

LA RECHERCHE DE L'EQUILIBRE PAR LA METHODE DE NEWTON-RAPHSON

6.1. INTRODUCTION

Les chapitres 2, 4 et 5 nous ont permis successivement de définir l'équilibre, et de le discrétiser spatialement et temporellement. Donc, connaissant une géométrie (les pressions ou les températures), un état de contraintes (les flux), des charges extérieures (des flux imposés) et des déplacements imposés (des pressions, des températures imposées), nous pouvons dire si un solide est en équilibre ou non ; pour cela, nous comparons les forces nodales intérieures (énergétiquement équivalentes aux contraintes) aux forces nodales extérieures (énergétiquement équivalentes aux forces imposées et aux réactions d'appui) :

$$\left| \begin{array}{l} F_L^I = F_L^E \quad \text{à l'équilibre} \\ L = 1, \text{ nombre total de degrés de liberté} \end{array} \right. \quad (6.1.)$$

Si l'équilibre n'est pas réalisé, il existe des forces dites hors d'équilibre :

$$F_L^{HE} = F_L^I - F_L^E \quad (6.2.)$$

Pratiquement, l'égalité parfaite des deux vecteurs de (6.1.) n'est jamais réalisée, et il est admis dans tous les programmes d'éléments finis incrémentaux et non-linéaires d'accepter un léger déséquilibre. Celui-ci peut être mesuré par la norme des forces hors d'équilibre, qui est comparée à la norme des forces imposées  $\bar{F}$  et des réactions d'appui  $R$ . On obtient ainsi le critère d'équilibre

$$\left| \begin{array}{l} f = |F^{HE}| / |\bar{F} + R| \\ f < \bar{\epsilon} \quad \text{à l'équilibre} \end{array} \right. \quad (6.3.)$$

Dans cette expression  $\bar{\epsilon}$  est la précision choisie par l'utilisateur du programme. Diverses formes de normes ont été proposées. Dans le programme LAGAMINE, nous avons utilisé les normes suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} |F^{HE}| = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{L=1}^N (F_L^{HE})^2} \\ |\bar{F} + R| = \frac{1}{M_1 + M_2} \sqrt{\sum_{L=1}^{M_1} \bar{F}_L^2 + \sum_{L=1}^{M_2} R_L^2} \end{array} \right. \quad (6.4.)$$

$N$  est le nombre de degrés de liberté,  $M_1$  le nombre de forces imposées et  $M_2$  le nombre de degrés de liberté à valeur imposée. Nous comparons donc le déséquilibre moyen aux charges appliquées. Une précision couramment admise et qui donne de bons résultats est  $\bar{\epsilon} = 10^{-3}$ . Une précision

moindre ( $\bar{\epsilon} = 10^{-2}$  par exemple) conduit souvent à de gros problèmes de convergence après quelques pas. Une précision supérieure est coûteuse et n'apporte généralement pas d'information supplémentaire.

Si l'équilibre est réalisé au sens de (6.3.), la solution est acceptée et on peut passer au pas suivant. Si ce n'est pas le cas, il faut améliorer cette solution. Ceci consiste à évaluer un nouveau champ de déplacements sur le pas qui soit plus précis, et à en déduire de nouvelles contraintes (figure 6.1.).

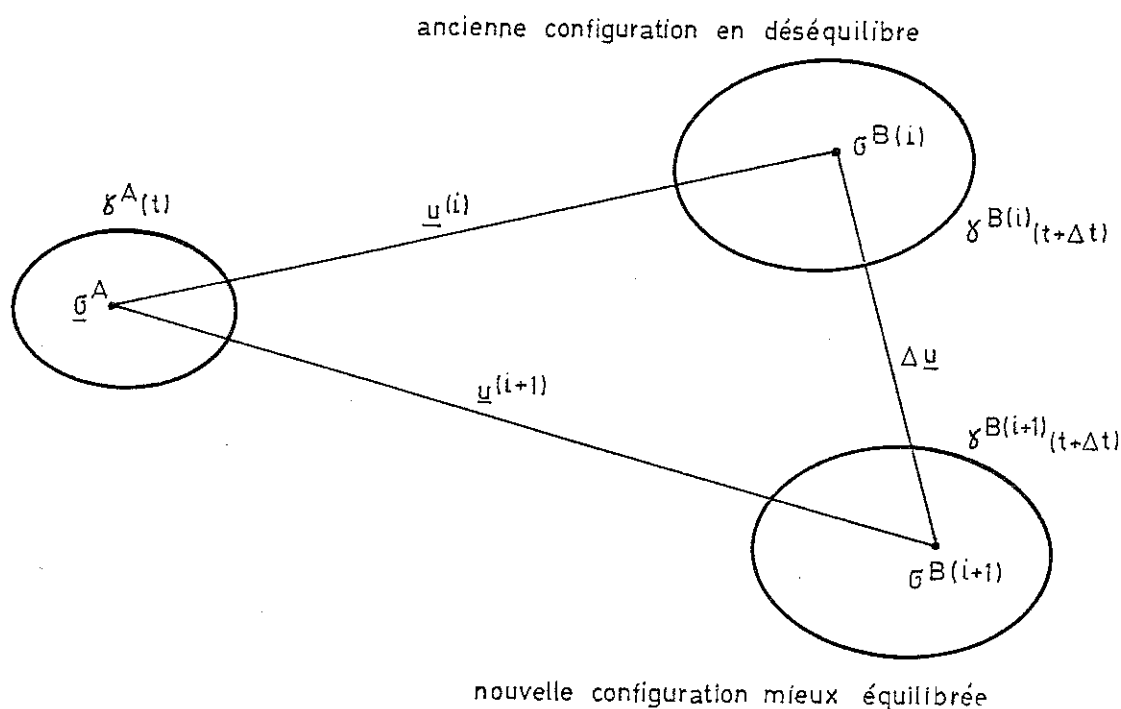


Figure 6.1. - Schéma d'itération.

Comment déterminer une meilleure approximation des déplacements ? De nombreuses techniques existent. Pour la plupart, nous ne les avons pas étudiées. Nous nous sommes contentés de développer la méthode de NEWTON-RAPHSON et ses dérivés immédiats. Travaillons au départ de la solution approchée  $\gamma^{B(i)}$  que nous venons de juger mal équilibrée. Notons  $F_L^{HE(i)}$  les forces hors d'équilibre dans cette approximation. Développons-les en série de TAYLOR limitée au premier ordre. Les seules variables sont les déplacements  $\underline{u}$  sur le pas :

$$F_K^{HE(i+1)} = F_K^{HE(i)} + \frac{\partial F_K^{HE(i)}}{\partial u_L} \Delta u_L \quad (6.5.)$$

ou

$$\underline{F}^{HE(i+1)} = \underline{F}^{HE(i)} + \frac{\partial \underline{F}^{HE(i)}}{\partial \underline{u}} \Delta \underline{u}$$

Nous souhaitons évidemment que le nouvel état soit en équilibre :

$$\underline{F}^{HE(i+1)} = \underline{0} \quad (6.6.)$$

On en déduit l'incrément des déplacements (figure 6.1.).

$$\left| \begin{array}{l} \Delta \underline{u} = - \left( \frac{\partial \underline{F}^{HE(i)}}{\partial \underline{u}} \right)^{-1} \underline{F}^{HE(i)} = - \underline{K}^{(i)-1} \underline{F}^{HE(i)} \\ \underline{u}^{(i+1)} = \underline{u}^{(i)} + \Delta \underline{u} \end{array} \right. \quad (6.7.)$$

Le processus est répété, itération après itération, jusqu'à ce que la précision souhaitée soit atteinte. Il converge dans la grande majorité des cas.

La matrice  $\underline{K}^{(i)}$  est calculée élément par élément, puis assemblée et inversée. Dans certains cas, il est économique de ne pas effectuer ces opérations à chaque itération, mais plutôt de réaliser plusieurs itérations successives avec la même matrice (méthode de NEWTON-RAPHSON modifiée).  $\underline{K}^{(i)}$  est alors une matrice sécante. Le risque de divergence augmente, mais la méthode est économique.

Le but de ce chapitre est d'évaluer la contribution à la matrice tangente  $\underline{K}^{(i)}$  de chaque type d'élément fini. Dans plusieurs cas, la matrice obtenue est non-symétrique. La résolution de systèmes d'équations non symétriques a donc été implantée dans LAGAMINE.

## 6.2. LES GRANDES DEFORMATIONS MECANIQUES DU SOLIDE.

### 6.2.1. Les éléments finis de solide.

Par simplicité, travaillons en état plan. La puissance virtuelle a été évaluée aux chapitres 2 et 4. Les formes suivantes ont été proposées:

$$\left| \begin{array}{l} \delta W_I = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dv \end{array} \right. \quad (2.71.)$$

$$\left| \begin{array}{l} \delta W_I = \sum_{PI} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \det(\underline{J}) t W \end{array} \right. \quad (4.12.)$$

$$\left| \begin{array}{l} \delta W_I = F_{Li} \delta v_{Li} \end{array} \right. \quad (4.14.)$$

Différentions la troisième expression :

$$d\delta W_I = \frac{dF_{Li}}{dU_{kj}} \delta v_{Li} dU_{kj} = \delta \underline{v}^T \underline{K} d\underline{u} \quad (6.8.)$$

La matrice de rigidité apparaît donc par différentiation de la puissance virtuelle. Travaillons sur (4.12.). Dans cette expression,  $t$  et  $W$  sont constants,  $\delta \epsilon_{ij}$  et  $\det(\underline{J})$  dépendent uniquement de la géométrie, et  $\sigma_{ij}$  dépend de la géométrie et de la loi constitutive. En différentiant, il

vient donc :

$$\left. \begin{aligned} d\delta W_I &= \sum_{PI} \sigma_{ij} d[\delta \varepsilon_{ij} \det(\underline{J})] tW \\ &+ \sum_{PI} d\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \det(\underline{J}) tW \end{aligned} \right\} \quad (6.9.)$$

Il est pratique de développer séparément les deux termes qui apparaissent dans cette expression. Le premier dépend du dernier état de contrainte connu, dont on part dans le développement en série de TAYLOR (6.5.).

Il produit la *matrice des contraintes initiales*. Le second terme est classique dans le domaine des petites déformations et rotations. Il produit la *matrice des petites déformations*.

Etudions donc d'abord le premier terme. On a :

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\delta v_i}{\partial x_j} + \frac{d\delta v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_L}{\partial x_j} \delta v_{Lj} + \frac{\partial \phi_L}{\partial x_i} \delta v_{Li} \right) \quad (6.10.)$$

Examinons le premier terme du tenseur  $\delta \varepsilon$ . Vu la forme du tenseur jacobien  $\underline{J}$  (4.4. à 4.6.), il vient :

$$\left. \begin{aligned} \delta \varepsilon_{11} \det(\underline{J}) &= \frac{\partial \delta v_1}{\partial x_1} \det(\underline{J}) \\ &= \left( \frac{\partial \delta v_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta v_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) \det(\underline{J}) \\ &= \frac{\partial \delta v_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial \delta v_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (6.11.)$$

Différentions :

$$d[\delta \varepsilon_{11} \det(\underline{J})] = \frac{\partial \delta v_1}{\partial \xi} \frac{\partial dx_2}{\partial \eta} - \frac{\partial \delta v_1}{\partial \eta} \frac{\partial dx_1}{\partial \eta}$$

En utilisant la relation jacobienne inverse, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta v_1}{\partial \xi} &= \frac{\partial \delta v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \delta v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial dx_2}{\partial \eta} &= \frac{\partial dx_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial dx_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (6.12.)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial \delta v_1}{\partial \xi} \frac{\partial dx_2}{\partial \eta} &= \frac{\partial \delta v_1}{\partial x_1} \frac{\partial dx_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta v_1}{\partial x_2} \frac{\partial dx_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \\ &+ \frac{\partial \delta v_1}{\partial x_1} \frac{\partial dx_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta v_1}{\partial x_2} \frac{\partial dx_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (6.13.)$$

Si l'on effectue systématiquement le développement (6.10. à 13.), on peut montrer que le terme de la variation de puissance virtuelle dû aux contraintes initiales peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
 d\delta W_{I1} &= \sum_{PI} \sigma_{ij} d [\delta \varepsilon_{ij} \det(\underline{J})] t W \\
 d\delta W_{I1} &= \sum_{PI} (\delta \underline{L}^T \underline{\sigma}_0 d\underline{L}) \det(\underline{J}) t W
 \end{aligned} \tag{6.14.}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \delta \underline{L}^T &= \left\langle \frac{\partial \delta v_1}{\partial x_1} ; \frac{\partial \delta v_1}{\partial x_2} ; \frac{\partial \delta v_2}{\partial x_1} ; \frac{\partial \delta v_2}{\partial x_2} \right\rangle \\
 d\underline{L}^T &= \left\langle \frac{\partial dx_1}{\partial x_1} ; \frac{\partial dx_1}{\partial x_2} ; \frac{\partial dx_2}{\partial x_1} ; \frac{\partial dx_2}{\partial x_2} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{6.15.}$$

$$\underline{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sigma_{12} & \sigma_{11} \\ 0 & 0 & -\sigma_{22} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & -\sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{22} & -\sigma_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.16.}$$

Tous les termes de (6.14.) sont calculés dans la configuration déséquilibrée que l'on souhaite corriger. Les vecteurs (6.15.) peuvent être calculés sans difficulté à partir des fonctions d'interpolation et du tenseur jacobien (voir le chapitre 4). Comme la matrice  $\underline{\sigma}_0$  est non symétrique, la matrice des contraintes initiales est non symétrique.

Étudions à présent le deuxième terme de la variation de la puissance virtuelle (6.9.). Il peut être transformé comme suit :

$$\begin{aligned}
 d\delta W_{I2} &= \sum_{PI} d\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \det(\underline{J}) t W \\
 d\delta W_{I2} &= \sum_{PI} \delta \underline{L}^T d\underline{\sigma} \det(\underline{J}) t W
 \end{aligned} \tag{6.17.}$$

avec

$$d\underline{\sigma}^T = \langle d\sigma_{11} ; d\sigma_{12} ; d\sigma_{21} ; d\sigma_{22} \rangle \tag{6.18.}$$

Si l'on pose

$$d\underline{\sigma} = \underline{C}_T d\underline{L} \tag{6.19.}$$

(6.17.) devient :

$$d\delta W_{I2} = \sum_{PI} (\delta \underline{L}^T \underline{C}_T d\underline{L}) \det(\underline{J}) t W \tag{6.20.}$$

et prend donc une forme semblable à (6.14.). Il suffit d'ajouter  $\underline{C}_T$  et  $\underline{\sigma}_0$  pour créer la matrice tangente

$$d\delta W_I = \sum_{PI} [\delta \underline{L}^T (\underline{C}_T + \underline{\sigma}_0) d\underline{L}] \det(\underline{J}) t W \tag{6.21.}$$

Si nous notons :

$$\dot{\underline{L}} = \underline{B} \delta \underline{V}^{B(i)} = \underline{B} \delta \underline{x}^{B(i)} / \Delta t, \quad d\underline{L} = \underline{B} d\underline{x}^{B(i)} = \underline{B} d\underline{u}^{(i)} \quad (6.22.)$$

où  $\underline{x}^{B(i)}$  sont les coordonnées nodales de fin de pas, il vient :

$$\left| \quad d\delta W_I = \delta \underline{V}^{B(i)T} \left[ \sum_{PI} \underline{B}^T (\underline{C}_T + \underline{\sigma}_0) \underline{B} \det(\underline{J}) tW \right] d\underline{u}^{(i)} \quad (6.23.) \right.$$

$$\left| \quad \begin{aligned} d\delta W_I &= \delta \underline{V}^{B(i)T} \underline{K} d\underline{u}^{(i)} \\ \underline{K} &= \sum_{PI} \underline{B}^T (\underline{C}_T + \underline{\sigma}_0) \underline{B} \det(\underline{J}) tW \end{aligned} \quad (6.24.) \right.$$

Nous avons ainsi obtenu la forme de la matrice tangente d'itération. Sauf si  $\underline{C}_T$  a une forme particulière,  $(\underline{C}_T + \underline{\sigma}_0)$  est non symétrique. Donc la matrice tangente est non symétrique. NAGTEGAAL et VELDPAUS [142] obtiennent la même forme de matrice tangente [143] en linéarisant l'équation d'équilibre incrémental.

Revenons à l'expression (6.19.). Nous appelons  $\underline{C}_T$  la matrice d'incidence. En effet, elle représente l'influence d'une perturbation infinitésimale sur les contraintes dans la configuration (approchée) de fin de pas  $\gamma^{B(i)}$  (figure 6.1.). Elle dépend donc de la forme de la loi constitutive et du type d'intégration numérique adoptée.

L'intégration des lois est réalisée par sous-intervalles. Elle est généralement implicite. La rotation du tenseur contrainte, due aux grandes rotations, est également prise en compte. Le schéma d'intégration est donc complexe. Comme les contraintes dépendent du chemin de déformations, l'intégration numérique suit dans chaque itération les déformations et rotations de l'état A de début de pas à l'état B(i) de fin de pas (figure 6.1.). Dans ces conditions, le tenseur constitutif instantanément tangent  $\underline{C}^{ep}$  (calculé au chapitre 3 pour les lois élastoplastiques) est différent de la matrice d'incidence. A ce jour, nous n'avons pas pu établir de méthode analytique efficace de calcul de la matrice d'incidence. Nous utilisons donc une méthode de perturbations numériques: nous donnons successivement à chaque composante de  $\underline{L}$  un très petit incrément, et nous en déduisons numériquement l'incrément correspondant de  $\underline{\sigma}^{B(i)}$ . Ceci permet de construire la matrice d'incidence  $\underline{C}_T$  colonne par colonne. Elle est en général non symétrique.

Cette technique numérique est évidemment coûteuse. Mais le temps CPU consommé pour construire  $\underline{C}_T$  est généralement nettement moindre que celui nécessaire à l'élaboration de la matrice tangente de l'élément  $\underline{K}$  (en particulier dans le cas tridimensionnel) et à celui nécessaire à la résolution du système d'équation. La construction d'une matrice d'incidence parfaitement tangente permet de réaliser de grands pas de déformations [143].

Remarquons que la notion de matrice d'incidence permet de développer une matrice de rigidité parfaitement tangente dans tous les cas, y compris pour des matériaux élastoviscoplastiques. La plupart des programmes prenant en compte de tels matériaux travaillent avec une matrice sécante.

La même procédure peut être développée pour les éléments de solide axisymétrique ou tridimensionnel. Elle est dans les deux cas plus complexe, en particulier pour l'obtention de la matrice des contraintes initiales. Nous déterminons la matrice d'incidence  $\underline{C}_T$  par perturbations dans les deux cas. Pour obtenir les détails pratiques des calculs, le lecteur consultera BOURDOUXHE [144] dans le cas axisymétrique et HABRAKEN [145] dans le cas tridimensionnel.

### 6.2.2. Les éléments finis de frontière.

Un certain nombre de charges extérieures sont réparties sur des frontières des solides. Nous avons choisi de les prendre en compte à l'aide d'éléments finis. Nous avons donc évalué aux chapitres 2 et 4 des forces nodales énergétiquement équivalentes à ces charges, à l'aide du principe des puissances virtuelles. Nous avons noté la contribution de ces éléments à la puissance virtuelle sous la forme :

$$\delta W_E = \int_a p^T \delta v \, da \quad (2.69.)$$

En état plan :

$$\delta W_E = \int_{-1}^{+1} p^T R \delta v \, t \frac{ds}{d\xi} \, d\xi \quad (4.31.)$$

$$\delta W_E = F_{L1} \delta v_{L1} + F_{L2} \delta v_{L2} \quad (4.14.)$$

$$F_{L1} = \sum_{PI} \left( -p \frac{dx_2}{d\xi} + \tau \frac{dx_1}{d\xi} \right) \phi_L W \quad (4.32.)$$

$$F_{L2} = \sum_{PI} \left( +p \frac{dx_1}{d\xi} + \tau \frac{dx_2}{d\xi} \right) \phi_L W$$

Différentions par rapport aux coordonnées  $\underline{x}$ . Comme pour les éléments de solides, deux termes peuvent être mis en évidence. L'un concerne le changement de géométrie (matrice des contraintes initiales) et l'autre le changement de contraintes (matrice des petites déformations).

Supposons les charges  $p, \tau$  indépendantes des déformations, et différencions (4.32.) :

$$\frac{dx_i}{d\xi} = \phi_{L,\xi} x_{Li} \quad (6.25.)$$

$$\begin{bmatrix} dF_{L1} \\ dF_{L2} \end{bmatrix} = \frac{\Sigma}{PI} \begin{bmatrix} \tau & -p \\ p & \tau \end{bmatrix} \phi_L \phi_{K,\xi}^W \begin{bmatrix} dx_{K1} \\ dx_{K2} \end{bmatrix} = \frac{K_\sigma}{\sigma} \begin{bmatrix} dx_{K1} \\ dx_{K2} \end{bmatrix} \quad (6.26.)$$

Ceci définit la matrice des contraintes initiales  $\underline{K}_\sigma$ . Elle est non-symétrique.

Lorsqu'une relation est imposée entre les charges et les déplacements, comme c'est le cas dans les problèmes de contact, il faut différentier les termes de contraintes dans (4.32.). On utilise la matrice d'incidence  $\underline{C}_T$  :

$$\begin{bmatrix} dp \\ d\tau \end{bmatrix} = \underline{C}_T \begin{bmatrix} d\varepsilon_R \\ d\varepsilon_S \end{bmatrix} \quad (6.27.)$$

$$d\varepsilon = \underline{R} d \underline{u} \quad (6.28.)$$

La deuxième partie de la variation des forces nodales donne alors :

$$\begin{bmatrix} dF_{L1} \\ dF_{L2} \end{bmatrix} = \left( \frac{\Sigma}{PI} \underline{R}^T \underline{C}_T \underline{R} t \frac{ds}{d\xi} \phi_L \phi_L \right) \begin{bmatrix} dx_{K1} \\ dx_{K2} \end{bmatrix} = \underline{K}_T \begin{bmatrix} dx_{K1} \\ dx_{K2} \end{bmatrix} \quad (6.29.)$$

Le principal problème est, comme dans le solide, de déterminer  $\underline{C}_T$ . La matrice constitutive instantanément tangente  $\underline{C}^{ep}$  déterminée au paragraphe 3.2. n'est pas la matrice d'incidence, car elle ne tient pas compte du chemin d'intégration. Malheureusement, il n'est pas possible de calculer  $\underline{C}_T$  par de simples perturbations numériques des déformations. En effet, à chaque sous-intervalle d'intégration, nous calculons la matrice de rotation  $\underline{R}$ , la profondeur de pénétration  $\underline{d}$  et la vitesse tangentielle relative à partir de la formulation isoparamétrique et des coordonnées actualisées des noeuds de l'élément. Ceci est différent de la technique appliquée à l'élément solide. En effet, dans ce cas, on évalue le gradient de vitesse au début du pas ou le tenseur jacobien sur l'ensemble du pas (l'un est lié à l'autre) et on en déduit ensuite les déformations et rotations dans chaque sous-intervalle. La géométrie de l'élément est donc prise en compte une seule fois, par le gradient de vitesse. Cette technique n'a pas été utilisée dans le contact. Le tenseur jacobien sur l'ensemble du pas contient l'information complète sur la déformation du solide au point considéré. Il n'existe pas d'information complète et ainsi concentrée pour le contact.

Comme nous n'avons pas pu déterminer de matrice d'incidence  $\underline{C}_T$  parfait-



tement tangente, il semble que la seule technique de détermination de la matrice tangente de l'élément  $K$  soit de perturber numériquement les coordonnées nodales de l'élément. On obtient ainsi simultanément l'effet du changement de géométrie et du changement de contraintes. La procédure est généralement d'un coût raisonnable parce que, d'une part, seuls les éléments où le contact est effectif sont concernés. D'autre part, les éléments de contact sont toujours moins complexes que les éléments de solide. Le nombre de noeuds est plus faible. Il en résulte que le temps passé par le programme dans les éléments de contact est généralement moindre que celui passé dans les éléments de solide.

La même technique de perturbation numérique est utilisée dans les éléments de contact axisymétriques et tridimensionnels.

En général, la fondation est rigide. Sa position et son orientation sont imposées par le modélisateur. Toutefois, dans certains cas, la fondation possède un ou plusieurs degrés de liberté. Nous examinons ici un cas particulier. Considérons le problème de laminage en cage universelle (figure 6.2.). Le bloc d'acier est entraîné par deux cylindres horizontaux A qui effectuent un premier formage, et passe ensuite entre deux cylindres verticaux B qui effectuent un formage dans la direction transversale. Dans notre schéma, le formage est rectangulaire, mais des sections plus complexes peuvent être prises en compte. Les cylindres verticaux B n'imposent aucun déplacement mais suivent le déplacement imposé par le bloc d'acier. Leur rotation est libre. Elle résulte du contact avec le solide. Elle constitue un degré de liberté supplémentaire du problème.

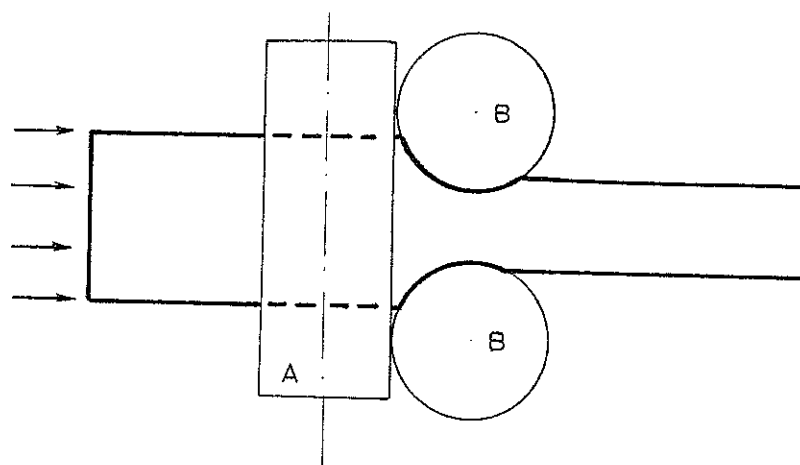


Figure 6.2.- Schéma en plan d'un laminage en cage universelle.

Nous avons évalué au chapitre 4 les forces nodales énergétiquement équivalente aux forces appliquées aux fondations cylindriques. Les couples de rotation sont, après division par le rayon, en état plan,

$$F_{\theta} = \sum_{PI} \tau W \frac{ds}{d\xi} \quad (4.45.)$$

en état tridimensionnel,

$$\left| \begin{aligned} F_{\theta} &= \sum_{PI} \underline{p}^T \underline{R} \underline{e}_{\phi + \frac{\pi}{2}} \left| \underline{e}_{\xi} \wedge \underline{e}_{\eta} \right| W \\ \underline{e}_{\phi + \frac{\pi}{2}} &= \cos \phi \underline{e}_2^f - \sin \phi \underline{e}_3^f \end{aligned} \right. \quad (4.71.)$$

Ces forces nodales dépendent de la géométrie de la frontière du solide et de la rotation du cylindre de fondation. Leur variation est aussi difficile à évaluer que celle des forces nodales de la frontière du solide. Il est cohérent avec notre démarche antérieure de calculer les termes de la matrice de rigidité associés à la rotation du cylindre par perturbation numérique en même temps que l'on calcule les termes associés aux autres degrés de liberté.

Le même développement peut être réalisé pour tout autre degré de liberté de frontière dont le déplacement est libre et la force imposée.

### 6.3. LA CONDUCTION THERMIQUE ET LES ECOULEMENTS EN MILIEU POREUX.

Dans ce paragraphe, nous traitons simultanément les problèmes de conduction thermique et d'écoulements en milieu poreux, car les équations d'équilibre et les lois constitutives sont fort semblables.

#### 6.3.1. Les éléments finis du solide.

Par simplicité, nous travaillons en état plan. La puissance virtuelle a été évaluée au chapitre 2 et discrétisée spatialement au chapitre 4. Les forces nodales qui en résultent ont été évaluées en moyenne sur le pas au chapitre 5 :

$$\bar{F}_L = \sum_{PI} \left( \bar{F}^V \phi_L - \bar{F}_1 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} - \bar{F}_2 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2} \right) t \det(\underline{J}) W \quad (5.107.)$$

Cette expression comprend le cas de la pondération temporelle sur le pas et de l'équilibre instantané. Dans ce dernier cas,  $\bar{F}^V$  et  $\bar{F}$  sont simplement évalués à l'instant  $\theta$ .

En l'absence de couplage entre les déformations mécaniques et les écoulements ou la conduction, la géométrie est fixe.  $\partial \phi_L / \partial x_i$  et  $\det(\underline{J})$  sont donc indépendants de la pression. Différentions les forces nodales par rapport à la pression :

$$d\bar{F}_L = \sum_{PI} (d\bar{F}^V \phi_L - d\bar{F}_1 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_1} - d\bar{F}_2 \frac{\partial \phi_L}{\partial x_2}) t \det(\underline{J}) W \quad (6.30.)$$

Aucun terme de contraintes initiales n'apparaît dans la variation. Seule la partie des "petites déformations" existe. Il n'en serait évidemment plus de même si l'écoulement était couplé à de grandes déformations mécaniques.

Étudions à présent la variation des contraintes. Pour cela, il faut combiner les résultats des chapitres 3 (les lois constitutives) et 5 (l'équilibre moyen). Considérons d'abord le flux spatial. Instantanément, la loi peut être mise sous la forme :

$$\underline{f} = \frac{\underline{\Lambda}}{\gamma} (\underline{M} + \underline{A}) \quad (6.31.)$$

$\underline{\Lambda}/\gamma$  représente le tenseur de conductivité isotrope ou de perméabilité isotrope ou anisotrope. Il dépend généralement de la pression (de la température).  $\underline{A}$  est un terme constant (le terme de gravité) et  $\underline{M}$  est le gradient de pression. Il vient donc par différentiation :

$$d\underline{f} = \frac{\underline{\Lambda}}{\gamma} d\underline{M} + d\left(\frac{\underline{\Lambda}}{\gamma}\right) (\underline{M} + \underline{A}) \quad (6.32.)$$

Si nous choisissons d'exprimer l'équilibre à l'instant  $\theta$ , cette expression se transforme en

$$\left\{ \begin{array}{l} d\bar{f} = \frac{\underline{\Lambda}^\theta}{\gamma} d\underline{M}^\theta + d\left(\frac{\underline{\Lambda}^\theta}{\gamma}\right) (\underline{M}^\theta + \underline{A}) \\ dM_i^\theta = \phi_{L,i} dp_L^\theta = \phi_{L,i} \theta dp_L^B \\ d\left(\frac{\underline{\Lambda}^\theta}{\gamma}\right) = \frac{d}{dp} \left(\frac{\underline{\Lambda}^\theta}{\gamma}\right) \phi_L dp_L^B \end{array} \right. \quad (6.33.)$$

On obtient donc :

$$d\bar{f}_i = \left[ \frac{\underline{\Lambda}^\theta}{\gamma} \phi_{L,i} \theta + \frac{d}{dp} \left(\frac{\underline{\Lambda}^\theta}{\gamma}\right) \phi_L (\underline{M}^\theta + \underline{A}) \right] dp_L^B \quad (6.34.)$$

Si nous choisissons d'exprimer l'équilibre en moyenne sur le pas, le développement se complique. Considérons l'expression (5.110.) obtenue en supposant que la perméabilité varie linéairement sur le pas, et par une pondération linéaire. En différentiant, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\bar{f} = \frac{1}{2} \lambda^A d\underline{M}^B + \frac{1}{2} d\lambda^B \underline{M}^A + \frac{\alpha}{12} d\lambda^B \underline{M}^B + \frac{\alpha}{12} \lambda^A d\underline{M}^B \\ \rightarrow d\bar{f} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{12}\right) \lambda^A d\underline{M}^B + d\lambda^B \left(\frac{1}{2} \underline{M}^A + \frac{\alpha}{12} \underline{M}^B\right) \end{array} \right. \quad (6.35.)$$

On obtient ainsi :

$$d\bar{f}_i = \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{12} \right) \lambda^A \phi_{L,i} + \frac{d\lambda^B}{dp} \left( \frac{1}{2} M_i^A + \frac{\alpha}{12} M_i^B \right) \phi_L \right] dp_L^B \quad (6.36.)$$

Les formes (6.34.) et (6.36.) sont fort semblables. Elles contiennent toutes deux des termes en  $\phi_{L,i}$  et en  $\phi_L$ , dont les coefficients sont différents mais ont une signification semblable. Il n'apparaît donc pas à proprement parler une matrice d'incidence  $\underline{C}_T$  comme en grandes déformations mécaniques. La différentiation des flux spatiaux peut être réalisée exactement en tenant compte du schéma temporel adopté.

Nous noterons (6.34.) et (6.36.) sous la forme

$$df_i = (\underline{\beta}_1 \phi_{L,i} + \beta_{2i} \phi_L) dp_L^B \quad (6.37.)$$

$\underline{\beta}_1$  est un tenseur d'ordre 2,  $\underline{\beta}_2$  est un vecteur.

Ainsi apparaît la première partie de la matrice tangente, caractéristique de l'écoulement :

$$dF_L = \sum_{PI} \langle \phi_{L,1} ; \phi_{L,2} \rangle \underline{\beta}_1 \begin{bmatrix} \phi_{K,1} \\ \phi_{K,2} \end{bmatrix} t \det(\underline{J}) W dp_K^B \quad (6.38.)$$

$$+ \sum_{PI} \langle \phi_{L,1} ; \phi_{L,2} \rangle \underline{\beta}_2 \phi_L t \det(\underline{J}) W dp_K^B = K_{LK}^\lambda dp_K^B$$

Le premier terme est symétrique, mais pas le second.

Considérons maintenant le flux absorbé. Une première forme de loi constitutive est :

$$f^V = c \dot{p} \quad (6.39.)$$

$c$  représente la chaleur spécifique par unité de volume ou le coefficient d'emménagement. Il dépend généralement de la pression (de la température). Différentions. Par des développements similaires à ceux réalisés pour le flux spatial, il vient, en toute généralité :

$$d\bar{f}^V = c \dot{dp} + \dot{p} dc$$

$$= \frac{1}{\Delta t} c \phi_K dp_K^B + \frac{dc}{dp} \dot{p} \phi_K dp_K^B \quad (6.40.)$$

La deuxième partie de la matrice tangente provient des phénomènes transitoires :

$$d\bar{F}_L = \sum_{PI} \left( \frac{c}{\Delta t} + \frac{dc}{dp} \dot{p} \right) \phi_L \phi_K t \det(\underline{J}) W dp_K^B = K_{LK}^C dp_K^B \quad (6.41.)$$

Elle est symétrique.

Nous avons également utilisé une seconde forme pour exprimer le flux absorbé. Elle est basée sur la variation de l'enthalpie ou du volume de

fluide présent dans les pores. Lorsque la fonction de pondération est constante, le flux moyen est :

$$\bar{f}^V = (H^B - H^A)/\Delta t \quad (5.111.)$$

Différentiations

$$\left| \begin{array}{l} d\bar{f}^V = \frac{dH^B}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \frac{dH^B}{dp} dp^B \\ df^V = \frac{1}{\Delta t} \frac{dH^B}{dp} \phi_L dp_L^B \end{array} \right. \quad (6.42.)$$

La partie transitoire de la matrice tangente est alors donnée par :

$$dF_L = \sum_{PI} \frac{1}{\Delta t} \frac{dH^B}{dp} \phi_L \phi_K t \det(\underline{J}) W dp_K^B = K_{LK}^C dp_K^B \quad (6.43.)$$

Les mêmes développements sont réalisés sans difficulté dans les cas axisymétrique et tridimensionnel. Ils ne présentent pas d'intérêt particulier. Aussi ne les présentons-nous pas ici.

### 6.3.2. Les éléments finis de frontière.

Les échanges thermiques convectifs et radiatifs, certaines frontières de milieux poreux et notamment les surfaces à suintement potentiel sont modélisées par des éléments. Les forces nodales de ces éléments ont été évaluées au chapitre 4. La notion d'équilibre moyen introduite au chapitre 5 conduit à utiliser dans l'expression des forces nodales des flux moyens sur le pas de temps. En état plan, on a :

$$\bar{F}_L = \sum_{PI} \bar{q} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \phi_L W \quad (5.108.)$$

Comme la géométrie est fixe, la différentiation donne :

$$d\bar{F}_L = \sum_{PI} d\bar{q} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \phi_L W \quad (6.44.)$$

Si le flux  $\bar{q}$  est imposé, la variation  $d\bar{q}$  est nulle, et  $d\bar{F}_L = 0$ . Sinon, une relation entre le flux  $\bar{q}$  et la pression de surface est imposée. On obtient donc :

$$d\bar{q} = \frac{d\bar{q}}{dp} dp^B = \frac{d\bar{q}}{dp} \phi_K dp_K^B$$

La valeur de  $d\bar{q}/dp$  dépend de la relation imposée  $\bar{q} = \bar{q}(p)$  et de la manière de réaliser l'équilibre moyen. La matrice tangente s'obtient par :

$$d\bar{F}_L = \sum_{PI} \frac{d\bar{q}}{dp} \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} W \phi_L \phi_K dp_K^B = K_{LB} dp_K^B \quad (6.45.)$$

Elle est symétrique.

Le même développement est réalisé sans difficulté dans les cas axisymétrique et tridimensionnel.