

3.1. INTRODUCTION

Le chapitre 2 a été consacré à exprimer l'équilibre en un instant. Les diverses expressions de la puissance virtuelle sont des intégrales, pondérées par une fonction de la géométrie, de l'état de contrainte à l'instant considéré. (Par contrainte, nous entendons flux de fluide en écoulements et flux de chaleur en conduction). Or l'état de contrainte évolue en permanence. Dans ce chapitre, nous posons des équations - les lois constitutives - permettant de calculer cette évolution. Les aspects de mécanique des grandes déformations, de conduction, et d'écoulement en milieu poreux sont envisagés séparément.

Les grandes déformations appellent des développements particuliers: il faut définir des vitesses de variations des contraintes et des déformations conjuguées. Dès lors, de nouvelles considérations géométriques sont nécessaires.

Enfin, dans chaque cas d'analyse, un paragraphe est consacré à l'étude des frontières où une relation entre les efforts et les déplacements est imposée. Cette relation est analysée dans la forme de lois constitutives.

3.2. LES GRANDES DEFORMATIONS MECANIQUES DU SOLIDE.

3.2.1. Introduction.

Ce chapitre est consacré à l'étude de la relation constitutive entre contraintes et déformations. Les grandes déformations impliquent certaines caractéristiques de ces relations, essentiellement aux points de vue constitutif et géométrique. Classiquement, nous disons (comme MANDEL [38]) que les corps élasto-visco-plastiques sont les corps pour lesquels on peut définir à chaque instant dans l'espace des contraintes un domaine élastique borné par une surface (dite surface de plasticité) tel que si la contrainte reste intérieure à ce domaine, les déformations sont réversibles, quelle que soit leur vitesse. Lorsque la contrainte sort de ce domaine, des déformations permanentes (ou irréversibles, plastiques) se produisent. A ce moment, la contrainte dépend du trajet de déformation et en général de la vitesse à laquelle il est décrit (corps viscoplastique).

A température ordinaire toutefois, dans la plupart des corps, les contraintes sont quasi indépendantes de la vitesse de déformation. Ce cas limite est celui de la plasticité classique.

Ainsi, nous sommes conduits à envisager trois types de comportement.

Le comportement élastique est une extrapolation des études de petites déformations; il permet toutefois un bon nombre d'applications, et notamment la vérification du programme d'éléments finis, l'étude de zones annexes des solides, supposées rester en état élastique, l'étude des cas académiques,...

Le comportement élastoplastique est beaucoup plus important. Il apparaît notamment dans le formage à froid des métaux, et dans de nombreux cas de déformations permanentes des structures métalliques, mais aussi dans la plupart des problèmes de sols.

Enfin, le comportement élasto-visco-plastique doit obligatoirement être envisagé si nous souhaitons modéliser les grandes déformations à chaud des métaux (Nous excluons de cette étude les sols élasto-visco-plastiques).

Dans les lois élastoplastiques et élasto-visco-plastiques, il est généralement postulé que l'état actuel peut être défini par la donnée des variables observables (les déformations totales et la température) et d'un certain nombre de variables cachées (ou internes, non observables) que nous appelons variables d'écrouissage. En particulier, la limite du domaine élastique actuel (seuil de plasticité) dépend des variables d'écrouissage. Ces variables peuvent être des scalaires, des vecteurs, des tenseurs d'ordre 2... Dans le cas où l'on se limite à des variables scalaires (une en général), l'écrouissage est isotrope. Un tel modèle représente bien des chemins de chargement relativement proches du chemin radial monotone. Par contre, des chemins de chargement cycliques, oscillant autour de l'origine, ou des chemins complexes occupant plusieurs directions successives dans l'espace des contraintes ne sont pas bien représentés par les modèles à écrouissage scalaire.

Dans cette étude, nous considérons uniquement des matériaux initialement isotropes et le restant au cours de la déformation. Nous excluons donc l'élasticité anisotrope et l'écrouissage cinématique, dont la description requiert une variable interne tensorielle. De même, les modifications de forme de la surface de plasticité, telles que décrites par BENALAL et MARQUIS [54], ne sont pas prises en compte.

Les lois constitutives élastoplastiques et élasto-visco-plastiques sont de type incrémental : elles lient la vitesse de contrainte à la vitesse de déformation et non la contrainte à la déformation. Nous choisissons par homogénéité la même approche en "élasticité" pure, nous décrivons donc une loi hypoélastique (SIDOROFF [42]).

Le problème de contact est étudié à l'aide d'un formalisme semblable à celui d'une loi élastoplastique.

D'autre part, la géométrie des grandes déformations implique également certains problèmes dans la description de l'évolution des contraintes, ainsi que le montre l'exemple suivant. Nous avons fait choix au chapitre précédent du tenseur contrainte de CAUCHY. Considérons une barre soumise à un effort normal N constant. Si cette barre et la force N qui la sollicite subissent une rotation par rapport aux axes fixes $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ (figure 3.1.), les contraintes σ_{ij} , par rapport à ces axes, changent bien qu'en réalité le matériau reste soumis à la même sollicitation.

En effet, au point P d'abscisse intrinsèque ξ , on a

$$\begin{cases} x_1 = \xi \sin \theta \\ x_2 = \xi \cos \theta \end{cases} \quad (3.1.)$$

$$\text{Soit } \sigma_0 = \frac{N}{A} \quad (3.2.)$$

Les contraintes de CAUCHY se déduisent de la figure 3.2.

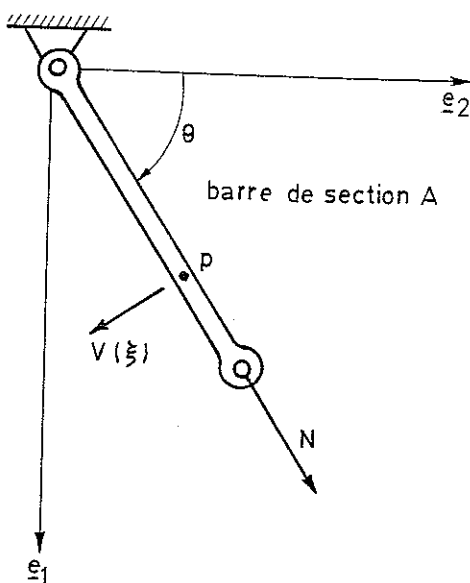


Figure 3.1.

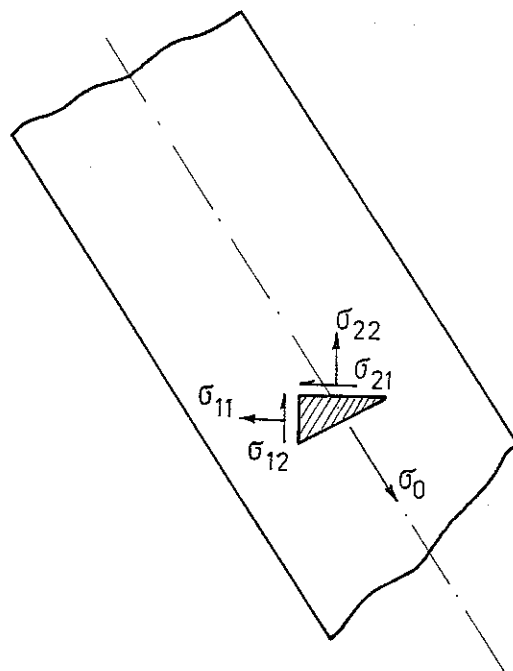


Figure 3.2.

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_0 \cos^2 \theta \\ \sigma_{12} = \sigma_0 \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{22} = \sigma_0 \sin^2 \theta \end{cases} \quad (3.3.)$$

ou encore

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\sigma_0}{\xi^2} (x_2)^2 \\ \sigma_{12} = \frac{\sigma_0}{\xi^2} x_1 x_2 \\ \sigma_{22} = \frac{\sigma_0}{\xi^2} (x_1)^2 \end{cases} \quad (3.4.)$$

Si la barre tourne à vitesse angulaire

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \text{ on a}$$

$$v(\xi) = \xi \cdot \omega \quad (3.5.)$$

$$\text{d'où } v_1 = + \xi \cdot \omega \cdot \cos \theta = + x_2 \cdot \omega$$

$$v_2 = - \xi \cdot \omega \cdot \sin \theta = - x_1 \cdot \omega \quad (3.6.)$$

Il vient alors :

$$\frac{D\sigma_{11}}{Dt} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} \frac{(x_1)^2}{\xi^2} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_2} v_2 \quad (3.7.)$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{D\sigma_{11}}{Dt} = \frac{\sigma_0}{\xi^2} \cdot 2 x_2 v_2 = - 2 \frac{\sigma_0}{\xi^2} x_1 x_2 \cdot \omega \\ \frac{D\sigma_{12}}{Dt} = \frac{\sigma_0}{\xi^2} (x_2 v_1 + x_1 v_2) = \frac{\sigma_0}{\xi^2} (x_2^2 - x_1^2) \omega \\ \frac{D\sigma_{22}}{Dt} = \frac{\sigma_0}{\xi^2} 2 x_1 v_1 = + 2 \frac{\sigma_0}{\xi^2} x_1 x_2 \cdot \omega \end{cases} \quad (3.8.)$$

ce qui prouve bien que les dérivées matérielles des contraintes de CAUCHY sont affectées par une rotation rigide du solide bien que, intrinsèquement, son état de contrainte (σ_0) ne se soit pas modifié. Il faudra donc, dans le développement des lois constitutives, prendre en compte cette particularité et, par des considérations géométriques, séparer les modifications du tenseur contrainte dues aux rotations de corps rigide de celles dues aux déformations proprement dites.

3.2.2. L'aspect géométrique (I): les vitesses de déformation et de contrainte.

Nous avons choisi d'utiliser les contraintes de CAUCHY (qui ne sont pas objectives) dans l'expression de l'équilibre. Il faut donc lier l'évolution des contraintes de CAUCHY à la vitesse de déformation du solide. Ce paragraphe est consacré à l'étude géométrique de la vitesse de déformation, et à la recherche d'un taux de contrainte associé au tenseur vitesse de déformation.

La vitesse d'un point est :

$$\underline{v} = \frac{dx}{dt} \quad (2.1.)$$

Le gradient de vitesse dans la configuration actuelle est donc

$$\underline{L} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \quad (3.9.)$$

Comme le tenseur jacobien \underline{F} dans la formulation de l'équilibre, le gradient de vitesse \underline{L} joue un rôle fondamental dans la formulation des lois constitutives. Décomposons le en ses parties symétriques et anti-symétriques :

$$\begin{aligned} \underline{L} &= \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^T) + \frac{1}{2} (\underline{L} - \underline{L}^T) \\ &= \text{sym } \underline{L} + \text{skw } \underline{L} \end{aligned} \quad (3.10.)$$

Dans la partie symétrique, on reconnaît la vitesse de déformation de CAUCHY, introduite au paragraphe 2.2.3.4. (2.72.):

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \\ \underline{\dot{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^T) \\ &= \text{sym } \underline{L} \end{aligned} \quad (3.11.)$$

La partie antisymétrique du gradient de vitesse est un tenseur vitesse de rotation ("spin" en anglais) :

$$\begin{aligned} \underline{\omega} &= \frac{1}{2} (\underline{L} - \underline{L}^T) \\ &= \text{skw } \underline{L} \end{aligned} \quad (3.12.)$$

Considérons un solide soumis à un déplacement rigide (cf. paragraphe 2.2.1.5.). On a :

$$\underline{F} = \underline{Q}(t) \quad (2.22.)$$

$$\dot{\underline{F}} = \dot{\underline{Q}}(t) \quad (3.13.)$$

$$\rightarrow \underline{L} = \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^{-1} = \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T \quad (3.14.)$$

$$\rightarrow \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T + \underline{Q} \dot{\underline{Q}}^T)$$

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2} (\dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T - \underline{Q} \dot{\underline{Q}}^T) \quad (3.15.)$$

Or

$$\underline{Q} \underline{Q}^T = \underline{I} \quad (2.20.)$$

$$\rightarrow \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T + \underline{Q} \dot{\underline{Q}}^T = 0 \quad (3.16.)$$

Donc

$$\underline{\varepsilon} = \underline{0}$$

$$\underline{\omega} = \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T \quad (3.17.)$$

Donc, le gradient de vitesse n'est pas objectif, mais sa partie symétrique l'est.

Considérons à présent une déformation triaxiale homogène (paragraphe 2.2.1.5.).

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.24.)$$

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} & \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} \end{bmatrix} \quad (3.18.)$$

et donc

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L}$$

$$\underline{\omega} = \underline{0} \quad (3.19.)$$

Ainsi, la partie symétrique du gradient de vitesse est une bonne mesure de la vitesse de déformation, et la partie antisymétrique est une bonne mesure de la rotation d'une particule matérielle. La plupart des vitesses d'évolution des tenseurs déformation présentés au chapitre précédent peuvent s'exprimer en fonction de la vitesse de déformation de CAUCHY. Ainsi, pour le tenseur de GREEN, on a :

$$\underline{\underline{E}}^G = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \quad (2.39.)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \underline{\underline{\dot{E}}}^G &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{\dot{F}}}^T \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{\dot{F}}}) \\ &= \underline{\underline{F}}^T \frac{1}{2} (\underline{\underline{L}}^T + \underline{\underline{L}}) \underline{\underline{F}} \end{aligned} \quad (3.20.)$$

$$\underline{\underline{\dot{E}}}^G = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \underline{\underline{F}} \quad (3.21.)$$

La relation entre les vitesses de déformations de GREEN et CAUCHY est donc très simple. Par contre, si la déformation totale de GREEN $\underline{\underline{E}}^G$ existe et a un sens, il n'en va pas de même de la déformation de CAUCHY $\underline{\underline{\varepsilon}}$, ainsi que nous l'avons dit au chapitre précédent. Cette différence a une influence importante sur la formulation des lois constitutives.

De même, essayons de relier les vitesses des tenseurs contrainte de CAUCHY et de PK2. On a :

$$\underline{\underline{S}} = \det(\underline{\underline{F}}) \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{F}}^{-T} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{t}} \underline{\underline{F}}^{-T} \quad (2.62.)$$

où $\underline{\underline{S}}$ est le tenseur de PK2
et $\underline{\underline{t}}$ le tenseur de KIRCHOFF.

Dérivons :

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\dot{S}}} = \frac{d}{dt} (\underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{t}} \underline{\underline{F}}^{-T}) \quad (3.22.)$$

$\underline{\underline{S}}$ étant objectif, $\underline{\underline{\dot{S}}}$ est une dérivée objective de l'état de contrainte, et donc la partie droite de (3.22.) également. Développons :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{S}}} &= \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\dot{t}}} \underline{\underline{F}}^{-T} + \underline{\underline{\dot{F}}}^{-1} \underline{\underline{t}} \underline{\underline{F}}^{-T} + \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{t}} \underline{\underline{\dot{F}}}^{-T} \\ &= \underline{\underline{F}}^{-1} (\underline{\underline{\dot{t}}} + \underline{\underline{\dot{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{t}} \underline{\underline{\dot{F}}}^{-T} \underline{\underline{F}}^T) \underline{\underline{F}}^{-T} \end{aligned} \quad (3.23.)$$

Or

$$\underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$$

et donc, en dérivant par parties,

$$\underline{\underline{\dot{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}} \underline{\underline{\dot{F}}}^{-1} = \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^{-1} = \underline{\underline{0}} \quad (3.24.)$$

et dès lors :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{S}}} &= \underline{\underline{F}}^{-1} (\underline{\underline{\dot{t}}} + \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{t}} \underline{\underline{L}}^{-T}) \underline{\underline{F}}^{-T} \\ &= \underline{\underline{F}}^{-1} (\underline{\underline{\dot{t}}} - \underline{\underline{L}} \underline{\underline{t}} - \underline{\underline{t}} \underline{\underline{L}}^T) \underline{\underline{F}}^{-T} \end{aligned} \quad (3.25.)$$

Ainsi apparaît une dérivée objective de la contrainte de KIRCHOFF, exprimée dans les axes globaux $\underline{\underline{e}}_1, \underline{\underline{e}}_2, \underline{\underline{e}}_3$

$$\underline{\underline{\dot{t}}} = \underline{\underline{\dot{t}}} - \underline{\underline{L}} \underline{\underline{t}} - \underline{\underline{t}} \underline{\underline{L}}^T \quad (3.26.)$$

qui est appelée dérivée d'OLROYD des contraintes de KIRCHOFF (CESCOTTO [1])

Passons aux contraintes de CAUCHY. On a

$$\underline{\underline{t}} = \det(\underline{\underline{F}}) \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.52.)$$

donc

$$\dot{\underline{\underline{t}}} = \det(\underline{\underline{F}}) \dot{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} \frac{d}{dt} [\det(\underline{\underline{F}})]$$

Le dernier facteur représente la vitesse de variation de volume :

$$\frac{d}{dt} [\det(\underline{\underline{F}})] / \det(\underline{\underline{F}}) = 3 \dot{\epsilon}_m \quad (3.27.)$$

où $\text{tr}(\cdot)$ représente la trace du tenseur.

Ainsi apparaît une dérivée objective :

$$\underline{\underline{\sigma}}^T = \dot{\underline{\underline{\sigma}}} - \underline{\underline{L}} \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{L}}^T + \underline{\underline{\sigma}} \text{tr}(\underline{\underline{L}}) \quad (3.28.)$$

qui n'est autre que la dérivée de TRUESDELL des contraintes de CAUCHY. (CESCOTTO [1], BELYTSCHKO [55]).

Supposons à présent que la vitesse de déformations soit faible devant la vitesse de rotation :

$$\underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \underline{\underline{\omega}} \approx \underline{\underline{\omega}} \quad (3.29.)$$

Dès lors, on obtient les dérivées objectives suivantes (elles sont objectives car les termes de rotation sont maintenus) :

- la dérivée de JAUMAN des contraintes de KIRCHOFF

$$\underline{\underline{t}}^{\nabla} = \dot{\underline{\underline{t}}} - \underline{\underline{\omega}} \underline{\underline{t}} - \underline{\underline{t}} \underline{\underline{\omega}}^T \quad (3.30.)$$

- la dérivée de JAUMAN modifiée (proposée par CESCOTTO [1]) des contraintes de CAUCHY :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\Delta} = \dot{\underline{\underline{\sigma}}} - \underline{\underline{\omega}} \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\omega}}^T + \underline{\underline{\sigma}} \text{tr}(\underline{\underline{L}}) \quad (3.31.)$$

Enfin, remarquons que le taux de contrainte le plus utilisé dans la littérature est la dérivée de JAUMAN des contraintes de CAUCHY

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\nabla} = \dot{\underline{\underline{\sigma}}} - \underline{\underline{\omega}} \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{\omega}}^T \quad (3.32.)$$

qui diffère de la précédente par le dernier terme.

Résumons les relations obtenues.

Pour les taux de déformations :

$$\underline{\underline{E}}^G = \underline{\underline{F}}^T \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} \underline{\underline{F}} \quad (3.21.)$$

Pour les contraintes :

$$\underline{S} = \det(\underline{F}) \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} \quad (2.62.)$$

$$\underline{S} = \underline{F}^{-1} \underline{t} \underline{F}^{-T}$$

$$\underline{t} = \det(\underline{F}) \underline{\sigma} \quad (2.52.)$$

Pour les taux de contrainte :

$$\underline{\dot{t}} = \underline{\dot{t}} - \underline{L} \underline{t} - \underline{t} \underline{L}^T \quad (\text{dérivée d'OLDROYD}) \quad (3.26.)$$

$$\underline{\dot{S}} = \underline{F}^{-1} \underline{\dot{t}} \underline{F}^{-T}$$

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\dot{\sigma}} - \underline{L} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{L}^T + \underline{\sigma} \operatorname{tr}(\underline{L}) \quad (\text{dérivée de TRUESDELL}) \quad (3.28.)$$

$$\underline{\dot{t}} = \det(\underline{F}) \underline{\dot{\sigma}}$$

$$\underline{\dot{S}} = \det(\underline{F}) \underline{F}^{-1} \underline{\dot{\sigma}} \underline{F}^{-T}$$

$$\underline{\nabla} \underline{t} = \underline{\dot{t}} - \underline{\omega} \underline{t} - \underline{t} \underline{\omega}^T \quad (\text{dérivée de JAUMAN}) \quad (3.30.)$$

$$\underline{\dot{S}} \approx \underline{F}^{-1} \underline{\nabla} \underline{t} \underline{F}^{-T}$$

$$\underline{\Delta} \underline{\sigma} = \underline{\dot{\sigma}} - \underline{\omega} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{\omega}^T + \underline{\sigma} \operatorname{tr}(\underline{L}) \quad (\text{dérivée de JAUMAN modifiée}) \quad (3.31.)$$

$$\underline{\nabla} \underline{t} = \det(\underline{F}) \underline{\Delta} \underline{\sigma}$$

$$\underline{\dot{S}} \approx \det(\underline{F}) \underline{F}^{-1} \underline{\Delta} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T}$$

$$\underline{\nabla} \underline{\sigma} = \underline{\dot{\sigma}} - \underline{\omega} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{\omega}^T \quad (\text{dérivée de JAUMAN}) \quad (3.32.)$$

$$\underline{\nabla} \underline{t} \approx \det(\underline{F}) \underline{\nabla} \underline{\sigma}$$

Ainsi apparaissent les égalités parfaites ou approchées entre les différents taux de contrainte. Remarquons en particulier que la dérivée de JAUMAN des contraintes de CAUCHY s'éloigne de la dérivée matérielle des contraintes de PK2 non seulement parce qu'elle néglige $\underline{\varepsilon}$ devant $\underline{\omega}$, mais aussi parce qu'elle néglige l'effet de la déformation volumique $\operatorname{tr}(\underline{L})$.

On trouvera plus de détail sur ces diverses dérivées chez CESCOTTO [1], BELITSCHKO [55], ANAUD [44], ATLURI [53] et MANDEL [56].

3.2.3. Les lois constitutives élastiques.

Considérons la puissance W développée par les contraintes en un point, pour une unité invariable de matière. Soit par exemple une unité de volume initial (On aurait aussi pu prendre une unité de masse).

Le changement de volume de l'état initial à l'état actuel est mesuré par $\det(\underline{F})$. Si nous utilisons les contraintes et déformations de CAUCHY, il vient :

$$W = \det(\underline{F}) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (3.33.)$$

Avec les tenseurs de PK2 et GREEN, il vient :

$$W = S_{ij} \underline{E}^G_{ij} \quad (3.34.)$$

Les deux expressions sont équivalentes, un matériau peut être modélisé par l'un ou l'autre couple contraintes-déformations. Mais le second couple a un avantage: la déformations totale de GREEN existe. Aussi est-il possible de développer, à l'aide de la thermodynamique, une relation constitutive hyperélastique entre \underline{S} et \underline{E}^G (DANG [14], ANAND [44], SIDOROFF [42]) :

$$\underline{E}^G = - \frac{\partial H}{\partial \underline{S}} \quad (3.35.)$$

où H est l'enthalpie libre, fonction uniquement de la contrainte :

$$H = H(\underline{S}) \quad (3.36.)$$

Si le comportement élastique est linéaire et isotrope, la relation (3.35.) se réduit à la loi de HOOKE classique :

$$\underline{E}^G = \underline{D}^e \underline{S}, \quad E_{ij}^G = D_{ijkl}^e S_{kl} \quad (3.37.)$$

où \underline{D} est un tenseur du 4e ordre :

$$D_{ijkl}^e = \frac{1+\nu}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (3.38.)$$

La relation (3.38.) peut être inversée :

$$\underline{S} = \underline{C}^e \underline{E}^G, \quad S_{ij} = C_{ijkl}^e E_{kl}^G \quad (3.39.)$$

où le tenseur de HOOKE \underline{C}^e apparaît :

$$C_{ijkl}^e = \frac{E}{1+\nu} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (3.40.)$$

Les tenseurs contraintes et déformations peuvent être séparés en leurs parties déviatoriques $\hat{\underline{S}}, \hat{\underline{E}}^G$ et moyenne, S_m, E_m^G . On a alors :

$$\begin{cases} S_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{S}), & \hat{\underline{S}} = \underline{S} - S_m \underline{I} \\ E_m^G = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{E}^G), & \hat{\underline{E}}^G = \underline{E}^G - E_m^G \underline{I} \end{cases} \quad (3.41.)$$

et

$$\begin{cases} S_m = 3 \chi E_m^G, & 3 \chi = \frac{E}{(1-2\nu)} \\ \hat{\underline{S}} = 2 G \hat{\underline{E}}^G, & 2G = \frac{E}{(1+\nu)} \end{cases} \quad (3.42.)$$

Donc les comportements moyen et déviatorique sont découplés, et les tenseurs $\hat{\underline{S}}$ et $\hat{\underline{E}}^G$ sont coaxiaux.

Mais en grandes déformations, \underline{E}_m^G ne représente pas le changement de volume, et nous ne pouvons parler ici de déformation et contrainte volumique.

La forme incrémentielle est immédiate, car la matrice constitutive est constante et les tenseurs en jeu sont objectifs :

$$\dot{\underline{S}} = \underline{C}^e \dot{\underline{E}}^G, \quad \dot{\underline{E}}^G = \underline{D}^e \dot{\underline{S}}, \text{ etc...} \quad (3.43.)$$

Si nous choisissons à présent les contraintes et déformations de CAUCHY, le problème est moins simple. Comme $\underline{\varepsilon}$ n'existe pas, on ne peut pas écrire une loi du type (3.36.) à (3.42.). Comme $\dot{\underline{\sigma}}$ n'est pas objectif, on ne peut pas plus écrire de loi du type (3.43.). Toutefois, nous pouvons raisonner à partir de (3.43.) en utilisant les relations établies au paragraphe précédent.

Par (3.26.b) et (3.21.), (3.43.) devient :

$$\underline{F}^{-1} \overset{\circ}{\underline{t}} \underline{F}^{-T} = \underline{C}^e \underline{F}^T \dot{\underline{\varepsilon}} \underline{F}$$

Vu la forme de \underline{C}^e

$$\underline{F}^{-1} \overset{\circ}{\underline{t}} \underline{F}^{-T} = \underline{F}^T \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}} \underline{F} \quad (3.44.)$$

Supposons que les déformations soient faibles. Par la décomposition polaire de \underline{F} , (2.31.), on a :

$$\underline{F} = \underline{R} \underline{U} \approx \underline{R} \quad \text{et} \quad \underline{U} \approx \underline{1} \quad (3.45.)$$

(3.44.) devient alors :

$$\begin{aligned} \underline{R}^{-1} \overset{\circ}{\underline{t}} \underline{R}^{-T} &\approx \underline{R}^T \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}} \underline{R} \\ \rightarrow \underline{R}^T \overset{\circ}{\underline{t}} \underline{R} &\approx \underline{R}^T \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}} \underline{R} \\ \rightarrow \overset{\circ}{\underline{t}} &\approx \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (3.46.)$$

De même, en contraintes de CAUCHY,

$$\overset{T}{\underline{\sigma}} \approx \det(\underline{F}^{-1}) \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}} \quad (3.47.)$$

Donc, tant que les déformations sont faibles, les lois (3.43.) (PK2 - GREEN), (3.46.) (KIRCHOFF-CAUCHY) et (3.47.) (CAUCHY-CAUCHY) sont équivalentes. Remarquons que dans la dernière relation (3.47.) la variation de volume depuis la configuration initiale intervient explicitement. Négliger cet effet équivaut à introduire une non linéarité volumique par rapport aux relations (3.43.) et (3.46.).

A fortiori, lorsqu'on utilise la dérivée de JAUMAN des contraintes de CAUCHY dans la relation élastique incrémentielle :

$$\frac{\nabla}{\sigma} = \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}} \quad (3.48.)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\nabla}{\sigma} = 2 G \dot{\underline{\varepsilon}} \\ \dot{\sigma}_m = 3 \chi \dot{\varepsilon}_m \end{array} \right.$$

on écrit une loi qui s'écarte des précédentes, car elle néglige la mise à l'échelle des contraintes de CAUCHY en contraintes de KIRCHOFF et la variation de masse volumique.

Ce choix (3.48.) est le plus fréquent dans les programmes de calcul des grandes déformations des métaux. C'est également l'option que nous avons prise dans notre programme LAGAMINE.

CESCOTTO [1] a étudié les réponses obtenues sous une sollicitation de cisaillement prise selon la dérivée objective choisie. Il a limité son étude aux contraintes de CAUCHY. Il apparaît que, dans l'hypothèse d'élasticité finie, les réponses s'écartent rapidement les unes des autres de façon sensible. Par contre, si le matériau est élasto-viscoplastique à écrouissage isotrope, les écarts sont nettement plus faibles. La question du choix d'une dérivée objective reste donc une question ouverte.

Les lois élastiques ainsi développées ont également quelques autres inconvénients. Elles ne peuvent être appliquées à des matériaux anisotropes (sauf 3.43.) car leurs axes de référence sont fixes, alors que l'orientation des fibres matérielles change. Pour étudier de tels matériaux, il serait utile de travailler avec les contraintes corotationnelles.

Sous de grandes déformations en cisaillement pur, plusieurs dérivées objectives, et en particulier la dérivée de JAUMAN, provoquent des oscillations de l'état de contrainte ainsi que le montrent les travaux de LEE, MALLETT, WERTHEIMER [60], DIENES [2], CESCOTTO [1], DONEA [58], ATLURI [53] et bien d'autres. La loi élastique doit donc être utilisée avec précautions dans le domaine des grandes déformations.

Pour la modélisation des métaux, les développements précédents suffisent amplement. En mécanique des sols, le problème est moins clair. De nombreux auteurs ont proposé ou utilisé des lois constitutives élastiques non-linéaires. NAYLOR et PANDE [49] en retiennent trois : le modèle bilinéaire, le modèle K-G d'allure parabolique en σ, ε , et le modèle hyperbolique, proposé par KONDNER et fort utilisé par DUNCAN et CHANG. Aucun d'entre eux ne semble avoir d'avenir, face aux multi-

ples modèles élastoplastiques proposés ces dernières années. Ceux-ci présentent de nombreux avantages, tant du point de vue de l'élégance théorique que de la qualité d'implantation et d'utilisation. Aussi n'en parlerons-nous pas plus.

Par contre, la modélisation de l'argile fait appel à un modèle élastoplastique dont la partie élastique est non linéaire. Nous la présentons ici rapidement, nous développerons plus ses divers aspects au paragraphe réservé aux modèles de sols.

Ainsi que le montrent les essais oedométriques, la variation du volume d'un échantillon est fonction, non de la variation de la contrainte volumique (hypothèse d'élasticité linéaire) mais de la variation de son logarithme naturel et de la variation du volume. En petites déformations :

$$\dot{\epsilon}_m = K(\epsilon_m) \frac{d}{dt} \ln \sigma_m = K(\epsilon_m) \frac{\dot{\sigma}_m}{\sigma_m} \quad (3.49.a)$$

où λ est un paramètre d'élasticité.

Le comportement déviatorique est linéaire (et mal connu). Nous utilisons la loi linéaire

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2G} \dot{\underline{\sigma}} \quad (3.49.b)$$

Dans un contexte de grandes déformations, nous transformons ces lois en

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_m = K(\epsilon_m) \frac{\dot{\sigma}_m}{\sigma_m} \\ \dot{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2G} \dot{\underline{\sigma}} \end{cases} \quad (3.50.)$$

En effet, la contrainte moyenne σ_m est un scalaire, et est donc objective. Sa dérivée temporelle est classique.

3.2.4. L'aspect géométrique (II) : les déformations irréversibles.

Ce paragraphe est consacré à des considérations géométriques induites par la prise en compte dans les lois constitutives de déformations irréversibles. Nous supposons que le lecteur connaît les bases des théories de plasticité et de viscoplasticité en petites déformations. Nous ne les rappelons donc pas, nous bornant à citer les éléments qui nous sont nécessaires. Ainsi que nous l'avons dit dans l'introduction 3.2.1., l'hypothèse fondamentale des modèles élastoplastiques et élasto-visco-plastiques est la division de l'espace des contraintes en trois zones. La première est un domaine où le comportement est élastique. Les contraintes y évoluent selon les lois incrémentales élastiques présentées au paragraphe précédent. La deuxième zone est la surface con-

vexe limite du volume élastique. Elle est appelée surface de plasticité. Dès que les contraintes l'atteignent, des déformations irréversibles apparaissent. La troisième zone est le domaine extérieur à la surface de plasticité. Dans l'hypothèse élastoplastique, son accès est interdit. En élastoviscoplasticité, la vitesse de déformation irréversible est fonction de la position relative du point de contrainte par rapport à la surface de plasticité.

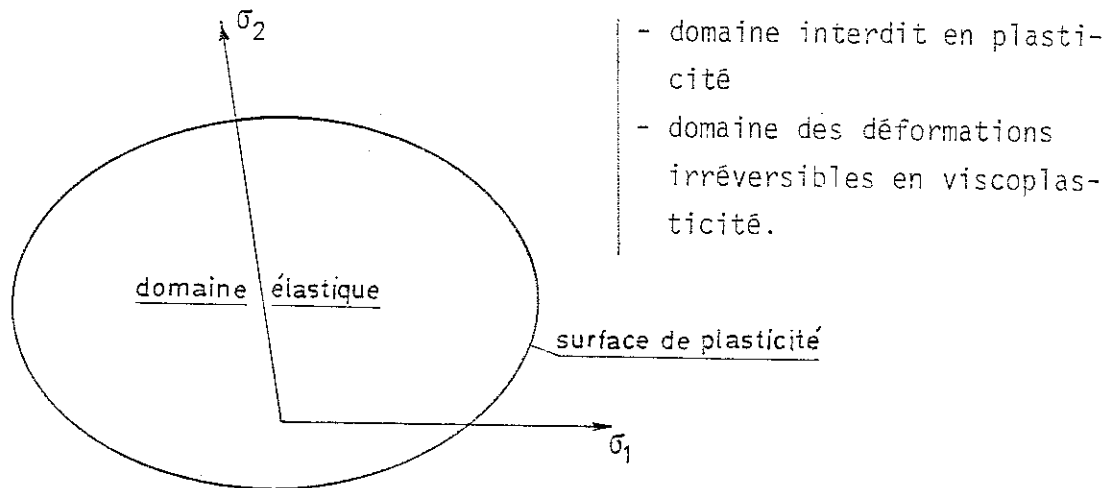


Figure 3.3.

Lorsque des déformations irréversibles (ou plastiques) se produisent en plus des déformations élastiques, puisque les déformations totales sont la résultante des déformations élastiques et plastiques, il est nécessaire de déterminer ces contributions à l'aide des lois d'élasticité et de plasticité ou de viscoplasticité et d'analyser comment ces deux composantes se combinent pour produire la déformation résultante.

Lorsque les déformations sont petites, elles se décomposent en leurs parties élastique (réversible) et plastique (irréversible) par addition :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p$$

où les indices supérieurs e et p indiquent l'élasticité et la plasticité.

Lorsque les déformations sont finies, la décomposition (3.44.) perd sa signification. De nouveaux développements géométriques doivent être posés. Soit un petit voisinage du point étudié, dans la configu-

ration actuelle γ . Isolons-le et déchargeons-le jusqu'à l'état de contrainte nulle. Ainsi, les contraintes quittent la surface de plasticité, et parcourent un trajet élastique. Lorsqu'elles se sont annulées, les déformations élastiques ont disparu (elles sont réversibles). Seules subsistent les déformations plastiques, irréversibles. La configuration ainsi obtenue est appelée configuration relachée γ^P . Elle est une vue de l'esprit et n'a généralement aucune existence réelle : le relachement complet de chaque "voisinage" entraîne la perte de la continuité du solide. Le déchargement (l'annulation des forces appliquées) d'une structure après plastification la laisse dans un état de contraintes résiduelles. La configuration "déchargée" - réalisable - est différente de la configuration relachée - irréalisable -.

La configuration relachée γ^P est ainsi définie aux 6 modes rigides près (3 translations et 3 rotations) de la particule. En effet, un déplacement rigide n'entraîne par définition aucune modification de l'état de contrainte. Plus particulièrement, la rotation entre la configuration initiale Γ et la configuration relachée γ^P - on l'appelle la rotation plastique - peut poser des problèmes de formulation. Elle est liée au changement d'orientation préférentielle des cristaux lors de la déformation plastique (par exemple lors du laminage de tôles). Sa modélisation permet également d'éviter les oscillations de la contrainte tangentielle dans les modèles à écrouissage cinématique. L'étude de la rotation plastique semble être actuellement un des principaux sujets de recherche dans la théorie des grandes déformations irréversibles : ANAND [44], MANDEL [38], LEE [50], PENCHERSKI [51] notamment ont publié récemment des contributions dans ce sens.

Dans le cadre de ce travail, nous nous limitons aux matériaux initialement isotropes et qui le restent pendant la déformation. Dès lors, aucune orientation structurale n'est privilégiée, quelque soit la déformation intervenue. Donc, la notion de rotation plastique n'a pas de sens. Nous considérons que toute la rotation de corps rigide du voisinage de la particule étudiée est associée à la déformation élastique : la particule a la même orientation et la même position dans la configuration initiale Γ et dans la configuration relachée γ^P .

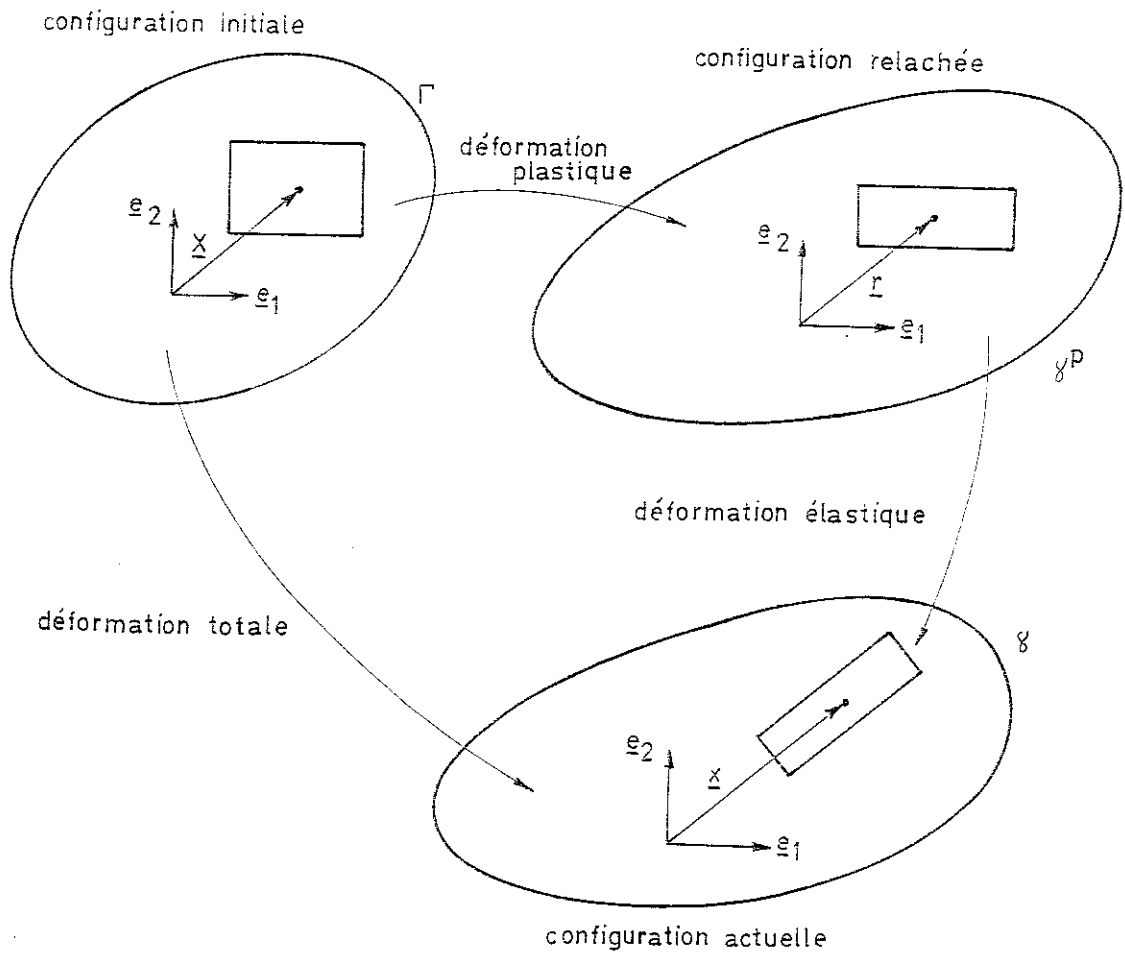


Figure 3.4.

Soient (figure 3.4.) \underline{p} les coordonnées dans la configuration relachée. Le tenseur jacobien relatif au passage de la configuration initiale Γ à la configuration relachée γ^D (déformation plastique) est

$$\underline{F}^D = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{X}} \quad (3.51.)$$

Puisque la déformation élastique est nulle dans la configuration γ^D , nous pouvons la décrire par le tenseur jacobien :

$$\underline{F}^e = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{r}} \quad (3.52.)$$

Le tenseur jacobien relatif à la déformation totale a été présenté au chapitre précédent. Il se décompose comme suit :

$$\underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \quad (2.3.)$$

$$\underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{r}} \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{X}} \quad (3.53.)$$

$$\underline{F} = \underline{F}^e \underline{F}^p \quad (3.54.)$$

Ainsi le tenseur jacobien total se décompose par multiplication (non commutative) en ses parties élastique et plastique (ainsi que LEE l'a montré le premier). Dès lors, il est clair que le développement d'une loi constitutive élastoplastique est différent selon qu'on travaille en petites ou en grandes déformations.

Nous avons choisi de donner la même orientation aux configurations initiale Γ et relâchée γ^p . Effectuons les décompositions polaires des trois tenseurs jacobiens :

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{R} \underline{U} \\ \underline{F}^e &= \underline{R}^e \underline{U}^e \\ \underline{F}^p &= \underline{R}^p \underline{U}^p \end{aligned} \quad (3.55.)$$

Nous avons donc, selon nos hypothèses précédentes :

$$\begin{aligned} \underline{R}^p &= \underline{I} \\ \underline{F}^p &= \underline{U}^p, \quad \underline{F}^{pT} = \underline{F}^p \\ \underline{F} &= \underline{R}^e \underline{U}^e \underline{U}^p = \underline{R} \underline{U} \\ \underline{R} &= \underline{R}^e \\ \underline{U} &= \underline{U}^e \underline{U}^p \end{aligned} \quad (3.56.)$$

Toute la rotation est bien reportée dans la partie élastique du tenseur jacobien.

Le changement de volume se mesure par le déterminant du tenseur jacobien (2.8.). Il se décompose comme le tenseur :

$$\det(\underline{F}) = \det(\underline{F}^e) \det(\underline{F}^p) \quad (3.57.)$$

Ces déterminants respectent les conditions

$$\det(\underline{F}) > 0 ; \det(\underline{F}^e) > 0 ; \det(\underline{F}^p) > 0 \quad (3.58.)$$

Dans les métaux, la déformation plastique est incompressible, donc

$$\det(\underline{F}^p) = 1 \quad (3.59.)$$

Ce n'est pas le cas des sols.

Comment le gradient de vitesse (3.9.) se décompose-t-il ?

On a :

$$\dot{\underline{F}} = \dot{\underline{F}}^e \underline{F}^p + \underline{F}^e \dot{\underline{F}}^p \quad (3.60.)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \underline{L} &= \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} \\ &= (\dot{\underline{F}}^e \underline{F}^p + \underline{F}^e \dot{\underline{F}}^p) \underline{F}^{p-1} \underline{F}^{e-1} \\ \underline{L} &= \dot{\underline{F}}^e \underline{F}^{e-1} + \underline{F}^e \dot{\underline{F}}^p \underline{F}^{p-1} \underline{F}^{e-1} \end{aligned} \quad (3.61.)$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \underline{L} &= \underline{L}^e + \underline{L}^p \\ \underline{L}^e &= \dot{\underline{F}}^e \underline{F}^{e-1} \\ \underline{L}^p &= \underline{F}^e \dot{\underline{F}}^p \underline{F}^{p-1} \underline{F}^{e-1} \end{aligned} \quad (3.62.)$$

Donc, le gradient de vitesse se décompose par addition, comme en petites déformations. La partie élastique \underline{L}^e est classique, elle mesure le gradient des vitesses entre la configuration relâchée γ^p et la configuration actuelle.

Par contre, la partie plastique \underline{L}^p est plus complexe. En effet, les configurations relâchée γ^p et actuelle γ évoluent simultanément. Le gradient de vitesse dans la configuration relâchée est :

$$\underline{L}^p = \dot{\underline{F}}^p \underline{F}^{p-1} \quad (3.63.)$$

qui est symétrique puisque \underline{F}^p l'est.

Dans cette expression, aucune référence n'est faite à la configuration actuelle γ . Si nous voulons transporter le tenseur \underline{L}^p de γ^p à γ , il faut lui "appliquer" le tenseur jacobien \underline{F}^e , comme on applique un tenseur de rotation \underline{Q} pour changer ses axes de référence. Ainsi apparaît la forme de (3.62.) :

$$\underline{L}^p = \underline{F}^e \underline{L}^p \underline{F}^{e-1} \quad (3.64.)$$

De la décomposition polaire (3.56.), il résulte que \underline{L}^p est une mesure objective, à l'opposé de \underline{L}^e et \underline{L}^p qui sont affectés par la rotation de corps rigide.

Décomposons les gradients de vitesse en leurs parties symétrique et antisymétrique :

$$\begin{aligned} \underline{L}^e &= \underline{\varepsilon}^e + \underline{\omega}^e \\ \underline{\varepsilon}^e &= \frac{1}{2} (\underline{L}^e + \underline{L}^{eT}) = \frac{1}{2} (\underline{F}^e \underline{F}^{e-1} + \underline{F}^{e-T} \dot{\underline{F}}^{eT}) \\ \underline{\omega}^e &= \frac{1}{2} (\underline{L}^e - \underline{L}^{eT}) = \frac{1}{2} (\underline{F}^e \underline{F}^{e-1} - \underline{F}^{e-T} \dot{\underline{F}}^{eT}) \end{aligned} \quad (3.65.)$$

$$\begin{aligned} \underline{L}^p &= \dot{\underline{\varepsilon}}^p + \underline{\omega}^p \\ \dot{\underline{\varepsilon}}^p &= \frac{1}{2} (\underline{L}^p + \underline{L}^{pT}) = \frac{1}{2} (\underline{F}^e \underline{L}^p \underline{F}^{e-1} + \underline{F}^{e-T} \underline{L}^p \underline{F}^{eT}) \\ \dot{\underline{\omega}}^p &= \frac{1}{2} (\underline{L}^p - \underline{L}^{pT}) = \frac{1}{2} (\underline{F}^e \underline{L}^p \underline{F}^{e-1} - \underline{F}^{e-T} \underline{L}^p \underline{F}^{eT}) \end{aligned} \quad (3.66.)$$

$\dot{\underline{\varepsilon}}^e$ et $\dot{\underline{\varepsilon}}^p$ sont les parties élastique et plastique de la vitesse de déformation de CAUCHY :

$$\dot{\underline{\varepsilon}} = \dot{\underline{\varepsilon}}^e + \dot{\underline{\varepsilon}}^p \quad (3.67.a)$$

Remarquons l'apparition d'une rotation plastique $\underline{\omega}^p$ non nulle, malgré nos hypothèses précédentes. On a :

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}^e + \underline{\omega}^p \quad (3.67.b)$$

La puissance W des contraintes par unité de volume de la configuration initiale Γ a été évaluée au paragraphe précédent. Elle peut être décomposée en ses parties réversible W^e et irréversible W^p

$$\begin{cases} W &= t_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \\ W^e &= t_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e \\ W^p &= t_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \\ W &= W^e + W^p \end{cases} \quad (3.68.)$$

La partie réversible de la puissance W^e et la vitesse de déformation élastique $\dot{\underline{\varepsilon}}^e$ sont semblables aux expressions posées en élasticité.

Dès lors, nous pouvons associer la vitesse de déformation élastique $\dot{\underline{\varepsilon}}^e$ à une dérivée objective de la contrainte de KIRCHOFF :

$$\overset{\nabla}{\underline{t}} = \underline{C}^e \dot{\underline{\varepsilon}}^e \quad (3.46.)$$

La dérivée de JAUMAN des contraintes de KIRCHOFF est évaluée à l'aide de la vitesse de rotation totale :

$$\overset{\nabla}{\underline{t}} = \dot{\underline{t}} - \underline{\omega} \underline{t} - \underline{t} \underline{\omega}^T \quad (3.30.)$$

Il faut encore déterminer la vitesse de déformation plastique $\dot{\underline{\varepsilon}}^p$. La forme (3.66.b) est particulièrement lourde. Aussi allons-nous la simplifier.

L'expérience montre que les déformations élastiques des métaux, des sols et des roches sont toujours très petites. (Ceci apparaît lorsqu'on décharge un solide en cours d'expérience). Les conséquences numériques sont les suivantes :

$$\begin{cases}
 \underline{U}^e \approx \underline{I}, & \underline{F}^e \approx \underline{R}^e = \underline{R} \\
 \underline{L}^p \approx \underline{R} \underline{L}^p \underline{R}^T \\
 \underline{\dot{\varepsilon}}^e = \text{sym } \underline{L}^e \approx \underline{R} \underline{\dot{E}}^e \underline{R}^T \\
 \underline{\dot{\varepsilon}}^p \approx \underline{R} \underline{L}^p \underline{R}^T \approx \underline{L}^p \\
 \underline{\omega}^p \approx \underline{0} \\
 \underline{\omega} \approx \underline{\omega}^e \approx \text{skw } \underline{L}
 \end{cases} \quad (3.69.)$$

Remarquons particulièrement que la rotation plastique $\underline{\omega}^p$ disparaît. Les lois constitutives prennent la forme classique

$$\begin{cases}
 \underline{\nabla} \underline{\dot{t}} = \underline{C}^e \underline{\dot{\varepsilon}}^e = \underline{C}^e (\underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\dot{\varepsilon}}^p) \\
 \underline{\dot{\varepsilon}}^p = f(\underline{t}, \underline{\nabla} \underline{\dot{t}})
 \end{cases} \quad (3.70.)$$

Dans le domaine des petites déformations élastiques, cette loi est proche de celle qu'on pourrait écrire avec les contraintes de PK2 et les déformations de GREEN. Nous pouvons également écrire la relation constitutive à l'aide de la dérivée de JAUMAN des contraintes de CAUCHY, comme nous avons choisi de le faire en élasticité (3.48.) :

$$\begin{cases}
 \underline{\nabla} \underline{\dot{\sigma}} = \underline{C}^e (\underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\dot{\varepsilon}}^p) \\
 \underline{\dot{\varepsilon}}^p = f(\underline{\sigma}, \underline{\nabla} \underline{\dot{\sigma}})
 \end{cases} \quad (3.71.)$$

Cette loi s'écarte des précédentes, car elle néglige la mise à l'échelle des contraintes de CAUCHY en contraintes de KIRCHOFF. Elle est toutefois adoptée par bon nombre de programmes de calcul des grandes déformations des métaux, et c'est le choix que nous avons fait dans notre programme LAGAMINE. Dans le domaine des grandes déformations élastiques, elle doit être utilisée avec prudence. Ainsi que le montre ATLURI [53], des oscillations des contraintes peuvent apparaître sous une sollicitation de cisaillement.

Les déformations irréversibles des métaux ne sont pas affectées par les contraintes et déformations volumiques. Or, la différence entre les lois (3.70.) et (3.71.) est uniquement due au changement de volume pendant la déformation. Il semble donc qu'il ne soit pas indifférent de modéliser les métaux à l'aide de l'une ou l'autre de ces lois. A ce jour, nous n'avons pas évalué cette différence.

3.2.5. Les lois constitutives élastoplastiques.

Nous présentons ci-dessous les trois lois constitutives implantées à ce jour dans le programme LAGAMINE.

La première est essentiellement destinée à modéliser des métaux. Les deux autres sont orientées vers la modélisation des sols. Dans tous les cas, le matériau est initialement isotrope et le reste.

Il est commode de développer les lois constitutives en fonction d'invariants du tenseur contrainte.

Le premier invariant est :

$$I_{\sigma} = \sigma_{ij} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (3.72.)$$

La valeur moyenne du tenseur est le tiers de cet invariant. Nous l'appellerons souvent contrainte volumique, car c'est, en élasticité, la contrainte qui provoque les déformations volumiques

$$\sigma_m = \frac{1}{3} I_{\sigma} \quad (3.73.)$$

Les expériences montrent que dans les métaux, les déformations irréversibles n'entraînent aucun changement de volume irréversible, et qu'elles sont insensibles à la contrainte volumique.

A partir du tenseur contrainte et de la contrainte volumique, on construit le déviateur du tenseur contrainte

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (3.74.)$$

dont la contrainte moyenne est nulle, et qui est donc insensible à la contrainte volumique.

Le deuxième invariant du déviateur du tenseur contrainte est :

$$II_{\hat{\sigma}} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ij} \quad (3.75.)$$

Il est proportionnel au carré de la contrainte de von MISES.

Comme la plupart des auteurs nous utilisons uniquement $II_{\hat{\sigma}}$ pour décrire la plasticité des métaux. Nous supposons donc que le troisième invariant n'a pas d'influence sur les déformations irréversibles.

Dans les sols et les roches, des déformations volumiques irréversibles apparaissent fréquemment, et le comportement plastique est très sensible à la contrainte volumique. Nous utilisons donc les deux invariants I_{σ} et $II_{\hat{\sigma}}$ dans la description de la plasticité des sols. Mais à nouveau, nous négligeons l'effet du troisième invariant.

Ci-dessous, nous développons en parallèle les trois lois constitutives. En premier lieu, définissons les surfaces de plasticité f , limites du domaine élastique. L'état de contrainte doit respecter les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} f &= f(I_{\sigma}, II_{\hat{\sigma}}) \\ \text{si } f < 0 & \text{ l'état est élastique} \\ \text{si } f = 0 & \text{ l'état est élastoplastique} \\ f > 0 & \text{ est interdit.} \end{aligned} \quad (3.75.)$$

La loi n° 1 est destinée à la modélisation des métaux. La surface de plasticité a pour équation

$$f = II_{\hat{\sigma}} - k^2 \quad (3.76.)$$

k est le rayon de la surface de plasticité, ou la contrainte équivalente plastique.

La loi n° 2 est la loi de DRUCKER-PRAGER, approximation de la loi de MOHR-COULOMB. Elle est essentiellement une loi de référence, l'une des premières lois élastoplastiques utilisées spécifiquement pour les sols. Si les résultats fournis ne sont généralement pas très bons, elle reste toutefois nécessaire, notamment par sa simplicité, et, parce que parfois, faute de mieux, il faut bien l'utiliser. La surface de plasticité a pour équation

$$f = II_{\hat{\sigma}} - m^2 (I_{\sigma} - c)^2 \quad (3.77.)$$

m et c sont les paramètres. m est associé à l'angle de frottement interne ϕ et c à la cohésion C :

$$\begin{cases} m = 2 \sin \phi \\ c = C \cotg \phi \end{cases} \quad (3.78.)$$

La loi n° 3 est destinée à la modélisation des argiles et des craies. D'après les travaux de ZAOUCHE [57], il semble qu'elle puisse également représenter des sables. La surface de plasticité a pour équation :

$$f = II_{\hat{\sigma}} + m^2 I_{\sigma} (I_{\sigma} + 2a) \quad (3.79.)$$

m et a sont les paramètres. m peut être associé à un angle de frottement interne, par référence aux milieux non cohésifs. $2a$ est la valeur maximale admissible du premier invariant. C'est donc une limite de la contrainte volumique.

Pour analyser les différences entre ces surfaces, il est utile de les visualiser. Nous utiliserons deux visualisations. La première est un diagramme dans les axes $(I_{\sigma}, \sqrt{II_{\hat{\sigma}}})$. La seconde est une projection oblique de la surface exprimée en fonction des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

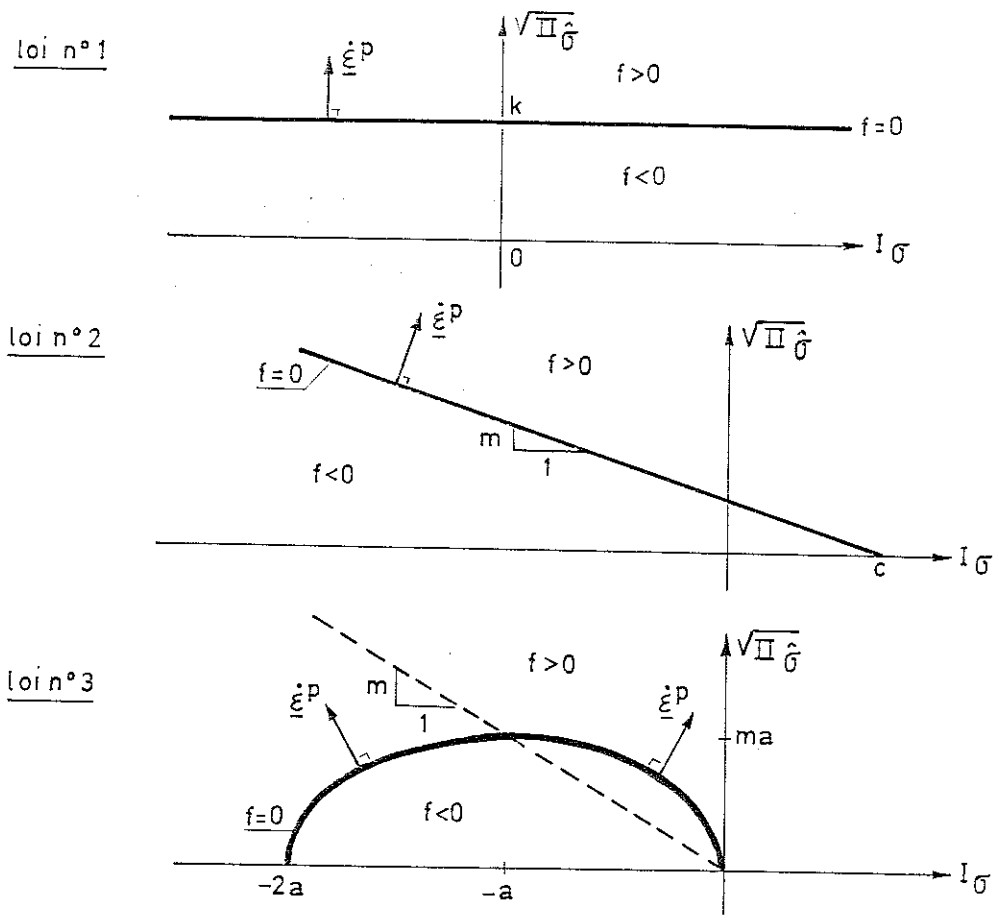


Fig.3.5.-Les surfaces de plasticité dans le plans des invariants.

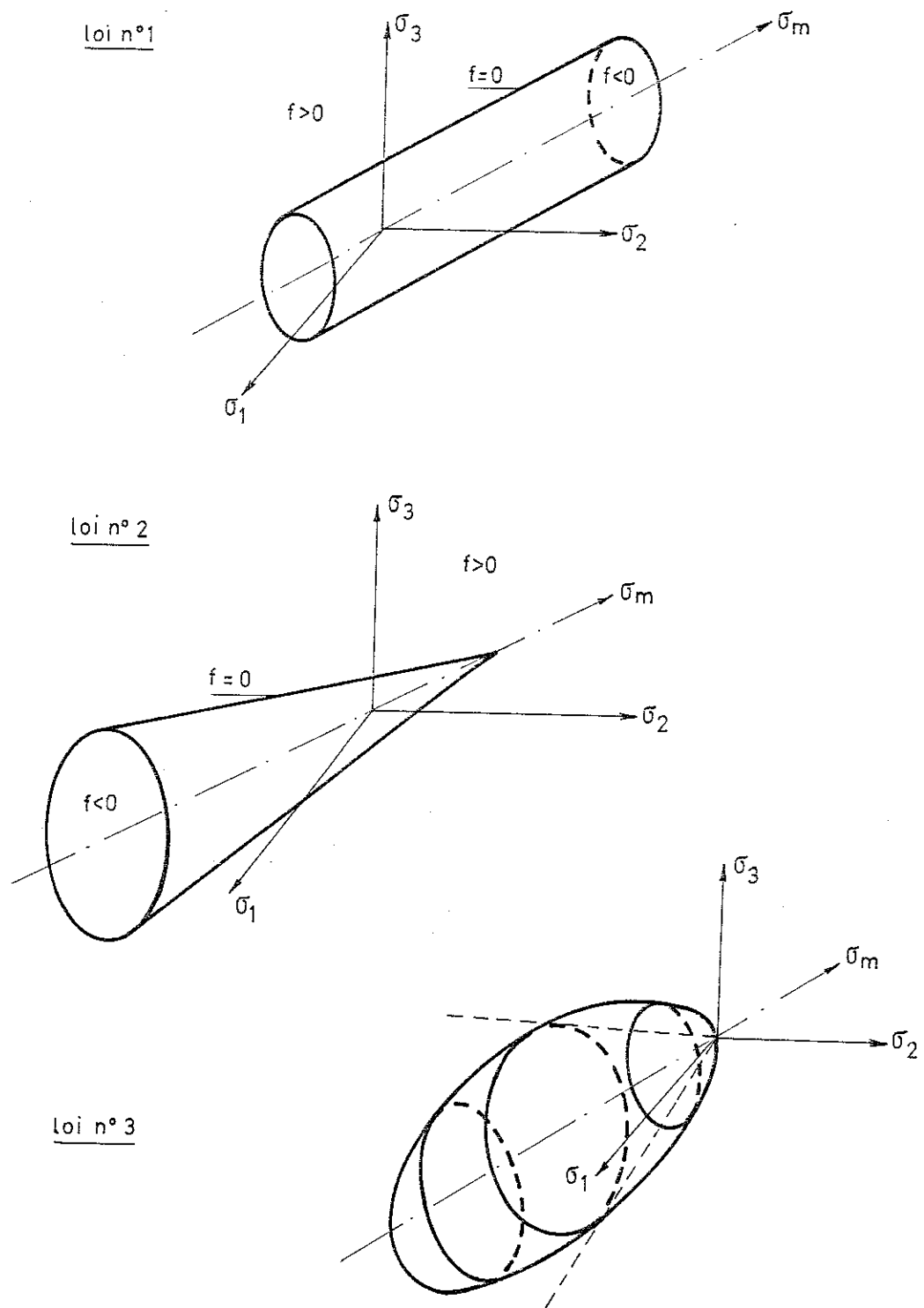


Figure 3.6.- Les surfaces de plasticité dans l'espace des contraintes principales.

La figure 3.5. montre que dans l'espace $(I_{\sigma}, \sqrt{II_{\sigma}})$, la complexité de la loi croît dans l'ordre 1, 2, 3 (qui est aussi l'ordre historique de découverte de ces lois). La loi 1 correspond à une valeur de $\sqrt{II_{\sigma}}$ constante, la loi 2 à une relation linéaire entre les deux invariants, la loi 3 à une relation du second degré. Dans les lois 1 et 2 le domaine élastique est ouvert, dans la loi 3 il est fermé.

Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (figure 3.6.), la première trisectrice des axes est l'axe de la contrainte volumique σ_m . Les trois surfaces de plasticité ont la symétrie de révolution autour de cet axe, et sont donc convexes, comme la théorie l'impose (NGUYEN DANG HUNG [24] et [14]). La surface n° 1 est un cylindre, la surface n° 2 est un cône, la surface n° 3 est un ellipsoïde de révolution. Elle peut aussi être interprétée comme un "cône à génératrice courbe" (partie droite de l'ellipsoïde), figure 3.6., auquel on a ajouté un chapeau (partie gauche) selon le principe des "cap-models" (fig. 3.7.). Ainsi, le modèle 3 est le seul à prédire une plastification sous une compression hydrostatique pure.

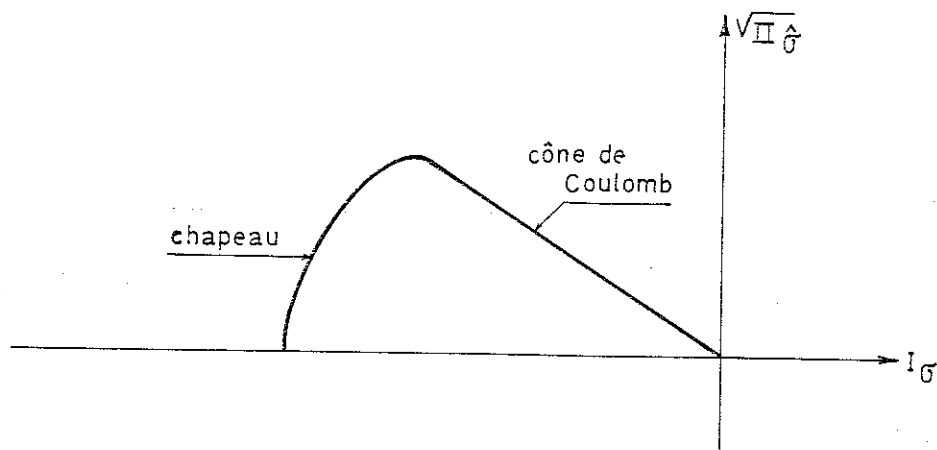


Figure 3.7. - Cap-model ou modèle à chapeau.

Les trois lois supposent la normalité de la vitesse de déformation plastique à la surface de plasticité (plasticité associée) :

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}, \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.80.)$$

$\dot{\lambda}$ est un multiplicateur de la normale à la surface de plasticité. On l'exprime généralement en fonction du coefficient d'écrouissage μ et de la vitesse de contrainte, par :

$$\dot{\lambda} = \mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \nabla \sigma_{ij} \quad (3.81.)$$

Il reste un problème : comment déterminer μ ?

Pendant la déformation plastique, l'état de contrainte doit rester sur la surface de plasticité : c'est la condition de cohérence, qui s'exprime par :

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = 0 \quad (3.82.)$$

Or f est fonction de l'état de contrainte et de paramètres (k, m, a, c). Si ces paramètres évoluent, un écrouissage apparaît.

En fonction de quelle valeur faut-il exprimer cette évolution ?

D'un point de vue énergétique, le travail plastique (ou dissipation plastique) est la mesure de l'énergie dépensée à modifier la structure interne du matériau, et donc la taille de la surface de plasticité.

Il se transforme en grande partie en chaleur et doit être évalué en vue de la modélisation du couplage thermomécanique. On a, par (3.68.), la puissance plastique

$$\begin{aligned} W^P &= \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \\ &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (3.83.)$$

Développons cette expression pour les trois lois. Tout d'abord, on a :

$$\frac{\partial II_{\hat{\sigma}}}{\partial \sigma_{ij}} = \hat{\sigma}_{ij} \quad (3.84.)$$

$$\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij}$$

et donc pour la loi 1

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial II_{\hat{\sigma}}} \frac{\partial II_{\hat{\sigma}}}{\partial \sigma_{ij}} = \hat{\sigma}_{ij} \quad (3.85.)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \hat{\sigma}_{ij} \quad (3.86.)$$

$$\begin{aligned} W^P &= \dot{\lambda} \hat{\sigma}_{ij} \sigma_{ij} \\ &= 2 \dot{\lambda} II_{\hat{\sigma}} \end{aligned}$$

Or $f = 0$ pendant la déformation plastique.

Donc

$$W^P = 2 \dot{\lambda} k^2 \quad (3.87.)$$

Par (3.86.), on voit que la déformation plastique est purement déviatorique.

De même, pour la loi n° 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\partial f}{\partial I_{\sigma}} \frac{\partial I_{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial II_{\hat{\sigma}}} \frac{\partial II_{\hat{\sigma}}}{\partial \sigma_{ij}} \\ &= -2 m^2 (I_{\sigma} - c) \delta_{ij} + \hat{\sigma}_{ij} \end{aligned} \quad (3.88.a)$$

$$\rightarrow \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} [-2 m^2 (I_{\sigma} - c) \delta_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}] \quad (3.88.b)$$

$$\rightarrow W^p = \dot{\lambda} [-2 m^2 I_{\sigma} (I_{\sigma} - c) + 2 II_{\hat{\sigma}}]$$

Or $f = 0$

$$\rightarrow W^p = -2c\dot{\lambda} m^2 (I_{\sigma} - c) \quad (3.89.)$$

et pour la loi 3

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\partial f}{\partial I_{\sigma}} \frac{\partial I_{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial II_{\hat{\sigma}}} \frac{\partial II_{\hat{\sigma}}}{\partial \sigma_{ij}} \\ &= m^2 (2I_{\sigma} + 2a) \delta_{ij} + \hat{\sigma}_{ij} \end{aligned} \quad (3.90.a)$$

$$\rightarrow \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} [m^2 (2 I_{\sigma} + 2a) \delta_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}] \quad (3.90.b)$$

$$\rightarrow W^p = \dot{\lambda} [m^2 I_{\sigma} (2 I_{\sigma} + 2a) + 2 II_{\hat{\sigma}}]$$

Or $f = 0$

$$\rightarrow W^p = -2a\dot{\lambda} m^2 I_{\sigma} \quad (3.91.)$$

Ainsi, nous voyons que la dissipation plastique W^p est fonction du multiplicateur λ et de l'état de contrainte. Il est dès lors possible d'exprimer l'écroutissement en fonction de la dissipation plastique totale D ou du paramètre λ . Mais il faut remarquer que passer d'une formulation à l'autre induit une non-linéarité dans l'écroutissement.

Il est également possible d'évaluer l'écroutissement à partir de mesures de la déformation irréversible.

Evaluons le deuxième invariant du tenseur vitesses de déformations plastiques pour la loi 1 :

$$\begin{aligned} II_{\dot{\epsilon}}^p &= \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \\ &= \frac{1}{2} \dot{\lambda}^2 \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ij} \\ &= \dot{\lambda}^2 II_{\hat{\sigma}} \\ &= \dot{\lambda}^2 k^2 \\ II_{\dot{\epsilon}}^p &= \frac{\dot{\lambda}}{2} W^p \end{aligned} \quad (3.92.)$$

Donc le deuxième invariant des vitesses de déformations (on l'appelle souvent déformation plastique équivalente) est également une bonne mesure de l'énergie dissipée, et peut servir à définir l'écrouissage.

Pour les lois 2 et 3, les choses se compliquent : le premier invariant des vitesses de déformations irréversibles n'est pas nul. Deux mesures existent donc. Evaluons les :

Pour la loi 2, le premier invariant est :

$$\begin{aligned} I_{\dot{\epsilon}}^p &= -6 \dot{\lambda} m^2 (I_{\dot{\sigma}} - c) \\ &= \frac{3}{c} W^p \end{aligned} \quad (3.93.a)$$

et le deuxième invariant du déviateur des vitesses de déformations irréversibles est

$$\begin{aligned} II_{\dot{\epsilon}}^p &= \frac{1}{2} \dot{\lambda}^2 \dot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} \\ &= \dot{\lambda}^2 II_{\dot{\sigma}} \\ &= \dot{\lambda}^2 m^2 (I_{\dot{\sigma}} - c)^2 \end{aligned} \quad (3.93.b)$$

$$\rightarrow II_{\dot{\epsilon}}^p = \frac{W^p{}^2}{4c^2 m^2} = (I_{\dot{\epsilon}}^p)^2 / 36 m^2$$

Donc $I_{\dot{\epsilon}}^p$ et $II_{\dot{\epsilon}}^p$ peuvent également servir à définir l'écrouissage.

Enfin, pour la loi n° 3 :

$$\begin{aligned} I_{\dot{\epsilon}}^p &= 3 \dot{\lambda} m^2 (2 I_{\dot{\sigma}} + 2a) \\ II_{\dot{\epsilon}}^p &= \frac{1}{2} \dot{\lambda}^2 \dot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} \\ &= \dot{\lambda}^2 II_{\dot{\sigma}} \\ &= -\dot{\lambda}^2 m^2 I_{\dot{\sigma}} (I_{\dot{\sigma}} + 2a) \end{aligned} \quad (3.94.)$$

Cette fois, il n'existe plus de relation entre $I_{\dot{\epsilon}}^p$, $II_{\dot{\epsilon}}^p$ d'une part, et W^p d'autre part. Ceci n'empêche pas d'exprimer une loi d'écrouissage en fonction de $I_{\dot{\epsilon}}^p$. Comme le signe de $I_{\dot{\epsilon}}^p$ varie selon que $I_{\dot{\sigma}}$ est supérieur ou inférieur au paramètre a , il en résulte certaines particularités que nous analysons plus loin.

Une troisième voie peut être utilisée dans la formulation de l'écrouissage : il suffit de définir la relation entre une contrainte et une déformation plastique lors d'un trajet de contrainte bien choisi. Ainsi, nous pouvons exprimer la relation entre la contrainte axiale et la déformation axiale irréversible sous une sollicitation de traction

simple, et en déduire la relation entre le rayon k de la surface de plasticité et le paramètre λ . C'est la voie que nous avons adoptée dans le programme LAGAMINE pour la première loi.

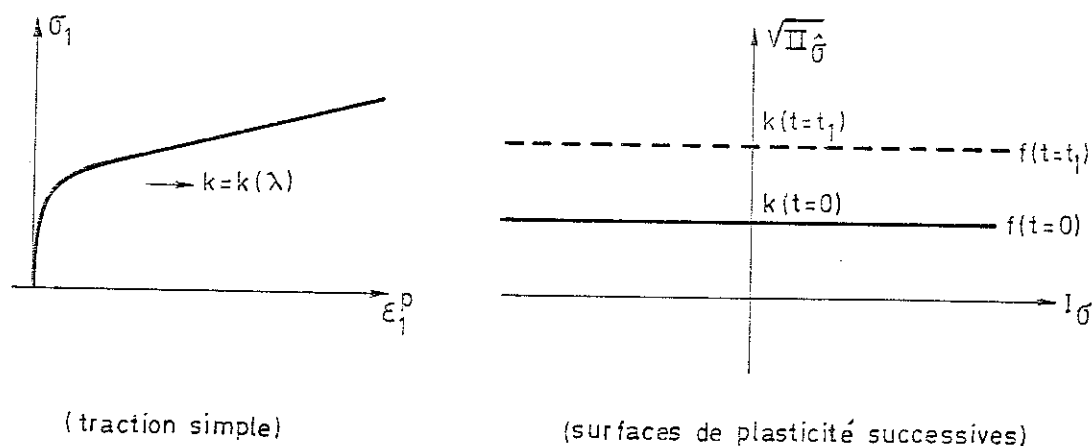


Figure 3.8. - Loi n° 1, écrouissage.

Habituellement, la loi n° 2 de DRUCKER-PRAGER ne s'écrouit pas et constitue donc un état de contraintes limite. Dans ce cas, m et c sont des constantes.

Nous pouvons toutefois sans difficulté introduire un écrouissage sur l'un ou l'autre des paramètres. Nous avons développé un écrouissage sur la cohésion c du matériau. Nous supposons donc que la cohésion augmente suite au travail plastique accompli.

Si cette conception est physiquement discutable, elle présente l'avantage d'éviter les instabilités numériques dans un programme incrémental (il en va différemment dans un programme conçu pour le calcul aux états limites ultimes). Quoi qu'il en soit, le cas de la plasticité parfaite peut généralement être appliqué comme une limite du cas développé. Nous définissons donc la relation

$$c = c(\lambda)$$

comme une des données de la loi n° 2.

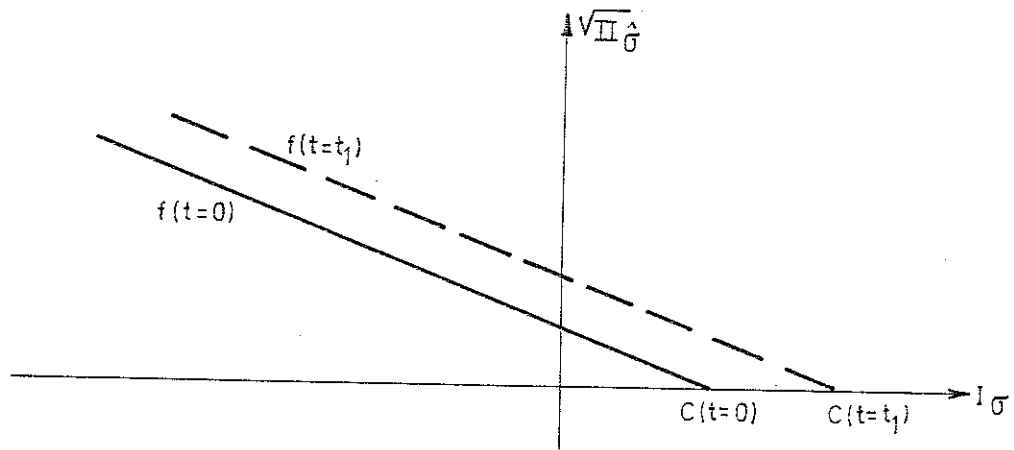


Figure 3.9. - Loi n° 2, surfaces de plasticité successives.

Nous considérons deux formes d'écrouissage de la loi n° 3. Elles portent toutes deux sur la longueur du grand axe $2a$. Le paramètre m est constant et l'ellipse croît donc de façon isotrope.

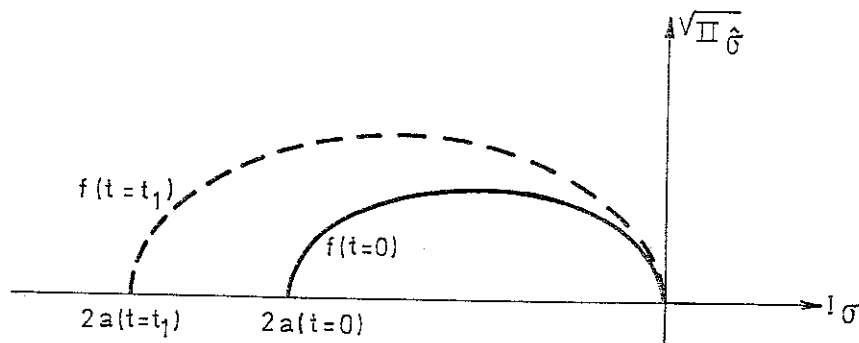


Figure 3.10. - Loi n° 3, surfaces de plasticité successives.

Dans la première approche, nous définissons, comme pour la loi 2, la relation $a = a(\lambda)$ comme l'une des données de la loi. Dans la deuxième approche, nous liions l'évolution du grand axe $2a$ à celle de la déformation plastique moyenne :

$$\begin{aligned}
 a &= a(\epsilon_m^p) \\
 \rightarrow \frac{da}{dt} &= \frac{da}{d\epsilon_m^p} \dot{\epsilon}_m^p && (3.95.) \\
 &= \frac{da}{d\epsilon_m^p} m^2 (2 I_\sigma + 2a) \dot{\lambda}
 \end{aligned}$$

Cette relation est donc semblable aux précédentes. Il faut toutefois

y noter une particularité fondamentale : selon la valeur relative de I_σ et a , l'écroutissement peut être positif ou négatif, c'est-à-dire qu'un adoucissement (softening) peut intervenir. Il en résulte un certain nombre de problèmes numériques dus à l'apparition possible d'instabilités locales ou globales. Cet aspect n'a pas été prévu à ce jour dans le programme LAGAMINE. D'autre part, l'adoucissement plastique doit être distingué du déchargement élastique, ainsi que l'a montré NGUYEN DANG HUNG [24], [15]. Un critère spécifique doit donc être utilisé. Ces deux raisons nous conduisent à exclure de nos analyses l'adoucissement, donc la partie du critère où la contrainte volumique est faible, et à la remplacer par un autre critère. Ceci sera développé ci-dessous au sujet de la modélisation des argiles.

Toute autre forme d'écroutissement isotrope peut sans difficulté être introduite dans chacune des lois développées. Dans la suite, nous supposerons connaître l'expression des paramètres écroutissables en fonction du paramètre λ , et nous écrirons, par simplicité :

$$k = k(\lambda), \quad c = c(\lambda), \quad a = a(\lambda) \quad (3.96.)$$

$$\frac{dk}{d\lambda} = k'(\lambda), \quad \frac{dc}{d\lambda} = c'(\lambda), \quad \frac{da}{d\lambda} = a'(\lambda)$$

Revenons à la condition de cohérence (3.82.) et déterminons le coefficient d'écroutissement μ . Pour la première loi, il vient :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} k'(\lambda) \dot{\lambda} = 0$$

par (3.81.)

$$\dot{f} = \frac{\lambda}{\mu} - 2 k k'(\lambda) \dot{\lambda} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{\mu} = 2 k k'(\lambda) \quad (3.97.)$$

et la vitesse de déformation plastique est

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2 k k'(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \hat{\sigma}_{ij} \quad (3.98.)$$

De même pour la deuxième loi :

$$\frac{1}{\mu} = -2 m^2 c'(\lambda) (I_\sigma - c) \quad (3.99.)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{-1}{2m^2 c'(\lambda) (I_\sigma - c)} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} [-2m^2 \delta_{ij} (I_\sigma - c) + \hat{\sigma}_{ij}] \quad (3.100.)$$

et pour la troisième loi :

$$\frac{1}{\mu} = -2 m^2 a'(\lambda) I_{\sigma} \quad (3.101.)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = -\frac{1}{2m^2 a'(\lambda) I_{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \nabla_{\sigma_{kl}} [m^2(2I_{\sigma} + 2a) \delta_{ij} + \hat{\sigma}_{ij}] \quad (3.102.)$$

Par les développements précédents, nous avons pu associer à une vitesse de contrainte une vitesse de déformation plastique par (3.98.), (3.100.) ou (3.102.), dont la forme générale est :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \nabla_{\sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.103.)$$

et une vitesse de déformation élastique

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = D_{ijkl}^e \nabla_{\sigma_{kl}} \quad (3.64.)$$

Il est généralement nécessaire de connaître la relation inverse, liant à une vitesse de déformation une vitesse de contrainte

$$\nabla_{\sigma_{ij}} = C_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.104.)$$

Le tenseur C_{ijkl}^{ep} , du 4e ordre, ne peut être inversé comme un tenseur du 2e ordre, une procédure spéciale (classique en plasticité) doit être développée :

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma_{ij}} &= C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} \\ &= C_{ijkl}^e (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) \\ &= C_{ijkl}^e (\dot{\epsilon}_{kl} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}) \end{aligned} \quad (3.105.)$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \nabla_{\sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \quad (3.106.)$$

En associant (3.81.) et (3.106.), il vient :

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl}}{\frac{1}{\mu} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (3.107.)$$

dont tous les termes sont connus, et tous les indices muets.

Injectons cette valeur dans (3.105.) :

$$\nabla_{\sigma_{ij}} = C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} C_{abkl}^e C_{ijcd}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{cd}}}{\frac{1}{\mu} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnop}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{op}}} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.108.)$$

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{\text{ep}} \dot{\epsilon}_{kl}$$

soit l'inverse des relations (3.103.) et (3.64.).

Cette relation peut aisément être développée pour les 3 lois envisagées. On obtient ainsi, en séparant les contributions déviatorique et volumique, pour la première loi :

$$\left| \begin{array}{l} \overset{\nabla}{\hat{\sigma}}_{ij} = 2 G \dot{\hat{\epsilon}}_{ij} - \frac{2 G \dot{\hat{\epsilon}}_{kl} \hat{\sigma}_{kl}}{\frac{1}{\mu} + 4 G II_{\hat{\sigma}}} 2 G \hat{\sigma}_{ij} \\ \dot{\sigma}_m = 3 \chi \dot{\epsilon}_m \end{array} \right. \quad (3.109.)$$

pour la deuxième loi :

$$\left| \begin{array}{l} \overset{\nabla}{\hat{\sigma}}_{ij} = 2 G \dot{\hat{\epsilon}}_{ij} - \frac{2 G \dot{\hat{\epsilon}}_{kl} \hat{\sigma}_{kl} - 9 \chi \dot{\epsilon}_m m^2 (2 I_{\hat{\sigma}} - 2c)}{\frac{1}{\mu} + 4 G II_{\hat{\sigma}} + 9 \chi m^4 (2 I_{\hat{\sigma}} - 2c)^2} 2 G \hat{\sigma}_{ij} \\ \dot{\sigma}_m = 3 \chi \dot{\epsilon}_m + \frac{2 G \dot{\hat{\epsilon}}_{kl} \hat{\sigma}_{kl} - 9 \chi \dot{\epsilon}_m m^2 (2 I_{\hat{\sigma}} - 2c)}{\frac{1}{\mu} + 4 G II_{\hat{\sigma}} + 9 \chi m^4 (2 I_{\hat{\sigma}} - 2c)^2} 3 \chi m^2 (2 I_{\hat{\sigma}} - 2c) \end{array} \right. \quad (3.110.)$$

et pour la troisième loi :

$$\left| \begin{array}{l} \overset{\nabla}{\hat{\sigma}}_{ij} = 2 G \dot{\hat{\epsilon}}_{ij} - \frac{2 G \dot{\hat{\epsilon}}_{kl} \hat{\sigma}_{kl} + 9 \chi \dot{\epsilon}_m m^2 (2 I_{\hat{\sigma}} + 2a)}{\frac{1}{\mu} + 4 G II_{\hat{\sigma}} + 9 \chi m^4 (2 I_{\hat{\sigma}} + 2a)^2} 2 G \hat{\sigma}_{ij} \\ \dot{\sigma}_m = 3 \chi \dot{\epsilon}_m - \frac{2 G \dot{\hat{\epsilon}}_{kl} \hat{\sigma}_{kl} + 9 \chi \dot{\epsilon}_m m^2 (2 I_{\hat{\sigma}} + 2a)}{\frac{1}{\mu} + 4 G II_{\hat{\sigma}} + 9 \chi m^4 (2 I_{\hat{\sigma}} + 2a)^2} 3 \chi m^2 (2 I_{\hat{\sigma}} + 2a) \end{array} \right. \quad (3.111.)$$

Ainsi, on voit clairement (lois 2 et 3) qu'une variation de déformation volumique ($\dot{\epsilon}_m \neq 0$) entraîne une modification des contraintes déviatoriques $\hat{\sigma}$ et une variation de déformation déviatorique ($\dot{\hat{\epsilon}} \neq 0$) entraîne une modification de la contrainte volumique σ_m . Cet effet appelé dilatance des sols est observé expérimentalement. Généralement, la loi 2 le représente de façon trop accentuée (NAYLOR et PANDE [49]).

Numériquement,

si la vitesse de déformation est purement volumique, on a :

$$\overset{\nabla}{\hat{\sigma}}_{ij} = d \dot{\epsilon}_m \hat{\sigma}_{ij} \quad (3.112.a)$$

et, si la vitesse de déformation est purement déviatorique,

$$\dot{\sigma}_m = \frac{1}{3} d \dot{\varepsilon}_{kl} \hat{\sigma}_{kl} \quad (3.112.b)$$

pour la loi 2 :

$$d = + \frac{2 G 9 \chi m^2 (2 I_\sigma - 2c)}{\frac{1}{\mu} + 4 G II_{\hat{\sigma}} + 9 \chi m^4 (2 I_\sigma - 2c)^2} \quad (3.113.a)$$

pour la loi 3 :

$$d = - \frac{2 G 9 \chi m^2 (2 I_\sigma + 2a)}{\frac{1}{\mu} + 4 G II_{\hat{\sigma}} + 9 \chi m^4 (2 I_\sigma + 2a)^2} \quad (3.113.b)$$

Le coefficient de dilatance d est toujours négatif pour la loi 2. Pour la loi 3, son signe varie selon la valeur relative de I_σ et a . Pour $I_\sigma < a$, la dilatance est négative, et pour $I_\sigma > a$, elle est positive. Lorsque la dilatance est négative, le volume diminue. (La déformation volumique élastique est toujours une diminution de volume par rapport à l'état non contraint). Nous reviendrons sur ces aspects dans le paragraphe consacré aux sols.

3.2.6. La loi constitutive élasto-visco-plastique.

Dans ce paragraphe, nous nous limitons à l'étude des métaux à haute température. Il ne nous semble pas utile actuellement de développer des lois constitutives avec effet visqueux destinées à la modélisation des sols. La détermination des paramètres des lois élastoplastiques relatives aux sols, leur fiabilité, leur exploitation efficace évoluent lentement. A fortiori en est-on aux balbutiements en viscoplasticité. Et ceci est notamment dû à la disproportion considérable entre les temps géologiques et la durée des expériences réalisées. Toutefois, certains travaux (ODA et al [26], par exemple) apparaissent petit à petit sur le sujet.

Le développement d'une loi élasto-visco-plastique est très proche de celui d'une loi élastoplastique. Nous ne reviendrons donc pas sur les divers détails présentés au paragraphe précédent.

La partie élastique de la vitesse de déformation est liée classiquement par la loi de HOOKE à la vitesse de JAUMAN des contraintes de CAUCHY

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{D}^e \underline{\nabla} \underline{\sigma}$$

ou

$$\underline{\nabla} \underline{\sigma} = \underline{C}^e (\dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\underline{\varepsilon}}^p) \quad (3.71.)$$

et il nous reste à définir la relation entre la vitesse de déformation irréversible $\underline{\dot{\epsilon}}^p$ et la contrainte $\underline{\sigma}$ d'une part, la loi d'écrouissage d'autre part.

Nous utilisons la même surface de plasticité que pour la loi élasto-plastique n° 1 :

$$f = II_{\underline{\sigma}} - k^2 \quad (3.76.)$$

Elle sépare le domaine élastique

$$f < 0$$

du domaine élasto-visco-plastique

$$f \geq 0$$

où apparaissent simultanément des déformations élastiques et visco-plastiques. L'état de contrainte peut donc se situer à l'extérieur de la surface de plasticité, à l'inverse de ce qui se passe dans la théorie de la plasticité.

Nous supposons à nouveau la normalité de la vitesse de déformation irréversible à la surface de plasticité :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.80.)$$

$$\rightarrow \underline{\dot{\epsilon}}^p = \lambda \underline{\sigma}_{ij} \quad (3.86.)$$

la puissance plastique a donc la forme

$$W^p = 2 \lambda k^2 \quad (3.87.)$$

la déformation plastique équivalente est :

$$II_{\underline{\dot{\epsilon}}^p} = \lambda^2 k^2 \quad (3.92.)$$

Ayant défini la direction de la vitesse de déformation plastique par (3.86.), il faut définir son ampleur, donc évaluer λ , comme nous l'avons fait en plasticité. Toutefois, en élasto-visco-plasticité, nous ne disposons pas d'une condition de cohérence. Nous sommes donc libres de choisir la forme de λ , pour autant qu'il soit toujours positif. Il est courant [96] de considérer que le paramètre λ est une fonction monotonement croissante de la distance entre l'état de contrainte et la surface de plasticité ("overstress") : plus l'état de contrainte s'écarte de la surface, plus la vitesse des déformations plastiques est grande. Nous mesurons cette distance par $II_{\underline{\sigma}}/k^2$:

sur la surface de plasticité $II_{\sigma}/k^2 = 1$
à l'intérieur, en élasticité $II_{\sigma}/k^2 < 1$
à l'extérieur, en viscoplasticité $II_{\sigma}/k^2 > 1$

Nous supposons que l'ampleur des déformations plastiques est proportionnelle à une puissance de cette distance :

$$\lambda = \frac{B}{k} \left(\frac{II_{\sigma}}{k^2} \right)^n$$

$$\rightarrow \dot{\underline{\varepsilon}}^p = B \left(\frac{II_{\sigma}}{k^2} \right)^n \frac{\underline{\sigma}}{k} \quad (3.114.)$$

B et n sont des constantes matérielles non dimensionnelles.

Si le matériau s'écroute, la taille de la surface de plasticité évolue, le paramètre k et la distance de l'état de contrainte à la surface se modifient. (Nous supposons que les paramètres B et n ne sont pas affectés par l'écroutissage). Il faut donc définir la vitesse d'écroutissage \dot{k} en fonction du travail plastique (ou d'une autre mesure de l'énergie dissipée). Seule l'expérience permet de connaître cette relation. L'IRSID [61] a procédé à une étude fort intéressante des divers aciers de laminage à haute température. Elle est basée sur des essais de torsion d'éprouvettes cylindriques pleines. Diverses vitesses de rotation, diverses nuances d'acier et diverses températures ont été explorées. Les résultats bruts de ces essais (fig. 3.12.) ont été exploités dans le but de déterminer les paramètres de la loi constitutive (3.114.) [93].

Ils ont subi un prétraitement numérique à l'IRSID, afin de leur donner une forme analytique, qui néglige la recristallisation dynamique. Partant de cette forme analytique, CESCOTTO et al [93] ont montré qu'un écroutissage de la forme

$$\dot{k} = H \frac{W^p}{2k^{m+1}}$$

ou

$$k = \left[\frac{(m+2)H}{2} D \right]^{\frac{1}{m+2}} \quad (3.115.)$$

permet une bonne modélisation des expériences réalisées (fig. 3.13.). H et m sont des paramètres constants, et D est la dissipation plastique totale, intégrale temporelle de la puissance plastique W^p

$$D = \int W^p dt \quad (3.116.)$$

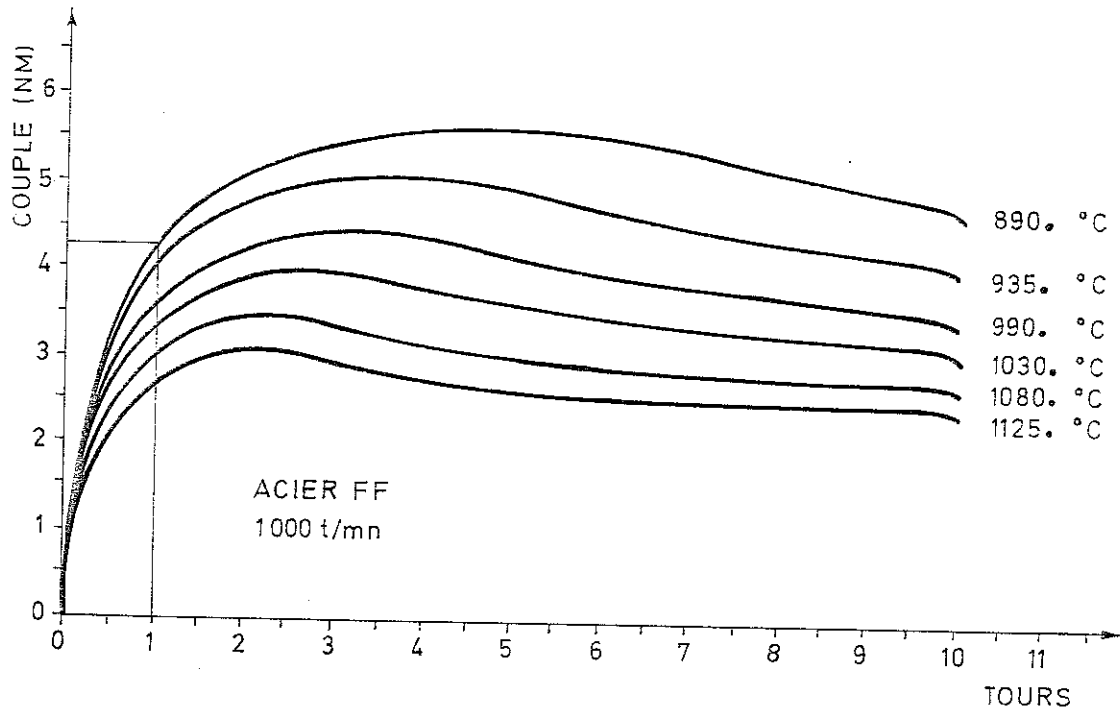


Figure 3.12. - Evolution du couple de torsion avec la déformation pour un acier extra-doux déformé à différentes températures à une vitesse de rotation de 1000 t/mn.

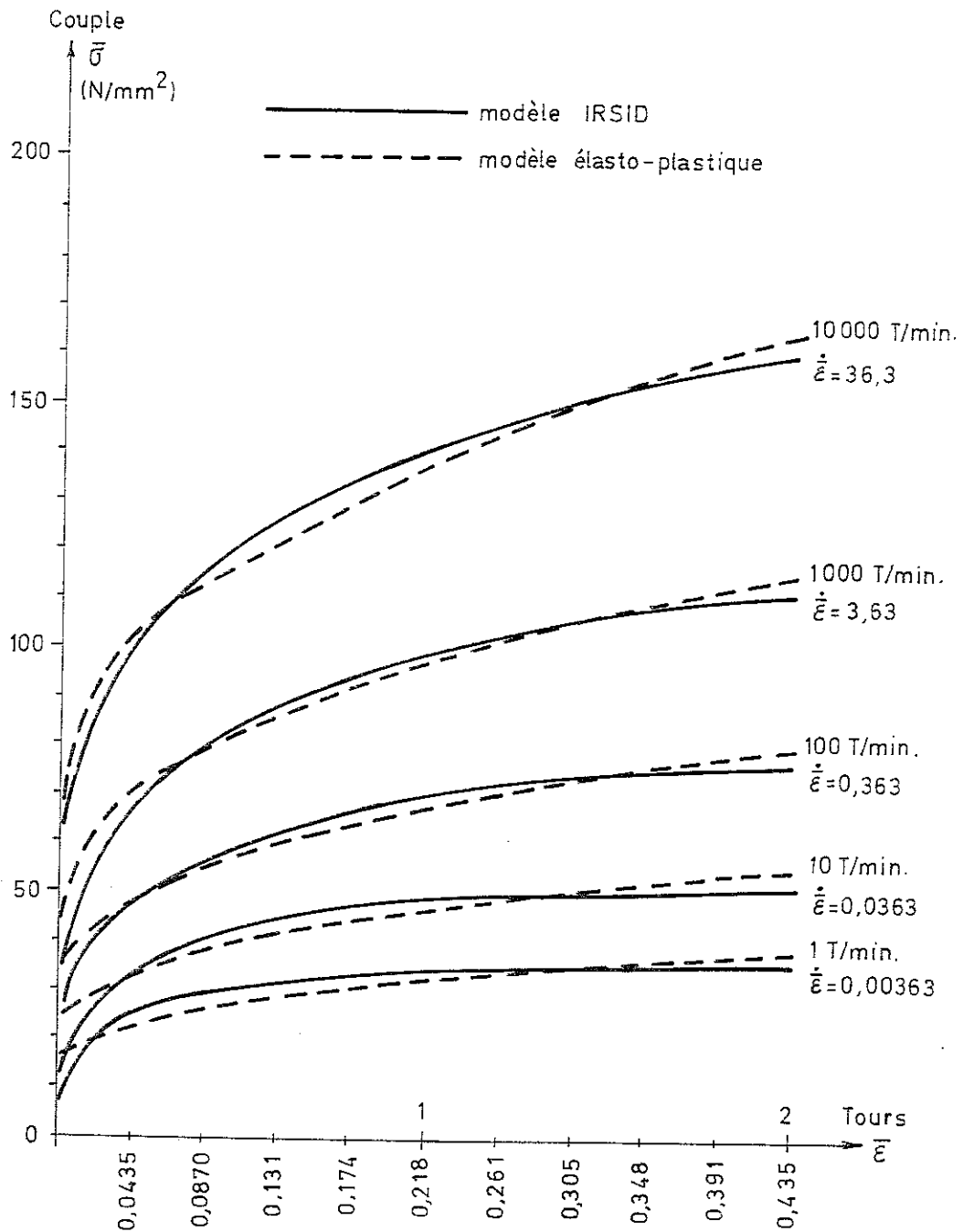


Figure 3.13.

Bien entendu, une autre forme d'érouissage peut sans difficulté être envisagée, en fonction des besoins.

Dès lors, nous avons déterminé toutes les équations de la loi constitutive élasto-visco-plastique. Résumons-les :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{ij} = 2 G [\dot{\epsilon}_{ij} - B \left(\frac{II_{\dot{\sigma}}}{k} \right)^{n-1} \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{k}] \\ \dot{\sigma}_m = 3 \chi \dot{\epsilon}_m \\ \dot{k} = \frac{H W^p}{2 k^{m+1}} \end{cases} \quad (3.117.)$$

La première équation (3.117.a) est fonction, outre des taux de contrainte $\underline{\dot{\sigma}}$ et de déformation $\underline{\dot{\epsilon}}$ (comme en plasticité), de la contrainte $\underline{\sigma}$.

Il n'est donc pas possible d'écrire une relation

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl}$$

contrairement à ce qui se passe en plasticité. Ceci ne nous pose toutefois aucun problème dans le calcul de l'évolution des contraintes en fonction de la vitesse de déformation totale.

Dans la simulation du laminage, nous ne rencontrons pas, à proprement parler, de sollicitation cyclique. Certes, au cours des diverses passes successives, des sollicitations sont appliquées de façon répétée, mais :

- entre les passes se produit une modification de la structure du métal (recristallisation et croissance de grain) qui influence son comportement ultérieur et qui, pratiquement, "efface" l'effet de contraintes antérieures
- au cours d'une passe, il n'y a pas de renversement complet du signe des contraintes.

Il semble donc raisonnable d'utiliser un modèle simplifié, sans écrouissage ni adoucissement cyclique, tel que celui développé plus haut.

3.2.7. La loi constitutive de contact avec frottement.

3.2.7.1. Introduction.

De nombreux chercheurs se sont intéressés à la modélisation numérique par la méthode des éléments finis des phénomènes de contact avec ou sans frottement ([62] à [92]). Parmi eux, certains utilisent la programmation mathématique pour résoudre les problèmes d'inégalité. C'est notamment l'approche de NGUYEN DANG HUNG et de SAXCE [90], [91], qui limitent leur analyse aux problèmes élastiques linéaires et ne prennent pas en compte le frottement. FREDRIKSSON [70] utilise le même type de formulation. KEER et al [69] limitent leur analyse à une géométrie simple et résolvent les équations en partie analytiquement, et en partie numériquement. Mais la plupart des auteurs cités résolvent le problème non linéaire par pas et itérations successives. Ici, le contexte général géométriquement et matériellement non linéaire justifie cette dernière approche : le surcoût dû à la prise en compte

du contact est fort limité.

Les matériaux mis en contact varient selon les auteurs. Si la plupart des articles s'appliquent à des métaux, d'autres analyses existent aussi : DIETERICH [80],[81], GHABOUSSI et al [89], SCHÄFER [88] ont étudié le frottement dans les joints rocheux. Le dernier cité a aussi envisagé les mortiers hydrauliques et les joints dans les constructions préfabriquées.

Ainsi que l'écrit GODET [64], les surfaces de contact sont rugueuses, et des contacts locaux s'établissent aux sommets des aspérités, qui sont plutôt ronds qu'anguleux.

Les surfaces parfaitement "propres" adhèrent les unes aux autres. Les films naturels et artificiels peuvent limiter l'adhésion. Les surfaces industrielles sont toujours couvertes par un ou plusieurs films. Les films naturels peuvent être détruits par le frottement et se reformer entre les passes successives lors des processus multi-passes. Pendant le frottement, des particules se détachent des deux corps en contact (une usure apparaît) et interagissent avec les films.

Dès lors, il apparaît nécessaire de représenter, dans la modélisation du contact avec frottement, la rhéologie des films superficiels, du lubrifiant, et des particules entraînées. Il est donc logique de considérer, outre le solide et la fondation, un troisième corps, composé des ingrédients cités ci-dessus.

Malheureusement, il est extrêmement difficile, et généralement impossible (pour des raisons essentiellement matérielles) d'obtenir une loi constitutive correcte pour ce troisième corps.

Pratiquement, on est donc toujours conduit à faire une approximation simplificatrice en formulant la loi constitutive du contact.

Les théories de la lubrification distinguent le frottement sec du frottement fluide. Ce dernier apparaît dès qu'un film de fluide lubrifiant existe entre les deux surfaces en contact, et est suffisamment épais pour éviter que les aspérités ne se touchent pendant le mouvement relatif. Dans ce cas les contraintes tangentielles peuvent être exprimées en fonction de la pression de contact, de la vitesse relative des deux surfaces et de l'épaisseur du film lubrifiant, selon les équations de l'élastohydrodynamique [76]. CHANDRA et MUKHERJEE [77], négligeant l'effet de la pression de contact, supposent que la contrainte de frottement ne dépend que de la vitesse relative des deux surfaces. Leur loi est donc de type visqueux, découplée du contact. RICE et RUINA [74]

et DIETERICH [80], [81] citent également la vitesse comme un facteur important.

Mais dans les problèmes que nous étudions en général, l'épaisseur de lubrifiant n'est pas suffisante pour éviter que les aspérités se touchent. Le frottement est alors dit semi-fluide. Peu de travaux ont été consacrés à ce cas, limite peu intéressante pour les théoriciens de la lubrification. Dans le cadre de ce travail, nous supposons que l'influence du lubrifiant est suffisamment faible pour que les lois du frottement sec soit en approximativement valables. Mais, il est clair que cette approximation est assez grossière !

Nous supposons que la taille des aspérités, la dimension de la rugosité est faible devant la taille des éléments finis développés et devant les dimensions des solides étudiés. Cette hypothèse est semblable à celle qui est faite en plasticité pour étudier le métal comme un continu et non comme un assemblage de cristaux. Les lois phénoménologiques développées ci-dessous sont donc une représentation statistique du phénomène microscopique, ainsi transposé à l'échelle macroscopique. Nous nous écartons ainsi des travaux de ODEN et PIRES [71],[72], [73]. Ceux-ci considèrent la déformabilité des aspérités, et en déduisent que les phénomènes de contact et de frottement sont "non locaux", en ce sens que la mécanique de toute l'aspérité et sa taille jouent un rôle important. Mais lorsque ODEN et LIN [78] modélisent les grandes déformations, ils abandonnent le concept d'effet local .

Nous supposons également que les rugosités des surfaces des deux solides en contact sont isotropes et le restent. Cette hypothèse n'est manifestement pas toujours vérifiée : le frottement entraîne une usure et une modification de l'état de surface. Il s'ensuit que si un frottement prolongé se produit sur l'une des surfaces en présence dans une direction privilégiée, la loi de frottement devient anisotrope. MROZ et MICHALOWSKI [66] ont étudié le frottement anisotrope dans un cas particulier de fini de surface et en ont déduit des lois constitutives anisotropes. Dans le contexte de grandes déformations où nous nous situons, cette approche n'est pas directement applicable. Si les contraintes et déformations sont définies ci-dessous objectivement par rapport au solide étudié, aucune référence n'est faite à l'état des surfaces et à leur évolution. L'approche développée est limitée au frottement isotrope.

La loi constitutive développée ci-dessous est basée sur l'approche de COULOMB du frottement sec. Nous nous limitons ainsi à la modélisation des effets d'interface. Certains auteurs (AL KHATTAT [92], NAGTEGAAL et REBELO [85],...) étudient les "glissements" qui se produisent dans l'un des solides à proximité de la surface de contact, suite à un cisaillement plastique du métal. Ils limitent alors la contrainte de frottement à la limite de plasticité initiale en cisaillement pur des métaux. L'écroutissage du métal et l'effet des diverses contraintes dans le métal sont donc négligés. Il nous semble préférable [97] de modéliser spécifiquement et séparément la couche superficielle du métal et son comportement élastoplastique dans une fine couche d'éléments finis de solide.

Nous avons choisi de développer la relation constitutive du contact avec frottement selon le formalisme élastoplastique. CURNIER a utilisé la même formulation dans le domaine des petites déformations [65], puis l'a appliqué aux grandes déformations élastoplastiques [67]. SIDOROFF [63] a montré, dans son étude thermodynamique des interfaces de frottement que cette approche est correcte : le glissement est un phénomène mécanique irréversible comparable à ceux qui apparaissent à l'intérieur des solides.

3.2.7.2. L'aspect géométrique.

Nous nous intéressons aux forces appliquées sur la frontière du solide étudié par un corps extérieur, que nous appelons fondation. Il est naturel de travailler dans des axes (\underline{e}_R , \underline{e}_S , \underline{e}_T) orthonormés locaux à la frontière du solide :

\underline{e}_R est la normale intérieure à la surface

\underline{e}_S et \underline{e}_T sont tangents à la surface.

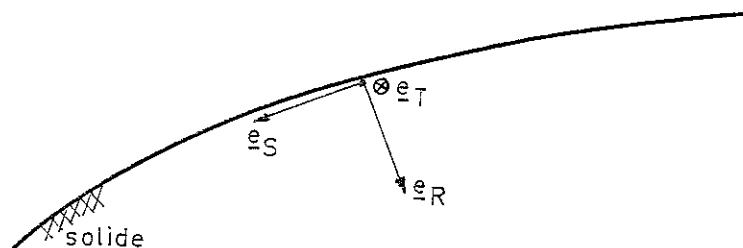


Figure 3.14. - Coupe dans la frontière : axes locaux.

Soit \underline{R} la matrice de rotation qui permet de passer des axes globaux aux axes locaux :

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_R \\ \underline{e}_S \\ \underline{e}_T \end{bmatrix} = \underline{R} \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix} \quad (3.118.)$$

De ce paragraphe, nous notons la force appliquée à la surface $\underline{\sigma}$ (c'est un vecteur !), par similitude formelle avec les paragraphes précédents. Dans les axes locaux $\underline{\sigma}$ a pour composantes la pression p et les deux contraintes tangentielles de frottement τ_R, τ_S :

$$\underline{\sigma}^T = \langle p, \tau_R, \tau_S \rangle \quad (3.119.)$$

Ainsi défini, $\underline{\sigma}$ est objectif : il n'est pas affecté par une rotation de corps rigide du solide. Son taux de variation est donc égal à sa dérive matérielle. Nous utiliserons :

$$\dot{\underline{\sigma}} = \frac{d\underline{\sigma}}{dt} \quad (3.120.)$$

dans la loi constitutive.

A la vitesse de contrainte $\dot{\underline{\sigma}}$ est conjuguée la vitesse de déplacement relatif de la frontière et de la fondation, exprimée dans les mêmes axes locaux. Nous la notons $\underline{\underline{\epsilon}}$:

$$\underline{\underline{\epsilon}}^T = \langle \dot{\epsilon}_R, \dot{\epsilon}_S, \dot{\epsilon}_T \rangle \quad (3.121.)$$

Cette vitesse ne peut être intégrée : le déplacement relatif entre le solide et la fondation n'a pas de sens, car nous nous situons dans un contexte de grands déplacements : à un point du solide correspondent une multitude de points de fondation successifs. Toutefois, la première composante peut subir un traitement spécial. De même que $\dot{\epsilon}_R$ est conjugué à p , la profondeur de pénétration d de la fondation mesurée normalement au solide est conjuguée à la pression p , et elle peut être aisément calculée à tout instant. Elle n'est pas égale à l'intégrale temporelle de $\dot{\epsilon}_R$.

Evaluons la vitesse relative $\underline{\underline{\epsilon}}$. La vitesse d'un point est :

$$\underline{v} = \frac{dx}{dt} \quad (2.1.)$$

Si le solide subit une rotation de corps rigide $Q(t)$, la vitesse d'un point est :

$$\underline{v} = \dot{\underline{Q}}(t) \underline{x} \quad (3.122.)$$

Donc \underline{v} n'est pas objectif.

Soit \underline{x}^S le vecteur coordonnées d'un point à la frontière du solide. Le vecteur distance d'un point de la fondation de coordonnées \underline{x}^f au point du solide est :

$$\underline{u} = \underline{x}^f - \underline{x}^S \quad (3.123.)$$

Mesurons cette distance en axes locaux :

$$\underline{d} = \underline{R} \underline{u} = \underline{R} (\underline{x}^f - \underline{x}^S) \quad (3.124.)$$

\underline{d} est une mesure objective du vecteur distance, car il est exprimé dans des axes locaux liés au solide et tournant avec lui.

La vitesse relative de la fondation et du solide s'obtient par dérivation temporelle du vecteur distance :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{d}} &= \frac{d\underline{d}}{dt} \\ &= \underline{R} \left(\frac{d\underline{x}^f}{dt} - \frac{d\underline{x}^S}{dt} \right) + \frac{d\underline{R}}{dt} (\underline{x}^f - \underline{x}^S) \\ \dot{\underline{d}} &= \underline{R} (\underline{v}^f - \underline{v}^S) + \dot{\underline{R}} (\underline{x}^f - \underline{x}^S) \end{aligned} \quad (3.125.)$$

Donc la vitesse relative des deux surfaces n'est pas simplement la projection en axes locaux de la différence des vitesses en axes globaux. Un deuxième terme apparaît, qui tient compte de la vitesse de rotation du trièdre local.

Lorsque des déformations irréversibles, c'est-à-dire des glissements relatifs, se produisent, il faut exprimer les contributions réversibles $\dot{\underline{\epsilon}}^e$ et irréversibles $\dot{\underline{\epsilon}}^p$ à la vitesse totale de déformation $\dot{\underline{\epsilon}}$. Considérons la configuration relâchée γ^p présentée au paragraphe (3.2.4.). Relâcher la frontière équivaut à la déplacer de telle sorte que les contraintes de contact $\underline{\sigma}$ s'annulent, sans pour autant que le contact disparaisse : les deux surfaces sont en contact non contraint. La fondation a la même position dans γ et γ^p .

Le vecteur distance en axes globaux dans γ^p est :

$$\underline{u}^p = \underline{r}^f - \underline{r}^S = \underline{x}^f - \underline{r}^S \quad (3.126.)$$

\underline{r} est le vecteur coordonnées dans γ^p .

De la configuration relâchée à la configuration actuelle, il s'accroît de :

$$\begin{aligned}
\underline{u}^e &= \underline{u} - \underline{u}^p \\
\underline{u}^e &= (\underline{x}^f - \underline{r}^f) - (\underline{x}^s - \underline{r}^s) \\
&= -\underline{x}^s + \underline{r}^s
\end{aligned}
\tag{3.127.}$$

Passons aux axes locaux.

Ils ont la même orientation dans γ et γ^p , vu l'hypothèse que la fondation occupe la même position dans les deux configurations.

On obtient ainsi :

$$\begin{cases}
\underline{d}^p = \underline{R} \underline{u}^p = \underline{R} (\underline{x}^f - \underline{r}^s) \\
\underline{d}^e = \underline{R} \underline{u}^e = -\underline{R} (\underline{x}^s - \underline{r}^s)
\end{cases}
\tag{3.128.}$$

et les vitesses relatives sont :

$$\begin{cases}
\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \underline{R} (\underline{v}^f - \dot{\underline{r}}^s) + \dot{\underline{R}} (\underline{x}^f - \underline{r}^s) \\
\dot{\underline{\varepsilon}}^e = -\underline{R} (\underline{v}^s - \dot{\underline{r}}^s) - \dot{\underline{R}} (\underline{x}^s - \underline{r}^s) \\
\dot{\underline{\varepsilon}}^e + \dot{\underline{\varepsilon}}^p = \underline{R} (\underline{v}^f - \underline{v}^s) + \dot{\underline{R}} (\underline{x}^f - \underline{x}^s) = \dot{\underline{\varepsilon}}
\end{cases}
\tag{3.129.}$$

Les vitesses de déformation élastique et plastique s'additionnent donc pour donner la vitesse totale. Toutes deux sont affectées par la rotation du repère directeur local.

Remarquons que nous aurions également pu supposer que l'orientation du trièdre local dans la configuration relâchée est celle de la configuration initiale. Ceci aurait posé plusieurs problèmes :

- il aurait fallu mémoriser cette orientation initiale pour calculer la vitesse de déformation plastique.
- la vitesse de déformation aurait perdu son explication physique immédiate et la simplicité de son expression mathématique.

Ce choix nous semble donc peu heureux.

Ayant évalué les taux de contrainte (3.120.) et de déformation (3.129.), il nous reste à poser les équations qui les lient, afin de calculer l'évolution des contraintes en fonction d'une vitesse de déplacement connue.

3.2.7.3. La loi constitutive.

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la relation entre d'une part les vitesses de contrainte et d'autre part, les dérivées objectives de la distance entre le solide et la fondation. Nous utilisons le formalisme élastoplastique classique. Donc nous supposons qu'il existe dans l'espace des contraintes un domaine élastique, où les déforma-

tions existent mais sont modérées, et une surface limite, le critère de COULOMB, à laquelle correspondent des déformations, des déplacements finis et irréversibles.

Un point dans l'espace des contraintes est privilégié : l'origine des axes correspond à l'état de contraintes nulles :

$$p = 0, \quad \tau_S = 0, \quad \tau_T = 0, \quad \underline{\sigma} = \underline{0}$$

et à l'absence de contact entre la fondation et la structure. Cet état est décelé par calcul de la distance entre le solide et la fondation, mesurée selon la normale \underline{e}_R à la surface du solide

si $d \leq 0$, il n'y a pas de contact

si $d > 0$, il y a contact et interpénétration.

(3.130.)

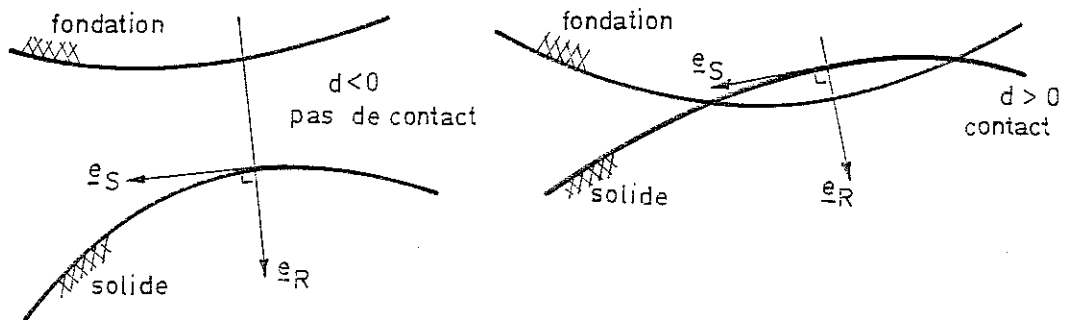


Figure 3.15. - Distance entre solide et fondation.

Le domaine élastique est équivalent au contact sans glissement : les deux surfaces en contact ne peuvent se déplacer l'une par rapport à l'autre. Cette condition de blocage absolu ne peut être aisément introduite dans un programme d'éléments finis travaillant de façon incrémentale. Nous utilisons donc la méthode de pénalisation pour modéliser le contact sans glissement : nous acceptons une légère pénétration et un léger glissement relatif de la frontière et de la structure. Nous les lions aux contraintes par :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{C}^e \underline{\dot{\varepsilon}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau}_S \\ \dot{\tau}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_T & 0 \\ 0 & 0 & K_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_R \\ \dot{\varepsilon}_S \\ \dot{\varepsilon}_T \end{bmatrix} \quad (3.131.)$$

K_p et K_τ sont les coefficients d'élasticité, ou de pénalisation. Ils doivent être très grands (en comparaison avec la rigidité du solide) afin de limiter au maximum les déplacements relatifs en contact collant, et en particulier l'interpénétration des deux surfaces en contact. Toutefois, les coefficients de pénalisation sont limités par les problèmes de convergence numérique : l'utilisateur n'est pas totalement libre de fixer K_p et K_τ . Pratiquement, les coefficients doivent être déterminés de telle sorte que les déplacements élastiques relatifs restent très modérés par rapport aux dimensions de la structure, mais il est peu indiqué (d'un point de vue numérique) de leur demander plus. Ce choix est donc assez délicat.

La première composante p du vecteur contrainte $\underline{\sigma}$ peut être traitée d'une manière différente. Comme la déformation totale $\underline{\epsilon}$ n'existe pas, il n'est pas possible d'écrire une forme intégrée de (3.131.). La loi constitutive est donc hypoélastique, la forme hyperélastique n'existe pas. Par contre, il existe une valeur totale de la première composante

$$\epsilon_R = d \quad (3.132.)$$

Cette valeur est utile (elle indique s'il y a contact ou non) et aisée à calculer. Dès lors, il est possible d'exprimer la pression de contact par la relation hyperélastique

$$p = K_p d \quad (3.133.)$$

C'est cette seconde approche que nous avons choisie.

Certains auteurs ([71],[72]) ont proposé une justification physique à la méthode de pénalisation : Au début du contact et du frottement, les aspérités se déforment élastiquement, et donc, il est possible d'évaluer la valeur K_p , K_τ de leur déformabilité. Cette approche est théoriquement intéressante, mais elle devrait être complétée par une théorie de la déformation plastique des aspérités (Ces déformabilités sont d'ailleurs très faibles). Numériquement, elle s'avère d'une application extrêmement délicate, car elle élimine la possibilité pour le modélisateur de "régler" les coefficients de pénalisation afin d'avoir simultanément une bonne convergence et une bonne précision.

Les contraintes obtenues par la loi précédente ne peuvent croître librement : sous certains états de contrainte, un glissement relatif des surfaces en contact apparaît. Faute d'information plus précise, malgré les nombreuses critiques formulées à son égard [64], nous sup-

posons ici que le critère de COULOMB règle l'apparition du glissement :

$$f = \sqrt{\tau_S^2 + \tau_T^2} - \phi p$$

$$\left| \begin{array}{ll} \text{si } f < 0 & \text{le contact est collant} \\ \text{si } f = 0 & \text{le contact est glissant} \\ f > 0 & \text{est impossible.} \end{array} \right. \quad (3.134.)$$

ϕ est le coefficient de frottement.

Nous noterons, pour simplifier les expressions :

$$|\tau| = \sqrt{\tau_S^2 + \tau_T^2} \quad (3.135.)$$

$$\rightarrow f = |\tau| - \phi p .$$

Nous retrouvons ainsi des relations semblables à celles (3.75.) posées en plasticité. Le cas du contact glissant $f = 0$ correspond à l'apparition de déformations irréversibles et à la dissipation d'énergie mécanique en chaleur par frottement.

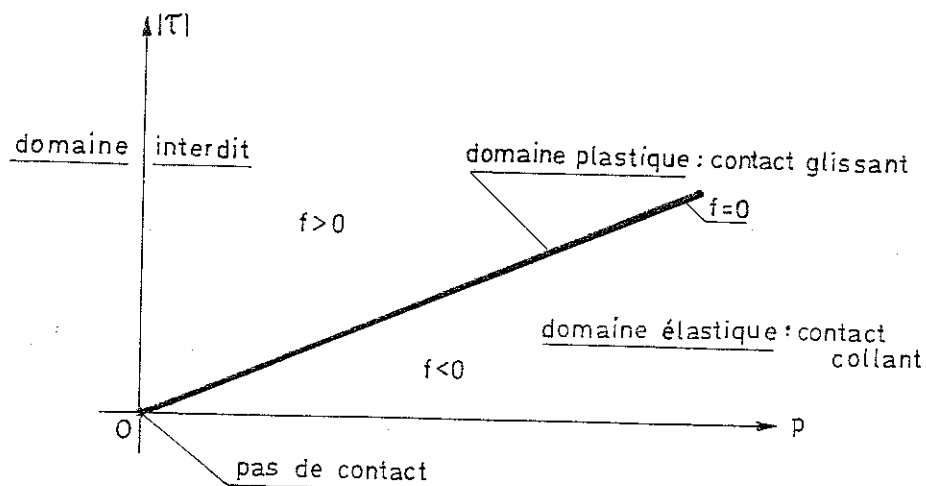


Figure 3.16. - Surface de plasticité.

Ainsi $f = 0$ est bien l'équation d'une surface de plasticité.

Il faut à présent exprimer la vitesse de déformation irréversible $\dot{\underline{\epsilon}}^p$. Au paragraphe relatif aux lois élastoplastiques, nous avons adopté la loi de normalité :

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.80.)$$

Ici, cela donne :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_R^p = -\dot{\lambda} \phi \\ \dot{\epsilon}_S^p = \dot{\lambda} \frac{\tau_S}{|\tau|} \\ \dot{\epsilon}_T^p = \dot{\lambda} \frac{\tau_T}{|\tau|} \end{cases} \quad (3.136.)$$

Donc la loi de normalité implique une déformation normale irréversible. Ceci est faux : dans le contact de deux surfaces métalliques, il est probable que les aspérités subissent quelques fois un écrasement plastique. Mais cette déformation est toujours très limitée et peut pratiquement être négligée : la dissipation associée à la pression est négligeable devant celle associée au frottement. Il faut donc que :

$$\dot{\epsilon}_R^p = 0 \quad (3.137.)$$

Cette constatation nous conduit à formuler une loi constitutive non associée : les déformations plastiques sont normales à une surface d'écoulement différente de la surface de plasticité f . Nous prendrons :

$$\begin{cases} g = |\tau| - a \\ \dot{\underline{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \end{cases} \quad (3.138.)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{\epsilon}_R^p = 0 \\ \dot{\epsilon}_S^p = \dot{\lambda} \frac{\tau_S}{|\tau|} \\ \dot{\epsilon}_T^p = \dot{\lambda} \frac{\tau_T}{|\tau|} \end{cases} \quad (3.139.)$$

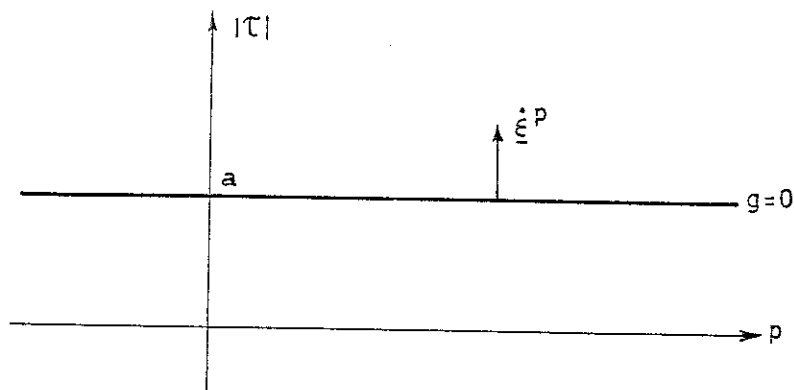


Figure 3.17. - La surface d'écoulement pour les métaux.

En mécanique des roches, il arrive que la déformation irréversible soit située entre les formes (3.136.) et (3.139.). Si dans un joint

rocheux, un matériau granuleux (un sable...) s'est formé entre les deux surfaces en contact, il peut être dilatant. En d'autres termes, il est possible que sous une sollicitation de cisaillement (donc de frottement dans le joint), le matériau subisse un accroissement de volume, et donc que les lèvres du joint s'écartent pendant le glissement. Si nous supposons que le matériau de remplissage obéit à une loi constitutive du type DRUCKER-PRAGER non associé, alors, nous pouvons utiliser une surface d'écoulement de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} g = |\tau| - \alpha p \\ \dot{\varepsilon}_R^p = - \dot{\lambda} \alpha \\ \dot{\varepsilon}_S^p = + \dot{\lambda} \frac{\tau_S}{|\tau|} \\ \dot{\varepsilon}_T^p = + \dot{\lambda} \frac{\tau_T}{|\tau|} \end{array} \right. \quad (3.140.)$$

α est différent du coefficient de frottement ϕ et caractérise la dilata-
tance du joint.

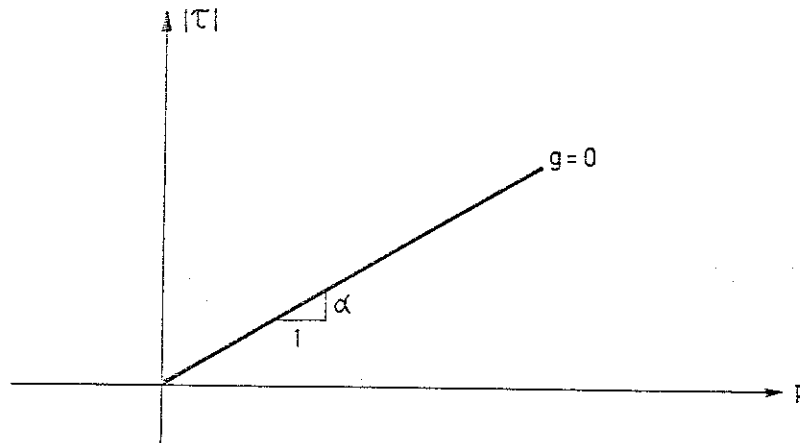


Figure 3.18. - Surface d'écoulement pour un joint rocheux.

DIETERICH [80],[81], GHABOUSSI et al [89] et SCHÄFER ont étudié ce type de joints. En particulier, GHABOUSSI suggère d'utiliser comme surfaces de plasticité et d'écoulement celles qui servent à modéliser élastoplastiquement le matériau de remplissage, par exemple, la surface du modèle CAMCLAY s'il s'agit d'argile.

Nous introduisons classiquement le coefficient d'écrouissage par

$$\dot{\lambda} = \mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \dot{\sigma}_i \quad (3.141.)$$

et nous utilisons la condition de cohérence de la surface de plasticité

$$\dot{f} = 0 \quad (3.142.)$$

pour évaluer μ . On a donc :

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \dot{\sigma}_i + \frac{\partial f}{\partial \phi} \dot{\phi} = 0 \\ \rightarrow \dot{f} &= \frac{\dot{\lambda}}{\mu} - \dot{\phi} p = 0 \end{aligned} \quad (3.143.)$$

Le seul paramètre de la surface de plasticité est le coefficient de frottement ϕ . L'écroûissage éventuel consiste donc à modifier ϕ en fonction du travail plastique dissipé D pendant le glissement :

$$\begin{aligned} W^P &= p \dot{\epsilon}_R^p + \tau_S \dot{\epsilon}_S^p + \tau_T \dot{\epsilon}_T^p = \dot{\lambda} (-\alpha p + |\tau|) \\ D &= \int W^P dt \end{aligned} \quad (3.144.)$$

L'écroûissage est peu connu : s'agit-il d'un adoucissement ou d'un durcissement ? En d'autres termes, ϕ diminue-t-il ou augmente-t-il ? Ainsi que le montrent notamment les travaux de GODET [64] et DIETERICH [80],[81], l'écroûissage existe, et il est conditionné par l'évolution du fini des surfaces suite à l'usure, la présence entre les surfaces de particules arrachées par l'usure ou initialement présentes, la modification du film lubrifiant éventuel... DIETERICH [80] a réalisé des expériences sur le frottement de diverses roches. Il en résulte qu'il existe un léger écroûissage positif (durcissement), mais il nous semble que cet écroûissage peut être négligé sans grand danger, vu sa valeur particulièrement faible.

D'autre part, l'usure peut induire une anisotropie de l'état des surfaces et donc du contact. La prise en compte de cette anisotropie entraînerait une grande complexité mathématique, en particulier dans le domaine des grandes déformations.

Dans ce travail et dans le programme, nous nous sommes limité au cas du frottement sans écroûissage, car il semble que actuellement, vu les connaissances expérimentales, une telle loi est amplement suffisante. Toutefois, nous avons montré [62], [82] qu'il est aisé d'introduire un écroûissage isotrope $\partial\phi/\partial\lambda \neq 0$ dans la loi constitutive. Nous avons donc ici

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = 0, \quad \dot{\phi} = 0.$$

$$\rightarrow \dot{f} = \frac{\dot{\lambda}}{\mu} = 0. \quad (3.145.)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\mu} = 0$$

car $\dot{\lambda}$ est proportionnel à la puissance dissipée W^p . Vu (3.141.), on a aussi :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \dot{\sigma}_i = 0 \quad (3.146.)$$

Donc, en plasticité parfaite, la vitesse de contrainte $\dot{\underline{\sigma}}$ est dirigée perpendiculairement à la normale à la surface de plasticité $\partial f / \partial \underline{\sigma}$: les contraintes restent sur la surface de plasticité. Par contre, la vitesse de déformation plastique :

$$\dot{\epsilon}_i^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_i} = \mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} \dot{\sigma}_j \frac{\partial g}{\partial \sigma_i} \quad (3.147.)$$

semble indéterminée, de même que le facteur $\dot{\lambda}$.

Repartons de la décomposition de la vitesse de déformation en ses parties réversible et irréversible (3.129.c) pour essayer de lier la vitesse de contrainte et la vitesse de déformation :

$$\dot{\sigma}_i = C_{ij}^e (\dot{\epsilon}_j - \dot{\epsilon}_j^p)$$

$$\rightarrow \dot{\sigma}_i = C_{ij}^e \left(\dot{\epsilon}_j - \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_j} \right) \quad (3.148.)$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \dot{\sigma}_i = \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} C_{ij}^e \dot{\epsilon}_j - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} C_{ij}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_j}$$

Vu (3.146.) cette expression détermine la valeur de $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} C_{ij}^e \dot{\epsilon}_j}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} C_{ij}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_j}} \quad (3.149.)$$

et la relation constitutive est :

$$\dot{\sigma}_i = C_{ij}^e \dot{\epsilon}_j - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_a} C_{ab}^e \dot{\epsilon}_b}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} C_{mn}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_n}} C_{ij}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_j} \quad (3.150.)$$

Introduisons les expressions de f , g et C^e . Il vient, pour les métaux:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau}_S \\ \dot{\tau}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_\tau & 0 \\ 0 & 0 & K_\tau \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\phi K_p \frac{\tau_S}{|\tau|} & K_\tau \frac{\tau_S^2}{|\tau|^2} & \frac{K_\tau \tau_S \tau_T}{|\tau|^2} \\ -\phi K_p \frac{\tau_T}{|\tau|} & K_\tau \frac{\tau_S \tau_T}{|\tau|^2} & \frac{K_\tau \tau_T^2}{|\tau|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_R \\ \dot{\epsilon}_S \\ \dot{\epsilon}_T \end{bmatrix} \quad (3.151.)$$

$$\leftrightarrow \underline{\dot{\sigma}} = \underline{C}^{ep} \underline{\dot{\epsilon}}$$

Si nous utilisons à présent la surface d'écoulement conique spécifique aux joints rocheux, il vient

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau}_S \\ \dot{\tau}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & 0 & 0 \\ 0 & K_\tau & 0 \\ 0 & 0 & K_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_R \\ \dot{\epsilon}_S \\ \dot{\epsilon}_T \end{bmatrix} \quad (3.152.)$$

$$- \frac{1}{K_\tau - \alpha \phi K_p} \begin{bmatrix} K_p^2 \alpha \phi & -K_p K_\tau \alpha \frac{\tau_S}{|\tau|} & -K_p K_\tau \alpha \frac{\tau_T}{|\tau|} \\ -K_p K_\tau \phi \frac{\tau_S}{|\tau|} & K_\tau^2 \frac{\tau_S^2}{|\tau|^2} & K_\tau^2 \frac{\tau_S \tau_T}{|\tau|^2} \\ -K_p K_\tau \phi \frac{\tau_T}{|\tau|} & K_\tau^2 \frac{\tau_S \tau_T}{|\tau|^2} & K_\tau^2 \frac{\tau_T^2}{|\tau|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_R \\ \dot{\epsilon}_S \\ \dot{\epsilon}_T \end{bmatrix}$$

Remarquons que si $\alpha \neq \phi$ la matrice constitutive est non symétrique, et si $\alpha = 0$ on retrouve l'expression précédente (3.150.)

En état plan ou axisymétrique, la troisième composante des vecteurs $\underline{\sigma}$, $\underline{\dot{\sigma}}$ et $\underline{\epsilon}$ s'annule. Dès lors les lois se réduisent pour des métaux, à :

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ 0 & K_\tau \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\phi K_p \frac{\tau_S}{|\tau|} & K_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_R \\ \dot{\epsilon}_T \end{bmatrix} \quad (3.153.)$$

et pour les roches, à

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\tau}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ 0 & K_\tau \end{bmatrix} - \frac{1}{K_\tau - \alpha \phi K_p} \begin{bmatrix} K_p^2 \alpha \phi & -K_p K_\tau \alpha \frac{\tau_S}{|\tau|} \\ -K_p K_\tau \phi \frac{\tau_S}{|\tau|} & K_\tau^2 \frac{\tau_S^2}{|\tau|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_R \\ \dot{\epsilon}_S \end{bmatrix} \quad (3.154.)$$