

4.1. INTRODUCTION

Nous supposons la méthode des éléments finis bien connue. Ce chapitre est consacré à la discrétisation spatiale des coordonnées (au sens général défini plus haut) et de leur variation, et à l'influence de cette hypothèse géométrique sur l'équation de la puissance virtuelle. Nous choisissons de développer des éléments finis cinématiquement admissibles, de type isoparamétrique.

Les coordonnées initiales \underline{X} dans Γ , actuelles \underline{x} dans γ , la pression p et la température T sont donc discrétisées en fonction de leurs valeurs nodales $\underline{X}_L, \underline{x}_L, p_L, t_L$ à l'aide des mêmes fonctions d'interpolation :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{X} = \phi_L \underline{X}_L, \quad X_i = \phi_L X_{Li} \\ \underline{x} = \phi_L \underline{x}_L, \quad x_i = \phi_L x_{Li} \\ p = \phi_L p_L \\ T = \phi_L T_L \\ L = 1, \text{ nombre de noeuds de l'élément.} \end{array} \right. \quad (4.1.)$$

De même, les variations des vitesses des coordonnées actuelles sont :

$$\left| \begin{array}{l} \delta \underline{v} = \phi_L \delta \underline{v}_L \\ \delta p = \phi_L \delta p_L \\ \delta T = \phi_L \delta T_L \end{array} \right. \quad (4.2.)$$

Les fonctions d'interpolation sont exprimées à l'aide de coordonnées isoparamétriques normalisées :

$$\left| \begin{array}{l} \phi_L = \phi_L(\xi) \quad \text{pour une ligne} \\ \phi_L = \phi_L(\xi, \eta) \quad \text{pour une surface} \\ \phi_L = \phi_L(\xi, \eta, \zeta) \quad \text{pour un volume} \end{array} \right. \quad (4.3.)$$

Dans le cadre de ce travail, nous avons exclu les corps orientés (poutres, coques, ...) pour nous limiter à l'étude de solides en état plan, axisymétrique ou tridimensionnel de contraintes et déformations généralisées. Des éléments plans et volumiques seront donc développés. De plus, la modélisation des frontières sur lesquelles soit les forces,

soit la relation forces-déplacements sont imposées nous conduit à développer des éléments finis de frontières, des lignes en état plan ou axisymétrique et des surfaces en état tridimensionnel.

Les éléments finis choisis font partie de la famille Serendipity (voir ZIENKIEWICZ [2]) et sont du second degré : ils ont un noeud en chaque coin et un noeud sur chaque arête.

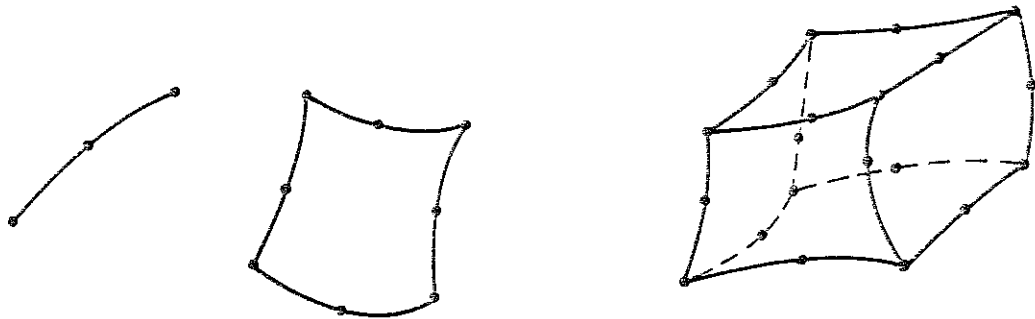


Figure 4.1.

Ce choix est justifié essentiellement par notre expérience. Il semble donner en général un excellent rapport qualité-coût (voir ZIENKIEWICZ [2], CESCOTTO [48]).

L'intégration de la puissance virtuelle sur un élément est numérique, selon la technique de GAUSS.

L'introduction du champ de coordonnées discrétisé dans l'expression de la puissance virtuelle dans un élément permet de mettre en évidence les forces nodales énergétiquement équivalentes aux contraintes ou aux charges, qui sont conjuguées aux coordonnées nodales, inconnues généralisées des problèmes étudiés.

Pour obtenir plus de détail sur la technique des éléments finis, les fonctions d'interpolation, l'intégration numérique, l'assemblage des forces nodales, etc... on lira par exemple ZIENKIEWICZ [2].

4.2. LES GRANDES DEFORMATIONS MECANIQUES.

La puissance virtuelle intérieure a été évaluée au chapitre 2 :

$$\delta W_I = \int_V \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dv = \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) dv \quad (2.71.)$$

Cette puissance est évaluée dans la configuration actuelle γ , de même que les contraintes de CAUCHY. v représente donc le volume *actuel*, après dé-

formation, dans la configuration γ et les coordonnées \underline{x} .

Les inconnues sont les coordonnées nodales actuelles \underline{x}_L , telles que les contraintes et déformations soient en équilibre avec les forces et déplacements imposés.

4.2.1. L'état plan de contraintes ou de déformations.

Deux composantes de coordonnées sont utilisées :

x_1, x_2 dans la configuration γ et les axes globaux $\underline{e}_1, \underline{e}_2$
 ξ, η dans la référence isoparamétrique.

Le jacobien \underline{J} de la transformation de coordonnées $(x_1, x_2) \rightarrow (\xi, \eta)$ est:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.4.)$$

avec

$$\det(\underline{J}) = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \quad (4.5.)$$

et inversément :

$$\underline{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\underline{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & -\frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.6.)$$

Ainsi, on obtient sans difficulté les dérivées spatiales dans la configuration actuelle des fonctions d'interpolation :

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_L}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi_L}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \quad (4.7.)$$

et les composantes des déformations virtuelles

$$\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_L}{\partial x_j} \delta v_{Li} \quad (4.8.)$$

Il en résulte que la puissance virtuelle intérieure en un point vaut, vu l'annulation des termes relatifs à la 3ème direction,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} &= \sigma_{11} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} \delta v_{L1} + \sigma_{22} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} \delta v_{L2} \\ &+ \sigma_{12} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} \delta v_{L2} + \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} \delta v_{L1} \right) \\ &+ \sigma_{21} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} \delta v_{L1} + \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} \delta v_{L2} \right) \end{aligned} \quad (4.9.)$$

et, vu la symétrie du tenseur contrainte

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = & \left(\sigma_{11} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} \right) \delta v_{L1} \\ & + \left(\sigma_{12} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} \right) \delta v_{L2} \end{aligned} \quad (4.10.)$$

La puissance virtuelle dans un élément s'obtient par intégration volumique de cette expression. Passons aux coordonnées isoparamétriques :

$$\delta W_I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} t \det(\underline{J}) d\xi d\eta \quad (4.11.)$$

où t est l'épaisseur de l'élément. Constante (généralement unitaire) en état plan de déformation, elle varie avec les contraintes et déformations en état plan de contraintes.

Intégrons numériquement selon le schéma de GAUSS (à 4 ou 9 points) :

$$\delta W_I = \sum_{PI} \left(\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} t \det(\underline{J}) W \right) \quad (4.12.)$$

où W est le poids de GAUSS du point d'intégration

\sum_{PI} représente une sommation du produit de la valeur de l'intégrand aux divers points d'intégration par les poids correspondants.

Ainsi apparaît l'expression de la puissance virtuelle discrétisée pour un élément. Elle est aisément calculable numériquement :

$$\begin{aligned} \delta W_I = & \sum_{PI} \left(\sigma_{11} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} \right) t \det(\underline{J}) W \delta v_{L1} \\ & + \sum_{PI} \left(\sigma_{12} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} \right) t \det(\underline{J}) W \delta v_{L2} \end{aligned} \quad (4.13.)$$

Elle est absolument identique à celle obtenue dans le cas classique des petits déplacements. Nous pouvons également écrire :

$$\delta W_I = F_{L1} \delta v_{L1} + F_{L2} \delta v_{L2} \quad (4.14.)$$

pour mettre en évidence les forces nodales F_{Li} énergétiquement équivalentes aux contraintes, qui sont les forces généralisées conjuguées aux déplacements nodaux :

$$\begin{cases} F_{L1} = \sum_{PI} \left(\sigma_{11} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} \right) t \det(\underline{J}) W \\ F_{L2} = \sum_{PI} \left(\sigma_{12} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} \right) t \det(\underline{J}) W \end{cases} \quad (4.15.)$$

4.2.2. L'état axisymétrique.

L'analyse de solides en état axisymétrique peut se réduire à l'étude d'un plan radial : tous les déplacements se produisent dans ce plan. Dès lors, la plupart des développements de l'état plan sont valables ici. Les géométries initiale et actuelle sont décrites de la même façon. Les dérivées dans le plan des déplacements se définissent de manière inchangée, à l'aide du Jacobien de la transformation $(x_1, x_2) \rightarrow (\xi, \eta)$, où le rayon est égal à la première coordonnée x_1 .

Par contre, la déformation et la contrainte circonférentielle ne sont pas nulles. Il en résulte que la puissance virtuelle en un point comprend une nouvelle contribution. Si la direction circonférentielle est affectée de l'indice 3, il vient :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = & \left(\sigma_{11} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} + \sigma_{33} \frac{\phi_L}{x_1} \right) \delta v_{L1} \\ & + \left(\sigma_{12} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} \right) \delta v_{L2} \end{aligned} \quad (4.16.)$$

L'intégration de cette puissance sur le volume de l'élément est également affectée par l'état axisymétrique. Si nous considérons un secteur d'un radian, l'épaisseur de l'élément égale le rayon :

$$t = r = x_1 \quad (4.17.)$$

et les forces nodales énergétiquement équivalentes aux contraintes sont :

$$\begin{cases} F_{L1} = \sum_{PI} \left(\sigma_{11} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} + \sigma_{33} \frac{\phi_L}{x_1} \right) x_1 \det(\underline{J}) W \\ F_{L2} = \sum_{PI} \left(\sigma_{12} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} \right) x_1 \det(\underline{J}) W \end{cases} \quad (4.18.)$$

4.2.3. L'état tridimensionnel.

A nouveau, le développement est semblable à celui posé pour l'état plan. Simplement, il est amplifié.

Les expressions des coordonnées et déplacements ne changent pas.

Celles des déformations et du jacobien passent au rang 3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi_L(\xi, \eta, \zeta)) \delta v_{Lj} \\ &= \left(\frac{\partial \phi_L}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_L}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi_L}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right) \cdot \delta v_{Lj} \end{aligned} \quad (4.19.)$$

avec

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.20.)$$

et

$$\underline{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} & \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4.21.)$$

Les déformations et les contraintes sont au nombre de 9, dont 6 égales deux par deux par symétrie.

L'intégration numérique en volume se réalise sans problème.

Il en résulte l'expression des forces nodales F_{Li} énergétiquement équivalentes aux contraintes :

$$\begin{cases} F_{L1} = \sum_{PI} \left(\sigma_{11} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} + \sigma_{12} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} + \sigma_{13} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_3} \right) \det(\underline{J}) W \\ F_{L2} = \sum_{PI} \left(\sigma_{21} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} + \sigma_{23} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_3} \right) \det(\underline{J}) W \\ F_{L3} = \sum_{PI} \left(\sigma_{31} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} + \sigma_{32} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} + \sigma_{33} \frac{\partial \phi_L}{\partial x_3} \right) \det(\underline{J}) W \end{cases} \quad (4.22.)$$

4.2.4. Les frontières chargées.

4.2.4.1. Introduction.

Nous étudions dans ce paragraphe les frontières sur lesquelles soit la charge soit une relation entre la charge et le déplacement est imposée. Nous nous intéressons exclusivement aux charges définies par unité de surface déformée.

Elles sont appelées en anglais "follower forces", car elles suivent et dépendent de la déformation. Une modification de la taille ou de l'orientation de la surface d'application entraîne une modification de la charge globale appliquée. Elle varie donc constamment pendant la déformation du solide.

Il est intéressant d'introduire le calcul de ce type de charge dans un élément fini particulier. En effet, la structure globale du programme de calcul n'est ainsi pas affectée par ce type particulier de mise en charge, et les surfaces chargées se discrétisent de façon semblable au volume du solide.

La puissance virtuelle extérieure sur une surface chargée a été évaluée au chapitre 2 :

$$\delta W_E = \int_a \underline{p}^T \delta \underline{v} \, da \quad (2.69.)$$

Elle est calculée dans la configuration actuelle γ . a représente donc la surface actuelle. Nous allons évaluer ci-après cette puissance virtuelle sur un élément de frontière.

Ainsi que nous l'avons annoncé au chapitre 2, les axes dans lesquels sont exprimés les vecteurs charges \underline{p} et déplacements virtuels $\delta \underline{v}$ sont quelconques. La plupart des charges imposées en surface sont des pressions normales et des frottements tangentiels.

Nous travaillerons donc dans un système d'axes local lié à la frontière. Le développement d'un élément de frontière est moins classique que celui d'un élément de volume. Nous le présentons donc en détails.

4.2.4.2. L'état plan ou axisymétrique.

La frontière se réduit à une ligne en état plan. Par symétrie, en état axisymétrique, il suffit également d'étudier une ligne. Par compatibilité avec les éléments de volume précédemment présentés, l'élément de frontière est une ligne isoparamétrique du degré 2 à 3 noeuds. Les coordonnées actuelles et leur perturbation sont :

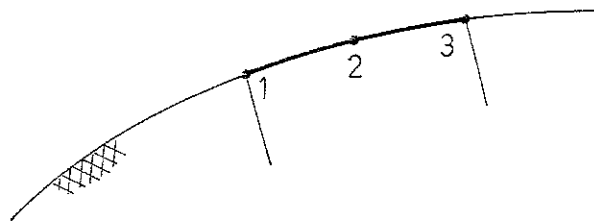


Figure 4.2.

$$\begin{cases} \underline{x} = \phi_L \underline{x}_L \\ \delta \underline{v} = \phi_L \delta \underline{v}_L \end{cases} \quad L = 1,3 \quad (..23.)$$

avec :

$$\phi_L = \phi_L(\xi) \quad (4.24.)$$

Déterminons à présent les axes locaux et la matrice de rotation qui les lie aux axes globaux :

\underline{e}_R est normal à la frontière et dirigé vers l'intérieur du solide
 \underline{e}_S est tangent à la frontière.

Leurs longueurs sont unitaires. La succession des noeuds de l'élément définit les côtés intérieurs et extérieurs au solide.

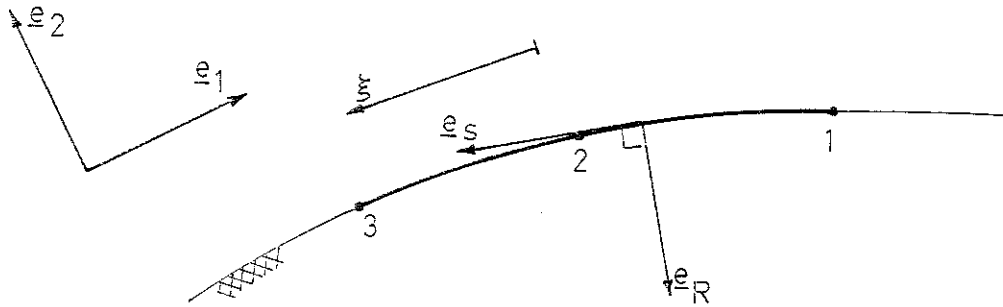


Figure 4.3. - axes locaux à la frontière.

On a de suite

$$\begin{cases} \underline{e}_S = \left(\frac{dx_1}{d\xi} \underline{e}_1 + \frac{dx_2}{d\xi} \underline{e}_2 \right) / \frac{ds}{d\xi} \\ \underline{e}_R = \left(-\frac{dx_2}{d\xi} \underline{e}_1 + \frac{dx_1}{d\xi} \underline{e}_2 \right) / \frac{ds}{d\xi} \end{cases} \quad (4.25.)$$

avec le jacobien unidimensionnel

$$\frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (4.26.)$$

La matrice de rotation est donc :

$$\underline{R} = \frac{1}{\frac{ds}{d\xi}} \begin{bmatrix} -\frac{dx_2}{d\xi} & \frac{dx_1}{d\xi} \\ \frac{dx_1}{d\xi} & \frac{dx_2}{d\xi} \end{bmatrix} \quad (4.27.)$$

Elle lie les deux systèmes d'axes

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_R \\ \underline{e}_S \end{bmatrix} = \underline{R} \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{bmatrix} \quad (4.28.)$$

La matrice de rotation a les propriétés :

$$\underline{R}^{-1} = \underline{R}^T = \underline{R} \quad (4.29.)$$

$$\det (\underline{R}) = 1$$

Le vecteur charge \underline{p} a pour composantes la pression p et le frottement τ , positifs dans la direction des axes locaux

$$\underline{p}^T = \langle p, \tau \rangle \quad (4.30.)$$

Evaluons à présent la puissance virtuelle :

$$\begin{aligned} \delta W_E &= \int_a \underline{p}^T \underline{R} \delta \underline{v} \, da \\ &= \int_{-1}^{+1} \underline{p}^T \underline{R} \delta \underline{v} \, t \frac{ds}{d\xi} \, d\xi \end{aligned} \quad (4.31.)$$

où t est l'épaisseur, généralement unitaire en état plan (en état plan de contrainte, les charges sont exprimées par unité de longueur), et égale au rayon en état axisymétrique (en considérant un secteur d'un radian). Par intégration numérique de GAUSS (à deux ou trois points), les forces nodales énergétiquement équivalentes aux charges extérieures sont :

$$\begin{cases} F_{L1} = \sum_{PI} \left(-p \frac{dx_2}{d\xi} + \tau \frac{dx_1}{d\xi} \right) \phi_L W \\ F_{L2} = \sum_{PI} \left(p \frac{dx_1}{d\xi} + \tau \frac{dx_2}{d\xi} \right) \phi_L W \end{cases} \quad (4.32.)$$

où W est le poids d'intégration.

Le jacobien $\frac{ds}{d\xi}$ apparaît au dénominateur de la matrice de rotation et au numérateur dans la transformation de coordonnées $(x_1, x_2) \rightarrow (\xi)$. Ces deux contributions se détruisent.

Dans le cas axisymétrique, les forces nodales (4.32.) doivent être multipliées par le rayon $r = x_1$.

L'expression (4.31.) de la puissance virtuelle montre qu'au vecteur charge en axes locaux \underline{p} est conjugué le vecteur vitesses perturbées en axes locaux

$$\delta \underline{V} = \underline{R} \delta \underline{v} \quad (4.33.)$$

4.2.4.3. Le problème du contact en état plan ou axisymétrique.

L'étude du contact unilatéral avec frottement demande le calcul de la distance et de la vitesse entre la frontière de la structure et une fondation. Les relations (4.31.) et (4.33.) montrent que la distance et la vitesse, qui sont conjuguées aux charges de surfaces, doivent être exprimées comme ces dernières en axes locaux.

Nous développons ici deux types de fondation : une ligne parabolique définie par trois noeuds, pouvant dégénérer en une ligne droite, et une circonférence. Etudions d'abord la ligne parabolique. Nous utilisons à nouveau la formulation isoparamétrique pour définir les coordonnées et les vitesses de tout point de la fondation en fonction des valeurs nodales

$$\begin{cases} \underline{x}^f = \phi_L \underline{x}_L^f \\ \underline{v}^f = \phi_L \underline{v}_L^f \end{cases} \quad (4.34.)$$

L'indice supérieur f indique que les grandeurs se rapportent à la fondation.

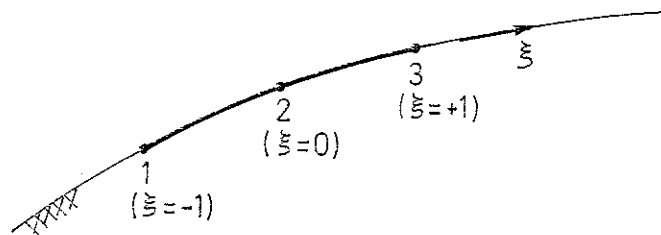


Figure 4.3. - Fondation parabolique isoparamétrique.

D'autre part, si \underline{x}^S est un point de la structure, \underline{e}_R la normale intérieure unitaire en ce point et d la distance à \underline{x}^S , l'équation de la droite normale à la structure est

$$\underline{x} = \underline{x}^S + d \underline{e}_R \quad (4.35.)$$

A l'intersection de la normale et de la fondation, la distance d et la coordonnée isoparamétrique ξ sont données par l'équation vectorielle du second degré

$$\underline{x}^S + d \underline{e}_R = \phi_L(\xi) \underline{x}_L^f \quad (4.36.)$$

On obtient ainsi deux couples de valeurs, (d_1, ξ_1) et (d_2, ξ_2) . Com-

ment choisir l'un des deux ? Deux conditions sont immédiates :

$$d > 0 \quad (4.37.)$$

vu l'orientation de \underline{e}_R comme normale intérieure. Sinon, la frontière et la fondation ne sont pas en contact

$$-1 \leq \xi \leq 1 \quad (4.38.)$$

sinon le point de contact ne se situe pas entre le 1er et le 3e noeud de définition de la frontière. Ces deux conditions ne suffisent pas toujours à éliminer une au moins des deux intersections possibles.

La comparaison des normales à la structure et à la fondation au point d'intersection permet d'éliminer en toute sécurité un des points, qui représente un faux contact (fig. 4.4.).

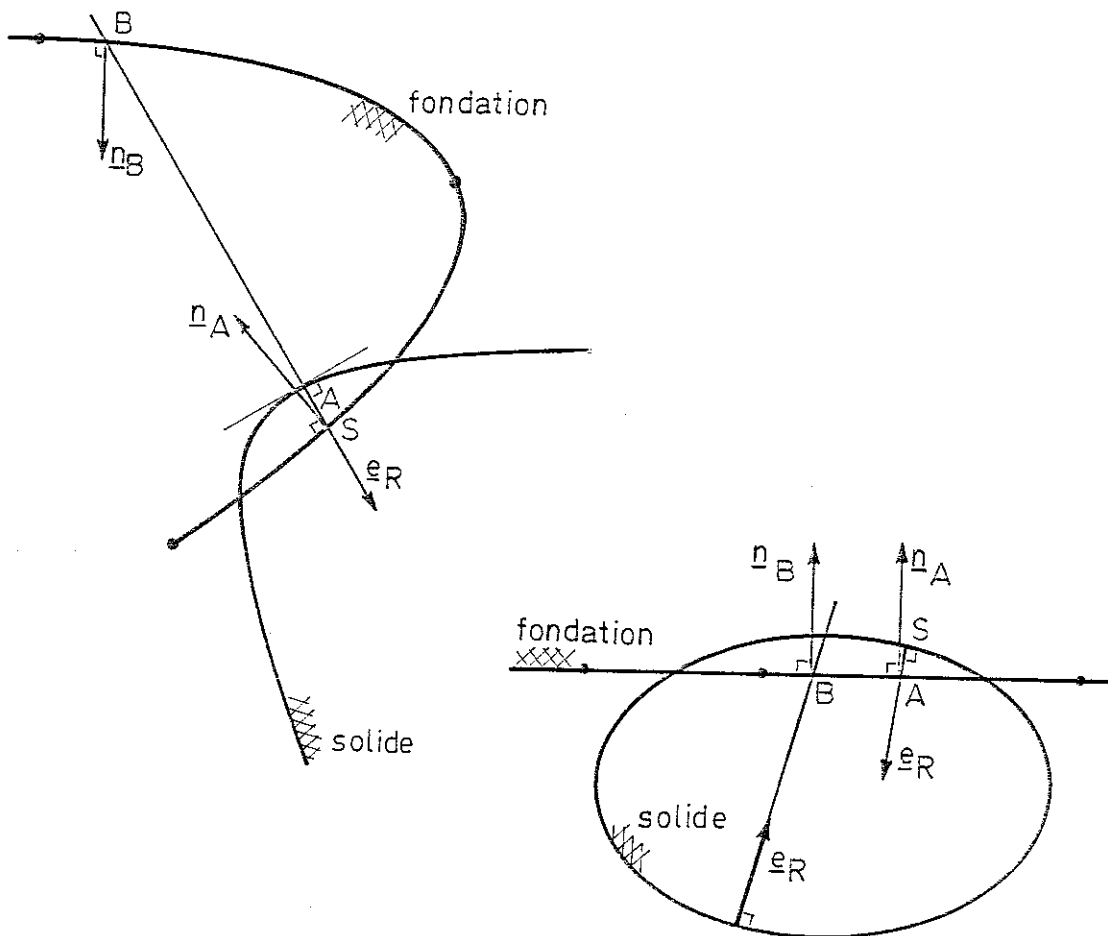


Figure 4.4. - vrai et faux contact.

Dans les deux cas représentés, la normale \underline{e}_R à la structure intersecte la fondation en A et B. En A, la structure et la fondation s'interpénètrent, le contact est vrai. En B, le contact est faux. Le produit scalaire des vecteurs normales intérieurs à la structure et à la fondation est négatif en A et positif en B. Son signe est donc un critère efficace lorsque la fondation est composée d'un arc de parabole.

$$\left| \begin{array}{ll} \underline{e}_R \cdot \underline{n}_A < 0 & \text{contact} \\ \underline{e}_R \cdot \underline{n}_B > 0 & \text{décollement} \end{array} \right. \quad (4.39.)$$

Ce ne serait plus le cas si elle était composée d'une série de paraboles de courbures inversées (figure 4.5.), considérées simultanément dans un élément de frontière.

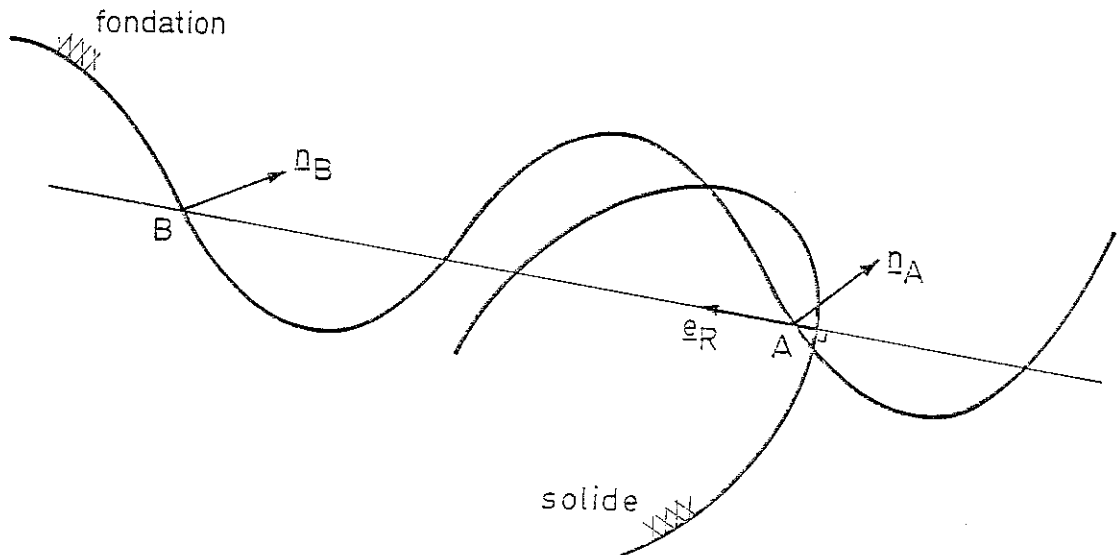


Figure 4.5.

Le contact se produit-il en A ou en B ? Nous ne possédons pas de critère précis pour ce type de géométrie. L'utilisateur doit se prémunir de cette ambiguïté par une modélisation appropriée, en limitant le nombre de paraboles prises en compte simultanément.

Il faut encore déterminer la vitesse relative de la fondation et du solide selon l'axe \underline{e}_s tangent au solide. La formule (3.125.) établit la procédure à suivre. Elle tient compte de la vitesse de rotation \dot{R} du trièdre local.

Nous pouvons évaluer les forces nodales énergétiquement équivalentes aux pressions et frottements appliqués par le solide à la fondation et relatives aux noeuds de la fondation. Le processus est équivalent à celui de la détermination des forces nodales sur l'élément modélisant une frontière chargée (paragraphe 4.2.4.2.). Les équations (4.32.) sont donc immédiatement valables, à condition que ϕ_L représente la valeur des fonctions d'interpolation relatives aux noeuds de *fondation*,

au point d'intersection dont la coordonnée ξ a été calculée par (4.36.). Les forces nodales ainsi obtenues se placent sur le même pied que les autres réactions, à condition que les noeuds de définition de la fondation soient bloqués. Elles assurent donc l'équilibre de translation des forces appliquées et des réactions.

Etudions à présent une fondation circulaire. La circonférence est définie par son centre \underline{x}^C , son rayon R et l'angle θ , suivant la rotation d'un point quelconque de la fondation. Ces données sont introduites à l'aide de deux noeuds. Le 1er est situé au centre du cercle. Le second a pour "coordonnées" le rayon R et l'angle θ . Sa position n'a donc aucune signification physique. Mais l'utilisation du formalisme nodal permet à l'utilisateur de modifier la géométrie de la fondation comme il impose le déplacement d'un noeud quelconque. Elle permet également de calculer les forces nodales énergétiquement équivalentes à la pression et au frottement appliqués à la fondation, soit les réactions horizontales et verticales sur l'axe du cylindre, et le couple dû au frottement.

L'équation de la circonférence est :

$$\begin{cases} \underline{x} = \underline{x}^C + R \underline{e}_\phi \\ \underline{e}_\phi^T = \langle \sin \phi, \cos \phi \rangle \end{cases} \quad (4.40.)$$

où \underline{e}_ϕ est un vecteur unitaire ayant pour origine le centre, et incliné de l'angle ϕ sur l'axe \underline{e}_2 .

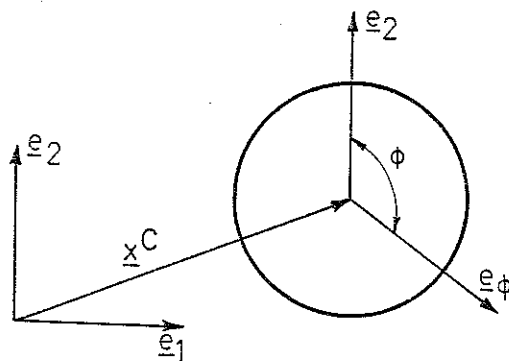


Figure 4.6.

À l'intersection de la normale au solide (4.35.) et de la fondation (4.40.), la distance d et l'angle ϕ sont donnés par l'équation vectorielle :

$$\underline{x}^S + d \underline{e}_R = \underline{x}^C + R \underline{e}_\phi \quad (4.41.)$$

A nouveau, deux valeurs du couple (d, ϕ) sont obtenues.

Les critères de distance négative (4.38.) et de produit scalaire des normales intérieures négatif (4.39.) doivent être respectés comme précédemment et permettent d'éliminer au moins une des solutions.

La vitesse du point d'intersection de la normale à la structure avec la fondation est obtenue par dérivation de (4.40.) :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \underline{x}^C + \left(\frac{d}{dt} R\right) \underline{e}_{-\phi} + R \frac{d}{dt} \underline{e}_{-\phi} \quad (4.42.)$$

avec

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$

car tous les points de la circonférence tournent à la même vitesse θ . L'équation (4.42.) est la seule dans laquelle intervient le paramètre θ et seule sa dérivée apparaît. La vitesse relative tangente s'obtient alors classiquement.

Les forces nodales associées aux 4 "coordonnées nodales" de la fondation $(\underline{x}^C, R, \phi)$ peuvent être calculées. Pour le centre \underline{x}^C , les équations (4.32.) sont d'application, à condition de poser :

$$\phi_L = 1. \quad (4.43.)$$

donc

$$\begin{cases} F_{c1} &= \sum_{PI} \left(-p \frac{dx_2}{d\xi} + \tau \frac{dx_1}{d\xi}\right) W \\ F_{c2} &= \sum_{PI} \left(p \frac{dx_1}{d\xi} + \tau \frac{dx_2}{d\xi}\right) W. \end{cases} \quad (4.44.)$$

Si on admet qu'au point de contact, la fondation et le solide ont des normales de même orientation, les forces nodales associées au rayon R et à l'angle θ sont simplement :

$$\begin{cases} F_R &= \sum_{PI} p W \frac{ds}{d\xi} \\ F_\theta &= \sum_{PI} \tau W \frac{ds}{d\xi} \end{cases} \quad (4.45.)$$

En fait, vu la technique de pénalisation (cf. chapitre 3), les directions des normales ne coïncident pas parfaitement, et les forces nodales sont ainsi calculées approximativement. Ceci n'entraîne toutefois aucun problème, car la seule utilité de (4.45.) est de renseigner l'utilisateur du modèle sur la sollicitation du cylindre.

Les forces nodales (4.45.) ne sont pas utilisées par le programme.

4.2.4.4. L'état tridimensionnel.

La frontière est une surface. Les éléments finis de frontière doivent être compatibles du point de vue des déplacements et des coordonnées avec les éléments de volume utilisés : aux briques paraboliques curvilignes à 20 noeuds sont associés des quadrilatères paraboliques curvilignes à 8 noeuds. Les coordonnées actuelles et leurs perturbations sont

$$\begin{cases} \underline{x} = \phi_L \underline{x}_L \\ \delta \underline{v} = \phi_L \delta \underline{v}_L \end{cases} \quad (4.46.)$$

avec

$$\phi_L = \phi_L(\xi, \eta) \quad (4.47.)$$

Choisissons des axes locaux et déterminons la matrice de rotation qui les lie aux axes globaux. Pour cela nous utilisons deux axes locaux issus naturellement du développement de l'élément fini isoparamétrique: les axes isoparamétriques $\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta$ liés aux coordonnées isoparamétriques ξ, η (figure 4.7.).

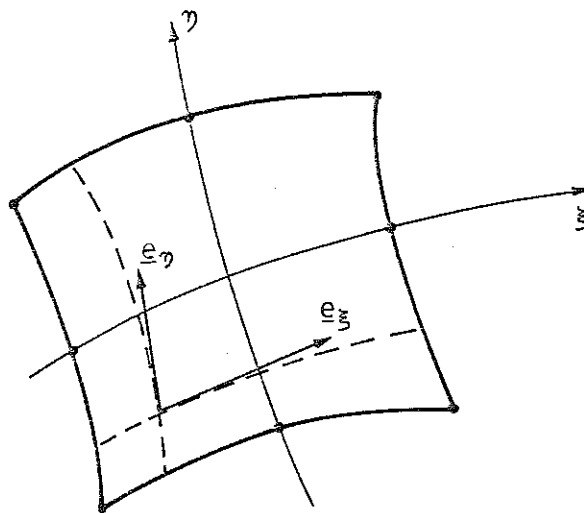


Figure 4.7. - Axes et coordonnées isoparamétriques.

Ces axes sont tangents à la surface frontière mais ne sont ni normés ni orthogonaux. Leurs composantes sont :

$$\begin{aligned} \underline{e}_\xi^T &= \left\langle \frac{\partial x_1}{\partial \xi}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \right\rangle \\ \underline{e}_\eta^T &= \left\langle \frac{\partial x_1}{\partial \eta}, \frac{\partial x_2}{\partial \eta}, \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \right\rangle \end{aligned} \quad (4.48.)$$

Les axes locaux se calculent alors aisément.

\underline{e}_R est normal à la frontière et dirigé vers l'intérieur du solide :

$$\underline{e}_R = \frac{\underline{e}_\xi \wedge \underline{e}_\eta}{|\underline{e}_\xi \wedge \underline{e}_\eta|} \quad (4.49.)$$

Le sens de \underline{e}_R dépend de l'ordre de numérotation des noeuds de l'élément.

\underline{e}_S est parallèle à \underline{e}_ξ (ce choix est arbitraire. \underline{e}_S doit uniquement être tangent à la surface).

$$\underline{e}_S = \underline{e}_\xi / |\underline{e}_\xi| \quad (4.50.)$$

\underline{e}_T complète le trièdre orthonormé :

$$\underline{e}_T = \underline{e}_R \wedge \underline{e}_S \quad (4.51.)$$

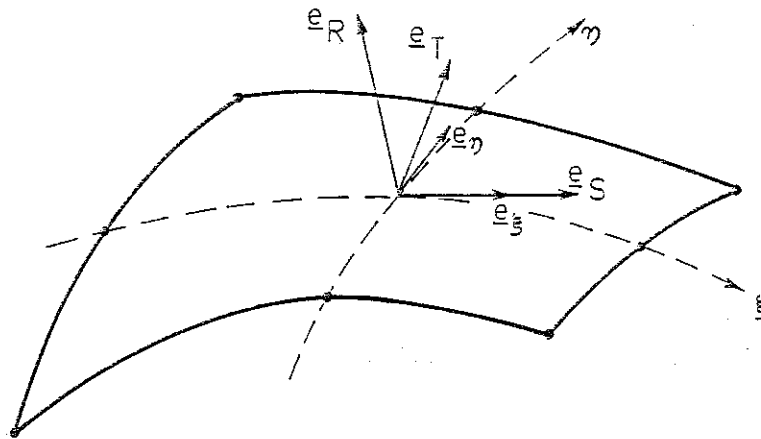


Figure 4.8. - Trièdre orthonorme local.

La matrice de rotation se déduit aisément des relations (4.49.) à (4.51.). Elle lie les deux systèmes d'axes

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_R \\ \underline{e}_S \\ \underline{e}_T \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix} \quad (4.52.)$$

Son expression analytique est complexe, suite notamment aux deux produits vectoriels et aux divisions par les normes.

Le vecteur charge \underline{p} a pour composante la pression p et les frottements selon les axes \underline{e}_S et \underline{e}_T , positifs dans la direction des axes locaux.

$$\underline{p}^T = \langle p, \tau_S, \tau_T \rangle \quad (4.53.)$$

(Il est objectif car les axes $\underline{e}_R, \underline{e}_S, \underline{e}_T$ sont liés au solide).

Evaluons la puissance virtuelle :

$$\delta W_E = \int_a \underline{p}^T \underline{R} \delta \underline{v} da \quad (4.54.)$$

La transformation de l'intégrale des coordonnées physiques aux coordonnées isoparamétriques fait apparaître la relation :

$$da = |\underline{e}_\xi \wedge \underline{e}_\eta| d\xi d\eta \quad (4.55.)$$

donc

$$\delta W_E = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{p}^T \underline{R} \delta \underline{v} |\underline{e}_\xi \wedge \underline{e}_\eta| d\xi d\eta \quad (4.56.)$$

Cette expression est intégrée numériquement selon le schéma de GAUSS (à 4 ou 9 points pour un quadrilatère parabolique à 8 noeuds). Les forces nodales énergétiquement équivalentes aux charges extérieures sont :

$$\begin{bmatrix} F_{L1} \\ F_{L2} \\ F_{L3} \end{bmatrix} = \sum_{PI} \underline{R}^T \underline{p} \phi_L |\underline{e}_\xi \wedge \underline{e}_\eta| W \quad (4.57.)$$

4.2.4.5. Le contact en état tridimensionnel.

Pour l'étude du contact unilatéral avec frottement, il est nécessaire de calculer la distance et la vitesse relative entre la surface du solide et une fondation. La relation (4.54.) montre que la distance et la vitesse sont conjuguées aux charges de surface \underline{p} et doivent donc être calculées comme ces dernières en axes locaux ($\underline{e}_R, \underline{e}_S, \underline{e}_T$).

Nous développons ici trois types de fondation : un plan défini par trois noeuds, un cylindre droit défini par deux noeuds sur l'axe, un rayon et un angle de rotation, et un tronc de cône défini par deux noeuds sur l'axe, deux rayons et un angle de rotation.

Etudions en premier lieu le plan. Nous utilisons la formulation isoparamétrique pour définir les coordonnées et les vitesses de tout point en fonction de celle des trois noeuds de définition (non colinéaires)

$$\begin{cases} \underline{x}^f = \phi_L \underline{x}_L^f \\ \underline{v}^f = \phi_L \underline{v}_L^f \end{cases} \quad L = 1,3 \quad (4.58.)$$

L'indice supérieur f indique que les grandeurs se rapportent à la fondation. Les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{cases} \phi_1 = 1 - \xi - \eta \\ \phi_2 = \xi \\ \phi_3 = \eta \end{cases} \quad (4.59.)$$

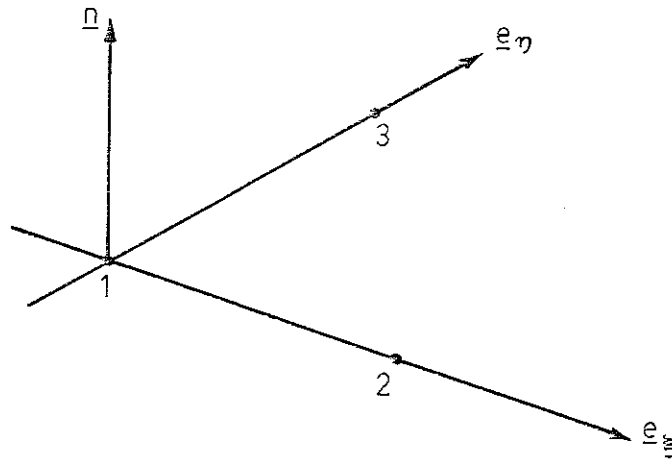


Figure 4.9. - Plan de fondation.

Les coordonnées isoparamétriques ξ, η ne sont pas bornées (au contraire de ce qui se passe dans un élément), afin de représenter la totalité du plan.

Si \underline{x}^S est un point du solide, \underline{e}_R la normale intérieure unitaire en ce point (4.49.) et d la distance à \underline{x}^S , l'équation de la droite normale au solide est

$$\underline{x} = \underline{x}^S + d \underline{e}_R \quad (4.60.)$$

A l'intersection de la normale et de la fondation, la distance d et les coordonnées isoparamétriques ξ, η sont données par l'équation vectorielle du premier degré

$$\underline{x}^S + d \underline{e}_R = \phi_i(\xi, \eta) \underline{x}_i^f \quad (4.61.)$$

qui a généralement une solution unique (Si la normale \underline{e}_R et les axes $\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta$ sont coplanaires, il n'y a pas de solution).

Cette solution est-elle physiquement acceptable, ou, en d'autres termes, y a-t-il contact ? Oui, si deux conditions sont remplies :

$$\begin{cases} d > 0 \\ \underline{n} \cdot \underline{e}_R < 0 \end{cases} \quad (4.62.)$$

où \underline{e}_R et \underline{n} sont les normales intérieures au solide et à la fondation.

S'il y a contact, il faut calculer la vitesse relative du solide et de la fondation. La vitesse absolue de la fondation au point d'intersection est calculée par (4.58.) où l'on introduit les coordonnées isoparamétriques tirées de (4.61.). Il suffit alors de lui soustraire la vitesse du point du solide et de projeter le vecteur vitesse relative ainsi obtenu dans les axes locaux à l'aide de la matrice de rotation \underline{R} , puis de le corriger par la vitesse de rotation $\dot{\underline{R}}$ (3.125.).

Les forces nodales énergétiquement équivalentes aux charges de surface \underline{p} et relatives aux noeuds de fondation sont calculées par (4.57.), où ϕ_L représente à présent les trois fonctions d'interpolation de la fondation calculées au point d'intersection.

Etudions à présent une fondation en forme de cylindre droit. L'axe du cylindre est défini par deux noeuds \underline{x}^{C1} et \underline{x}^{C2} . Nous considérons uniquement la portion de cylindre comprise entre les sections droites en ces deux noeuds. L'axe a pour équation isoparamétrique

$$\begin{cases} \underline{x} = \phi_1 \underline{x}^{C1} + \phi_2 \underline{x}^{C2} \\ \phi_1 = 1 - \xi \\ \phi_2 = \xi \end{cases} \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4.63.)$$

Le rayon R et l'angle θ sont introduits à l'aide d'un troisième noeud sans signification physique. Comme précédemment, seules les variations de θ sont significatives, sa valeur initiale n'a aucune importance.

Afin d'écrire l'équation de la surface cylindrique, considérons un système d'axes locaux à la fondation (figure 4.10.) :

$$\begin{cases} \underline{e}_1^f = (\underline{x}^{C2} - \underline{x}^{C1}) / (|\underline{x}^{C2} - \underline{x}^{C1}|) \\ \underline{e}_2^f = \underline{e}_1^f \wedge \underline{e}_j \\ \underline{e}_3^f = \underline{e}_1^f \wedge \underline{e}_2^f \end{cases} \quad (4.64.)$$

\underline{e}_j est l'axe global "le plus orthogonal" à \underline{e}_1^f , qui minimise $(\underline{e}_j^T \underline{e}_1^f)$. En effet, le couple $(\underline{e}_2^f, \underline{e}_3^f)$ peut être orienté dans n'importe quelle direction pourvu qu'il soit orthogonal à \underline{e}_1^f . Le choix proposé est arbitraire. Il évite tout problème numérique.

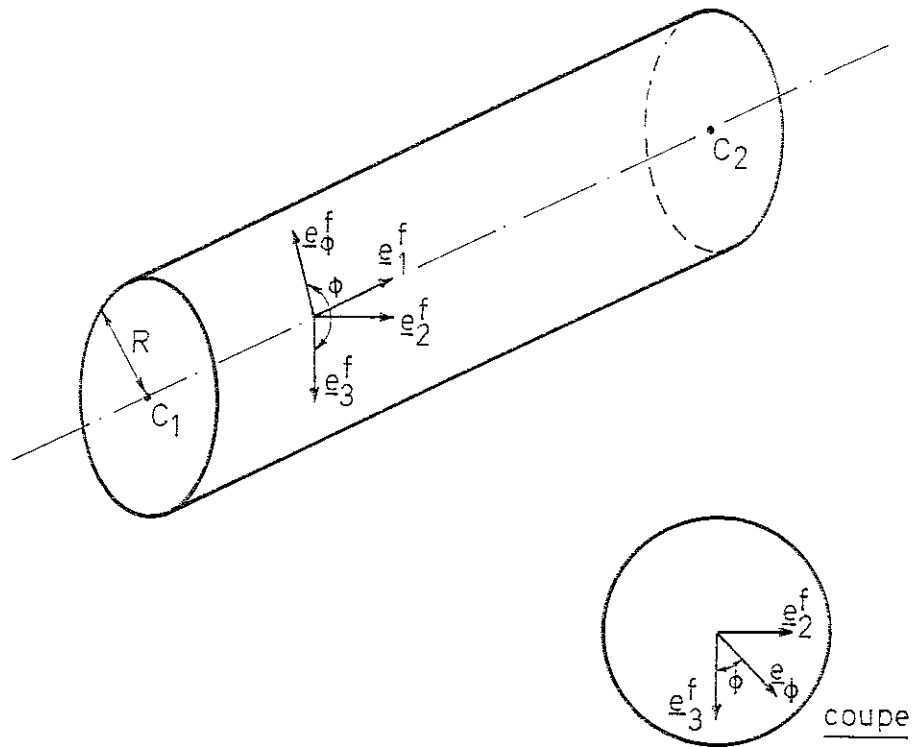


Figure 4.10. - Fondation cylindrique.

Introduisons une coordonnée angulaire ϕ et l'axe associé \underline{e}_ϕ^f (fig. 4.10.)

$$\underline{e}_\phi^f = \sin \phi \underline{e}_2^f + \cos \phi \underline{e}_3^f \quad (4.65.)$$

Dès lors, tout point de la surface de la fondation cylindrique est repéré par les coordonnées ξ, ϕ et a pour coordonnées

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \phi_1 \underline{x}^{C1} + \phi_2 \underline{x}^{C2} + R \underline{e}_\phi^f \\ &= \underline{x}^{C1} + \xi (|\underline{x}^{C2} - \underline{x}^{C1}|) \underline{e}_1^f + R \underline{e}_\phi^f \end{aligned} \quad (4.66.)$$

A l'intersection de la normale au solide et de la fondation, la distance d et les coordonnées cylindriques ξ, ϕ sont données par l'équation vectorielle non linéaire

$$\underline{x}^S + d \underline{e}_R = \underline{x}^{C1} + \xi (|\underline{x}^{C2} - \underline{x}^{C1}|) \underline{e}_1^f + R \underline{e}_\phi^f \quad (4.67.)$$

Si les racines en sont réelles, deux points de contact sont possibles. Pour les séparer, la technique classique est d'application.

$$\begin{cases} d > 0 \\ \underline{n} \cdot \underline{e}_R < 0 \end{cases} \quad (4.62.)$$

où

$$\underline{n} = - \underline{e}_\phi \quad (4.68.)$$

est la normale intérieure au cylindre.

La vitesse absolue du point d'intersection sur la fondation s'obtient par dérivation de (4.66.) :

$$\underline{v} = \phi_1 \underline{v}^{C1} + \phi_2 \underline{v}^{C2} + \frac{dR}{dt} \underline{e}_\phi^f + R \frac{d}{dt} \underline{e}_\phi^f \quad (4.69.)$$

où

$$\frac{d}{dt} \underline{e}_\phi^f = \dot{\theta} \cos \phi \underline{e}_2^f - \dot{\theta} \sin \phi \underline{e}_3^f + \sin \phi \frac{d}{dt} \underline{e}_2^f + \cos \phi \frac{d}{dt} \underline{e}_3^f \quad (4.70.)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = \frac{d}{dt} \theta = \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \underline{e}_2^f = \frac{d}{dt} \underline{e}_1^f \wedge \underline{e}_j$$

$$\frac{d}{dt} \underline{e}_3^f = \frac{d}{dt} \underline{e}_1^f \wedge \underline{e}_2^f + \underline{e}_1^f \wedge \left(\frac{d}{dt} \underline{e}_1^f \wedge \underline{e}_j \right)$$

La vitesse relative en axes locaux au solide s'obtient alors aisément.

Les forces nodales énergétiquement équivalentes aux charges de surface et associées aux paramètres géométriques de fondation sont plus difficiles à déterminer, ainsi que le montrent les expressions (4.70.). La lourdeur du calcul ne justifie pas les résultats escomptés, nous semble-t-il (Ces résultats n'ont aucune utilité pour le fonctionnement du programme). Le couple peut être aisément évalué. Il vaut :

$$F_\theta = \sum_{PI} p^T R \underline{e}_{\phi + \frac{\pi}{2}} \left| \underline{e}_\xi \wedge \underline{e}_\eta \right| W \quad (4.71.)$$

avec

$$\underline{e}_{\phi + \frac{\pi}{2}} = \cos \phi \underline{e}_2^f - \sin \phi \underline{e}_3^f$$

Enfin, étudions une fondation tronconique. Comme précédemment (4.63.) l'axe est défini et limité par deux noeuds \underline{x}^{C1} , \underline{x}^{C2} . Les rayons aux extrémités R^1 , R^2 et l'angle θ complètent la description et sont introduits à l'aide d'un troisième noeud sans signification physique. Le système d'axes locaux (4.64.) (4.65.) reste d'application.

L'expression du rayon change :

$$R = \phi_1 R_1 + \phi_2 R_2 \quad (4.72.)$$

et donc l'équation du tronç de cône est

$$\underline{x} = \phi_1 \underline{x}^{C1} + \phi_2 \underline{x}^{C2} + (\phi_1 R_1 + \phi_2 R_2) \underline{e}_\phi^f \quad (4.73.)$$

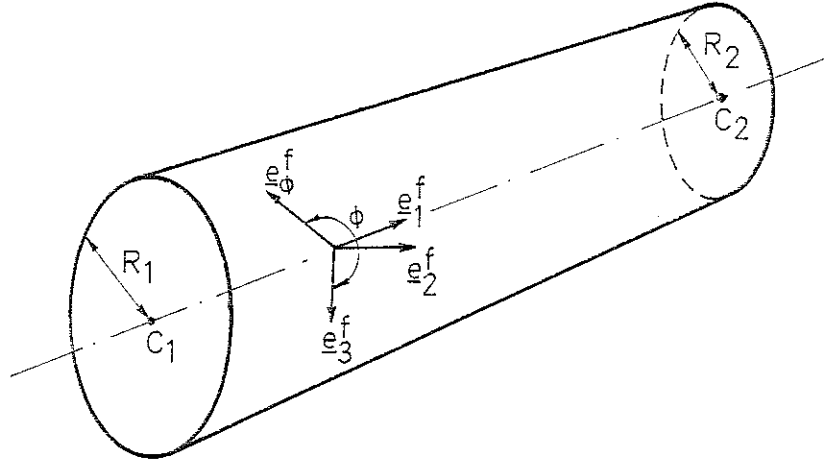


Figure 4.11. - Fondation tronconique - perspective.

L'intersection se produit pour des valeurs de la distance d et des coordonnées cylindriques ξ, ϕ données par l'équation vectorielle non linéaire

$$\underline{x}^S + d \underline{e}_R = \phi_1 \underline{x}^{C1} + \phi_2 \underline{x}^{C2} + (\phi_1 R_1 + \phi_2 R_2) \underline{e}_\phi^f \quad (4.74.)$$

Si les racines en sont réelles, deux points de contact sont possibles. Pour les séparer, les conditions (4.62.) sont d'application. Cette fois, la normale intérieure est

$$\underline{n} = -\cos \alpha \underline{e}_\phi + \sin \alpha \underline{e}_1^f$$

avec

$$\alpha = \arctg \frac{R_2 - R_1}{|\underline{x}^{C2} - \underline{x}^{C1}|} \quad (4.75.)$$

La vitesse absolue du point sur la fondation est :

$$\underline{v} = \phi_1 \underline{v}^{C1} + \phi_2 \underline{v}^{C2} + (\phi_1 \frac{d}{dt} R_1 + \phi_2 \frac{d}{dt} R_2) \underline{e}_\phi^f + R \frac{d}{dt} \underline{e}_\phi^f \quad (4.76.)$$

où $\frac{d}{dt} \underline{e}_\phi^f$ est donné par (4.70.).

Le couple s'obtient par (4.71.). Les autres efforts généralisés appliqués par le cylindre ne sont pas évalués.

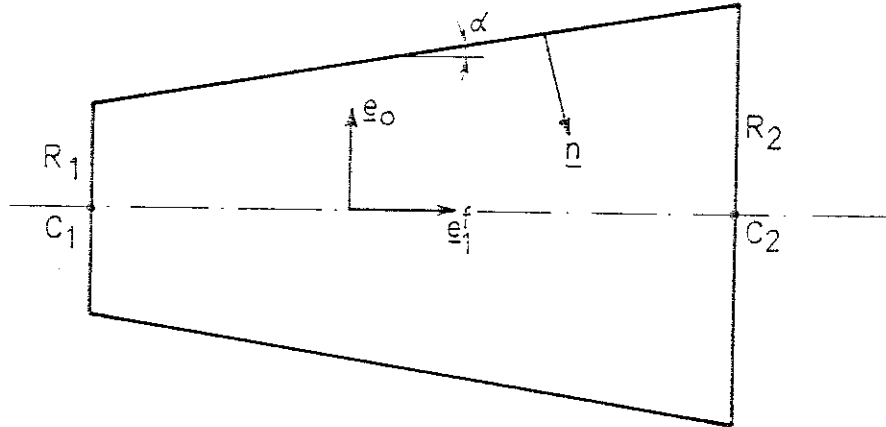


Figure 4.12. - Fondation tronconique - Coupe.

4.2.5. Le chargement en volume : le poids propre.

Dans de nombreux cas, et en particulier dans l'étude non linéaire des déformations du sol, il est nécessaire de prendre en compte le poids propre du solide. Dans ce paragraphe, nous évaluons la contribution du poids propre aux forces nodales issues du calcul de la puissance virtuelle extérieure. Celle-ci vaut :

$$\delta W_E = \int_V \rho \underline{P}^T \delta \underline{v} \, dv \quad (2.69.)$$

ρ est la masse volumique, \underline{P} est le vecteur force par unité de masse. Dans l'étude du poids propre, \underline{P} est donc l'accélération de la pesanteur. C'est une constante (en axes globaux constants).

Intégrons sur le volume isoparamétrique. En état plan, il vient :

$$\delta W_E = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho \underline{P}^T \phi_L \det(\underline{J}) \, d\xi \, d\eta \, \delta v_L \quad (4.77.)$$

Le déterminant $\det(\underline{J})$ du jacobien \underline{J} du passage de la configuration actuelle γ à la configuration isoparamétrique égale le changement de volume lors de cette transformation. Or, le volume dans la configuration isoparamétrique est constant. Par contre, le volume de la configuration actuelle varie avec les déformations. La masse volumique $\rho \cdot \det(\underline{J})$ est constante pendant la déformation. L'intégrale (4.77.) peut donc être calculée dans la configuration initiale. Les forces nodales énergétiquement équivalentes au poids propre sont :

$$F_{Li} = \sum_{PI} \rho \det(\underline{J}) P_i \phi_L W \quad (4.78.)$$

Elles sont calculées une fois pour toutes, lors de l'initialisation des diverses variables du programme.

4.3. LA CONDUCTION THERMIQUE ET L'ÉCOULEMENT DE FLUIDE EN MILIEU POREUX.

La puissance virtuelle intérieure a été évaluée au chapitre 2 :

$$\delta W_I = \int_V (f^V \delta p - f_i \frac{\partial \delta p}{\partial x_i}) dv \quad (2.83.)$$

Dans un contexte de grandes déformations, cette puissance est évaluée dans la configuration actuelle γ . v est donc le volume actuel, après déformation.

Les inconnues sont les pressions (les températures) p telles que les flux \underline{f} et f^V et les gradients de pression, \underline{M} soient en équilibre avec les débits et pressions imposés.

4.3.1. L'état plan.

La définition de la géométrie et le jacobien de la transformation de coordonnées $(x_1, x_2) \rightarrow (\xi, \eta)$ ont été présentés au paragraphe 4.2.1. formules (4.4.) à (4.7.). Il vient donc :

$$\frac{\partial \delta p}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_L}{\partial x_j} \delta p_L \quad (4.79.)$$

et

$$f^V \delta p - f_i \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} = (f^V \phi_L - f_i \frac{\partial \phi_L}{\partial x_i}) \delta p_L \quad (4.80.)$$

L'intégration volumique de (4.80.) est réalisée numériquement dans l'espace isoparamétrique (ξ, η) selon le schéma de GAUSS:

$$\delta W_I = \sum_{PI} (f^V \phi_L - f_1 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2}) t \det(\underline{J}) W \delta p_L \quad (4.81.)$$

où t est l'épaisseur de solide étudiée.

Les débits nodaux énergétiquement équivalents aux flux répartis, qui sont conjugués aux pressions nodales, sont :

$$F_L = \sum_{PI} (f^V \phi_L - f_1 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2}) t \det(\underline{J}) W \quad (4.82.)$$

4.3.2. L'état axisymétrique.

Il n'existe aucun flux circonférentiel. Dès lors, la seule différence entre l'état plan et l'état axisymétrique réside dans l'épaisseur prise en compte. Ici, on a :

$$t = r = x_1 \quad (4.17.)$$

si l'on étudie un secteur d'un radian.

Les débits nodaux énergétiquement équivalents aux flux sont donc :

$$F_L = \sum_{PI} (f^V_{\phi_L} - f_1 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2}) x_1 \det(\underline{J}) W \quad (4.83.)$$

4.3.3. L'état tridimensionnel.

Le développement se déduit aisément des paragraphes précédents 4.3.1. et 4.2.3. Les débits nodaux énergétiquement équivalents aux flux sont :

$$F_L = \sum_{PI} (f^V_{\phi_L} - f_1 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} - f_3 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_3}) \det(\underline{J}) W \quad (4.84.)$$

4.3.4. Les frontières à débits imposés.

4.3.4.1. Introduction.

Nous étudions dans ce paragraphe les frontières sur lesquelles soit le débit soit une relation entre le débit et la pression (la température) est imposée. Ces débits sont définis par unité de surface (dans la configuration actuelle γ , en présence de grandes déformations).

La puissance virtuelle extérieure sur une frontière chargée a été évaluée au chapitre 2 :

$$\delta W_E = \int_a q \delta p da \quad (2.81.)$$

Elle est calculée dans la configuration actuelle γ .

Comme dans le cas des études de grandes déformations, il est intéressant de calculer cette contribution à la puissance virtuelle dans des éléments finis distincts de ceux représentant le solide. Le programme de calcul est ainsi simplifié, et la génération des données allégée.

4.3.4.2. L'état plan ou axisymétrique.

Les développements géométriques ont été présentés au paragraphe 4.2.4.2. Il est cette fois inutile de définir des axes locaux, car le débit est un scalaire. On obtient donc immédiatement les débits nodaux énergétiquement équivalents aux débits de surface.

En état plan

$$F_L = \sum_{PI} q \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \phi_L W \quad (4.85.)$$

En état axisymétrique

$$F_L = \sum_{PI} q \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \phi_L x_1 W \quad (4.86.)$$

vu la forme du jacobien (4.26.).

Dans certains cas, le flux imposé q dépend des pressions (des températures) de la surface et du milieu extérieur. Nous supposons la pression du milieu extérieur uniforme, et nous fournissons cette information par un noeud dont la position géométrique n'a aucune signification, mais dont la pression peut être modifiée par l'utilisateur comme celle de tout autre noeud. A cette pression est conjugué un débit nodal F_e énergétiquement équivalent au débit q imposé par le milieu extérieur :

En état plan

$$F_e = \sum_{PI} q \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} W \quad (4.87.)$$

En état axisymétrique

$$F_e = \sum_{PI} q \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} x_1 W \quad (4.88.)$$

4.3.4.3. L'état tridimensionnel.

Les développements géométriques ont été présentés au paragraphe 4.2.4.3. Le principe du calcul des débits nodaux est identique à celui exposé au paragraphe précédent.

Il vient donc immédiatement :

$$F_L = \sum_{PI} q \phi_L \left| \underline{e}_\xi \wedge \underline{e}_\eta \right| W \quad (4.89.)$$

La pression du milieu extérieur est représentée par un noeud.

Lui est conjuguée le débit nodal :

$$F_e = \sum_{PI} q \left| \underline{e}_\xi \wedge \underline{e}_\eta \right| W \quad (4.90.)$$

4.3.5. Les débits imposés en volume.

Nous calculons dans ce paragraphe les débits nodaux énergétiquement équivalents aux débits imposés en volume.

La puissance virtuelle extérieure est :

$$\delta W_E = \int_V Q \delta p \, dv \quad (2.81.)$$

où le débit Q est donné. Il en résulte immédiatement le débit nodal :

$$F_L = \sum_{PI} Q \phi_L \det(\underline{J}) W \quad (4.91.)$$