \underline{\delta v} \, dv + \int_a \underline{p}^T \underline{\delta v} \, da \quad (2.69.)$$

Cette équation implique que les forces  $\rho \underline{P}$  et  $\underline{p}$  sont *conjuguées* aux vitesses  $v$ , exprimées dans les mêmes axes. Peu importe quels sont ces axes (orthonormés). Nous pouvons donc choisir différents systèmes selon les forces étudiées, à condition d'exprimer les vitesses dans le même système que la force conjuguée. En particulier, le problème de contact est inclus dans (2.69.) :  $\underline{p}$  sont alors les forces appliquées par une fondation au solide, exprimées en axes orthonormés locaux à la surface.  $\underline{\delta v}$  peut être considérée indifféremment comme une vitesse de perturbation des coordonnées de la surface, ou de la distance entre la fondation et la surface, mesurée normalement à celle-ci (figure 2.7.).

Introduisons les expressions de l'équilibre local (2.65.) et (2.66.) dans (2.69.). Travaillons en notation indicielle

$$\delta W_E = - \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta v_j \, dv + \int_a n_i \sigma_{ij} \delta v_j \, da$$

Transformons l'intégrale de surface en intégrale de volume par le théorème de GAUSS :

$$\begin{aligned} \delta W_E &= \int_V \left[ - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta v_j + \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} \delta v_j) \right] \, dv \\ &= \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \, dv \end{aligned} \quad (2.70.)$$

Ainsi apparaît l'expression de la puissance virtuelle en fonction des contraintes. C'est la puissance virtuelle intérieure  $\delta W_I$ . La vitesse de déformation virtuelle conjuguée aux contraintes de CAUCHY est donc :

$$\frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i}$$

Comme le tenseur contrainte de CAUCHY est symétrique, la puissance virtuelle peut aussi s'écrire :

L'ensemble de ces arguments nous conduit donc naturellement à fournir à l'utilisateur du programme, *les contraintes de CAUCHY*. Dès lors, il est logique d'exprimer l'équilibre en contraintes de CAUCHY.

Par contre, l'étude de l'*évolution* des contraintes doit être objective. Nous serons donc amenés par la suite à utiliser les contraintes corotationnelles, parce qu'elles sont "proches" des contraintes de CAUCHY. Les contraintes de PK2 et de HILL, issues des précédentes par "anamorphose" ne seront donc pas utilisées.

#### 2.2.2.9. La décomposition du vecteur force.

Dans l'étude du solide apparaissent, outre les déplacements, déformations et contraintes, des forces. De même que le tenseur contrainte, le vecteur force peut être exprimé dans une multitude de systèmes d'axes de référence. Selon le type de force, l'un ou l'autre est plus intéressant. Nous en retiendrons deux.

Les axes globaux forment le système fondamental, d'orientation fixe. Il sera utilisé pour représenter des forces d'orientation immuable, et donc non liées au solide : par exemple la pesanteur.

D'autres forces sont liées au solide : par exemple, la pression sur une surface frontière, ou un frottement tangentiel à cette surface. De telles forces sont avantageusement décomposées dans un système d'axes orthonormé dont l'orientation est liée au solide. Ainsi, la décomposition du vecteur force (liée) est indépendante d'une rotation de corps rigide : elle est objective. La rotation du système peut être déterminée soit par la décomposition polaire du tenseur jacobien (2.31.), soit par la rotation d'une fibre privilégiée. Nous utilisons cette dernière solution pour la décomposition des forces de surface : le système est constitué de la normale, de la tangente à une fibre, et d'un troisième axe orthogonal aux précédents, qui n'est lié à aucune fibre.

#### 2.2.3. L'équilibre du solide.

Les développements qui précèdent nous ont permis d'aborder les notions de contraintes et de déformations. L'état de contrainte dans un solide est en tout moment en équilibre avec les forces appliquées. L'équilibre peut être exprimé pour tout petit volume arbitraire découpé à l'intérieur du solide, ou près de sa surface, mais aussi pour la totalité du solide étudié.

$$\delta W_I = \int_V \sigma_{ij} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \delta v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \delta v_i \right) \right] dv \quad (2.71.)$$

Ainsi, le tenseur contrainte de CAUCHY est conjugué au tenseur vitesse de déformation virtuelle de CAUCHY (2.44.)

$$\delta \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.72.)$$

dont on a cité les défauts plus haut.

L'égalité des puissances virtuelles extérieure (2.69.) et intérieure (2.71.) lors de toute perturbation virtuelle des coordonnées assure l'équilibre global du corps. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire de joindre à tout vecteur force et tenseur contrainte un vecteur vitesse virtuelle et un tenseur vitesse de déformation virtuelle qui leur soient conjugués. Ainsi, le théorème des puissances virtuelles est un guide pour l'établissement des relations constitutives entre contraintes et déformations, ou, le cas échéant, entre forces et déplacements.

Remarquons que l'ensemble de ces développements ont été posés sans faire la moindre hypothèse sur le matériau constituant le solide étudié, ni sur l'amplitude des déformations et rotations qu'il subit.

## 2.3. LA CONDUCTION THERMIQUE DANS LES SOLIDES ET L'ÉCOULEMENT DE FLUIDES DANS LES SOLIDES POREUX.

### 2.3.1. Introduction.

Les deux phénomènes que nous analysons ci-dessous, s'ils sont physiquement bien distincts, présentent de multiples analogies dans leur modélisation. C'est la raison pour laquelle nous les traitons simultanément.

### 2.3.2. Les déplacements et les déformations.

Dans les problèmes de conduction, la détermination du champ de température  $T(\underline{x})$  permet la connaissance complète de l'état du solide. Dans les problèmes d'écoulement, il en est de même du champ de pression  $p(\underline{x})$ . La pression et la température jouent ici le rôle des coordonnées dans les problèmes de déformations mécaniques. Un scalaire  $p(\underline{x})$ ,  $T(\underline{x})$  prend donc la place d'un vecteur  $\underline{x}$ .

Dans la suite, nous utiliserons uniquement la notation  $p(\underline{x})$ . A tout moment, elle peut être remplacée par  $T(\underline{x})$ . Nous parlerons uniquement de pressions.

Au paragraphe précédent, nous avons montré que les tenseurs mesures des déformations peuvent être construits à partir du gradient des coordonnées (le tenseur jacobien). Il en est de même ici. Toutefois, le gradient de pression est cette fois un vecteur :

$$\underline{M} = - \text{grad } p, \quad M_i = - \frac{\partial}{\partial x_i} p \quad (2.73.)$$

Par commodité, anticipant sur la suite, nous l'affectons de suite d'un signe négatif.

Le gradient  $\underline{M}$  est nul lorsque la pression est uniforme. Il est donc cohérent avec la seule définition de configuration initiale  $\Gamma$  plausible : Dans  $\Gamma$ , le champ de pression est uniforme.

Le gradient  $\underline{M}$  n'est pas objectif. Ses composantes varient lorsque le solide étudié subit une rotation de corps rigide. En présence de grandes déformations et rotations mécaniques, il importe de garder à l'esprit cette propriété du vecteur déformation  $\underline{M}$ .

Le vecteur déformation  $\underline{M}$  est l'équivalent du tenseur déformation de CAUCHY  $\underline{\varepsilon}$  défini au paragraphe précédents (2.44.). Il sera toujours évalué dans la configuration actuelle  $\gamma$ .

Les phénomènes de conduction et d'écoulement sont souvent de type transitoire. La dimension temps joue donc un rôle important, de même que dans les phénomènes mécaniques dynamiques. Dès lors, il est logique de prendre en compte une "déformation" généralisée complémentaire: la dérivée temporelle de la pression ;

$$m = \frac{dp}{dt} \quad (2.74.)$$

qui est scalaire, et donc objective.  $m$  s'annule en régime permanent (condition de cohérence).

### 2.3.3. Les forces et les contraintes.

L'équivalent de la force en mécanique est ici le débit de chaleur ou de fluide  $Q$ , soit une quantité de chaleur ou un volume de fluide par unité de temps. C'est un scalaire.

Considérons en un point  $P$  du solide, une facette d'aire  $\Delta a$ , dont l'orientation est déterminée par sa normale unitaire  $\underline{n}$  (figure 2.9.).

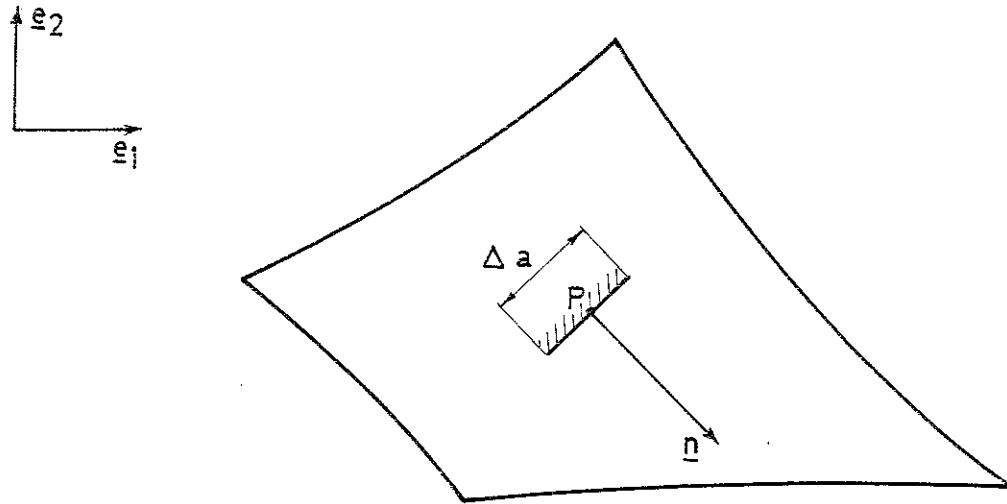


Figure 2.9.

Soit  $\Delta Q$  le débit traversant cette facette. On définit le flux scalaire  $f$  dans la direction  $\underline{n}$  en  $P$  par

$$f = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta a} \quad (2.75.)$$

Etudions l'équilibre du triangle QMN (figure 2.10.). Les côtés QN et QM sont parallèles aux axes  $\underline{e}_1$ ,  $\underline{e}_2$ . La facette MN, d'orientation  $\underline{n}$  est attachée au même point P (si on avait fait un dessin pour un espace à 3 dimensions, on aurait eu un tétraèdre). L'équilibre exprime que la

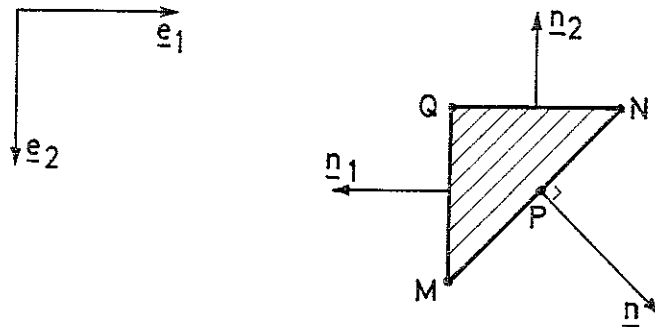


Figure 2.10.

somme des débits traversant les facettes est nulle :

$$f \, da = f_1 \, da_1 + f_2 \, da_2 + f_3 \, da_3 = f_i \, da_i \quad (2.76.)$$

Si on exprime les composantes de la normale  $\underline{n}$  en axes globaux (2.47.), on a :

$$da_i = n_i \, da \quad (2.48.)$$

d'où

$$f = n_i f_i = \underline{n}^T \underline{f} \quad (2.77.)$$

Par définition,  $\underline{f}$  est le vecteur flux au point P. Ses composantes sont relatives à des facettes parallèles aux axes globaux.

Dans un contexte de grandes déformations et rotations mécaniques, le flux  $\underline{f}$  n'est donc pas objectif. Il est l'équivalent du tenseur contrainte de CAUCHY défini au paragraphe précédent (2.51.).

L'aspect transitoire des phénomènes étudiés entraîne, de même que pour les déformations généralisées, l'adjonction au vecteur flux  $\underline{f}$  (spatial) d'un flux scalaire  $f^V$  mesurant plus particulièrement le flux absorbé par le solide, en vertu de sa structure intime, pour augmenter son énergie potentielle.

Ce processus se fait par gonflement des pores lors des écoulements et par accumulation de chaleur lors des conductions.

$f^V$  est scalaire et donc objectif.

#### 2.3.4. L'équilibre.

Les développements qui précèdent nous ont permis de préciser les notions de forces et contraintes, que nous avons transposé en débits et flux (vectoriel et scalaire). Nous allons à présent exprimer l'équilibre de ces forces et contraintes globalement et localement.

##### 2.3.4.1. Les débits appliqués.

Le solide étudié peut être soumis à deux types d'actions extérieures:

- des débits par unité de volume  $Q$  (par exemple, la chaleur produite par la dissipation mécanique lors de déformations irréversibles) ;
- des débits par unité de surface  $q$ .

Ces derniers se subdivisent en plusieurs catégories, selon les conditions imposées à la surface.

Sur les surfaces à pression ou température imposée, les débits par unité de surface sont les réactions du milieu extérieur sur le solide pour respecter l'imposition. Aucun débit ne peut être imposé sur ces surfaces.

Sur les surfaces à débit imposé, le débit est connu et la pression ou la température ne peut être imposée.



Enfin, un troisième type de surfaces doit être considéré. Sur celles-ci, on n'impose ni le débit, ni la pression, mais une relation entre eux. Il en est ainsi des échanges convectifs et radiatifs. C'est également le cas de l'alimentation d'une nappe aquifère par un plan d'eau à travers un mur de perméabilité limitée et de taille faible (par rapport au milieu poreux modélisé) : il existe alors une relation entre le flux traversant le mur et la différence de pression entre le milieu poreux et le plan d'eau. Enfin, un phénomène équivalent au contact mécanique unilatéral peut également être pris en compte : le suintement aux frontières d'un milieu poreux, au contact de l'atmosphère. Il en est ainsi du parement aval d'un barrage ou de la paroi d'un puits au-dessus de la nappe (figure 2.11., zones BC).

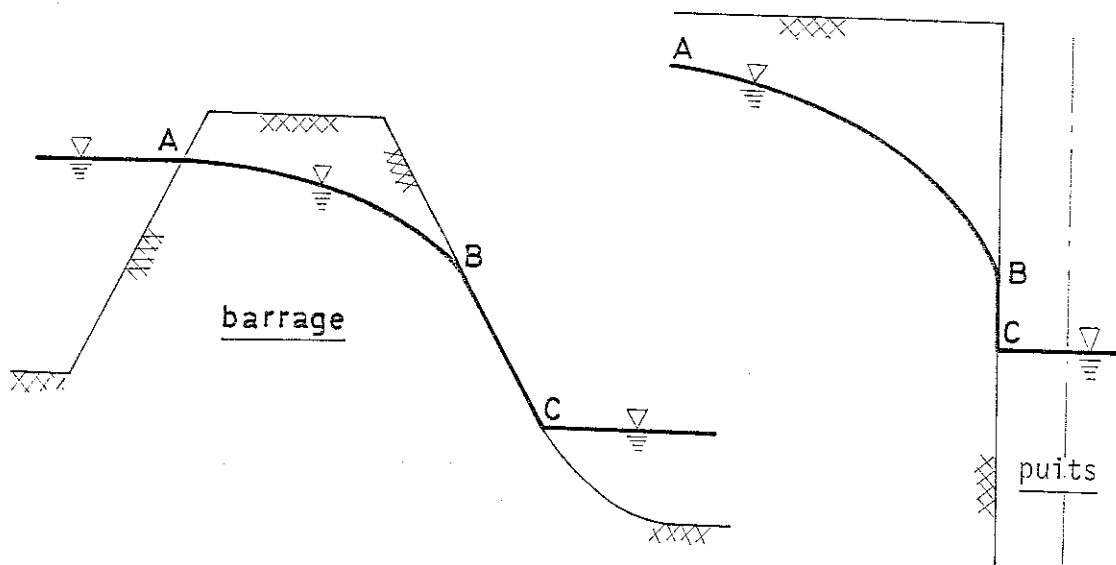


Figure 2.11. - Frontière avec suintement.

Sur ces frontières, la pression ne peut dépasser la pression atmosphérique. Si elle atteint juste cette valeur, alors un débit peut apparaître. Il s'agit donc d'une frontière sur laquelle une condition unilatérale de débit existe en fonction de la pression dans le milieu et de la pression extérieure.

#### 2.3.4.2. L'équilibre local en surface.

Le débit imposé par unité de surface est équivalent au flux scalaire défini plus haut (2.75.). Il est donc équilibré par le vecteur flux selon la formule (2.77.) :

$$\underline{n}^T \underline{f} + q = 0 \quad (2.78.)$$

où  $\underline{n}$  est la normale extérieure.

Au voisinage de la surface, la composante du vecteur flux normale à la surface est égale au débit imposé, quelle que soit la façon dont il est imposé.

#### 2.3.4.3. L'équilibre local en volume.

Considérons un élément de volume  $v$  délimité par la surface  $a$ , de normale extérieure  $\underline{n}$ . Il est en équilibre lorsque le bilan des flux spatiaux provenant du reste du solide, du flux imposé en volume, et du flux absorbé par augmentation d'énergie potentielle est nul :

$$\int_a - \underline{n}^T \underline{f} da + \int_v Q dv = \int_v f^V dv \quad (2.79.)$$

Le théorème de GAUSS permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume. En notation indicielle :

$$\int_v \left( - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + Q - f^V \right) dv = 0$$

qui est valable quel que soit le volume considéré. Dès lors, l'équation d'équilibre local intérieur est :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f^V - Q = 0 \quad (2.80.)$$

#### 2.3.4.4. L'équilibre global. Les puissances virtuelles.

Pour exprimer que l'ensemble du solide étudié est en équilibre, nous exprimons que lors de toute perturbation virtuelle arbitraire  $\delta p$  de la pression (de la température), la puissance virtuelle extérieure est égale à la puissance virtuelle intérieure.

La perturbation virtuelle  $\delta p$  doit être cinématiquement admissible: elle doit respecter les conditions de pressions (température) imposées au contour et être continûment dérivable.

La puissance virtuelle  $\delta W_E$  est la puissance développée par les débits imposés en volume  $Q$  et en surface  $q$ .

$$\delta W_E = \int_V Q \delta p \, dv + \int_a q \delta p \, da \quad (2.81.)$$

$v$  et  $a$  sont le volume et la surface dans la configuration actuelle  $\gamma$ .

Cette équation mesure la puissance mécanique virtuelle fournie par les débits de fluide lors d'une perturbation virtuelle des pressions. Elle mesure également l'énergie thermique virtuelle fournie en une unité de temps par les débits de chaleur imposés lors d'une perturbation virtuelle des températures. Elle implique qu'aux débits  $Q$  et  $q$  est conjuguée la pression (la température) par l'intermédiaire de la puissance. Remarquons que les conditions aux limites de type convection, radiation, contact généralisé, etc... sont prises en compte dans cette formulation.

Introduisons les expressions de l'équilibre local (2.78.) et (2.80.) dans (2.81.). En notation indicielle :

$$\delta W_E = \int_V \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f^V \right) \delta p \, dv + \int_a (-n_i f_i) \delta p \, da$$

Par le théorème de GAUSS :

$$\begin{aligned} \delta W_E &= \int_V \left[ f^V \delta p + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \delta p - \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i \delta p) \right] dv \\ &= \int_V \left( f^V \delta p - f_i \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \right) dv \end{aligned}$$

Ainsi apparaît l'expression de la puissance virtuelle intérieure en fonction des contraintes et déformations généralisées. La déformation virtuelle associée au flux spatial est bien le vecteur

$$\delta M_i = - \frac{\partial}{\partial x_i} \delta p \quad (2.82.)$$

ainsi que nous l'avons présumé (2.73.). La puissance virtuelle intérieure est donc :

$$\delta W_I = \int_V (f^V \delta p + \underline{f}^T \delta \underline{M}) \, dv = \int_V \left( f^V \delta p - f_i \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \right) dv \quad (2.83.)$$

L'égalité des puissances virtuelles extérieure (2.81.) et intérieure (2.83.) lors de toute perturbation virtuelle des pressions (des températures) assure l'équilibre global du solide au point de vue écoulements (transfert de chaleur) sans que la moindre dépendance de la relation constitutive entre contraintes et déformations conjuguées soit apparue.

L'équilibre est ainsi exprimé en un instant, en toute indépendance de l'histoire du solide. En particulier, si de grandes déformations et rotations sont apparues, l'équilibre exprimé dans la configuration actuelle est rigoureux, à condition d'avoir défini les flux vectoriels  $\underline{f}$  et les déformations généralisées  $\underline{M}$  simultanément dans l'"esprit de CAUCHY" (ou éventuellement selon d'autres principes équivalents) de telle sorte qu'ils soient conjugués, c'est-à-dire dans la configuration actuelle.

#### 2.4. CONCLUSIONS

Ce chapitre nous a permis d'écrire les conditions de l'équilibre entre forces et déplacements, contraintes et déformations, dans l'étude des grandes déformations mécaniques du solide, de l'écoulement de fluide en milieu poreux et de la conduction thermique dans les solides. Les deux dernières analyses ont été envisagées dans un contexte de petites et de *grandes* déformations.

La géométrie des grandes déformations a été développée. Il en résulte une multitude de mesures de contraintes et de déformations, parmi lesquelles nous avons choisi le couple contraintes-déformations conjuguées de CAUCHY. La même démarche a été utilisée dans le cas des écoulements et de la conduction.

Les forces ou débits imposés ont été présentés. En particulier, le cas du contact unilatéral a été présenté en mécanique et en écoulements.

Enfin, l'équilibre a été exprimé à l'aide du principe de la puissance virtuelle.

La similitude d'approche des trois problèmes est remarquable. Les étapes se succèdent dans le même ordre, les principes et raisonnements sont les mêmes. A un tenseur en mécanique correspond un vecteur en écoulement et en conduction. A un vecteur en mécanique correspond un scalaire en écoulements et conduction.

Aux coordonnées dans la configuration actuelle en mécanique correspondent la pression en écoulement ou la température. Celle-ci peut donc être considérée comme une coordonnée généralisée, tant dans les développements théoriques que dans la programmation d'un code d'éléments finis.

Afin de montrer plus clairement ce parallélisme général, nous avons résumé les équations fondamentales des grandes déformations mécaniques et des écoulements dans le tableau suivant.

Les grandes déformations mécaniques.

Les coordonnées  $\underline{x}$  sont les inconnues  
le tenseur jacobien

$$\underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}$$

le vecteur contrainte

$$\underline{t} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{f}}{\Delta a}$$

le tenseur contrainte de CAUCHY  $\underline{\sigma}$

$$\underline{t} = n_j \sigma_{ij} \underline{e}_j$$

les forces appliquées : par unité de volume  $\rho \underline{p}$   
par unité de surface  $\underline{p}$

l'équilibre local en surface

$$\underline{p} = n_i \sigma_{ij} \underline{e}_j$$

l'équilibre local en volume

$$\rho \underline{p}_j + \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} = 0$$
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

L'écoulement de fluide en milieu poreux.

La pression  $p$  est l'inconnue  
le gradient de pression

$$\underline{M} = - \frac{\partial p}{\partial \underline{x}}$$

la dérivée temporelle de la pression

$$m = \frac{dp}{dt}$$

le flux scalaire

$$f = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta a}$$

le vecteur flux  $\underline{f}$

$$f = n_i f_i$$

le flux scalaire absorbé

$$f_v$$

les débits absorbés : par unité de volume  $Q$   
par unité de surface  $q$

l'équilibre local en surface

$$-q = n_i f_i$$

l'équilibre local en volume

$$-Q + \frac{\partial}{\partial x_i} f_i + f_v = 0$$

Les grandes déformations mécaniques  
La puissance virtuelle extérieure

$$\delta W_E = \int_V \rho \underline{p}^T \delta \underline{v} \, dv + \int_a \underline{p}^T \delta \underline{v} \, da$$

la puissance virtuelle intérieure

$$\delta W_E = \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right) dv$$

la déformation virtuelle de CAUCHY

$$\delta' \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right)$$

L'écoulement de fluide en milieu poreux.  
La puissance virtuelle extérieure

$$\delta W_E = \int_V Q \delta p \, dv + \int_a q \delta p \, da$$

la puissance virtuelle intérieure

$$\delta W_E = \int_V (f^v \delta p - f_i \frac{\partial \delta p}{\partial x_i}) dv$$

la déformation virtuelle

$$\delta p \text{ et } \delta M_i = - \frac{\partial \delta p}{\partial x_i}$$