

UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES

APPROCHE UNIFIEE DE QUELQUES PROBLEMES
NON LINEAIRES DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

(grandes déformations des métaux et des sols, contact
unilatéral de solides, conduction thermique et écoulements
en milieu poreux.)

par

Robert CHARLIER

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade scientifique
de Docteur en Sciences Appliquées

Année académique 1986-1987

TABLE DES MATIERES.

Table des notations

1. Introduction
 - 1.1. Le cadre de travail
 - 1.2. Les sujets abordés
 - 1.3. Résumé des chapitres et originalités de la thèse.

2. Contraintes, déformations, équilibres
 - 2.1. Introduction
 - 2.2. Les grandes déformations mécaniques du solide
 - 2.2.1. Aspects géométriques
 - 2.2.1.1. Généralités
 - 2.2.1.2. Le tenseur jacobien
 - 2.2.1.3. La mesure des surfaces
 - 2.2.1.4. La mesure des volumes
 - 2.2.1.5. La mesure des déformations
 - 2.2.1.6. La décomposition polaire du tenseur jacobien
 - 2.2.1.7. Les tenseurs de mesure des déformations
 - 2.2.1.8. Le tenseur déformation de CAUCHY
 - 2.2.1.9. Un cas particulier. La déformation triaxiale homogène
 - 2.2.2. Tenseurs contraintes en grandes déformations
 - 2.2.2.1. Introduction
 - 2.2.2.2. Le vecteur contrainte sur une facette
 - 2.2.2.3. Le tenseur contrainte de CAUCHY
 - 2.2.2.4. Les tenseurs contrainte corotationnelle et de KIRCHOFF
 - 2.2.2.5. Le tenseur contrainte de LAGRANGE
 - 2.2.2.6. Le tenseur contrainte de PIOLA KIRCHOFF n° 2
 - 2.2.2.7. Le tenseur contrainte de GREEN RIVLIN
 - 2.2.2.8. Analyse des tenseurs contraintes - Choix
 - 2.2.2.9. La décomposition du vecteur force
 - 2.2.3. L'équilibre du solide
 - 2.2.3.1. Les forces appliquées
 - 2.2.3.2. L'équilibre local en surface
 - 2.2.3.3. L'équilibre local en volume
 - 2.2.3.4. L'équilibre global - Les puissances virtuelles.
 - 2.3. La conduction thermique dans les solides et l'écoulement de fluides dans les solides poreux.

- 2.3.1. Introduction
- 2.3.2. Les déplacements et les déformations
- 2.3.3. Les forces et les contraintes
- 2.3.4. L'équilibre
 - 2.3.4.1. Les débits appliqués
 - 2.3.4.2. L'équilibre local en surface
 - 2.3.4.3. L'équilibre local en volume
 - 2.3.4.4. L'équilibre global - Les puissances virtuelles.
- 2.4. Conclusions.

- 3. L'aspect matériel - Les lois constitutives
 - 3.1. Introduction
 - 3.2. Les grandes déformations mécaniques du solide
 - 3.2.1. Introduction
 - 3.2.2. L'aspect géométrique (I) : les vitesses de déformation et de contrainte
 - 3.2.3. Les lois constitutives élastiques
 - 3.2.4. L'aspect géométrique (II) : les déformations irréversibles
 - 3.2.5. Les lois constitutives élastoplastiques
 - 3.2.6. La loi constitutive élastoviscoplastique
 - 3.2.7. La loi constitutive de contact avec frottement
 - 3.2.7.1. Introduction
 - 3.2.7.2. L'aspect géométrique
 - 3.2.7.3. La loi constitutive
 - 3.2.8. Les aspects spécifiques aux sols
 - 3.2.8.1. Introduction
 - 3.2.8.2. Les contraintes effectives dans les sols saturés
 - 3.2.8.3. La plasticité : généralités
 - 3.2.8.4. La plasticité de type "Cam Clay"
 - 3.2.8.5. La plasticité des craies
 - 3.3. La conduction thermique
 - 3.3.1. Introduction
 - 3.3.2. La conduction
 - 3.3.3. L'absorption d'énergie
 - 3.3.4. Les échanges thermiques aux frontières
 - 3.4. Les écoulements en milieu poreux
 - 3.4.1. Introduction
 - 3.4.2. La loi d'écoulement
 - 3.4.3. La loi d'absorption de fluide
 - 3.4.4. Les écoulements avec surface libre

- 3.4.5. Les conditions aux frontières.
- 4. Discrétisation spatiale en éléments finis
 - 4.1. Introduction
 - 4.2. Les grandes déformations mécaniques
 - 4.2.1. L'état plan de contraintes ou de déformations
 - 4.2.2. L'état axisymétrique
 - 4.2.3. L'état tridimensionnel
 - 4.2.4. Les frontières chargées
 - 4.2.4.1. Introduction
 - 4.2.4.2. L'état plan ou axisymétrique
 - 4.2.4.3. Le contact en état plan ou axisymétrique
 - 4.2.4.4. L'état tridimensionnel
 - 4.2.4.5. Le contact en état tridimensionnel
 - 4.2.5. Le chargement en volume : le poids propre
 - 4.3. La conduction thermique et l'écoulement de fluide en milieu poreux
 - 4.3.1. L'état plan
 - 4.3.2. L'état axisymétrique
 - 4.3.3. L'état tridimensionnel
 - 4.3.4. Les frontières à débit imposé
 - 4.3.4.1. Introduction
 - 4.3.4.2. L'état plan ou axisymétrique
 - 4.3.4.3. L'état tridimensionnel
 - 4.3.5. Les débits imposés en volume.
- 5. Discrétisation temporelle en pas de temps
 - 5.1. Introduction
 - 5.2. Les grandes déformations mécaniques du solide
 - 5.2.1. Introduction
 - 5.2.2. L'intégration des lois constitutives en petites déformations, et rotations
 - 5.2.2.1. Les lois constitutives élastiques
 - 5.2.2.2. Les lois constitutives élastoplastiques
 - 5.2.2.3. Les lois constitutives élastoviscoplastiques
 - 5.2.2.4. Les sous intervalles d'intégration
 - 5.2.3. L'intégration des lois constitutives en grandes déformations et rotations
 - 5.2.3.1. Introduction
 - 5.2.3.2. La méthode linéaire ou de la moyenne

- 5.2.3.3. La méthode de la configuration finale
- 5.2.3.4. La méthode de la rotation instantanée finale
- 5.2.3.5. La méthode du gradient de vitesse constant
- 5.2.3.6. L'objectivité dans les problèmes de contact
- 5.3. La conduction thermique et les écoulements en milieu poreux
 - 5.3.1. Introduction
 - 5.3.2. L'équilibre en un instant
 - 5.3.3. L'équilibre moyen ou pondéré
- 6. La recherche de l'équilibre par la méthode de NEWTON-RAPHSON
 - 6.1. Introduction
 - 6.2. Les grandes déformations mécaniques du solide
 - 6.2.1. Les éléments finis de solide
 - 6.2.2. Les éléments finis de frontière
 - 6.3. La conduction thermique et les écoulements en milieu poreux
 - 6.3.1. Les éléments finis de solide
 - 6.3.2. Les éléments finis de frontière
- 7. Quelques applications
 - 7.1. L'écrasement de lopins cylindriques
 - 7.1.1. Introduction
 - 7.1.2. Modélisation
 - 7.1.3. Résultats et comparaisons
 - 7.2. L'arrachement d'une tête de bielle
 - 7.2.1. Introduction
 - 7.2.2. Modélisation
 - 7.2.3. Résultats
 - 7.3. La subsidence d'un gisement pétrolier
 - 7.3.1. Introduction
 - 7.3.2. Modélisation
 - 7.3.3. Résultats
 - 7.4. L'échauffement d'une colonne mixte (acier + béton) pendant un incendie
 - 7.4.1. Introduction
 - 7.4.2. Modélisation
 - 7.4.3. Résultats
 - 7.5. L'écoulement avec surface libre suite à un pompage en galerie
 - 7.5.1. Introduction
 - 7.5.2. Modélisation
 - 7.5.3. Résultats

8. Conclusions

Bibliographie.

TABLE DES NOTATIONS.

La diversité des sujets abordés rend le choix des notations et symboles complexe. Il est fréquent que la même lettre ait une signification différente selon les domaines où elle est utilisée. Nous avons essayé d'éviter au maximum les confusions possibles en précisant souvent les significations dans le texte. Dans la table qui suit, nous nous contentons de donner la signification des notations et symboles qui servent dans de longues parties de la thèse. Ceux dont l'usage est plus limité sont définis uniquement lors de leur première apparition.

Lettres latines.

$\underline{a}, \underline{A}$	vecteur surface dans γ et Γ
2a	seuil de plasticité en compression hydrostatique pure
\underline{C}	tenseur de CAUCHY-GREEN droit
$\underline{C}^e, \underline{C}^{ep}$	tenseurs d'élasticité et d'élastoplasticité (4e ordre)
C_v	chaleur spécifique par unité de volume
c	mesure de la cohésion dans les sols
c	coefficient d'emménagement (écoulements)
D	dissipation (plasticité, viscoplasticité)
\underline{D}^e	tenseur inverse d'élasticité
\underline{d}, d	vecteur distance, distance (contact)
$\underline{E}^A, \underline{E}^B, \underline{E}^G,$ $\underline{E}^H, \underline{E}^K, \underline{E}^M$	tenseurs déformation de ALMANSI, BIOT, GREEN, HILL, KARNI, MOONEY
E	module d'élasticité de YOUNG
$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$	système d'axes global
$\underline{e}_R, \underline{e}_S, \underline{e}_T$	système d'axes lié à la frontière
$\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta$	système d'axes isoparamétrique
e	indice des vides
e	indice supérieur indiquant l'élasticité
\underline{F}	tenseur jacobien
F_{Li}, F_L	forces nodales
f, \underline{f}	flux ou débit scalaire ou vectoriel
f^V	flux ou débit absorbé
$f = 0$	équation de la surface de plasticité
f	indice supérieur indiquant la fondation (contact)
\underline{G}	tenseur de déformation naturelle
G	module de cisaillement élastique
H	enthalpie ou volume de fluide contenu par les pores
h	coefficient de convection

\underline{I}	tenseur unité
I	énergie potentielle
$I_{\sigma} = \sigma_{ii}$	premier invariant du tenseur $\underline{\sigma}$
$II_{\hat{\sigma}} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ij}$	deuxième invariant du déviateur $\hat{\sigma}$ du tenseur $\underline{\sigma}$
\underline{J}	tenseur jacobien de la transformation isoparamétrique
\underline{K}	matrice de rigidité
k	rayon de la surface de plasticité
\underline{L}	tenseur contrainte de LAGRANGE
\underline{L}	gradient de vitesse
L	indice inférieur se rapportant au numéro de noeud
\underline{M}	gradient de pression ou de température
m	taux de variation de la pression ou de la température
m	mesure du frottement interne (soils)
\underline{n}	normale
n	porosité
\underline{P}, p	force par unité de masse et de surface
PI	point d'intégration
p	pression
p	indice supérieur indiquant la plasticité ou la visco-plasticité
\underline{Q}	tenseur de rotation
Q, q	débit de fluide ou flux de chaleur en volume ou en surface
\underline{R}	tenseur de rotation
R	rayon
\underline{r}	vecteur coordonnées dans γ^D
\underline{S}	tenseur contrainte de PIOLA-KIRCHOFF n° 2
\underline{s}	indice supérieur indiquant le solide (contact)
$\underline{T}, \underline{t}$	tenseurs contrainte corotationnelle et de KIRCHOFF
$\underline{T}, \underline{t}$	vecteurs contrainte dans Γ et γ
T	température
t	temps
t	épaisseur
\underline{U}	tenseur déformation pure droit
\underline{u}	vecteur déplacement
V, v	volumes dans Γ et γ
\underline{v}	vecteur vitesse
W	puissance
δW	puissance virtuelle
W	poids d'intégration
w	indice inférieur représentant l'eau

$\underline{X}, \underline{x}$ vecteurs coordonnées dans Γ, γ

Lettres grecques.

α	angle ou coefficient de dilatance
Γ, γ, γ^p	configurations initiale, actuelle et relachée
γ	pois spécifique
δ	perturbation
δ_{ij}	tenseur de KRONECKER
$\underline{\varepsilon}$	tenseur déformation de CAUCHY
ε_m	valeur moyenne du tenseur $\underline{\varepsilon}$
ε	coefficient de rayonnement
ρ	3e coordonnée isoparamétrique
η	2e coordonnée isoparamétrique
θ	paramètre temporel non dimensionnel
$\underline{\Lambda}$	tenseur de perméabilité
λ	conductivité thermique ou perméabilité
$\dot{\lambda}, \lambda$	ampleur de la vitesse de déformation irréversible
μ	coefficient d'écroutissage
ν	coefficient de POISSON
ξ	1ère coordonnée isoparamétrique
ρ^o, ρ	masse spécifique dans Γ ou γ
$\underline{\sigma}$	tenseur contrainte de CAUCHY
$\underline{\sigma}^i$	tenseur contrainte effective de CAUCHY
σ_m	valeur moyenne du tenseur de CAUCHY
σ_0	constante de BOLTZMAN
τ	force tangentielle de frottement par unité de surface
ϕ	fonction d'interpolation
ϕ	coefficient de frottement de COULOMB
χ	module de compressibilité élastique
$\underline{\omega}$	tenseur vitesse de rotation

Symboles.

$\text{sym}(\cdot)$	partie symétrique d'un tenseur
$\text{skw}(\cdot)$	partie antisymétrique d'un tenseur
$\text{tr}(\cdot)$	trace d'un tenseur
$\text{det}(\cdot)$	déterminant d'un tenseur
$\overset{\circ}{\underline{t}}, \overset{\circ}{\underline{\sigma}}, \overset{\circ}{\underline{\sigma}}$	dérivées objectives des tenseurs $\underline{t}, \underline{\sigma}$
$\hat{\underline{S}}, \hat{\underline{E}}, \hat{\underline{\sigma}}, \hat{\underline{\varepsilon}}$	déviateurs des tenseurs $\underline{S}, \underline{E}, \underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}$

Règles générales.

[] Les renvois bibliographiques sont indiqués entre deux crochets.

La convention de sommation d'EINSTEIN s'applique de façon générale à tous les indices inférieurs minuscules.

CHAPITRE 1.

INTRODUCTION

1.1. LE CADRE DE TRAVAIL.

Cet ouvrage est le fruit de sept années d'utilisation, de recherche et de programmation de la méthode des éléments finis au sein du service universitaire de Mécanique des Matériaux, Stabilité des Constructions et Mécanique des Structures (M.S.M.). Je me suis plus particulièrement intéressé à quelques domaines de la mécanique du solide ou périphériques à celle-ci. Il s'agit des grandes déformations à chaud et à froid des métaux, du problème de contact unilatéral avec frottement, de la mécanique des sols, et aussi de la conduction thermique dans les solides et des écoulements de liquides dans les milieux poreux, essentiellement des sols. L'ensemble de ces développements a été implanté dans un programme non linéaire d'éléments finis, LAGAMINE, créé initialement dans le but de simuler le laminage en cannelures. Comme on le voit, son champ d'action s'est fort élargi, et il s'élargira encore. Créer un tel programme n'est pas le travail d'un homme, mais celui d'une équipe. J'ai la chance d'appartenir à un groupe dynamique où règne la bonne humeur. Et je remercie de leur aide dans la réalisation de cette thèse, S. CESCOTTO, V. de VILLE, G. FONDER, G. FRANQUET, A. GODINAS, A-M. HABRAKEN, E. LEMAIRE, J-P. RADU, I. RATY et P. VILLERS du M.S.M., A. MONJOIE et C. SCHROEDER du LGIH, H. GROBER de l'ARBED et Sylvie, ma compagne.

Plusieurs organismes extérieurs à l'Université de Liège ont soutenu ces recherches. Citons ARBED-RECHERCHES, le Ministère de la Région Wallonne et la CILE. Je les remercie de leur aide.

1.2. LES SUJETS ABORDES.

En raison de l'accroissement constant des exigences de qualité des produits obtenus par formage (estampage, laminage,...) des métaux, il devient indispensable d'acquérir une connaissance approfondie des processus mécaniques et métallurgiques qui s'y déroulent. Ainsi, par exemple, se posent les problèmes du contrôle des dimensions du produit et de son évolution microstructurale, qu'il est difficile de maîtriser par une approche purement empirique. De nombreux efforts de recherches sont par conséquent concentrés sur la mise au point de modèles qui permettent de représenter mathématiquement les phénomènes complexes qui ont lieu au cours du laminage à chaud.

La solution du problème de formage du point de vue de la mécanique des milieux continus, peut être recherchée par différentes méthodes, le choix

de la méthode dépendant dans une large mesure des informations qu'on désire obtenir. Nous avons choisi d'utiliser la méthode des éléments finis parce qu'elle permet, dans une formulation lagrangienne, de connaître, à chaque moment du processus, l'état de déformation et de contrainte en chaque point matériel du produit laminé. Cette possibilité nous a paru primordiale puisqu'elle permet d'envisager la liaison avec l'évolution de la microstructure.

Dans tous les processus de formage de métaux, le contact entre le solide formé et l'outil (le plateau, le cylindre, le poinçon, la matrice, ..) qui le forme est fondamental. Il s'accompagne de frottements et de grands déplacements. De ceux-ci, il résulte que de grandes zones de la frontière du solide formé peuvent entrer en contact avec de grandes zones de l'outil, sans que l'on puisse déterminer a priori où cela se produira. Cette incertitude rend nécessaire un modèle de contact très général, afin de représenter avec précision les efforts de formage.

Les méthodes numériques en mécanique des sols et des roches se développent depuis quelques années. Ce domaine a été, plus longtemps que bien d'autres, celui des modèles mathématiques extrêmement simplifiés. Il reste aujourd'hui encore un peu à l'écart des autres domaines auxquels a été appliquée la méthode des éléments finis. Ceci nous semble dû pour une bonne part à la difficulté de réaliser des expériences dont les résultats soient répétitifs, et donc à la difficulté de vérifier les théories mathématiques élaborées. Ceci apparaît clairement lorsqu'on essaye de construire une loi constitutive de sol. Tous les chercheurs s'accordent à reconnaître que les sols ne sont pas élastiques linéaires. Mais sont-ils élastoplastiques ou élastoviscoplastiques ? Il est extrêmement difficile de réaliser des essais de fluage de sols, étant donné les échelles de temps utilisées en géologie. Aussi se limite-t-on généralement à des modèles élastoplastiques. Un autre problème apparaît alors immédiatement : la dispersion des résultats expérimentaux est telle qu'il est souvent difficile de choisir des valeurs moyennes significatives. Et ceci reflète bien la grande hétérogénéité de la plupart des sols et roches. Les mêmes incertitudes apparaissent lorsqu'on essaye d'appliquer les modèles mathématiques à un cas concret, car les données nécessaires sont bien difficiles à collecter.

La méthode des éléments finis nous paraît s'indiquer en mécanique des sols et des roches d'abord parce qu'elle s'adapte aisément à la plupart des géométries - souvent complexes - rencontrées en géologie. Ensuite, elle est un cadre bien connu, donc stable et sûr, pour le développement d'un modèle mathématique dans une discipline où les incertitudes sont si fortes. Il en est de même des lois élastoplastiques. Le formalisme

utilisé pour les métaux peut sans difficulté être utilisé pour un sol ou une roche, et sert de guide dans l'élaboration d'un nouveau modèle.

Les écoulements en milieux poreux intéressent l'ingénieur dans plusieurs cas. Citons-en deux. D'une part, l'exploitation rationnelle des gisements de pétrole suppose la connaissance précise du champ de pression dans le réservoir et de l'effet sur les débits récoltés des diverses actions possibles telles que l'injection d'eau ou de gaz, l'ouverture de nouveaux puits ou la fermeture d'anciens, etc...

D'autre part, l'alimentation en eau potable de plusieurs grandes villes dont Liège, est réalisée par pompage d'eau dans une nappe souterraine. Au moment où l'extension en cours de captages en Hesbaye permet d'utiliser au maximum la capacité de la nappe qui alimente la ville de Liège et nombre de communes avoisinantes, il s'avère nécessaire de pouvoir en suivre l'évolution en fonction des prélèvements et des taux de réalimentation et d'assurer ainsi une gestion dynamique de l'aquifère. Il est également important de pouvoir évaluer les effets d'une pollution, sa propagation et les moyens d'y remédier.

Nous nous intéressons donc plus particulièrement à la modélisation des nappes aquifères, sans pour autant exclure d'autres liquides. Mais nous excluons a priori les écoulements multiphasiques, associant, par exemple le pétrole, l'eau et le gaz. Le modèle doit pouvoir prendre en compte une nappe avec surface libre comme une nappe captive, voire une nappe partiellement captive. L'aspect transitoire des écoulements doit être pris en compte. L'influence sur la nappe de l'alimentation météorologique effective (infiltration d'eau de pluie), de la présence de puits et de captages, de l'existence de ruisseaux, de l'anisotropie et la géométrie réelle du système pourront être modélisées. Les fluctuations du niveau de la nappe, lorsqu'elle est libre, sont telles que certaines couches sont par moment seulement saturées. Donc la nappe atteint, selon l'époque, des milieux de caractéristiques variables. La méthode des éléments finis, avec un maillage fixé dans le temps, permet de rencontrer l'ensemble de ces objectifs. L'hypothèse du maillage stable permet d'implanter le modèle d'écoulement dans le cadre d'un programme non linéaire classique, et laisse la possibilité de réaliser ultérieurement le couplage avec le modèle mécanique.

Des modèles numériques du phénomène non linéaire de conduction thermique transitoire existent depuis de nombreuses années. Nos motivations pour développer un nouveau programme dans ce domaine sont les suivantes. D'une part, nous nous intéressons au formage à chaud des métaux. Il est

important de savoir si, pendant le processus de formage, suite à la dissipation mécanique, la température au sein du solide se modifie de façon significative et peut influencer les déformations par l'apparition de contraintes thermiques et la modification des caractéristiques mécaniques. D'autre part, nous nous sommes également intéressés à l'échauffement de profils portants mixtes pendant l'incendie de constructions. Enfin, les modèles mathématiques de conduction et d'écoulement présentent de nombreuses similitudes. Il serait dommage de développer un programme représentant un phénomène et pas l'autre.

Les problèmes que nous nous proposons d'aborder sont donc les modélisations numériques :

- des grandes déformations mécaniques et le contact
- de la mécanique des sols et des roches
- des écoulements en milieu poreux, avec ou sans surface libre
- de la conduction thermique dans les solides.

Nous avons choisi d'aborder chacune d'elles par la méthode des éléments finis. Rapidement, la similitude formelle nous est apparue. J'ai voulu la mettre en évidence dans cette thèse. Aussi vais-je développer chapitre après chapitre, les quatre phénomènes en parallèle, et non successivement.

Un programme d'éléments finis a été créé au M.S.M. pour accueillir ces diverses modélisations. Il a pour nom LAGAMINE. Nous avons à y implanter la majeure partie des développements présentés dans les chapitres qui suivent.

1.3. RESUME DES CHAPITRES ET ORIGINALITES DE LA THESE.

Le deuxième chapitre est consacré à la définition de contraintes et de déformations, et à l'expression de l'équilibre instantané. Nous choisissons de parler de contraintes et de déformations dans les analyses de conduction et d'écoulement. Nous quittons ainsi le vocabulaire traditionnel de ces phénomènes pour adopter le langage de la mécanique du solide. Le principe des puissances virtuelles est utilisé pour chaque analyse. Il en résulte une uniformité de développement fort séduisante. Dans ce chapitre, notre contribution personnelle et originale réside dans les points suivants :

- l'objectivité des charges appliquées au solide (§ 2.2.2.9.)
- l'examen des phénomènes de conduction et d'écoulement dans un contexte de grandes déformations (§ 2.3.), selon le canevas utilisé en grandes déformations
- la discussion de l'objectivité du gradient de pression (§ 2.3.2.) et du flux (§ 2.3.3.)

- la modélisation de la surface de suintement comme phénomène de contact unilatéral (§ 2.3.4.1.).

Le troisième chapitre est consacré à la formulation de lois constitutives reliant les contraintes aux déformations définies au chapitre précédent. Les lois de DARCY et de FOURIER sont placées sur le même plan que les lois mécaniques élastiques, élastoplastiques et élastoviscoplastiques. Les conditions aux limites sont également étudiées. Plus particulièrement, nous nous intéressons aux frontières où une relation entre les charges et les déplacements est imposée. C'est notamment le cas des fondations élastiques, des échanges thermiques radiatifs et convectifs, et aussi du contact mécanique unilatéral avec frottement et du suintement à la limite des domaines d'écoulement. Ces relations sont traitées comme des lois constitutives.

Nous avons volontairement choisi des lois simples car nous estimons indispensable de pouvoir évaluer des paramètres significatifs et d'utiliser les lois sans induire des temps de calcul exagérés. L'aspect pratique des modèles adoptés nous semble important, notamment en mécanique des sols.

Notre contribution personnelle et originale est la suivante :

- la présentation unifiée et la comparaison des diverses dérivées objectives (§ 3.2.2.)
- le développement de la loi elliptique (§ 3.2.5.) et son application à la modélisation de craies (§ 3.2.8.5.)
- la formulation d'une loi constitutive de contact pour les métaux et les roches (§ 3.2.7.) que nous avons développée en même temps que CURNIER, mais séparément et de façon plus générale (dilatance)
- l'objectivité de la loi de contact, et la notion de configuration relâchée dans ce cas (§ 3.2.7.2.)
- le calcul du flux thermique absorbé à partir de l'enthalpie, en considérant cette dernière comme une variable matérielle évaluée au point d'intégration, soit différemment de COMINI et al [5] (§ 3.3.3.).
- la modélisation des problèmes à surface libre par la prise en compte du ressaut de la quantité d'eau présente dans les pores (§ 3.4.4.) et la modélisation des surfaces de suintement (§ 3.4.5.) par des lois constitutives appropriées, représentant l'aspect transitoire du phénomène.

Au quatrième chapitre, nous quittons la théorie générale pour nous intéresser à son intégration dans un programme d'éléments finis. Nous effectuons ici une discrétisation géométrique du solide étudié, et nous en déduisons l'expression de forces nodales énergétiquement équivalentes aux contraintes. Les frontières chargées sont également discrétisées en élé-

ments finis. Dans le cas du contact, diverses géométries de fondation sont considérées, et les déformations généralisées au sens du contact sont calculées dans ces divers cas.

Notre contribution personnelle et originale se situe dans

- la modélisation du contact au sein d'éléments de frontière, la définition de la géométrie de la frontière par des noeuds et le calcul de forces nodales associées à ces noeuds, la notion de vrai et faux contact selon l'orientation des surfaces (§ 4.2.4.3. et 4.2.4.5.). Seuls NGUYEN DANG HUNG et de SAXCE [90, 91] et SCHÄFER [89] avaient avant nous formulé des éléments de contact. Ils s'étaient limités à l'étude de solides élastiques linéaires. La plupart des autres auteurs expriment le contact noeud par noeud.

Le cinquième chapitre est consacré à la division du temps et du chargement en pas de taille finie. En mécanique du solide, les schémas d'intégration numérique des lois constitutives sont présentés, et la notion d'objectivité incrémentale est examinée. Dans le cas de la conduction et des écoulements, l'équilibre est exprimé en un instant privilégié ou en moyenne sur le pas. Ceci influence essentiellement le calcul des contraintes. Notre contribution personnelle et originale se situe dans

- certains points du schéma d'intégration des lois élastoplastiques avec écrouissage, et particulièrement la manière d'assurer une parfaite cohérence en fin de pas (fin du § 5.2.2.2.)
- la discussion de l'objectivité de la méthode linéaire (§ 5.2.3.2.)
- la démonstration de l'objectivité de la méthode du gradient de vitesse constant (§ 5.2.3.5.)
- la discussion de l'objectivité dans les problèmes de contact et la présentation d'un schéma incrémentalement objectif (§ 5.2.3.6.).

Au sixième chapitre, nous montrons comment évaluer la matrice "de rigidité" tangente dans tous les cas étudiés. En particulier, dans le domaine mécanique, les techniques d'intégration numérique des lois constitutives adoptées conduisent à introduire au niveau local la notion de matrice d'incidence, calculée par perturbation numérique.

Notre contribution personnelle et originale se situe dans

- la notion de matrice d'incidence (§ 6.2.1.) et son application aux éléments de contact (§ 6.2.2.)
- l'introduction et la discussion de la rigidité de la fondation (§6.2.2.).

Cinq exemples sont présentés au chapitre 7. Les analyses du champ thermique dans un profil mixte durant un incendie, de la subsidence d'un gisement pétrolier, de l'arrachement d'une tête de bielle, et de

L'évolution transitoire d'une nappe sont originales.

Quelques conclusions sont proposées au chapitre 8.

Parmi nos contributions originales, certaines nous semblent d'une ampleur et d'un intérêt plus grands:

- L'unité du traitement des divers problèmes abordés a pu être maintenue d'un bout à l'autre de la thèse, de façon plus ou moins rigoureuse selon les chapitres. Elle s'accompagne d'une unité de langage propre à faciliter la compréhension entre spécialistes.
- La formulation générale du problème unilatéral de contact avec frottement prend en compte tous les aspects du phénomène : la répartition des forces en surface, les grands déplacements, la loi constitutive, l'objectivité du développement...
- La loi constitutive élastoplastique des craies est absolument nouvelle.
- La discussion générale de l'objectivité incrémentale et l'établissement de deux nouveaux schémas objectifs ouvrent de nouvelles perspectives de recherches pour l'équipe de M.S.M.
- La modélisation des écoulements transitoires avec surface libre pour une méthode à maillage fixe permettra d'explorer un peu plus un domaine mal connu, celui des grandes nappes aquifères.

La taille des domaines auxquels l'ouvrage s'intéresse et le nombre de livres et d'articles qui lui ont été consacrés ne permettent pas de réaliser une étude bibliographique exhaustive ni de la séparer du reste du texte. Il nous a semblé préférable de présenter les sources que nous avons parcourues là où elles apportent directement une information importante. Le lecteur trouvera donc une revue de la bibliographie dans nombre de paragraphes. La recherche bibliographique est en général d'autant plus importante que le sujet est actuellement controversé, et que nous y avons investi plus de temps et de créativité.