

3.2.8. Les aspects spécifiques aux sols.

3.2.8.1. Introduction.

Nous allons nous attacher ci-dessous à deux aspects fondamentaux du calcul des contraintes et déformations dans les roches et les sols, qui n'apparaissent nullement dans les métaux. D'une part, un sol est un corps poreux. Dans les pores, il y a un fluide interstitiel : de l'air, du gaz sous haute pression, de l'eau, du pétrole, etc... Si l'influence de l'air à la pression atmosphérique peut être négligée, ce n'est pas le cas pour les autres fluides, où les pressions existantes sont souvent du même ordre que les contraintes. Nous montrons donc ci-dessous quelles sont les relations entre les phases fluide et solide.

D'autre part, la plasticité dans les sols est très différente de celle des métaux, notamment en ce sens que l'aspect volumique y joue généralement un rôle (notion de dilatance).

Les méthodes numériques de modélisation des sols sont en plein développement actuellement, et les publications de plus en plus nombreuses. Citons quelques livres [49], [102], [103] panorama des problèmes fondamentaux rencontrés en mécanique des sols, deux revues, *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, qui fête ses 10 ans en 1986, et *Computers and Geotechnics*, née en 1985 et deux congrès NUMOGII et ECONOMIG'86 qui se sont déroulés en 1986. L'ensemble reflète bien l'état actuel et les orientations de la recherche.

3.2.8.2. Les contraintes effectives dans les sols saturés.

Les sols sont souvent des milieux multiphasiques : le sol proprement dit constitue le squelette, ou la matrice. C'est la phase solide. Le squelette est généralement constitué de grains, de particules plus ou moins liés ensemble : le sol est cohérent ou non cohérent (non soudé). La cohésion est une mesure de la résistance des liaisons entre particules solides.

Outre les grains, il y a des pores, qui sont remplis d'un fluide : de l'air si le sol est non saturé, de l'eau s'il est saturé en eau, ou encore du gaz sous haute pression, du pétrole, ... Eventuellement, plusieurs fluides sont simultanément présents dans les pores, mais nous supposerons ici que ce n'est pas le cas : nous nous limitons à l'étude d'un milieu biphasique.

Les contraintes que nous pouvons calculer en divisant une force par une unité de surface (cf. chapitre 2) sont des contraintes totales. Elles sont la résultante des contraintes existant dans les deux phases, le squelette solide d'une part et le fluide d'autre part. La rhéologie et les lois constitutives des deux phases sont manifestement différentes. Il est donc nécessaire de calculer séparément l'évolution des contraintes dans le fluide et dans le squelette, puis leur résultante (les contraintes totales) qui sont nécessaires à l'expression de l'équilibre (cf. chapitre 2).

Le fluide ne résiste pas au cisaillement. Le déviateur des contraintes y est nul. Seule la contrainte volumique, la pression p , est différente de zéro.

TERZAGHI a postulé que la décomposition de la contrainte totale $\underline{\sigma}$ en contrainte "effective" $\underline{\sigma}'$ dans le squelette et pression p dans le fluide est donnée par

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p \delta_{ij} \quad (3.155.a)$$

Si on utilise le déviateur et la valeur moyenne des tenseurs, on a

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \sigma'_m - p \\ \hat{\sigma}_{ij} &= \hat{\sigma}'_{ij} \end{aligned} \quad (3.155.b)$$

Ces relations sont la définition du tenseur contraintes effectives $\underline{\sigma}'$. On remarque que la correction des contraintes ne s'applique qu'à la valeur moyenne des tenseurs.

On peut intuitivement justifier cette relation en considérant un échantillon de sol entre deux plateaux (figure 3.19.).

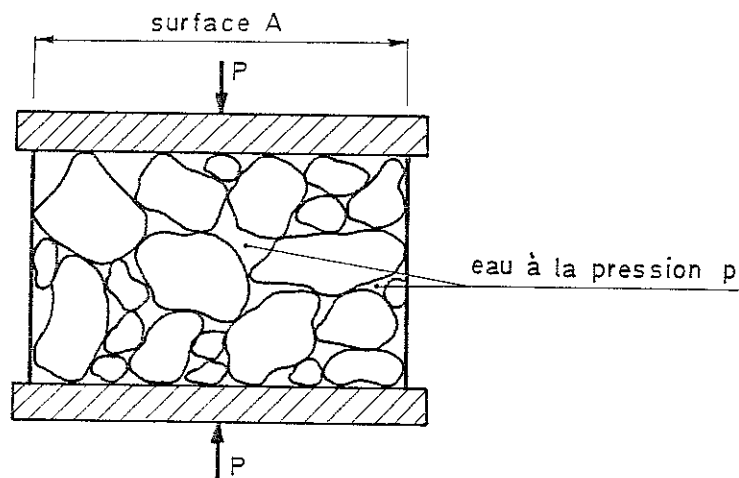


Figure 3.19. - Les contraintes effectives.

Sur un plateau agissant, d'un côté la charge appliquée P , et de l'autre la pression de pore p et les forces intergranulaires du squelette $\underline{\sigma}'$, appliquées aux points de contact avec le plateau. L'expérience montre que ces zones de contact représentent 1 à 3 % de la surface du plateau.

Le principe des contraintes effectives consiste donc ici à admettre que les zones de contact sont négligeables par rapport à la surface du plateau. Il en résulte que la pression s'applique à la totalité de cette surface. La contrainte verticale totale dans l'échantillon et la contrainte effective sont :

$$\sigma_{11} = -\frac{P}{A} \quad (3.156.)$$

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11} + p \quad (3.157.)$$

$\underline{\sigma}'$ est donc une moyenne sur la surface totale de l'échantillon de l'état de contrainte réel dans les particules constitutives. Celui-ci est fort hétérogène. En particulier, de fortes concentrations de contraintes existent à proximité des contacts intergranulaires. Elles sont négligées dans cette approche.

En fait, le principe des contraintes effectives peut être utilisé dans de très nombreux cas, et non seulement dans les milieux granuleux à liaison par contacts intergranulaires. Il s'applique notamment aux argiles, aux sols cohérents, à certaines roches, au béton, ... Les très nombreuses expériences réalisées depuis que TERZAGHI l'a postulé montrent qu'il est d'une application très générale. On trouvera plus de renseignements sur ce principe notamment dans [98], [99], [100].

L'exemple de la figure 3.19. montre que le principe des contraintes effectives doit être exprimé à l'aide de tenseurs de contraintes vraies, car la pression s'applique à une surface "vraie", mesurée dans la configuration déformée. Il faut donc utiliser le tenseur contraintes de Cauchy ou d'autres tenseurs obtenus par rotation pure du précédent.

La loi constitutive de l'eau est très simple : l'eau est toujours élastique. Ainsi que le montre la figure 3.20., extraite de [123], sa compressibilité χ_w varie peu avec la pression. On admettra donc une loi élastique linéaire.

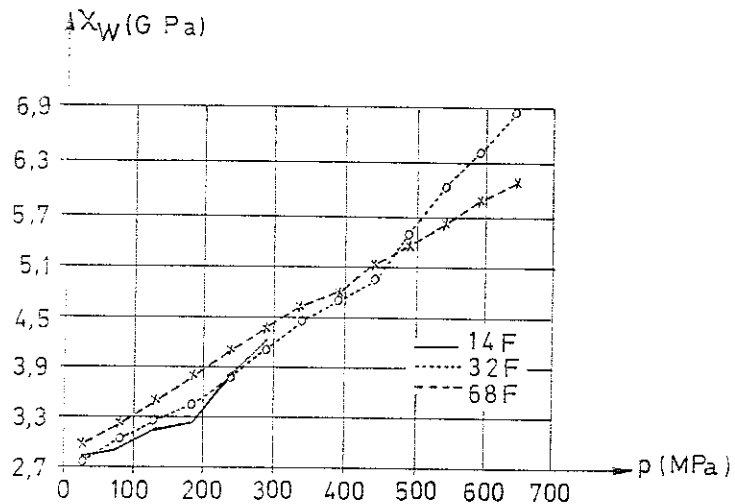


Figure 3.20. - Relation entre la compressibilité de l'eau et la pression.

Si $\dot{\epsilon}_W$ est le changement de volume de l'eau, alors la loi constitutive est :

$$\dot{p} = - \chi_W \dot{\epsilon}_W \quad (3.158.)$$

(le signe - apparaît parce que $\dot{\epsilon}_W$ est positif lorsque le volume augmente).

Les variations de volume de la matrice peuvent être divisées en deux parties, d'une part une variation du volume des pores, et d'autre part une variation du volume du solide proprement dit. Lors des expériences, il est difficile de séparer ces effets et de mesurer la deuxième partie, qui est très faible. On admet généralement que toute la variation de volume est concentrée dans les pores, et donc que le volume de la phase solide est quasi constant. Soit e le volume des pores correspondant à un volume de grains de squelette unitaire. (On l'appelle "indice des vides"). La porosité n est le rapport du volume des vides au volume total, soit :

$$n = \frac{e}{1 + e} \quad (3.159.)$$

Considérons le volume de référence :

$$v = 1 + e \quad (3.160.)$$

La variation du volume v est égale à celle des vides

$$\dot{v} = \dot{e} \quad (3.161.)$$

La variation relative de volume est égale au triple de la vitesse de dilatation moyenne :

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{e}}{1+e} = 3 \dot{\epsilon}_m \quad (3.162.)$$

Si le sol est saturé, le volume des vides égale le volume d'eau. La variation relative du volume d'eau peut donc être liée à la variation du volume des vides, et à celle du volume total :

$$\dot{\epsilon}_w = \frac{\dot{e}}{e} = 3 \frac{1+e}{e} \dot{\epsilon}_m = \frac{3}{n} \dot{\epsilon}_m \quad (3.163.)$$

Si le sol est parfaitement drainé, le régime d'écoulement est permanent et la pression du fluide ne dépend pas des déformations mécaniques. Les aspects écoulement et déformation mécanique sont donc découplés. Ceci suppose que la déformation volumique ϵ_m est suffisamment faible pour que la modification du volume des pores n'effecte pas la perméabilité et les conditions d'écoulement. Dans ce cas limite, le fluide ne contribue pas à la rigidité du sol, mais sa pression intervient dans l'équilibre.

Si par contre le sol n'est absolument pas drainé (par rapport à la durée de la sollicitation), donc s'il est quasi imperméable (c'est notamment le cas de certaines argiles) alors les déformations mécaniques régissent seules les variations de pressions du fluide. On a alors, par (3.163.) et (3.158.)

$$\dot{p} = - \frac{\chi_w}{n} 3 \dot{\epsilon}_m \quad (3.164.)$$

Plus la porosité est faible, plus la variation relative du volume du fluide ϵ_w est grande par rapport à la variation relative du volume total ϵ_m (les variations absolues sont égales), et plus le fluide induit une grande rigidité volumique.

Si le squelette est élastique, sa loi constitutive peut s'écrire :

$$\left| \begin{array}{l} \dot{\sigma}_m' = 3 \chi \dot{\epsilon}_m \\ \dot{\sigma}_{ij}' = 2 G \dot{\epsilon}_{ij} \end{array} \right. \quad (3.48.)$$

En contraintes totales, il vient :

$$\left| \begin{array}{l} \dot{\sigma}_m = \dot{\sigma}_m' - \dot{p} = 3 \left(\chi + \frac{\chi_w}{n} \right) \dot{\epsilon}_m \\ \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}' = 2 G \dot{\epsilon}_{ij} \end{array} \right. \quad (3.165.)$$

Fréquemment, la compressibilité χ_w de l'eau est supérieure d'un ou plusieurs ordres à la compressibilité du squelette.

Il en résulte que le matériau biphasique non-drainé est quasi incompressible, et que la variation de contrainte moyenne effective est négligeable devant la variation de pression. Un traitement numérique spécifique est alors nécessaire (voir [101] par exemple). Ceci sort du cadre de ce travail.

Si des problèmes de contact en milieu saturé sont modélisés, il faut également utiliser des contraintes effectives de contact dans la formulation de la loi constitutive et des contraintes totales de contact dans l'expression de l'équilibre. Les contraintes effectives diffèrent des contraintes totales par leur première composante qui est la seule contrainte normale. De même que précédemment, il faut soustraire à la pression totale de contact la pression du fluide pour obtenir la pression effective de contact (toutes ces pressions sont conventionnellement toujours positives ou nulles).

Par la suite, nous omettrons de parler de contrainte effective ou totale. Implicitement, dans les lois constitutives, nous utilisons les contraintes effectives, et dans l'expression de l'équilibre, nous utilisons les contraintes totales.

3.2.8.3. La plasticité : généralités.

Modéliser la plasticité dans les sols demande d'étudier plusieurs problèmes qui n'apparaissent généralement pas dans les études des déformations irréversibles de solides ou des structures métalliques. En premier lieu, il faut évaluer l'état de contrainte initial, existant dans la configuration initiale Γ . Le problème n'est pas simple. Cet état est apparu suite à une histoire de déformations (tectonique, recristallisation, érosion, glaciation, action de l'homme, etc...) qui n'a pas de commune mesure avec l'histoire d'un métal, et qu'il est impossible de modéliser.

Lorsque la stratification est plus ou moins horizontale, la contrainte verticale est approximativement égale au poids des terrains situés au-dessus du point étudié. Par contre, on ne sait rien des autres composantes du tenseur contraintes si ce n'est qu'elles respectent le critère de plasticité initial, et qu'il n'y a pas de traction telle qu'une décohésion soit à craindre.

Une méthode simple pour les évaluer consiste, dans un premier pas de calcul, à appliquer simplement le poids propre (et éventuellement la

pression de pore) au modèle adopté. On obtient ainsi un état de contrainte en équilibre avec le poids propre. Lorsqu'on utilise pour ce faire un code de calcul qui tient compte de la non-linéarité géométrique, ce premier pas induit des tassements, des déplacements, donc une modification de la géométrie "initiale". Si ces déplacements sont trop importants (c'est le cas si l'on étudie une grande profondeur de sol), il faut corriger l'analyse, de sorte à obtenir finalement un état de contrainte *en équilibre dans la géométrie initiale*. Si la stratification est rigoureusement horizontale et uniforme, le problème se simplifie évidemment considérablement. De nombreux auteurs se basent sur ce cas simple [49].

Il est donc clair que l'on ne connaît jamais parfaitement l'état de contrainte initial. Il en résulte qu'il existe toujours une certaine indétermination dans les simulations numériques réalisées. Il est important de s'en souvenir et d'essayer, le cas échéant, de chiffrer l'approximation induite sur les résultats.

Abordons à présent un deuxième aspect spécifique de la plasticité des sols : la dilatance sous sollicitation déviatorique. Soit un échantillon de sol soumis à une variation de contrainte purement déviatorique, à partir d'un état initial de contraintes non nulles. Selon sa porosité initiale, c'est-à-dire selon que l'arrangement des grains est initialement serré ou lâche, le comportement sera considérablement différent (figure 3.21.).

En abscisse, nous portons la dilatation verticale ϵ_{11} , mesure du tassement. En ordonnée, nous portons d'une part, une mesure de la contrainte déviatorique $\sqrt{II_{\sigma}}$, et d'autre part, la dilatation moyenne ϵ_m , mesure du changement de volume.

Pour le matériau lâche, le comportement est classique et monotone jusqu'à un état critique où le volume et les contraintes déviatoriques se stabilisent, et où l'échantillon se rompt en cisaillement ($\epsilon_m = 0$, $\epsilon_1 < 0$).

Le matériau dense suit un chemin différent. Initialement, la tendance est la même, puis le volume se met à croître. Les contraintes déviatoriques augmentent, passent par un maximum, puis décroissent. Et enfin, le matériau arrive au même état critique que précédemment. Il faut constater ici que la variation de volume ϵ_m change de signe au cours du chargement.

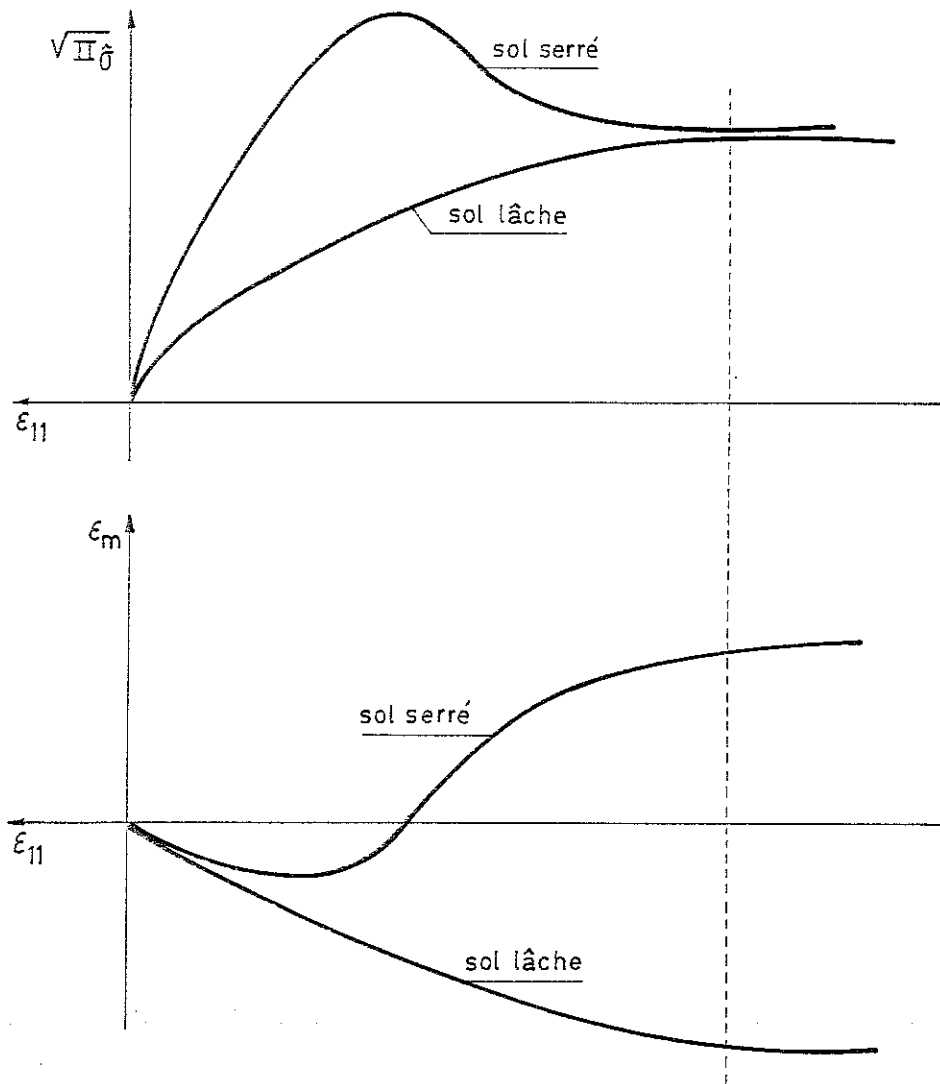


Figure 3.21. - Dilatance d'un sol.

La variation de volume sous une sollicitation purement déviatorique est appelée dilatance. Elle est caractéristique de nombreux sols. Intuitivement, nous pouvons justifier le phénomène comme suit. Considérons un sable constitué de grains cylindriques, tous de même taille, (fig. 3.22.). Soumettons ce sable à une sollicitation de cisaillement. Initialement (figure 3.22.a), les grains sont serrés les uns contre les autres, le sable est aussi dense que possible. Sous la sollicitation de cisaillement, les cylindres supérieurs roulent sur les cylindres inférieurs, et s'en écartent. Le volume augmente, le sable devient lâche et atteint un état critique. A ce moment, les grains sont en équilibre instable les uns au-dessus des autres. La variation instantanée de volume est nulle ($\epsilon_m = 0$). Si le cisaillement se poursuit, les grains supérieurs vont tomber dans le creux suivant.

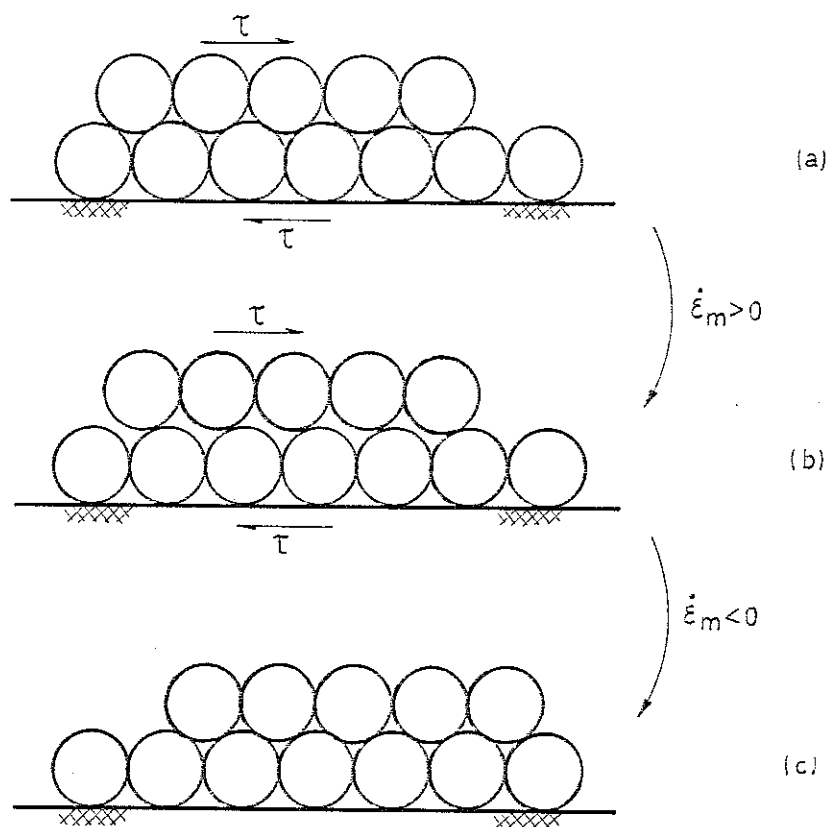


Figure 3.22. - Dilatance d'un sable idéal.

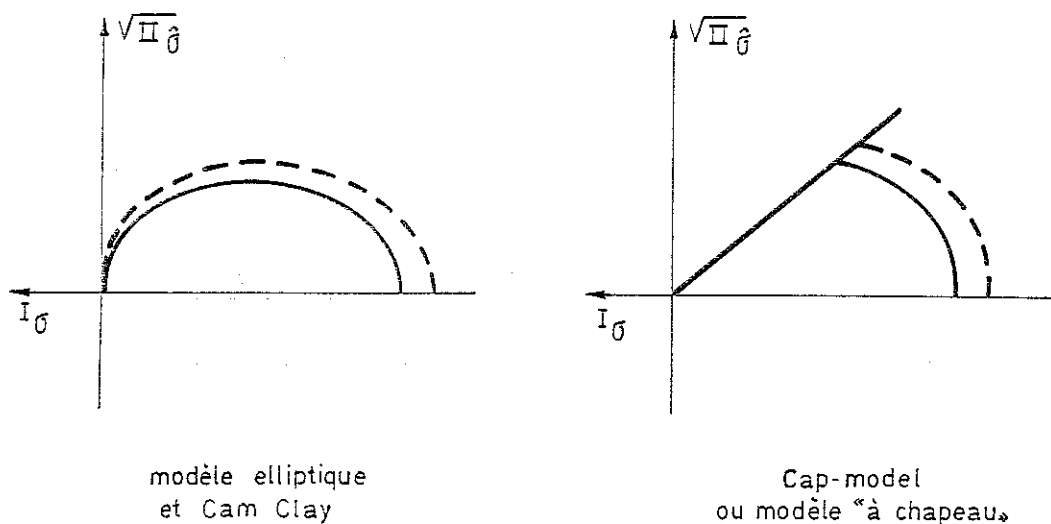
Le volume diminue, le sable se densifie. La contrainte τ nécessaire à la déformation diminue. Ce phénomène a été amplement décrit par de nombreux auteurs [8], [49],[100],[102], qu'on consultera pour obtenir plus de détails.

Il est clair que le même phénomène peut se produire dans un joint rocheux, s'il existe un matériau dilatant entre les deux surfaces de roches.

Une loi constitutive isotrope élastique linéaire découple les aspects volumique et déviatorique. La plasticité permet par contre de représenter la dilatance. Il suffit pour cela que la normale à la surface d'écoulement ait une composante dans la direction volumique. Donc, il faut que la surface d'écoulement dépende de la contrainte volumique, soit du premier invariant I_σ du tenseur contrainte. Nous avons développé ci-dessus trois lois constitutives élastoplastiques. La première surface ne dépend pas de I_σ . Elle ne peut donc modéliser la dilatance des sols. La deuxième loi (de DRUCKER-PRAGER) a une surface conique dans l'espace des contraintes principales. Une dilatance

existe donc, mais elle a toujours le même signe : le sol se dilate toujours pendant la déformation plastique (aux déformations volumiques élastiques près). Plusieurs auteurs utilisent une loi élastoplastique de DRUCKER-PRAGER non associée, et choisissent une surface d'écoulement également conique, mais avec un angle différent de celui de la surface de plasticité. On peut ainsi régler à volonté la dilatance du modèle. Il n'empêche que celle-ci ne peut varier au cours d'une simulation.

Pour remédier à ces problèmes, de nouveaux modèles sont apparus, qui induisent selon l'état de contrainte une dilatance positive ou négative, et qui représentent la plastification volumique sous chargement volumique pur. Ils ont tous une surface de plasticité fermée dans l'espace des contraintes. Nous en présentons deux à la figure 3.23.



— surface de plasticité initiale
 --- surface de plasticité après écrouissage

Figure 3.23.

Lorsque le sol est saturé et non drainé, nous avons vu que l'eau contribue à la résistance du milieu aux déformations volumiques, et, pratiquement, efface les caractéristiques mécaniques volumiques élastiques de la matrice. Il en est de même lorsque des déformations plastiques interviennent. Aucune dilatance n'apparaît dans les sols non drainés. Pratiquement, c'est notamment le cas de certaines argiles quasi-imperméables. Dès lors, le modèle élasto-plastique de von MISES (loi 1) les représente parfaitement.

Les sols résistent peu, voire pas, aux tractions. Ils se fissurent rapidement. Nous supposons ici que ce phénomène n'apparaît pas dans les modélisations que nous réaliserons plus loin.

3.2.8.4. La plasticité de type "Cam Clay"

Nous avons développé et implanté le modèle elliptique, et nous l'appliquons plus spécialement à deux matériaux, d'une part l'argile où il s'apparente à la célèbre famille "Cam Clay"([49], [57], [102], [103]), et d'autre part la craie, où nos travaux semblent plus originaux.

Examinons d'abord les argiles. La plasticité des argiles est généralement analysée à partir des résultats d'un essai oedométrique. Lors de celui-ci on place un échantillon de sol dans une enveloppe cylindrique rigide, on applique une charge axiale variable et l'on mesure les affaissements observés (figure 3.24.).

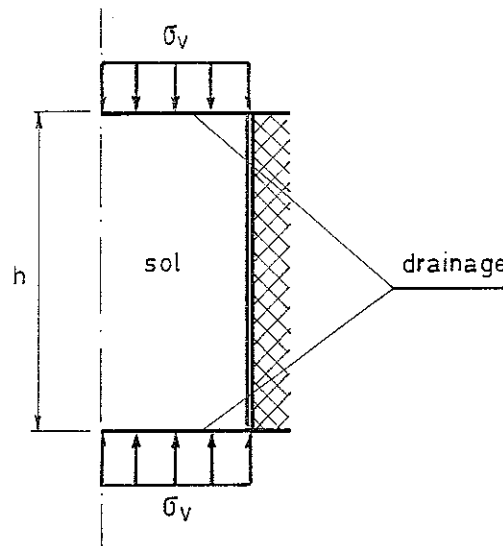


Figure 3.24. - Schéma de l'essai oedométrique.

Généralement, l'échantillon est saturé en eau et drainé. Avant toute mesure, on laisse l'état se stabiliser, afin de mesurer la déformation du squelette sans influence de l'eau intersititielle. Il en résulte une relation entre la hauteur h de l'éprouvette et la contrainte verticale σ_v . Puisque la section droite est constante, les variations relatives de hauteur et de volume sont égales :

$$\frac{\dot{h}}{h} = \frac{\dot{v}}{v} \quad (3.166.)$$

Si l'on admet que la variation de volume est uniquement une variation de volume des pores, on a, par (3.162.)

$$\frac{\dot{h}}{h} = \frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{e}}{1+e} = 3 \dot{\epsilon}_m \quad (3.167.)$$

On peut donc à partir de l'essai oedométrique établir une relation entre l'indice des vides e et la contrainte verticale, et la porter dans un diagramme semi-logarithmique (figure 3.25.). Notons que l'indice des vides peut varier au cours d'un essai de plusieurs dizaines de pourcents.

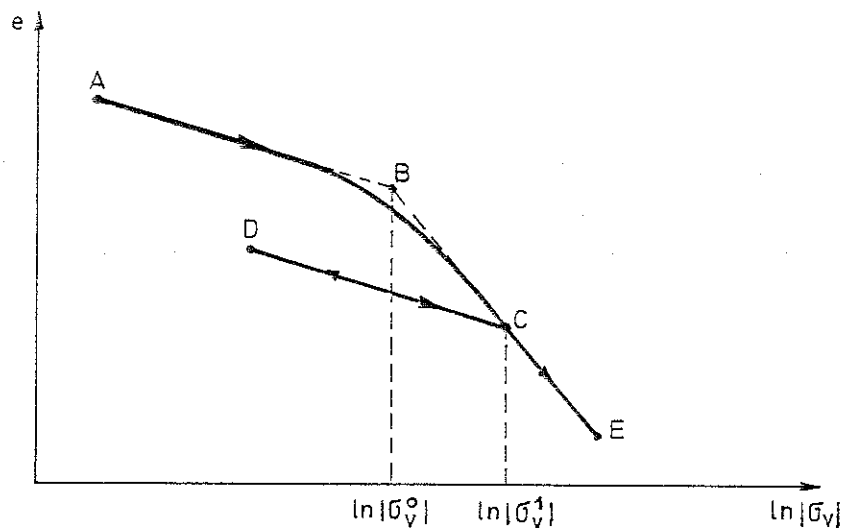


Figure 3.25. - Interprétation des résultats de l'essai oedométrique.

Pour une argile cette courbe peut sans grande erreur être approchée par des segments de droites orientés selon deux directions. Chargeons une argile surconsolidée (fig. 3.25.). Au début (segment AB) le volume varie lentement. Lorsqu'on atteint la contrainte verticale σ_v^0 ,

dite contrainte de consolidation initiale, la variation de volume s'accélère (segment BC). Si l'on décharge l'éprouvette, le chemin change (segment CD). Ceci montre que des déformations irréversibles sont intervenues. Lors d'un rechargement (segments DCE), on retrouve le comportement précédent (segments ABC), avec une nouvelle contrainte de consolidation σ_v^1 .

Le comportement de l'argile lors d'un essai oedométrique peut donc s'interpréter comme un comportement élastoplastique. De A à B, de C à D et de D à C, le comportement est élastique et réversible, mais non linéaire:

$$\begin{aligned} \Delta e^e &= -C^e \Delta \ln |\sigma_v| \\ \rightarrow \dot{e}^e &= -C^e \frac{\dot{\sigma}_v}{\sigma_v} \\ \rightarrow \dot{\epsilon}_m^e &= -\frac{1}{3} \frac{C^e}{1+e} \frac{\dot{\sigma}_v}{\sigma_v} \end{aligned} \quad (3.168.)$$

Par contre, de B à E, le comportement est élastoplastique et en partie irréversible :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{e}^e + \dot{e}^p = -C^c \frac{\dot{\sigma}_v}{\sigma_v} \\ \rightarrow \dot{\epsilon}_m^p &= -\frac{1}{3} \frac{C^c - C^e}{1+e} \frac{\dot{\sigma}_v}{\sigma_v} \end{aligned} \quad (3.169.)$$

Dans ces expressions, C^e et C^c sont des coefficients non-dimensionnels d'élasticité et de plasticité. C^c est souvent appelé indice de compressibilité. C'est une caractéristique mécanique importante des argiles.

A partir de 1958, des chercheurs de Cambridge (Roscoe, Calladine, Burland...) ont essayé de définir une loi constitutive élastoplastique représentant l'argile de Cambridge (Cam Clay model). Ce modèle a subi depuis de nombreuses adaptations et modifications. Il est décrit par de très nombreux auteurs, et notamment NAYLOR et PANDE [49], DESAI et SIRIWARDANE [102], CHEN [103], OKA et al [26], ZAUCHE [57],... La plupart des présentations sont basées sur l'étude des états critiques et des surfaces d'état limite (surfaces de HVORSLEV et RENDULIC, "mur élastique"). Mais il nous paraît que, dans le cadre de ce travail, il est amplement suffisant d'utiliser le langage et le formalisme de l'élasticité et de la plasticité classiques, pour présenter la forme du modèle Cam Clay que nous avons adoptée et implantée.

Une des idées fondamentales du modèle est que l'essai oedométrique caractérise les déformations volumiques. Donc on peut supposer que la relation entre l'indice des vides et la contrainte moyenne est logarithmique. Ainsi apparaissent les relations constitutives de la compression volumique pure :

$$\begin{aligned} \text{en élasticité : } \dot{\varepsilon}_m^e &= -\frac{1}{3} \frac{C^e}{1+e} \frac{\dot{\sigma}_m}{\sigma_m} \\ \text{en plasticité : } \dot{\varepsilon}_m^p &= -\frac{1}{3} \frac{C^c - C^e}{1+e} \frac{\dot{\sigma}_m}{\sigma_m} \end{aligned} \quad (3.170.)$$

Le comportement déviatorique des sols, en particulier dans le domaine élastique, est mal connu et difficile à tester. Les appareils destinés à réaliser des expériences de cisaillement induisent souvent un état de contraintes et déformations hétérogènes, et sont d'une utilisation difficile. Plusieurs chercheurs proposent de négliger les déformations déviatoriques élastiques dans le modèle Cam Clay et donc de supposer le matériau rigide en cisaillement. Cette façon de faire ne nous semble guère heureuse, car elle ne répond pas à la réalité et pose des problèmes d'implantation dans un programme d'éléments finis. Nous supposons donc linéaire le comportement déviatorique élastique

$$\dot{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2G} \underline{\dot{\sigma}} \quad (3.50.b)$$

La surface de plasticité est une ellipse dans l'espace $(I_\sigma, \sqrt{II_\sigma})$ et les vitesses de déformation plastique lui sont normales. Les équations développées ci-dessus pour la loi élastoplastique n° 3 s'appliquent donc ici.

La loi d'écrouissage doit être telle que les équations de la compression volumique (3.170.) soient respectées. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} I_\sigma &= 3 \sigma_m = 2a \\ \rightarrow \dot{\varepsilon}_m^p &= -\frac{1}{3} \frac{C^c - C^e}{1+e} \frac{\dot{a}}{a} \\ \rightarrow a &= -\frac{3a(1+e)}{C^c - C^e} \dot{\varepsilon}_m^p \end{aligned} \quad (3.171.)$$

On suppose cette loi d'écrouissage valable quel que soit l'état de contrainte. Transformons-la à l'aide de (3.90.b)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_m^p &= \lambda m^2 (2I_\sigma + 2a) \\ \rightarrow a'(\lambda) &= -\frac{3a(1+e)}{C^c - C^e} (2I_\sigma + 2a) m^2 \end{aligned} \quad (3.172.)$$

Donc, selon que I_σ est supérieur ou inférieur à a , l'écroutissement est positif ou négatif. Envisageons le cas particulier où il est négatif. Soit le trajet de contrainte ABC (figure 3.26.). De A à B, l'échantillon subit une compression élastique volumique pure. A partir de B, il subit par déplacements imposés un cisaillement, jusqu'au point C où il se plastifie. A ce moment apparaissent des déformations volumiques irréversibles d'expansion $\dot{\epsilon}_m^p > 0$. Donc la taille de l'ellipse décroît, et l'état de contrainte redescend en D tout en restant plastique. Cette diminution se poursuit jusqu'au point E. A ce moment, la déformation irréversible devient purement déviatorique ; $\dot{\epsilon}_m^p = 0$.

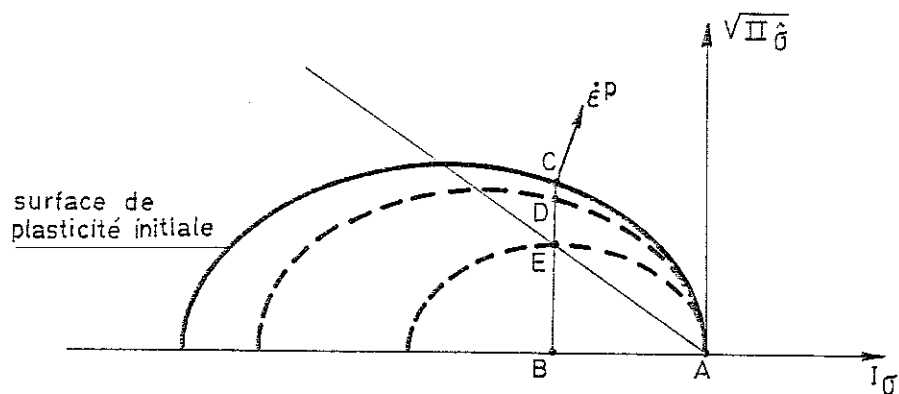


Figure 3.26. - Modèle Cam Clay : adoucissement.

Donc l'écroutissement s'arrête, la surface est stabilisée (pour cette mise en charge), les contraintes déviatoriques ne peuvent plus croître, mais les déformations plastiques déviatoriques peuvent croître sans limite : c'est la ruine de l'échantillon. Nous avons schématisé ces diverses évolutions à la figure 3.27. (il s'agit bien d'un schéma et non du résultat d'un calcul). Le point le plus saillant à remarquer est la présence d'un maximum dans l'évolution de II_σ .

Cet aspect particulier conduit généralement à un certain nombre de problèmes numériques assez difficiles à résoudre. Il peut notamment en résulter une instabilité physique locale ou globale, qui se traduit par une instabilité numérique. Le programme LAGAMINE n'est pas capable à ce jour de surmonter ce type de difficultés. (Mais il serait utile de le transformer en ce sens pour représenter correctement l'adoucissement des sols). Aussi modifions-nous la forme de la surface de plasticité afin d'éviter l'adoucissement plastique. Pour ce fai-

re, il suffit de limiter les états de contraintes possibles à l'état limite défini par COULOMB, et donc à la surface de DRUCKER-PRAGER (figure 3.28.).

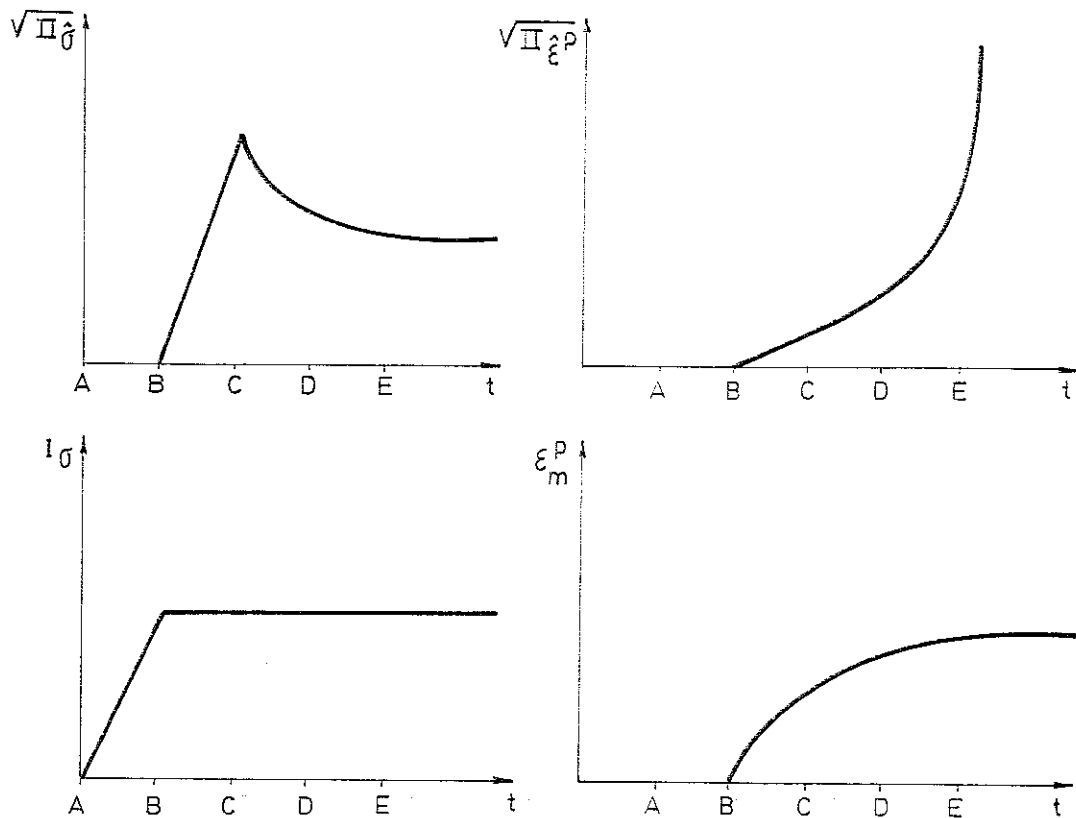


Figure 3.27.

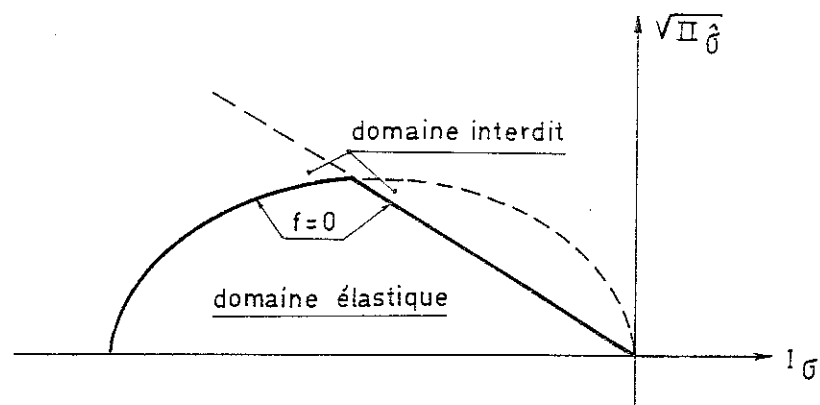


Figure 3.28.

Nous supposons de plus que la surface de plasticité de DRUCKER-PRAGER ne s'écrouit pas, que la normalité des déformations plastiques y est assurée et que la cohésion est nulle.

Finalement, nous pouvons résumer les équations constitutives comme suit:

$$\text{géométrie : } \frac{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}{1+e} = 3 \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_m \quad (3.162.)$$

$$\text{élasticité : } \begin{cases} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_m = -3 \underline{\underline{\sigma}}_m \frac{1+e}{C^e} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_m \\ \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\hat{\sigma}}} = 2 G \underline{\underline{\hat{\epsilon}}}_e \end{cases} \quad (3.50.b)$$

surface de plasticité :

$$f = II_{\underline{\underline{\hat{\sigma}}}} - m^2 I_{\underline{\underline{\sigma}}}^2 \quad \text{si } I_{\underline{\underline{\sigma}}} < a \quad (3.173.)$$

$$f = II_{\underline{\underline{\hat{\sigma}}}} + m^2 I_{\underline{\underline{\sigma}}} (I_{\underline{\underline{\sigma}}} + 2a) \quad \text{si } I_{\underline{\underline{\sigma}}} \geq a \quad (3.79.)$$

en plasticité, si $I_{\underline{\underline{\sigma}}} < a$

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_m = -\frac{1+e}{C^e} I_{\underline{\underline{\sigma}}} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_m + \frac{2 G \dot{\underline{\underline{\hat{\epsilon}}}}_{kl} \underline{\underline{\hat{\sigma}}}_{kl} + 6 \frac{1+e}{C^e} m^2 I_{\underline{\underline{\sigma}}} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_m}{2 G II_{\underline{\underline{\hat{\sigma}}}} - 6 \frac{1+e}{C^e} m^4 I_{\underline{\underline{\sigma}}}^3} \frac{1+e}{C^e} m^2 I_{\underline{\underline{\sigma}}} \\ \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\hat{\sigma}}}_{ij} = 2 G \dot{\underline{\underline{\hat{\epsilon}}}}_{ij} - \frac{2 G \dot{\underline{\underline{\hat{\epsilon}}}}_{kl} \underline{\underline{\hat{\sigma}}}_{kl} + 6 \frac{1+e}{C^e} m^2 I_{\underline{\underline{\sigma}}} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_m}{2 G II_{\underline{\underline{\hat{\sigma}}}} - 6 \frac{1+e}{C^e} m^4 I_{\underline{\underline{\sigma}}}^3} 2 G \underline{\underline{\hat{\sigma}}}_{ij} \end{cases} \quad (3.174.)$$

si $I_{\underline{\underline{\sigma}}} \geq a$

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_m = -\frac{1+e}{C^e} I_{\underline{\underline{\sigma}}} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_m \\ \quad + \frac{2 G \dot{\underline{\underline{\hat{\epsilon}}}}_{kl} \underline{\underline{\hat{\sigma}}}_{kl} - 3 \frac{1+e}{C^e} I_{\underline{\underline{\sigma}}} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_m m^2 (2 I_{\underline{\underline{\sigma}}} + 2a)}{1/\mu + 4 G II_{\underline{\underline{\hat{\sigma}}}} - 3 \frac{1+e}{C^e} I_{\underline{\underline{\sigma}}} m^4 (2 I_{\underline{\underline{\sigma}}} + 2a)^2} \frac{1+e}{C^e} I_{\underline{\underline{\sigma}}} m^2 (2 I_{\underline{\underline{\sigma}}} + 2a) \\ \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\hat{\sigma}}}_{ij} = 2 G \dot{\underline{\underline{\hat{\epsilon}}}}_{ij} \\ \quad + \frac{2 G \dot{\underline{\underline{\hat{\epsilon}}}}_{kl} \underline{\underline{\hat{\sigma}}}_{kl} - 3 \frac{1+e}{C^e} I_{\underline{\underline{\sigma}}} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_m m^2 (2 I_{\underline{\underline{\sigma}}} + 2a)}{1/\mu + 4 G II_{\underline{\underline{\hat{\sigma}}}} - 3 \frac{1+e}{C^e} I_{\underline{\underline{\sigma}}} m^4 (2 I_{\underline{\underline{\sigma}}} + 2a)^2} 2 G \underline{\underline{\hat{\sigma}}}_{ij} \end{cases} \quad (3.175.)$$

$$\frac{1}{\mu} = -2 m^2 I_{\underline{\underline{\sigma}}} a'(\lambda) \quad (3.101.)$$

$$\dot{a} = a'(\lambda) \dot{\lambda} \quad (3.172.)$$

$$a'(\lambda) = -3a \frac{1+e}{C^e - C} (2 I_{\underline{\underline{\sigma}}} + 2a) m^2$$

3.2.8.5. La plasticité des craies.

Dans le cadre de l'étude de la déformation d'un réservoir de pétrole d'Ekofisk, en mer du Nord, et des terrains surincombants, nous avons dû

élaborer une loi constitutive représentant les déformations irréversibles de la craie du réservoir. Pour ce faire, nous avons disposé des résultats de nombreux essais réalisés dans divers laboratoires : laboratoires de sociétés pétrolières, de l'Institut Français des Pétroles, de l'Ecole des Mines de Paris et Laboratoire de Géologie de l'Ingénieur et d'Hydrogéologie de l'Université de Liège[146]. Malheureusement, ces divers essais ont été réalisés dans des conditions extrêmement différentes. Les échantillons de craie ont tous été prélevés dans le gisement de pétrole, à quelques 3000 mètres de profondeur sous le niveau de la mer. Certains échantillons ont été lessivés par un solvant, (dans le but d'éliminer le pétrole présent dans les pores), d'autres pas. Or ce traitement modifie les caractéristiques mécaniques. Dans certains cas, l'échantillon est saturé en solvant pendant l'essai, ou par une eau plus ou moins en équilibre chimique avec la craie, ou par du pétrole. La température à laquelle l'essai est réalisé est généralement de 20°C, mais parfois aussi de 130°C (comme dans le réservoir).

Les mises en charge correspondent soit à des essais triaxiaux (déviateur non nul) soit à des essais purement volumiques (avec déviateur nul). Dans tous les cas, l'échantillon a la symétrie de révolution, et on suppose son état homogène.

Les variables à mesurer sont donc

- la contrainte axiale σ_{11}
- et les contraintes radiale et circonférentielle $\sigma_{22} = \sigma_{33}$,
- la déformation axiale ϵ_{11}
- et les déformations radiale et circonférentielle $\epsilon_{22} = \epsilon_{33}$.

Les autres contraintes et déformations sont nulles. Malheureusement, il est assez rare que l'expérimentateur ait mesuré simultanément $\epsilon_{22} = \epsilon_{33}$ et $\sigma_{22} = \sigma_{33}$. Sur 79 essais "dépouillables", on connaît l'information complète pour 22 essais. Enfin, il faut noter que les échantillons sont répartis dans une gamme de porosités allant de 25 à 46 %. Or plus la porosité est grande et plus le squelette est "léger", et donc moins sa résistance est grande. La dispersion des conditions d'essai et le peu de mesures réalisées montrent combien il est difficile d'obtenir une relation constitutive fiable.

Nous présentons aux figures 3.29. et 3.30. le résultat typique d'un essai (réalisé par la Société Shell). La porosité initiale de l'échantillon est de 41,5 %, et sa hauteur initiale de 29.75 mm. Considérant les conditions dans lesquelles le réservoir de pétrole se déforme,

l'expérimentateur a choisi de maintenir la dilatation radiale ε_3 nulle. Cette condition lui a imposé un chemin de contrainte $\sigma_3 = \text{fct}(\sigma_1)$ (figure 3.30.). Il en résulte une relation entre la hauteur de l'éprouvette et la contrainte axiale (figure 3.29.).

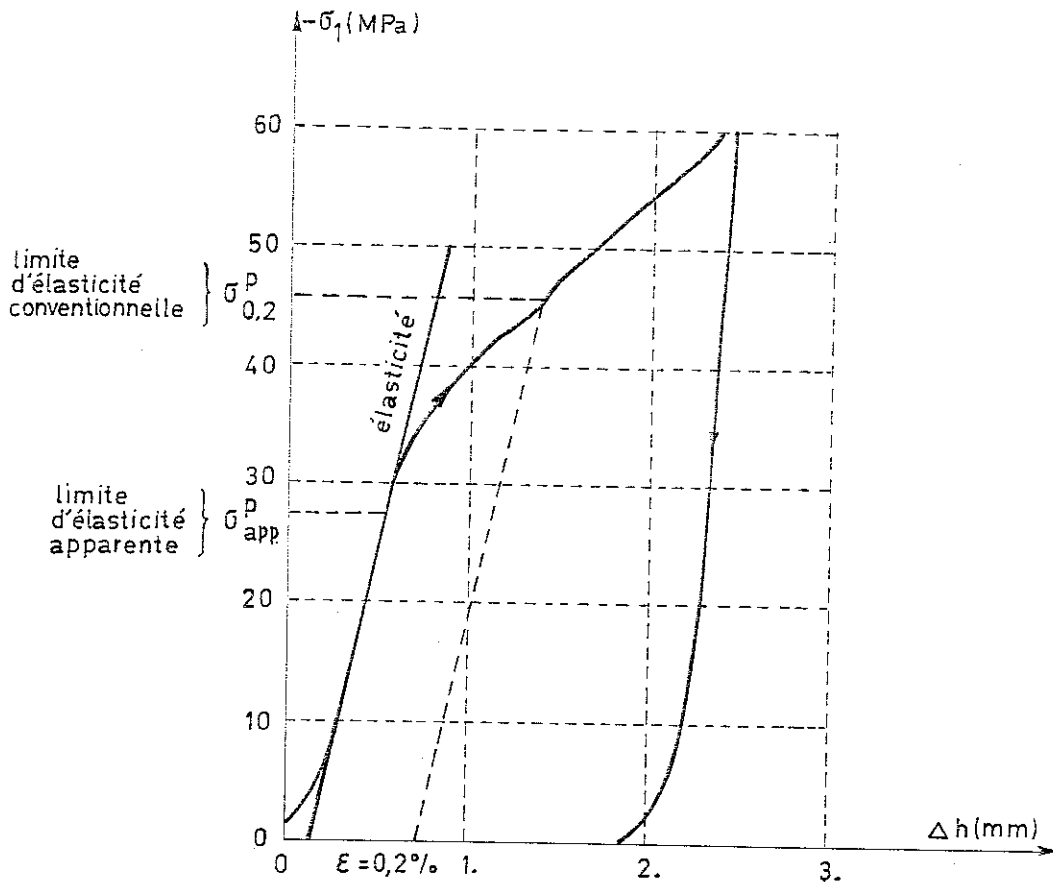


Figure 3.29. - Relation déplacement axial-contrainte axiale.

De ces deux figures, on peut tirer un bon nombre d'informations, et tout d'abord les paramètres d'élasticité linéaire initiale (en admettant que la partie quasi linéaire initiale des courbes est bien de l'élasticité). Il en résulte, après analyse de tous les essais disponibles, les nuages de points représentés aux figures (3.31.) et (3.32.).

Remarquons, pour le module de YOUNG, le grand nombre de données pour une porosité d'environ 35 % et la forte dispersion des résultats.

Sur ces deux ensembles de mesures, il est possible d'ajuster des courbes en vue d'une modélisation. Il est peu raisonnable d'admettre que la rigidité mécanique connaisse un maximum pour une porosité de l'ordre de 35 %. Dès lors, vu la dispersion des résultats, il n'est

pas cohérent de supposer une dépendance non linéaire de la porosité. Il en résulte les droites d'approximation représentées sur les figures 3.31. et 3.32.

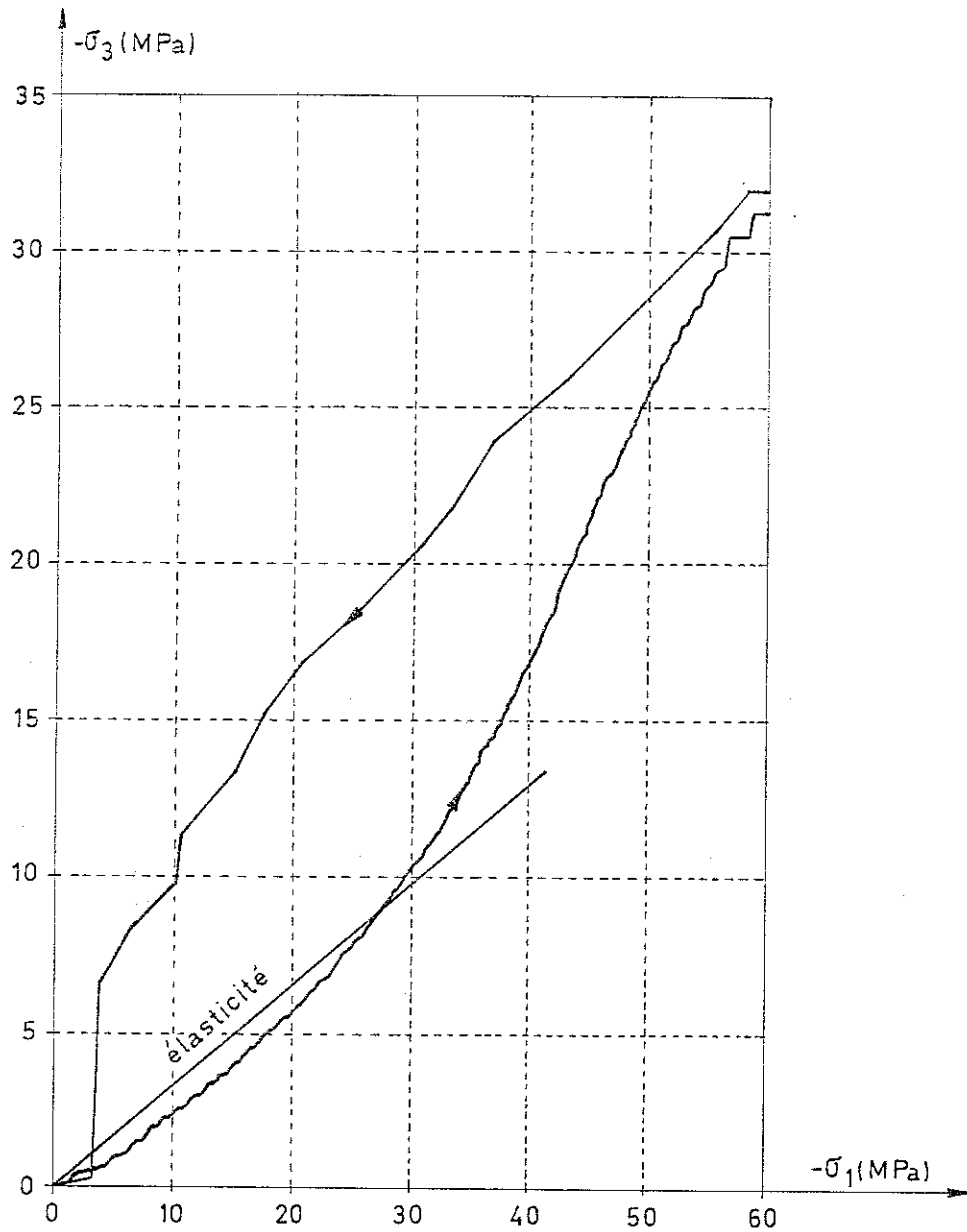


Figure 3.30. - Relation entre les contraintes axiale et radiale pour obtenir une déformation radiale nulle.

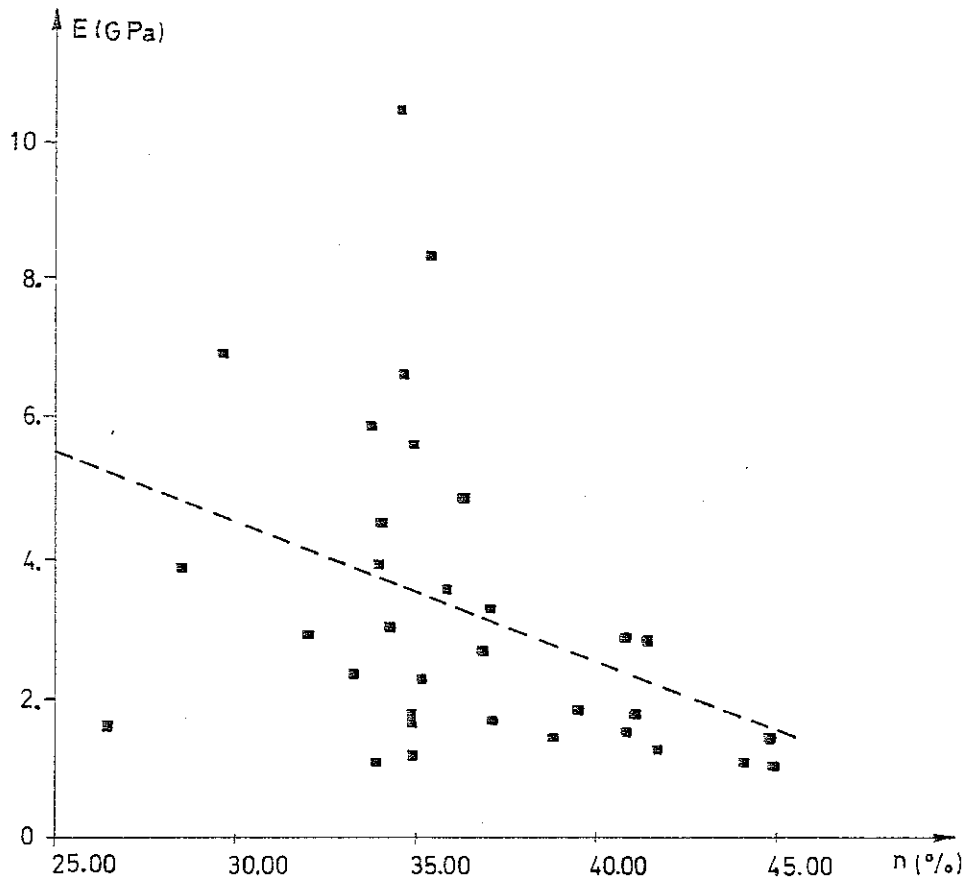


Figure 3.31. -Module de YOUNG E en fonction de la porosité

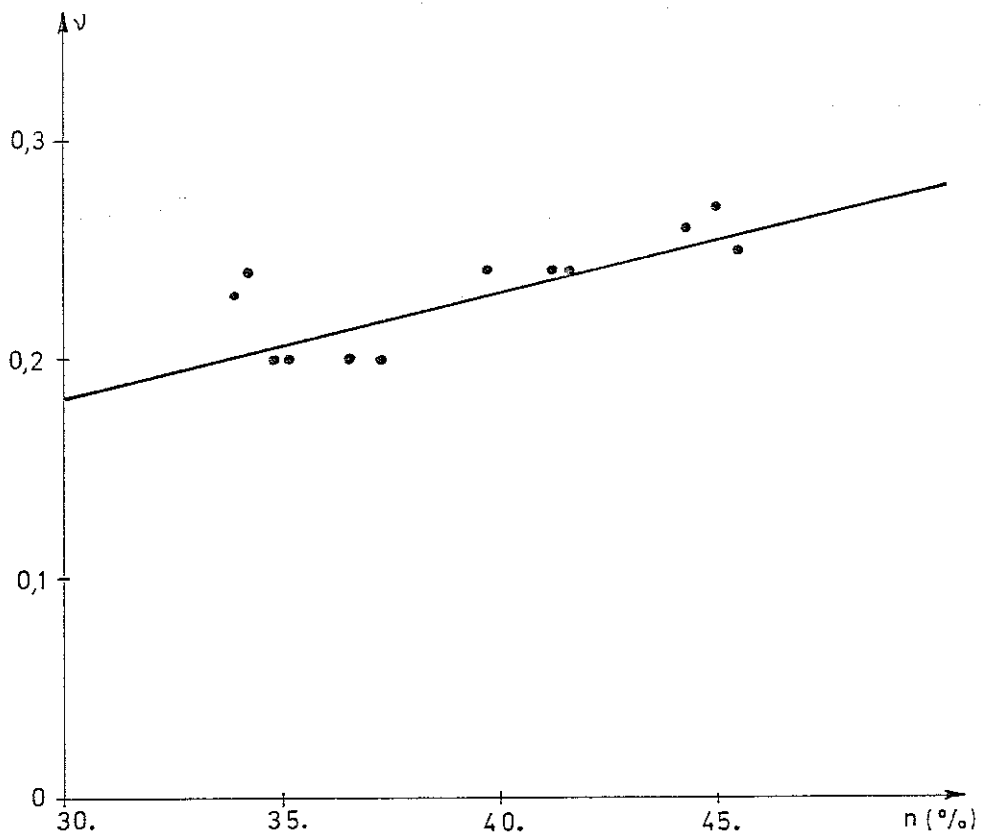


Figure 3.32. - Coefficient de POISSON ν en fonction de la porosité.

Les essais permettant de définir les deux paramètres d'élasticité E et ν sont assez rares (12 au total). Aussi a-t-on d'abord évalué le coefficient de POISSON. Ensuite, on s'est servi des valeurs obtenues pour déterminer dans les autres essais le module d'élasticité E , ceci afin que le nombre de valeurs expérimentales de E soit plus élevé.

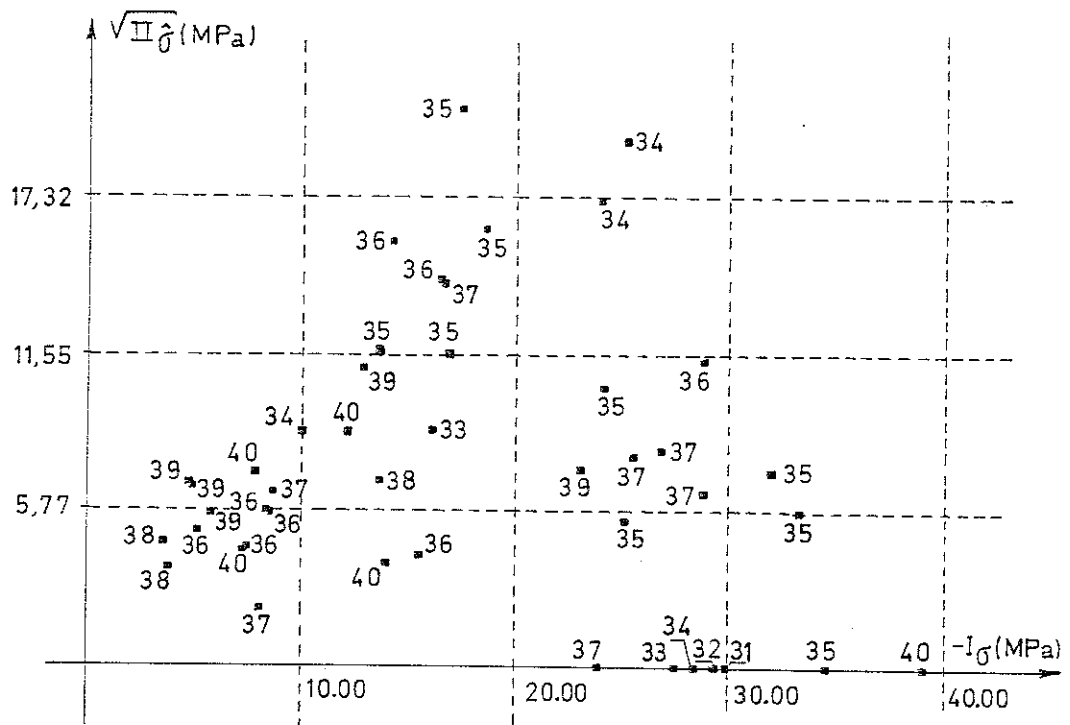
Dans une deuxième étape, nous avons essayé de représenter les déformations irréversibles. En premier lieu, nous définissons une surface de plasticité initiale. Pour cela, nous avons repéré dans tous les essais la limite d'élasticité *apparente* (fig. 3.29.). Nous n'avons pas utilisé la limite conventionnelle correspondant à 0,2 % de déformation irréversible, car cette valeur nous semble trop importante, au vu de l'ampleur des déformations irréversibles totales intervenues dans les essais et dans le réservoir d'Ekofisk (de l'ordre de 1 % en général). Pour les états de contraintes plastiques ainsi obtenus, nous avons calculé les invariants

$$\begin{cases} I_{\sigma} = \sigma_1 + 2 \sigma_3 \\ \sqrt{II_{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 - \sigma_3) \end{cases} \quad (3.176.)$$

Nous avons reporté ces valeurs dans le diagramme $(I_{\sigma}, \sqrt{II_{\sigma}})$ de la figure 3.33., en nous limitant aux porosités comprises entre 33 et 40 %.

Manifestement, la dispersion des résultats est considérable. Toutefois, quelques aspects caractéristiques apparaissent immédiatement. Une compression volumique pure produit des déformations irréversibles. Donc la surface de plasticité est fermée dans la direction des I_{σ} négatifs. Les contraintes déviatoriques élastiques maximales admissibles apparaissent conjointement avec une valeur du premier invariant $I_{\sigma} \approx 20$ MPa. Donc la surface de plasticité a une allure qui s'apparente à celle de l'ellipse ou du modèle à chapeau de la figure 3.23. Pour des raisons de simplicité de développement, nous avons choisi de représenter la surface de plasticité par une ellipse, dont les caractéristiques géométriques sont fonctions de la porosité.

Par la méthode des moindres carrés, pondérée par l'écart entre les porosités des essais et la référence de la courbe cherchée, on a pu établir les paramètres des critères de plasticité correspondant à diverses porosités. La figure 3.34. montre l'une de ces courbes et les points expérimentaux les plus proches en porosité.



(les valeurs indiquées à côté des points expérimentaux sont les porosités initiales des échantillons, exprimées en %).

Figure 3.33. - Points de plasticité initiale.

Il est clair que cette approche est discutable, notamment suite à la grande dispersion des résultats d'essais. En particulier, il serait intéressant de comparer les résultats avec ceux obtenus à l'aide d'un modèle de chapeau et droite de COULOMB, car il semble que dans le domaine des faibles contraintes volumiques les points expérimentaux soient quasi-alignés.

Nous supposons que les vitesses de déformation plastique sont normales à la surface de plasticité, et que l'écrouissage peut être représenté par une fonction $a(\lambda)$ linéaire. La variété des expériences, le peu de résultats complets, la dispersion, ... ne permettent pas

d'analyser dans le détail si ces hypothèses sont plausibles. C'est dommage, et c'est probablement la faiblesse principale du modèle développé. Mais nous n'avons disposé ni des moyens ni du temps nécessaires à une analyse plus approfondie.

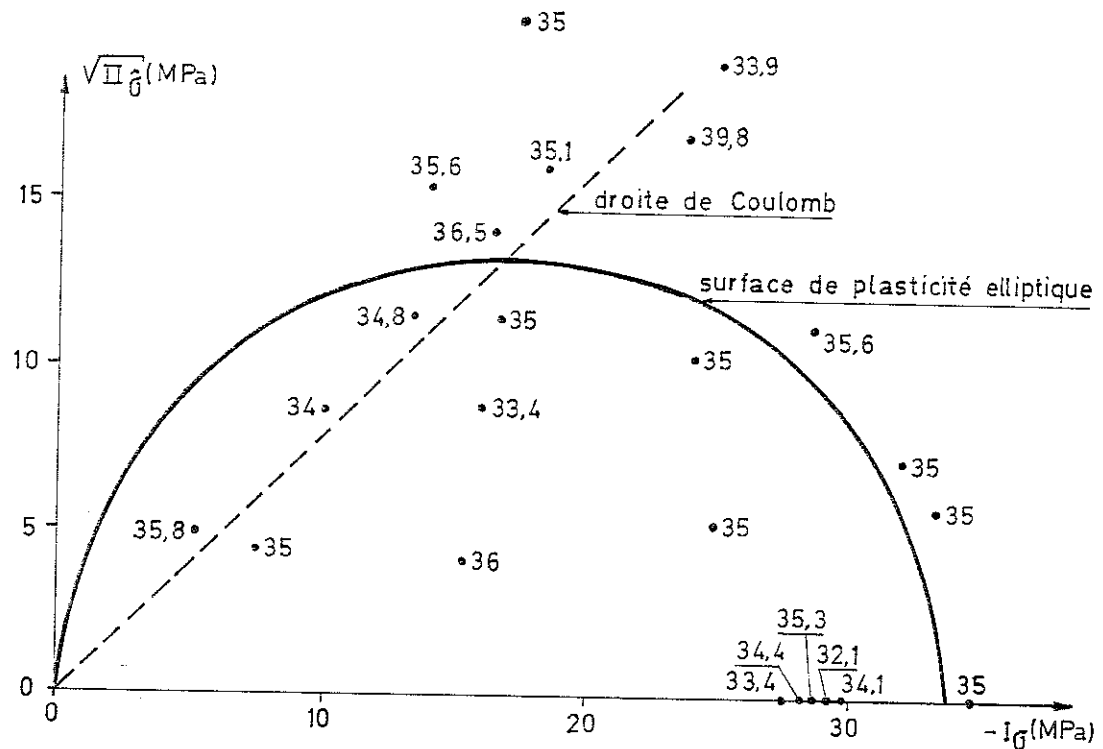


Figure 3.34. - Surface de plasticité initiale ($n = 35 \%$).

Nous allons présenter quelques comportements significatifs obtenus numériquement à l'aide du modèle elliptique. Tout d'abord, nous avons simulé un essai triaxial avec déformation latérale empêchée. La contrainte axiale effective augmente par diminution de la pression de pore à contrainte axiale totale constante. Il en résulte les relations présentées aux figures 3.35. et 3.36. La comparaison avec les expériences (figures 3.29. et 3.30.) montre un très bon accord.

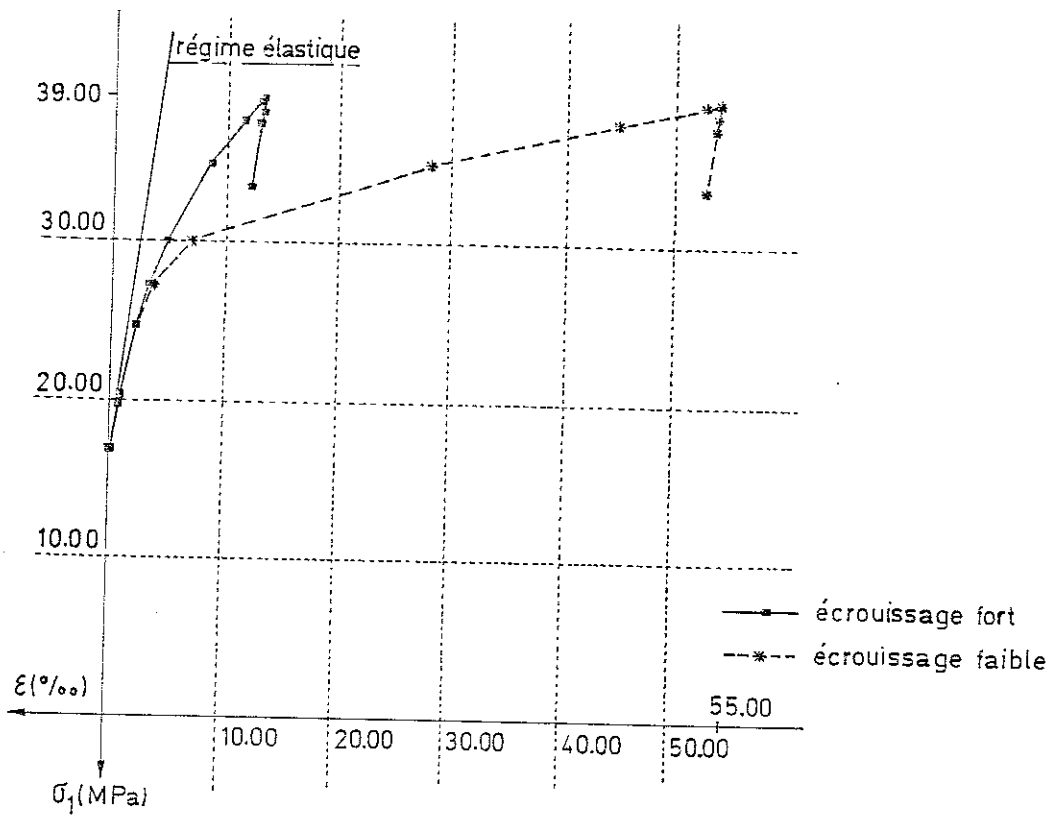


Figure 3.35. - Relation contrainte-déformation axiale.

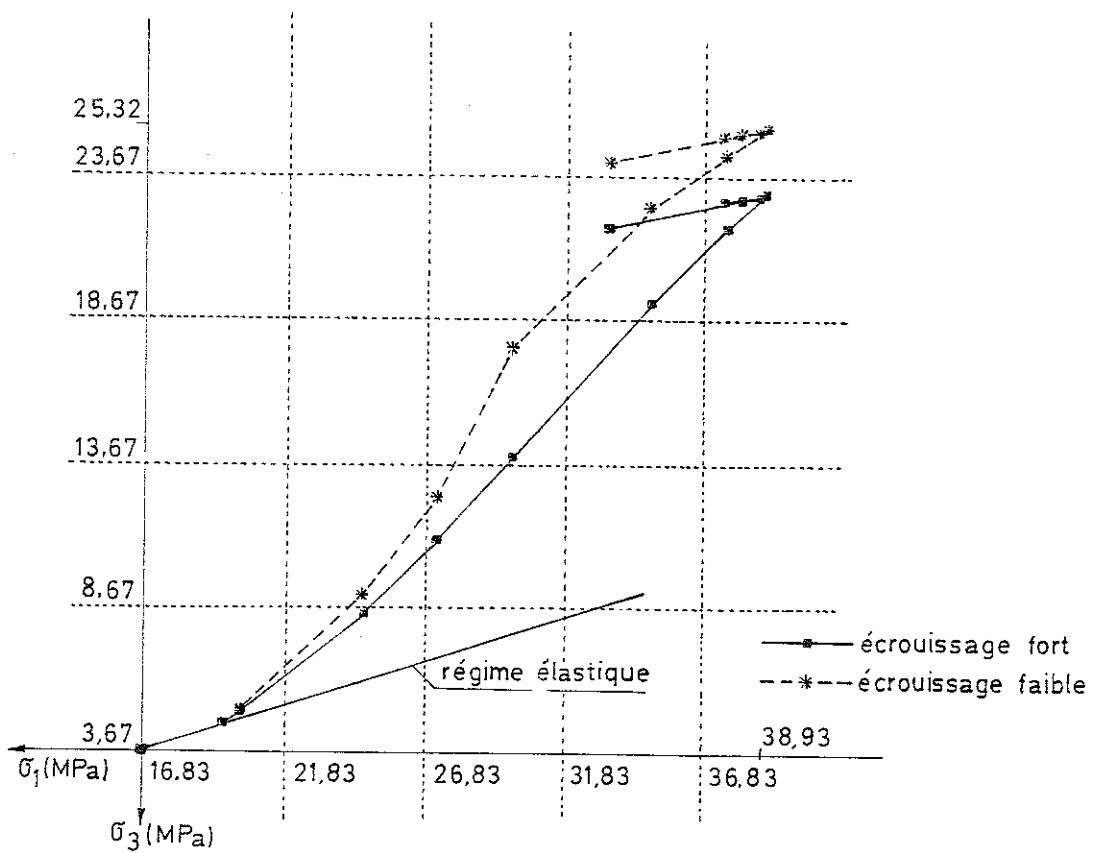


Figure 3.36. - Relation contrainte axiale-contrainte radiale.

La figure 3.37. montre le trajet de contrainte dans l'espace $(I_\sigma, \sqrt{II_\sigma})$. On voit clairement que l'écroutissage provoque une lente croissance de la taille de la surface de plasticité, et que le chemin de contrainte tourne de sorte à rester cohérent avec le critère.

Dans un essai triaxial, les deux seules contraintes indépendantes sont σ_1 et σ_3 . Il est donc possible, à l'aide de (3.176.), de réaliser une transformation de coordonnées

$$(I_\sigma, \sqrt{II_\sigma}) \leftrightarrow (\sigma_1, \sigma_3)$$

Ceci nous a permis de représenter sur la même figure les axes (σ_1, σ_3) , qui ne sont évidemment pas orthonormés. On voit ainsi que la contrainte axiale σ_1 tend sans cesse à augmenter (jusqu'au moment du déchargement), tandis que la contrainte radiale σ_3 s'adapte au critère.

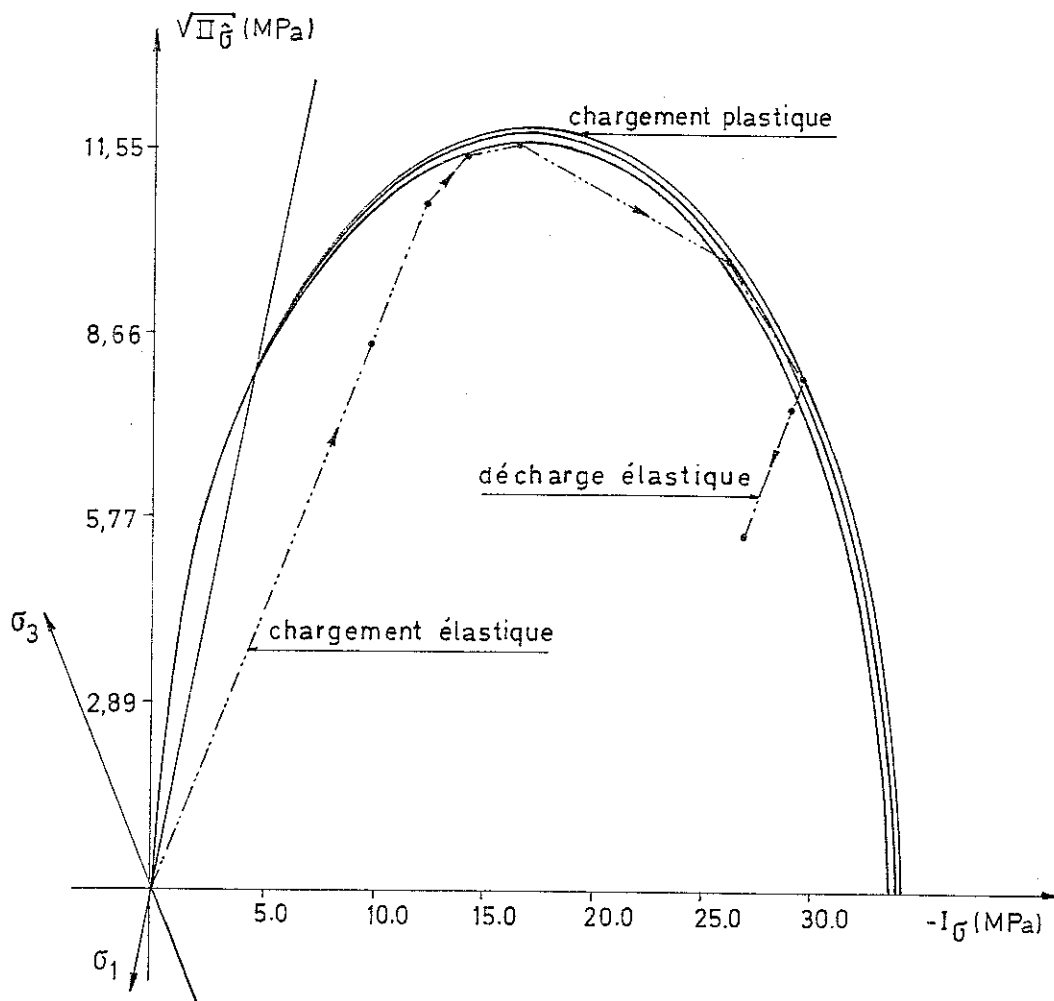


Figure 3.37. - Chemin de contrainte dans un essai triaxial.

Si nous renouvelons la simulation numérique en augmentant l'écroutissement, nous aboutissons à la figure 3.38. La surface de plasticité évolue nettement plus vite, et le chemin de contrainte tourne moins.

Considérons le même modèle théorique avec d'autres paramètres. En particulier, le coefficient de POISSON passe de 0.23 à 0.45. Le chemin de contrainte (figure 3.39.) se modifie de sorte que, en régime élastique, la contrainte radiale σ_3 augmente plus vite que précédemment. Il en résulte que, pendant la déformation plastique, σ_3 diminue, pour permettre à σ_1 d'augmenter selon la mise en charge imposée. Le comportement est donc radicalement différent du précédent.

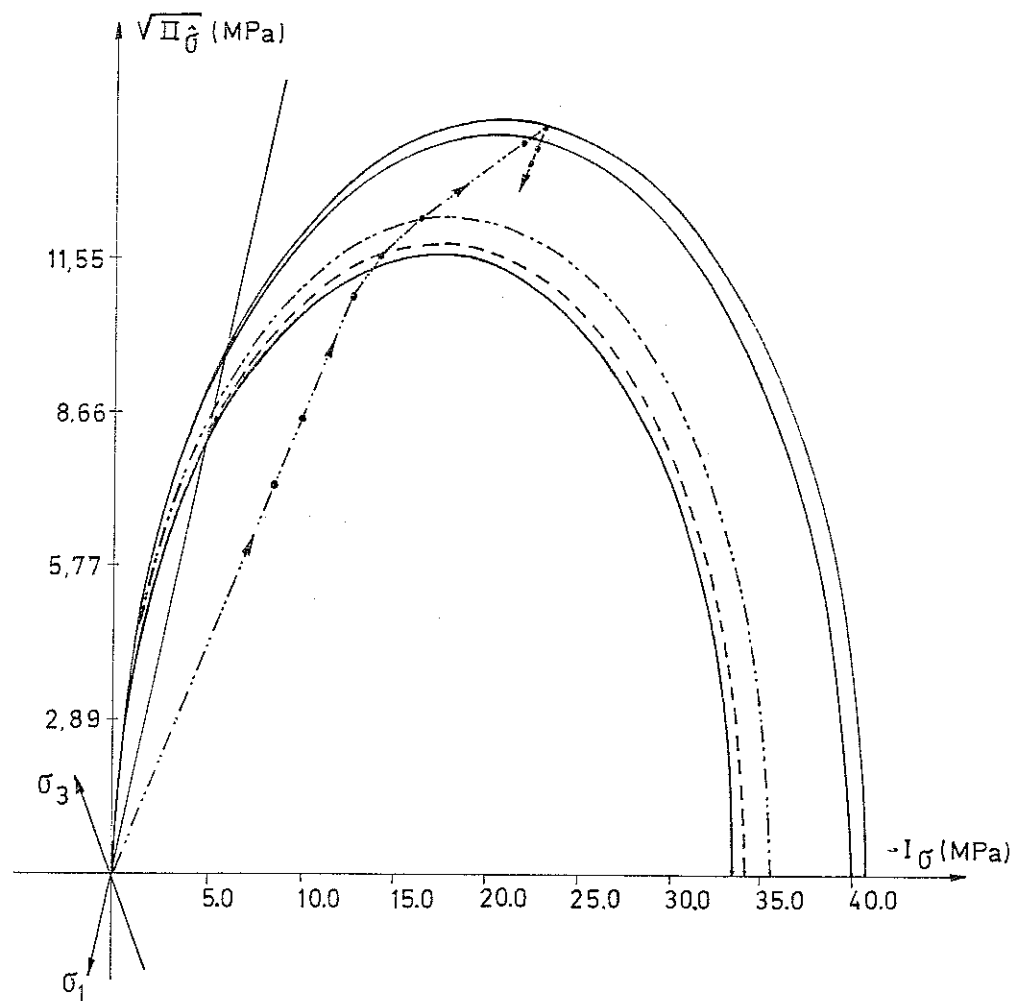


Figure 3.38.

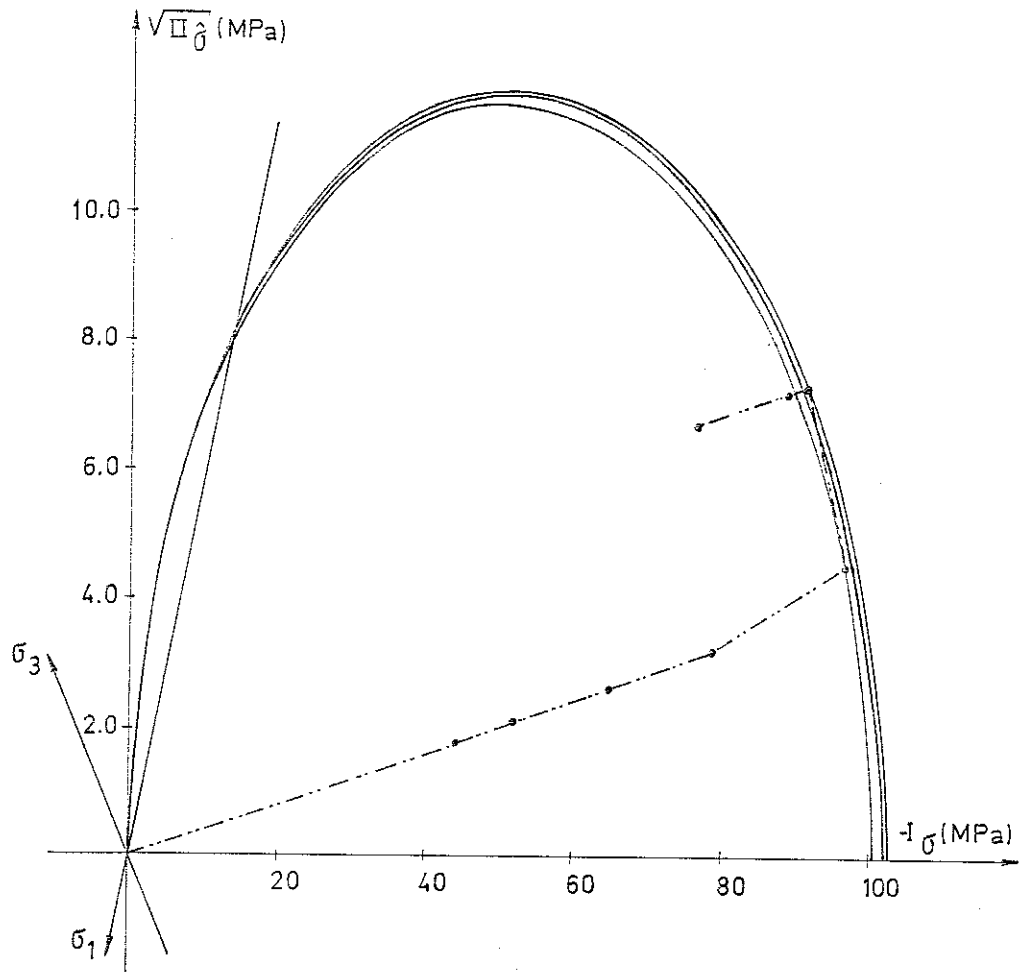


Figure 3.39.

A partir d'un ensemble de résultats expérimentaux très dispersés, nous avons donc établi une loi constitutive élastoplastique pour la craie d'Ekofisk. Les figures 3.31. et 3.33. montrent combien les nuages de points sont larges. Malgré cela, le modèle développé reproduit qualitativement bien le comportement général de la craie, tel qu'observé aux figures 3.29. et 3.30. Quantitativement, les résultats sont plus discutables, et il est manifeste que le modèle risque dans certains cas de s'écarter de la réalité de plusieurs dizaines de pourcents, mais il fournit généralement au moins l'ordre de grandeur des déformations. Pour améliorer le modèle, il serait nécessaire de réaliser des essais complémentaires, dans des conditions expérimentales (lavage et liquide de saturation, température) stables.

3.3. LA CONDUCTION THERMIQUE.

3.3.1. Introduction.

Nous avons défini au chapitre 2 des contraintes et déformations associées dans la modélisation mathématique des échanges conductifs de chaleur. Rappelons-les :

Le gradient de température $\underline{M} = - \text{grad } T$ (2.73.)

est conjugué au vecteur - flux spatial \underline{f}

La variation de température $m = \dot{T}$ (2.74.)

est conjuguée au flux scalaire f^V

Le débit de chaleur Q est conjugué à la température T .

Le but de ce paragraphe 3.3. est d'écrire des relations entre ces valeurs conjuguées, \underline{f} et \underline{M} , f^V et m , Q et T .

Nous limitons à l'étude de solides isotropes, mais la généralisation au cas anisotrope est aisée (nous la réalisons par ailleurs au paragraphe suivant, consacré aux écoulements en milieux poreux).

Une des particularités de la conduction par rapport à la mécanique est qu'il n'est pas nécessaire d'écrire des lois *incrémentales* : la forme "*totale*" est généralement la seule qui ait un sens.

Comme précédemment, nous porterons une attention particulière aux frontières où une relation entre le débit de chaleur et la température est imposée. Ce phénomène correspond à l'échange convectif ou radiatif et est la transposition du problème de contact ou d'appui élastique en mécanique.

3.3.2. La conduction.

La relation constitutive entre le vecteur flux spatial \underline{f} et le gradient de température est fixée par la loi de FOURIER :

$$\underline{f} = \lambda \underline{M} = - \lambda \text{grad } T \quad (3.177.)$$

λ est la conductivité thermique.

Il s'agit d'une relation totale et non incrémentielle, indépendante de l'histoire thermique du matériau (par opposition aux phénomènes de plasticité et viscoplasticité, qui dépendent de l'histoire mécanique). Mais cette relation est souvent non linéaire, car la conductivité λ dépend de la température

$$\lambda = \lambda(T) \quad (3.178.)$$

Nous présentons aux figures 3.40. et 3.41. la relation (3.178.) pour

les aciers de construction et pour les bétons, dans le domaine des températures auxquelles ils sont soumis lors d'un incendie. Ces figures sont extraites de la thèse d'agrégation de DOTREPPE [9].

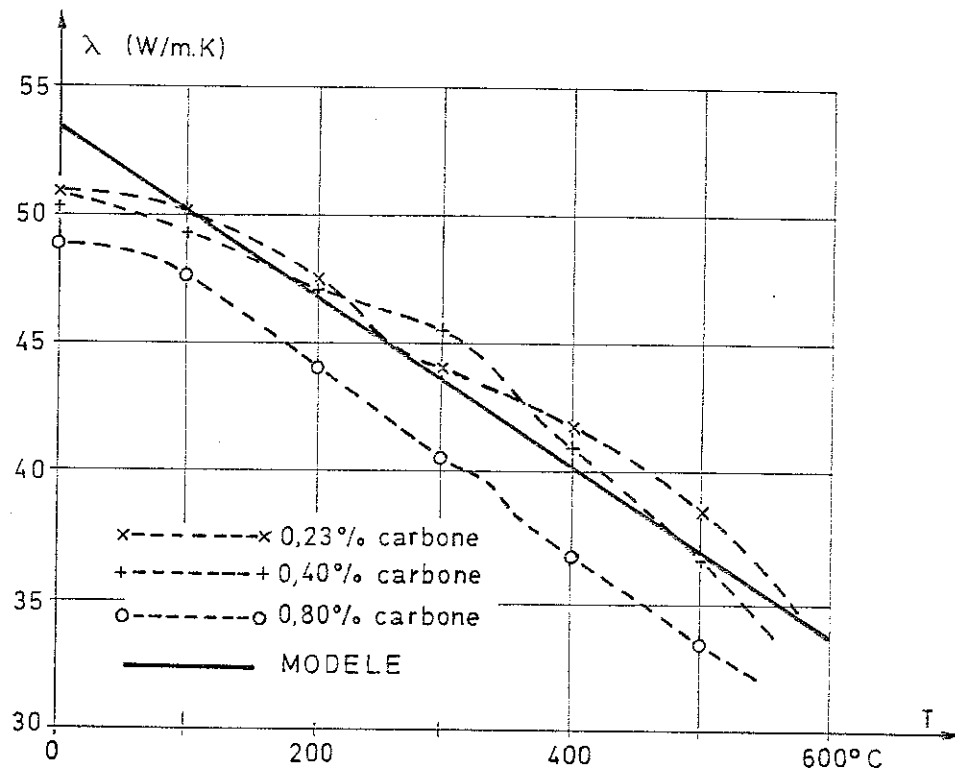


Figure 3.40. - Conductivite dans les aciers.

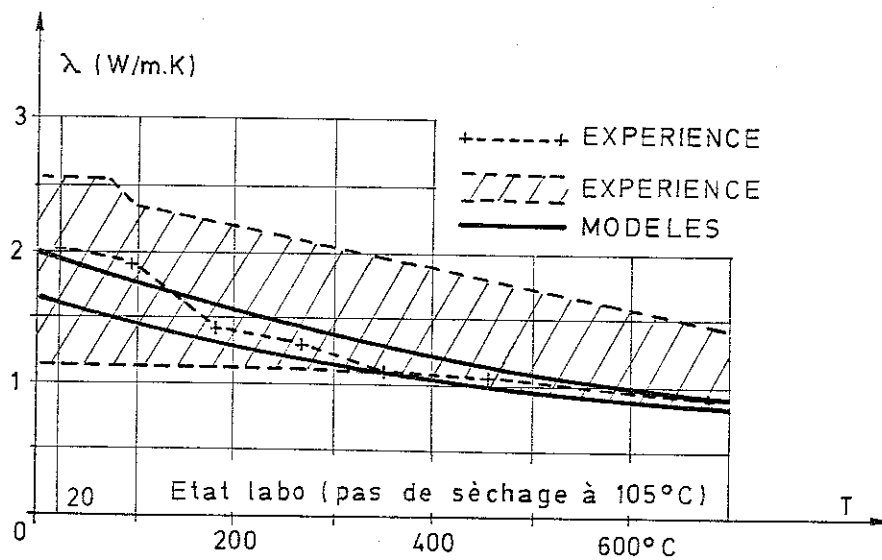


Figure 3.41. - Conductivité dans les bétons.

Si un changement de phase se produit, la conductivité peut subir un ressaut, figure 3.42. Ceci ne pose pas de problème particulier.

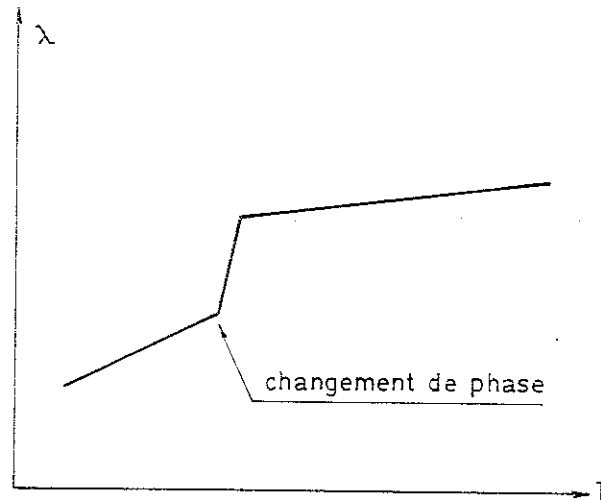


Figure 3.42. - Conductivité en cas de changement de phase.

3.3.3. L'absorption d'énergie.

Pour élever la température d'un solide, il faut lui fournir de l'énergie sous forme de chaleur (ou sous une autre forme, par dissipation mécanique par exemple). La loi constitutive qui lie la température à la chaleur absorbée est

$$f^V = C_V m = C_V \dot{T} \quad (3.179.)$$

C_V est la chaleur spécifique par unité de volume. A nouveau, la relation (3.179.) ne dépend pas de l'histoire thermique du matériau, mais bien de la température, ce qui rend le phénomène de conduction transitoire non linéaire.

$$C_V = C_V(T) \quad (3.180.)$$

Les figures 3.43. et 3.44., issues de [9], présentent la dépendance de la chaleur spécifique par unité de masse de l'acier et du béton en fonction de la température.

Lorsque le solide étudié subit un changement de phase, la relation (3.179.) est fortement perturbée. La quantité de chaleur absorbée ou fournie pendant le changement de phase est fort importante, et l'intervalle de température correspondant peut-être très court. Il en résulte un pic dans la relation $C_V = C_V(T)$ (figures 3.44. et 3.45.). Il est difficile de modéliser numériquement un tel phénomène. Si le changement de phase n'est pas trop brutal, il est possible de remplacer la

relation (3.179.) par une nouvelle relation qui "adoucit" le phénomène d'un point de vue numérique.

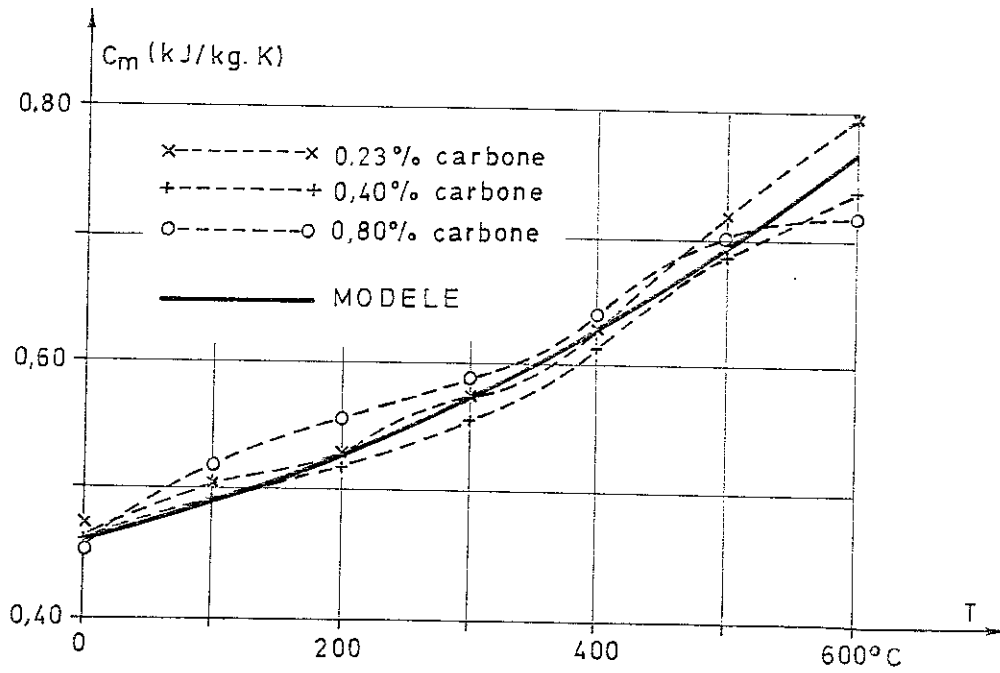


Figure 3.43. - Chaleur spécifique par unité de masse de l'acier.

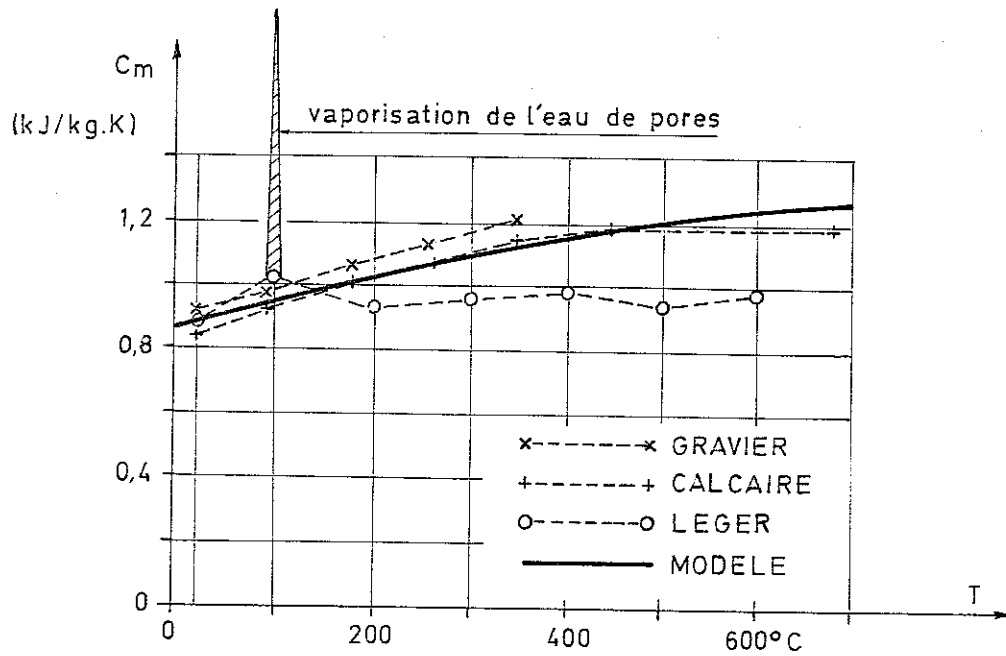


Figure 3.44. - Chaleur spécifique par unité de masse du béton.

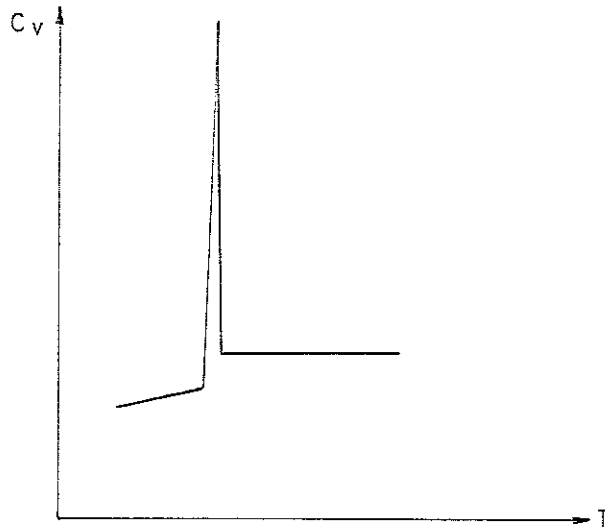


Figure 3.45. - Changement de phase.

Remarquons que f^V représente le flux de chaleur absorbé ou rejeté pour augmenter ou réduire l'enthalpie H du matériau. Celle-ci dépend donc de la température. Si l'absorption ou le rejet de chaleur est la seule contribution à l'enthalpie, alors :

$$H = \int f^V dt$$

$$f^V = \dot{H} \quad (3.181.)$$

avec

$$H = H(t).$$

Cette relation peut donc remplacer (3.179.). Elle est de type incrémentiel : on étudie l'évolution de l'enthalpie à l'aide de sa dérivée. Cette formulation a été précédemment proposée par COMINI et al [5]. Ces auteurs formulent la loi constitutive comme nous, mais la discrétisent différemment.

La figure 3.46. présente l'enthalpie d'un béton contenant 70 % d'humidité en volume en fonction de la température. On voit ainsi que le ressaut d'enthalpie dû à l'évaporation de l'eau est faible comparé à la variation totale, alors que, en formulation de chaleur spécifique, la pointe serait de 5 à 10 fois la valeur moyenne (selon la gamme de températures sur laquelle le changement de phase est réparti).

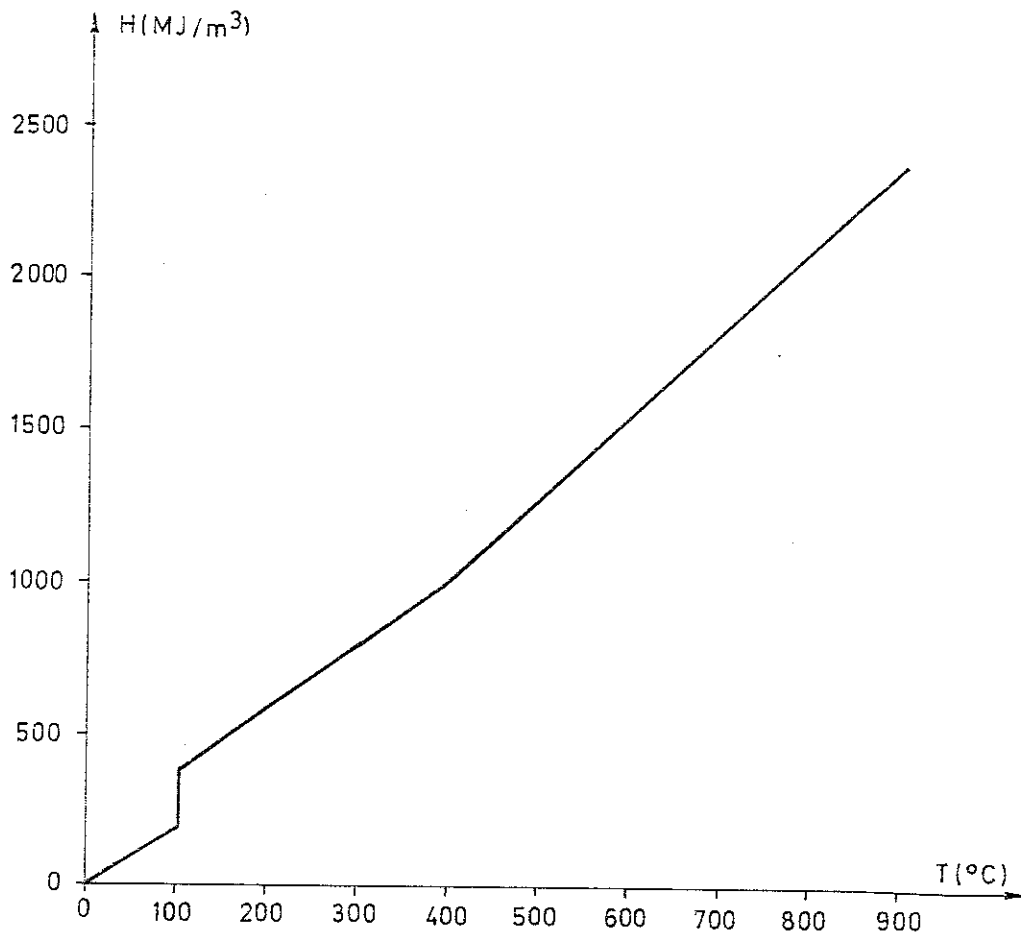


Figure 3.46.- Enthalpie d'un béton contenant 70% d'humidité en volume.

3.3.4. Les échanges thermiques aux frontières.

Deux types d'échange avec le milieu extérieur sont généralement considérés :

l'échange convectif

$$f = h (T - T^E) \quad (3.182.)$$

l'échange radiatif

$$f = \sigma_0 \varepsilon (T^4 - T^{E4}) \quad (3.183.)$$

f est le flux scalaire (débit par unité de surface), T^E est la température du milieu extérieur (éventuellement différente pour la convection et la radiation, si les deux types d'échange existent), T est la température de surface du solide, h est le coefficient de convection, σ_0 la constante de STEPHAN -BOLTZMAN et ε l'émissivité relative globale,

prenant en compte l'émissivité et la géométrie des surfaces.

La relation (3.182.) est l'équivalent d'un appui élastique linéaire, et (3.183.) d'un appui élastique non linéaire. Les deux relations constitutives sont du type "total" (en mécanique, on dirait "hyperélastique")

On considère couramment que le coefficient de convection dépend de la température de surface.

$$h = h(T) \quad (3.184.)$$

En fait l'échange dépend essentiellement de la température du fluide, et cette hypothèse n'est qu'une approximation, souvent bien utile.

3.4. LES ECOULEMENTS EN MILIEU POREUX.

3.4.1. Introduction.

Nous avons défini au chapitre 2 des contraintes et déformations associées dans la modélisation mathématique des écoulements :

- le gradient de pression $\underline{M} = - \text{grad } p$ (2.73.)

est conjugué au vecteur flux spatial \underline{f}

- la variation de pression $m = \dot{p}$ (2.74.)

est conjuguée au flux scalaire f^V .

- Le débit de fluide Q
est conjugué à la pression p .

Le but de ce paragraphe 3.4. est d'écrire des relations constitutives entre ces valeurs conjuguées, \underline{f} et \underline{M} , f^V et m , Q et p . Certaines relations sont incrémentielles, d'autres sont totales. L'anisotropie est prise en compte. Nous envisageons également certains types de conditions aux limites, où le débit est une fonction donnée de la pression, et plus particulièrement le cas des surfaces de suintement. Enfin, un paragraphe est consacré à la modélisation des écoulements avec surfaces libres.

De nombreux livres et articles ont été consacrés aux écoulements en milieux poreux. Citons, parmi bien d'autres, FAGNOUL [8] et TERZAGHI [25], qui développent l'aspect théorique et BRUCH [7], qui réalise une modélisation par la méthode des éléments de frontière. La méthode des éléments finis est utilisée par LEWIS et al [11], VOLKER [12], AHMED et SUNEDA [13], GHABOUSSI et WILSON [17], CHRISTIAN et BOEHMER [17], WANG et al [19], CARTER et al [20], SANDHU et al [21 et 22], SMITH et HOBBS [23], OKA et al [26]. Certaines de ces analyses sont non linéaires, d'autres sont couplées à l'aspect mécanique et s'orientent vers

les problèmes de consolidation. Les problèmes de surfaces libres sont notamment étudiés par PIETTE et CESCOTTO [27 et 28], NEUMAN [31], DESAI [32, 33, 36], BATHE et KHOSHGOFTAAR [34], TAYLOR et BROWN [35].

3.4.2. La loi d'écoulement.

Si le milieu est isotrope, en l'absence d'effet de gravité, la loi de DARCY donne

$$\underline{f} = \frac{\lambda}{\gamma} \underline{M} \quad (3.185.)$$

λ est la perméabilité du milieu et γ le poids spécifique du fluide. La loi de DARCY néglige les effets d'inertie du fluide et suppose l'écoulement laminaire. Si des turbulences apparaissent, une nouvelle loi doit être posée, ainsi que le citent VOLKER [12] et AHMED et SUNEDA [13]. D'après ceux-ci, la loi d'écoulement (en régime unidirectionnel) peut alors s'écrire, selon le cas :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= a f + b f^2 \\ \text{ou } \frac{dp}{dx} &= c f^n \end{aligned} \quad (3.186.)$$

Ces relations peuvent être transformées en

$$f = \frac{\lambda}{\gamma} \frac{dp}{dx} \quad (3.187.)$$

avec

$$\lambda = \lambda \left(\frac{dp}{dx} \right)$$

Nous n'avons pas considéré que λ dépende du gradient de pression. Le programme LAGAMINE est donc actuellement limité aux écoulements laminaires.

La perméabilité dépend du volume des pores, au travers desquels se fait l'écoulement. Si leur taille diminue, l'écoulement est plus difficile, la perméabilité décroît. Plusieurs auteurs ont étudié la relation entre la perméabilité et l'indice des vides (cf. paragraphe 3.2.8.2.). La figure 3.47. est extraite de [11].

D'après FAGNOUL [8], il est possible de déduire de la loi de POISEUILLE concernant l'écoulement dans les tubes la relation :

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{2e^3}{1+e} \quad (3.188.)$$

OKA, ATACHI et OKANO [26] proposent (sans le justifier) :

$$\lambda = \lambda_0 \exp \left(\frac{e-e_0}{c} \right) \quad (3.189.)$$

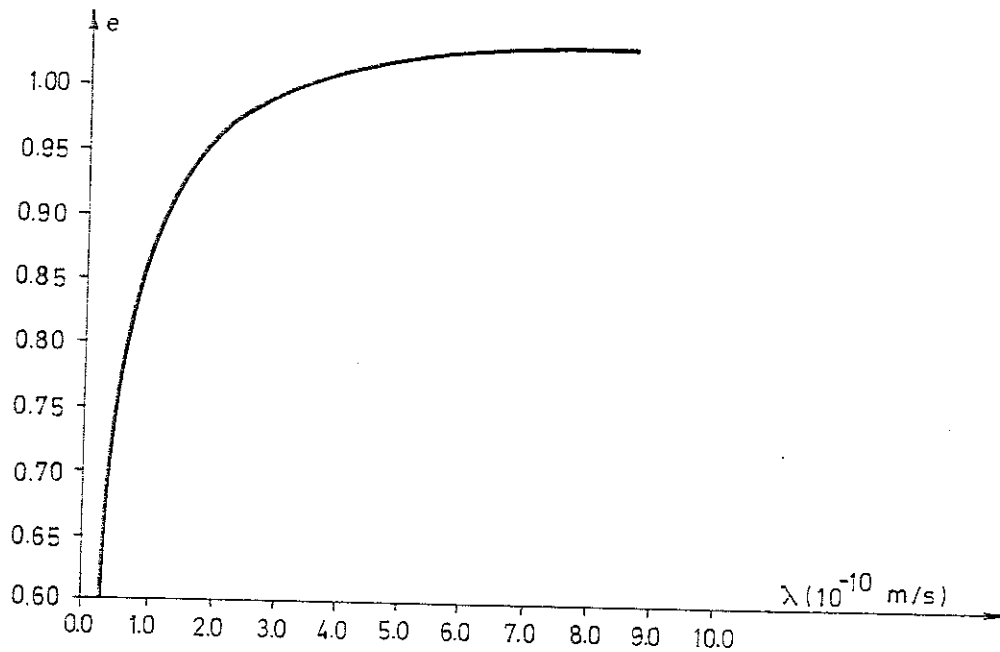


Figure 3.47. - Relation entre le volume des vides e et la perméabilité λ dans une argile [11].

Ainsi qu'on le verra plus loin, lorsque le phénomène d'écoulement est découplé de la mécanique du solide, l'indice des vides varie en fonction de la pression. Donc, il est possible, dans cette hypothèse, d'exprimer le lien entre la perméabilité et la pression, soit :

$$\lambda = \lambda(p) \quad (3.190.)$$

Le phénomène peut être sensible. D'après la relation (3.188.), une variation de 2 % de l'indice des vides entraîne une variation de 5 à 6 % de la perméabilité. Mais 2 % de variation de volume des vides correspondent déjà à une sérieuse modification mécanique de l'arrangement des grains d'un sol. Dès lors, il nous semble que pour tenir bien compte de la relation $\lambda = \lambda(e)$ un calcul couplé (mécanique + écoulements) est nécessaire.

Voyons à présent comment la loi de DARCY (3.185.) doit être modifiée pour tenir compte de l'anisotropie d'un sol.

Supposons un milieu en état plan, constitué d'un solide percé par n familles de fissures ou de failles, inclinées de α_i sur l'axe global \underline{e}_1 (figure 3.48.).

Soit un gradient de pression constant dans la direction \underline{e}_1 et nul dans la direction \underline{e}_2

$$\underline{M}^T = \langle -\frac{\partial p}{\partial x_1}, 0 \rangle$$

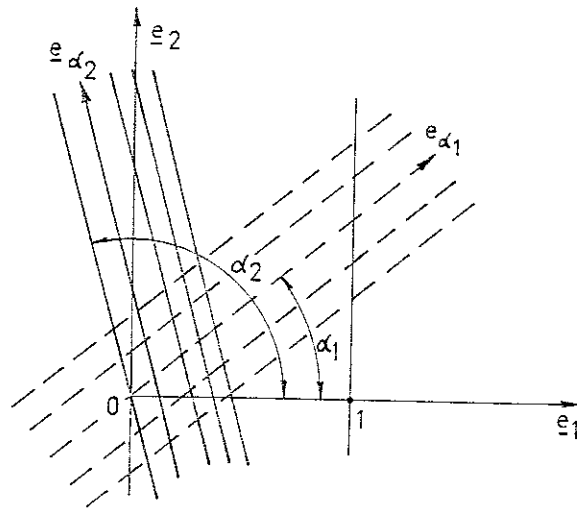


Figure 3.48. - Milieu fissuré.

A une longueur unitaire sur l'axe \underline{e}_1 correspond une longueur l_i des failles de la famille α_i

$$l_i = 1./\cos \alpha_i$$

La pression varie de $-\partial p/\partial x_1$ sur cette longueur. Donc, le gradient local, associé avec failles de la première famille, est

$$M_\alpha = -\frac{\partial p}{\partial x_1} \cdot \cos \alpha_i$$

de même, pour un gradient de pression $-\partial p/\partial x_2$ selon l'axe \underline{e}_2 , le gradient local sera :

$$M_\alpha = -\frac{\partial p}{\partial x_2} \cdot \sin \alpha_i$$

Au total, le gradient de pression dans la famille de failles α_i est donc :

$$M_\alpha = -\frac{\partial p}{\partial x_1} \cos \alpha_i - \frac{\partial p}{\partial x_2} \sin \alpha_i \quad (3.191.)$$

Si λ_i est la perméabilité correspondante, le flux sera de :

$$f_i = -\frac{\lambda_i}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x_1} \cos \alpha_i - \frac{\lambda_i}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x_2} \sin \alpha_i \quad (3.192.)$$

Projetons-le dans les axes globaux ($\underline{e}_1, \underline{e}_2$) :

$$\underline{f}_i^T = \langle f_i \cos \alpha_i, f_i \sin \alpha_i \rangle$$

$$\rightarrow \underline{f}_i = \frac{\lambda_i}{\gamma} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_i & \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \cos \alpha_i \sin \alpha_i & \sin^2 \alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial p}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (3.193.)$$

Donc la loi de DARCY anisotrope, exprimée en axes globaux peut s'exprimer sous la forme suivante (en état tridimensionnel, pour n familles de failles ou fissures).

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{f} = \frac{\underline{\Lambda}}{\gamma} \underline{M} \\ \underline{\Lambda} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \underline{R}_i \\ [\underline{R}_i]_{kl} = \cos \alpha_{ik} \cos \alpha_{jl} \end{array} \right. \quad (3.194.)$$

où λ_i est la perméabilité de la famille i

$\cos \alpha_{il}$, $l = 1, 3$ sont les trois cosinus directeurs de la direction i

$\underline{\Lambda}$ est le tenseur global de perméabilité. Il est complet et symétrique. On peut donc éventuellement déterminer ses directions et valeurs principales, ou le représenter par un tricercle de MOHR [7].

La forme spectrale du tenseur est utile lorsque le phénomène d'écoulement est couplé à de grandes rotations d'origine mécanique. En effet, dans ce cas, il faut exprimer la loi de DARCY par rapport à des axes de référence matériels et non globaux, pour tenir compte de l'évolution de l'orientation des directions privilégiées d'écoulement. Nous n'avons pas appliqué ce cas dans le programme LAGAMINE.

Remarquons pour terminer la discussion de l'anisotropie que le flux n'est pas dirigé dans la direction du gradient de pression. Donc les lignes de vitesse ne sont pas perpendiculaires aux équipotentielles. LOUIS [47] a étudié en détail les écoulements dans les milieux fissurés.

La loi de DARCY exprime que le fluide se déplace de sorte que son énergie diminue le plus vite possible. Jusqu'à présent, nous avons considéré que la pression est le seul terme qui contribue à l'énergie du fluide. Or la gravité doit également être prise en compte. Pour une unité de volume de fluide, l'énergie est :

$$I = p + \gamma z \quad (3.195.)$$

γ est le poids spécifique et z l'altitude. Dès lors, la loi de DARCY se transforme en :

dans le cas isotrope

$$\begin{aligned} \underline{f} &= \frac{\lambda}{\gamma} \underline{M} - \frac{\lambda}{\gamma} \underline{\text{grad}} (\gamma z) \\ &= \frac{\lambda}{\gamma} \underline{M} - \lambda \underline{e}_z \end{aligned} \quad (3.196.)$$

dans le cas anisotrope

$$\underline{f} = \frac{\underline{\Lambda}}{\gamma} \underline{M} - \underline{\Lambda} \underline{e}_z \quad (3.197.)$$

\underline{e}_z est la direction de la verticale.

Jusqu'à présent, nous avons supposé que les variations de pression sont suffisamment faibles pour que le poids spécifique ne varie pas de manière significative. S'il n'en était pas ainsi, les expressions (3.196.) et (3.197.) ne seraient plus valables. C'est une des limites de la théorie développée.

3.4.3. La loi d'absorption de fluide.

Lorsque l'écoulement est un régime permanent, le volume d'eau contenu dans les pores qui permettent le passage du fluide est constant. En régime transitoire, il varie. Ce paragraphe a pour but d'exprimer cette variation de volume f^V en fonction de la variation de pression \dot{p} .

La quantité de fluide contenue varie pour plusieurs raisons :

- la pression du fluide varie. Or il est compressible. Donc son volume spécifique varie.
- le volume des pores varie, donc la quantité d'eau qu'ils contiennent varie également.
- le niveau de la surface libre varie, et l'état de saturation varie.

Nous ne discuterons pas de ce dernier cas dans ce paragraphe.

Supposons la porosité n constante. Nous avons étudié au paragraphe 3.2.8.2. la relation entre le volume du fluide v_w et sa pression p .

On a :

$$\dot{p} = - x_w \dot{\epsilon}_w \quad (3.158.)$$

$$\dot{v}_w = \epsilon_w \dot{v}_w = - \frac{p}{x_w} \dot{v}_w \quad (3.198.)$$

Or v_w est la porosité efficace

$$\rightarrow \dot{v}_w = - \frac{p}{x_w} n \quad (3.199.)$$

Donc, lorsque la pression augmente $\dot{p} > 0$, le volume du fluide diminue $\dot{v}_w < 0$ et une nouvelle quantité de fluide peut trouver place dans les pores :

$$f^V = \frac{n}{x_w} \dot{p} \quad (3.200.)$$

Le volume des pores varie en fonction des contraintes effectives. Or, dans une analyse d'écoulements, celles-ci ne sont pas connues. Comment faire ? Deux solutions sont possibles. Pour obtenir une grande précision, il serait souhaitable de coupler les analyses mécaniques et d'écoulement. Dans ce cas, le volume des pores est effectivement calculé dans la "zone mécanique" du modèle, et nous ne devons pas nous en préoccuper ici. Malheureusement, cette approche est très

coûteuse par rapport aux modèles d'écoulement purs. Supposons un découplage entre les deux phénomènes. Ceci équivaut à supposer notamment que les contraintes totales et les charges sont constantes. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\sigma}} &= 0 \\ \rightarrow \dot{\underline{\sigma}}' - \dot{p} \underline{\delta} &= \underline{0} \\ \rightarrow \dot{\sigma}_m &= \dot{p} \end{aligned} \quad (3.201.)$$

Donc si les contraintes totales sont constantes, la variation de la contrainte effective moyenne est égale à la variation de pression. Il en résulte que la variation de volume du milieu poreux est, si son état est élastique,

$$3 \dot{\epsilon}_m = 3 \frac{\dot{\sigma}_m}{\chi} = 3 \frac{\dot{p}}{\chi} \quad (3.202.)$$

Cette équation n'est évidemment valable que si cette déformation est suffisamment faible pour ne pas influencer le champs des contraintes totales.

Si nous admettons, comme précédemment, que cette variation de volume (3.202.) est uniquement celle des pores (donc le volume des grains ne varie pas), il en résulte que cette variation de volume est égale à une variation du volume de fluide contenu dans ces pores :

$$f^V = \frac{3}{\chi} \dot{p} \quad (3.203.)$$

Si le volume des grains varie significativement, ou si seule une partie des pores est efficace pour l'écoulement, il faut remplacer dans (3.202.) et (3.203.) χ par le module de compressibilité des pores efficaces.

Réunissons les deux contributions à la variation de volume de fluide absorbé, (3.200.) et (3.203.). Il en résulte la relation constitutive cherchée :

$$f^V = \Sigma \dot{v}_W = \left(\frac{3}{\chi} + \frac{n}{\chi_W} \right) \dot{p} \quad (3.206.)$$

ou

$$\begin{aligned} f^V &= c \dot{p} \\ c &= \left(\frac{3}{\chi} + \frac{n}{\chi_W} \right) \end{aligned} \quad (3.207.)$$

c est le coefficient d'emmagasinement de la nappe, supposée captive.

En fait, bien souvent, le volume des pores ne varie pas linéairement avec la pression de pore. La relation est soit élastique non

linéaire (3.170.) soit élastoplastique (3.170.), (3.175.),... Dans ce dernier cas, la variation de la contrainte volumique effective dépend non seulement de la variation de pression, mais aussi de la variation des contraintes déviatoriques. Le découplage entre les phénomènes mécaniques et d'écoulement n'est plus possible.

Si les phénomènes d'écoulement transitoire et de grandes déformations mécaniques sont couplés, il faut tenir compte que la masse spécifique de l'unité de volume biphasique varie en fonction de la mécanique et de l'écoulement. Elle n'est donc plus directement liée au déterminant du jacobien de la déformation (2.11.), alors que cette relation reste valable pour le squelette solide. Ceci a une influence sur le calcul de l'effet de la gravité.

3.4.4. Les écoulements avec surface libre.

Lorsque le milieu poreux est partiellement saturé, une surface, dite surface libre, sépare la zone saturée de la zone non saturée. Dans celle-ci, les lois d'écoulement sont différentes de celle que nous avons étudiées plus haut. Nous ne considérons pas ici les écoulements en zone non saturée, mais nous établissons dans ce paragraphe une technique d'étude de la position de la surface libre et des écoulements dans la zone saturée.

Les problèmes à surfaces libres ont été étudiés par de nombreux auteurs. PIETTE et CESCOTTO [27],[28] ont étudié le cas des écoulements stationnaires par la méthode des éléments finis avec intégration numérique. Le maillage est fixe. Par des considérations géométriques sur la position de la surface libre, les points d'intégration situés au-dessus de la surface, dans la zone non saturée, sont éliminés du calcul. Seul l'état plan a été développé. Le problème est résolu par essais et erreurs. La convergence est obtenue en quelques itérations. BRUCH [29] étudie le problème d'une façon similaire, mais utilise la méthode des éléments de contour. CIVIDINI et GIOTA [30] modifient légèrement la méthode : ils imposent à la surface libre de passer par les frontières d'éléments. La discrétisation doit donc être affinée.

D'autres auteurs évitent les considérations géométriques par une modification des relations constitutives entre contraintes et déformations. GHABOUSSI et WILSON [17] proposent de tenir compte par une compressibilité variable du milieu de la différence de comportement entre milieu saturé et non saturé. Le problème est donc matériellement non linéaire. Enfin, quelques auteurs, tels TAYLOR et BROWN [35] et DESAI [36]

proposent de travailler avec un maillage variable, limité à la zone saturée du milieu poreux. Cette technique donne, semble-t-il, une très bonne précision sur la position de la surface libre. Par contre, elle est assez lourde, et nécessite une architecture de programme spécifique. Aussi l'avons-nous exclue de nos travaux.

La méthode que nous avons adoptée s'inspire d'une part de l'idée de GHABOUSSI et WILSON [17], et d'autre part de la technique "enthalpique" de modélisation des changements de phase en conduction thermique. Que se passe-t-il dans la zone non saturée ? La pression est nulle (admettons que la pression atmosphérique soit le zéro de notre échelle de pression. Ceci ne restreint en rien la portée de l'analyse). Pour qu'elle puisse augmenter, il faut que le milieu poreux se sature. Il doit donc recevoir une quantité de fluide juste suffisante pour que les pores soient remplis, sans pour autant qu'ils se dilatent. Considérons la variable H mesurant le volume de fluide présent dans une unité de volume du milieu poreux.

Traçons le diagramme de l'évolution de H en fonction de la pression (figure 3.49.).

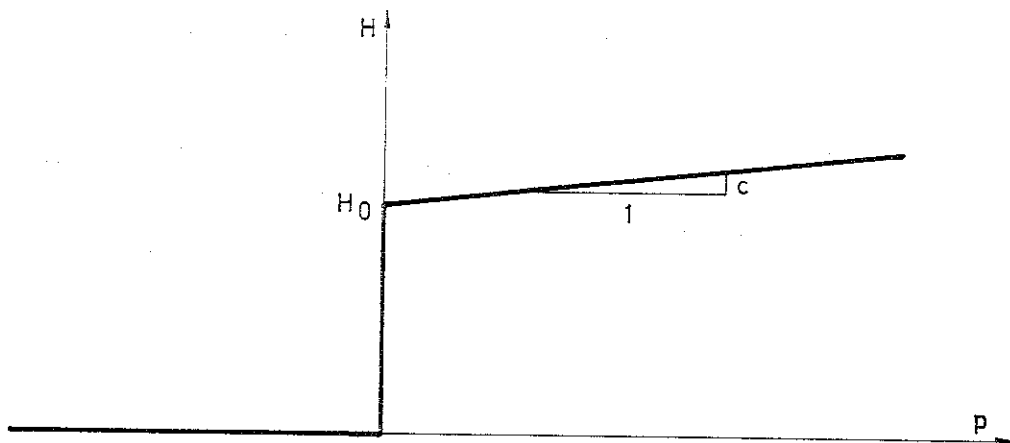


Figure 3.49. - Volume du fluide présent dans le milieu poreux.

Lorsque la pression est négative, le milieu est non saturé ($H = 0$). Lorsqu'elle est positive, il est saturé, et H varie selon la valeur du coefficient d'emménagement en nappe captive :

$$\frac{dH}{dp} = c \quad (3.208.)$$

Le milieu passe de l'état saturé à l'état non saturé à la pression nulle, comme en conduction thermique, un changement de phase se produit à température constante. H_0 représente le volume des pores accessibles

à l'écoulement. C'est le coefficient d'emmagasinement des nappes à surfaces libres, ou la porosité efficace.

Pratiquement, nous adoucissons la relation $H(p)$ de la figure 3.49. en une courbe sans ressaut, qui atteint l'état non saturé pour $p = -\infty$ (figure 3.50.).

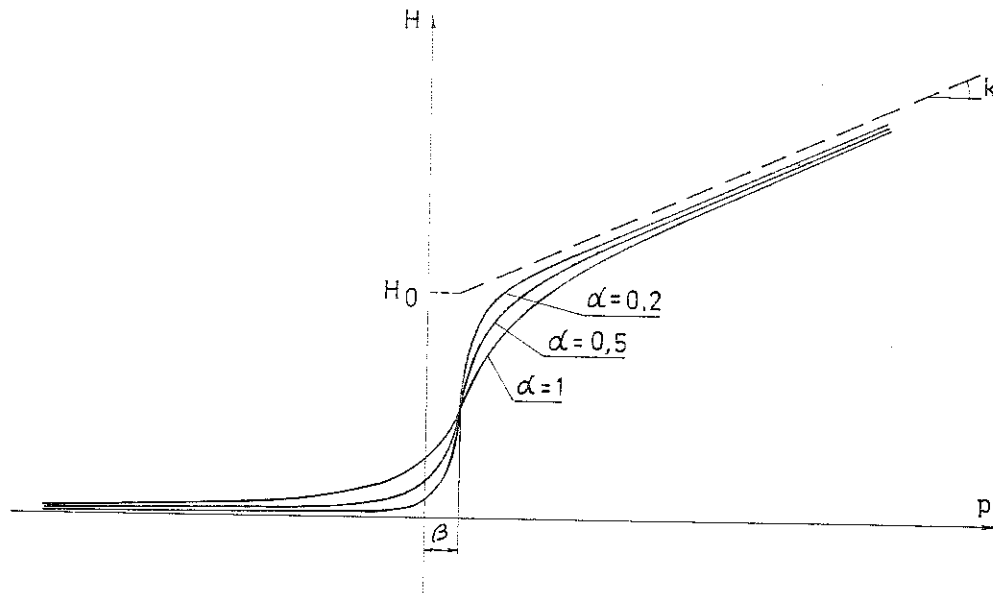


Figure 3.50. - Volume de fluide présent dans le milieu poreux.
Relation adoucie.

Par exemple, on utilise la relation :

$$H = H_0 \left[\frac{1}{\pi} \arctg \left(\frac{p-\beta}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \right] + c \langle p - \beta \rangle$$

avec

$$\langle p - \beta \rangle = p - \beta \quad \text{si } (p - \beta) > 0 \quad (3.209.)$$

$$\langle p - \beta \rangle = 0 \quad \text{si } (p - \beta) \leq 0$$

Il s'ensuit que le volume absorbé par une unité de volume de milieu saturé en unité de temps est

$$f^v = \frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dp} \dot{p} \quad (3.210.)$$

Cette formulation, de même que la formulation enthalpique en conduction thermique (remarquons la similitude des équations (3.181.) et (3.210.)), permet une bonne précision lorsque les pas ont une durée finie (voir le chapitre 5).

Les développements précédents ne suffisent pas à une modélisation

exacte des phénomènes d'écoulement en milieu partiellement saturé. Nous avons choisi d'étudier en permanence l'ensemble du maillage. Aucune zone, aucun point d'intégration n'est abandonné. Donc une intégration des flux existant dans la zone non saturée est réalisée. Que valent ces flux ? Si la pression est nulle, alors il existe un gradient hydraulique dû au terme de poids propre, et donc un débit vertical de fluide. Ceci n'est pas correct. Aussi sommes-nous conduit à modifier la loi d'écoulement de DARCY, de sorte à annuler l'écoulement lorsqu'il n'y a pas de fluide. Nous adoptons la forme (en perméabilité isotrope)

$$\underline{f} = \frac{H\lambda'}{\gamma} \underline{M}$$

$$\lambda = H\lambda' \tag{3.211.}$$

Une perméabilité normalisée λ' , exprimée par unité de volume de fluide dans une unité de volume de milieu poreux, est ainsi introduite.

Comme nous utilisons une forme relaxée de la relation $H = H(p)$ (figure 3.50.), si la pression est nulle ou négative, il existe toujours un flux dans la zone non saturée. Pour obtenir l'équilibre, il est nécessaire que le potentiel hydraulique y soit constant. Ceci implique l'existence de pressions négatives au-dessus de la nappe. Il faut bien remarquer que ce phénomène a une origine uniquement numérique, et n'a donc aucune signification physique. Il n'est en aucune façon lié au phénomène de capillarité.

3.4.5. Les conditions aux frontières.

Plusieurs types de conditions aux frontières peuvent exister dans un problème d'écoulement en milieu poreux. Les plus classiques sont les frontières à pression imposée et les frontières à débit imposé. Ils s'introduisent sans difficulté comme déplacements ou forces imposées dans le programme d'éléments finis. Il est avantageux ou nécessaire de considérer également un troisième type de condition aux frontières. Un débit aux frontières peut être une fonction linéaire ou non linéaire de la pression de frontière et d'une pression extérieure imposée. Considérons l'écoulement dans un milieu poreux, à proximité d'un lac ou d'un fleuve (fig. 3.51.). Le niveau du lac, du fleuve, est constant par rapport à celui de la nappe. Supposons la nappe séparée du fleuve, du lac, par un milieu d'épaisseur faible (devant la dimension de la nappe) et de perméabilité nettement plus faible que la sienne. L'écoulement à la frontière est quasi normal à cette zone peu perméable. Il

est coûteux et difficile (pour des raisons géométriques) de le représenter par des éléments finis de volume. Or ce débit vaut simplement:

$$q = \lambda \frac{p - p^E}{t} \quad (3.212.)$$

λ est la perméabilité de la zone peu perméable, t son épaisseur, p est la pression à la frontière de la zone à perméabilité normale, et p^E est la pression du lac, du fleuve, ... Cette équation est donc une relation entre le débit et la pression de frontière. Elle est semblable à l'équation de la convection thermique (3.182.).

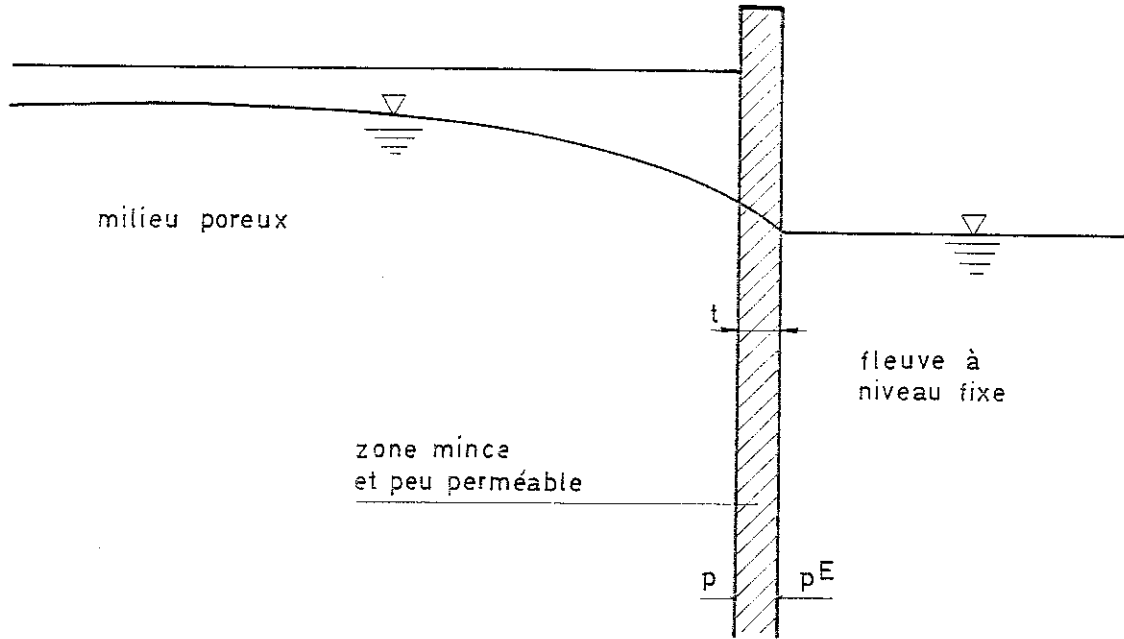


Figure 3.51. - Frontière peu perméable.

Un deuxième cas où une relation entre débit et pression est imposée est celui des surfaces de suintement en écoulement à surface libre. Considérons l'écoulement à travers un barrage, ou dans un puit (figure 3.52.). Selon la position de la surface libre (1. ou 2) et le régime d'écoulement, il existe ou non une surface de suintement Γ_s . La condition à la frontière à pression atmosphérique se caractérise donc par la condition mathématique de contact unilatéral :

$$\left| \begin{array}{ll} \text{si } p < 0 & q = 0 \\ \text{si } p = 0 & q > 0 \\ p > 0 & \text{est interdit} \end{array} \right. \quad (3.213.)$$

p est la pression à la frontière du milieu poreux.

Cette condition doit être modifiée. D'une part, nous avons choisi plus haut d'accepter des pressions négatives dans la zone non saturée du milieu poreux. Ceci est pris en compte par la première ligne de (3.213.).

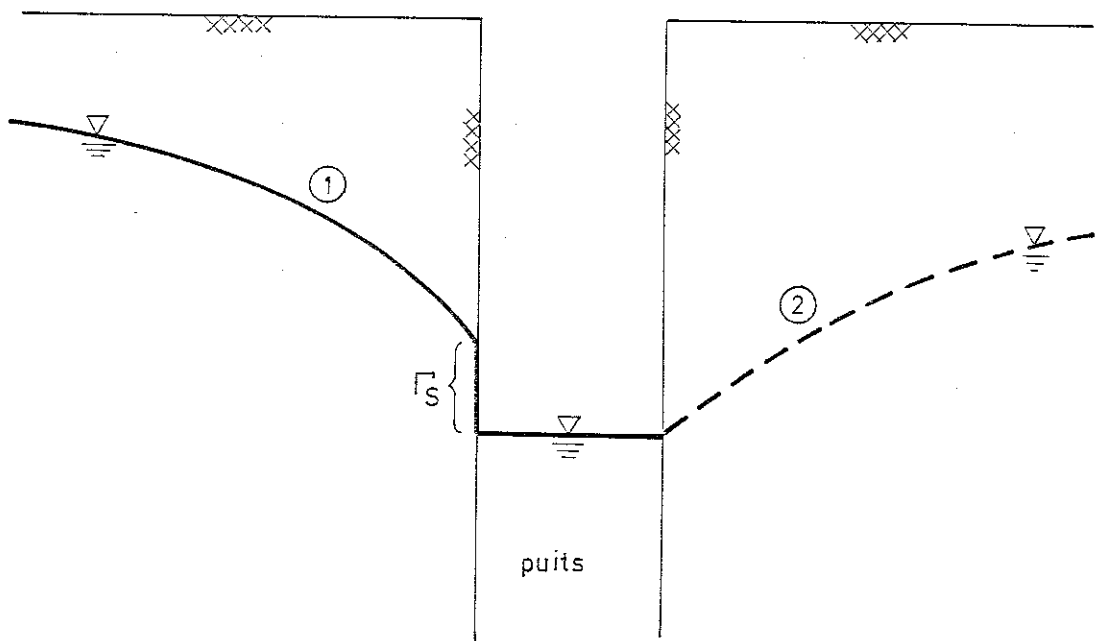
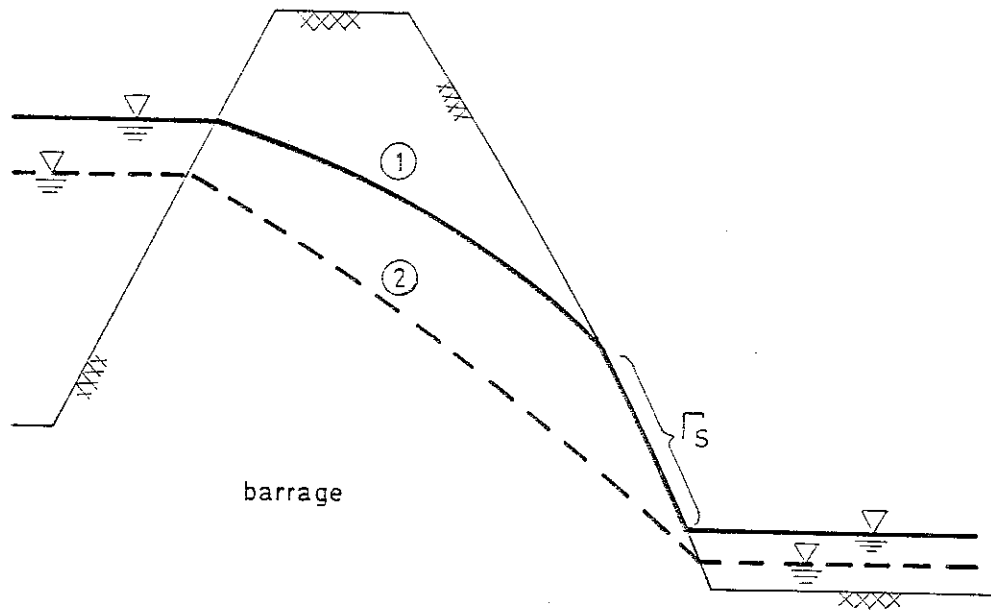


Figure 3.52. - Surfaces de suintement.

D'autre part, il est difficile d'introduire une condition d'inégalité stricte dans un programme d'éléments finis. (Ceci a été discuté à propos de la modélisation du contact unilatéral en mécanique, § 3.2.7.). Dans le cadre d'un programme non linéaire incrémental, nous pouvons remplacer les conditions (3.213.), à l'aide de la technique de pénalisation, par :

$$\begin{cases} \text{si } p \leq 0 & q = 0 \\ \text{si } p > 0 & q = \bar{\lambda} p \end{cases} \quad (3.214.)$$

où $\bar{\lambda}$ est le coefficient de pénalisation et doit donc être fort élevé en comparaison des autres perméabilités.

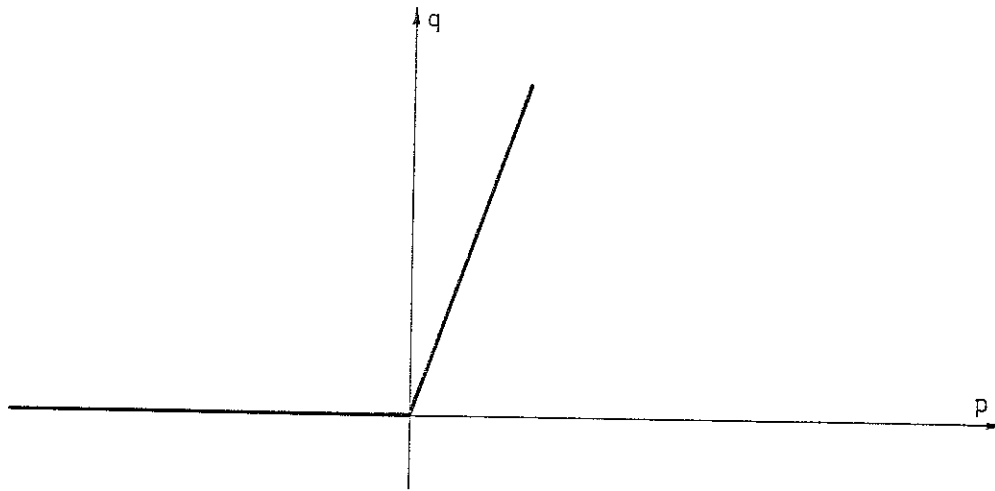


Figure 3.53. - Le suintement en tant que contact unilatéral.