

# Quantification

$\mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{R})$ -équivariante

*Dissertation doctorale*

par Glorioso NIZIGAMA



# Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de recherche, Pierre Mathonet, pour son encadrement exemplaire, pour ses conseils précieux et surtout pour sa grande disponibilité.

J'aimerais remercier Jacques Navez, mon codirecteur de recherche, pour ses commentaires pertinents et pour les apprentissages mathématiques qu'il a su me faire transférer.

Un grand merci à la Coopération Technique Belge pour la bourse de doctorat qu'elle m'a accordée.

# Introduction

La notion de quantification est définie dans bien des domaines scientifiques mais bien sûr avec des sens différents. Citons par exemple la physique (dans le cadre de la mécanique quantique), l'informatique (dans le cadre du traitement du signal), la statistique et plus généralement les méthodes quantitatives. Même au sein de la mécanique quantique, on distingue plusieurs types de quantifications : la quantification par déformation (définie dans [1]) et la quantification géométrique (voir par exemple [35]).

Dans ce dernier cadre, une quantification est une association qui fait correspondre une observable quantique à toute observable classique. Les observables classiques sont des fonctions des coordonnées de position ( $q_i$ ) et d'impulsion ( $p_i$ ) décrivant un système mécanique, le plus souvent polynomiales en les impulsions. D'un point de vue mathématique, la loi de transformation des impulsions lors d'un changement de coordonnées de position montre que les coordonnées  $(q_i, p_i)$  sont les coordonnées du fibré cotangent  $T^*V$  sur la variété  $V$  décrite par les positions. Les observables classiques sur une variété  $V$  sont donc des fonctions sur  $T^*V$ , qui sont polynomiales sur les fibres. Nous appelons également symboles ces fonctions et nous notons  $\mathcal{S}_0(V)$  l'ensemble des symboles.

Les observables quantiques sont quant à elles des opérateurs différentiels agissant sur des fonctions d'ondes. Du point de vue mathématique, il s'agit généralement d'opérateurs différentiels agissant sur des densités de poids  $1/2$ . Si nous notons  $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(V)$  l'espace de tels opérateurs, une quantification est donc une application linéaire

$$Q : \mathcal{S}_0(V) \rightarrow \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(V).$$

Cette application doit de plus satisfaire les conditions de Dirac.

Les exemples de telles quantifications existent, mais ne se comportent pas bien lors de changements des coordonnées  $(q_i)$ . Il a même été démontré qu'il n'existe pas de quantification qui soit une bijection et qui soit naturelle, c'est-à-dire –grosso modo– qui échange l'action des changements de coordonnées, des difféomorphismes locaux, sur les symboles et sur les opérateurs différentiels.

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à la notion de quantification introduite par C. Duval, P. Lecomte et V. Ovsienko dans [26, 16] : quand un groupe de Lie  $G$  agit (localement) sur la variété  $V$  considérée, on peut définir son action sur les symboles et les opérateurs différentiels. On est alors amené à chercher une quantification  $Q$ , soit une bijection qui échange les actions de  $G$  sur les symboles et sur les opérateurs différentiels. En d'autres termes, on cherche un isomorphisme de représentations de  $G$  de  $\mathcal{S}_0(V)$  dans  $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(V)$ .

D'un point de vue infinitésimal, au groupe  $G$  correspond une sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de l'algèbre  $\text{Vect}(V)$  des champs de vecteurs sur  $V$ . Une quantification  $\mathfrak{g}$ -équivariante est alors un isomorphisme de représentations de  $\mathfrak{g}$  entre les espaces de symboles et les espaces d'opérateurs différentiels.

Dans l'article séminal [26], P. Lecomte et V. Ovsienko ont considéré le groupe projectif  $G = PGL(n + 1, \mathbb{R})$  agissant localement sur  $\mathbb{R}^n$  par transformations projectives. Au niveau infinitésimal, l'algèbre correspondante est  $\mathfrak{sl}(n + 1, \mathbb{R})$ , qui se réalise en une sous-algèbre de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$ , à savoir l'algèbre engendrée par les champs constants, linéaires et quadratiques de la forme  $X_x = \alpha(x)\mathcal{E}_x$  où le champ d'Euler  $\mathcal{E}$  est défini par  $\mathcal{E}_x = \sum_{i=1}^n x^i \partial_{x^i}$ . Moyennant une condition de normalisation naturelle, ils ont pu démontrer l'existence et l'unicité d'une quantification équivariante de  $\mathcal{S}_0(V)$  dans l'espace  $\mathcal{D}_\lambda(V)$  des opérateurs différentiels agissant sur les  $\lambda$ -densités.

Ensuite, avec C. Duval dans [16], ils ont considéré le cas du groupe conforme et de l'algèbre correspondante  $\mathfrak{so}(p + 1, q + 1, \mathbb{R})$ , réalisée comme algèbre de champs de vecteurs au plus quadratiques sur  $\mathbb{R}^{p+q}$ . Ils ont étendu le problème de la recherche d'un isomorphisme entre espaces d'opérateurs  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V)$  transformant des  $\lambda$ -densités en  $\mu$ -densités et les espaces de symboles correspondants  $\mathcal{S}_{\mu-\lambda}(V)$ . Ils ont pu démontrer que la quantification existe pour autant que le shift  $\delta = \mu - \lambda$  ne soit pas une valeur critique. Ils ont démontré que  $\delta = 0$  n'est pas une valeur critique. Dans [27] et [18], le cas des opérateurs différentiels sur les densités, modifiant le poids de leurs arguments, a également été traité, donnant lieu à des résultats similaires au cas conforme.

Ces premiers travaux ont été étendus de diverses façons :

- Une première extension de ces résultats est venue de l'idée de chercher d'autres algèbres d'équivariance  $\mathfrak{g}$  ayant des propriétés analogues à celles des algèbres  $\mathfrak{sl}(n + 1, \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{so}(p + 1, q + 1, \mathbb{R})$ . Dans [4], les auteurs ont ainsi déterminé toutes les sous-algèbres de champs de vecteurs polynomiaux au dessus d'espaces vectoriels de dimension finie (réels ou complexes) qui sont graduées, de dimension finie et maximales dans le treillis des sous-algèbres propres de champs polynomiaux. Ils ont montré qu'elles sont exactement les "Algèbres Irréductibles Filtrées de

Type Fini” (Algèbres IFFT) mises à jour par Kobayashi et Nagano dans [23]. Il était naturel alors d’analyser l’existence et l’unicité de la quantification  $\mathfrak{g}$ -équivariante pour toute algèbre IFFT  $\mathfrak{g}$ . Les mêmes auteurs ont alors montré dans [5] et [8] que la méthode de construction introduite dans [16] était généralisable pour bon nombre d’algèbres IFFT.

Plus précisément, une algèbre IFFT se présente sous la forme d’une algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$  munie d’une décomposition en sous-algèbres  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ ,  $\mathfrak{g}_k$  correspondant à des champs de vecteurs de degré  $k + 1$ . De plus  $\mathfrak{g}_0$  se décompose en la somme d’un centre de dimension un et d’une partie semi-simple  $\mathfrak{h}_0$ .

La méthode de construction de quantifications de [16] repose sur le calcul de deux opérateurs de Casimir : le premier, noté  $C$ , est associé à la représentation fournie par les symboles. Le second, noté  $\mathcal{C}$  est associé à l’espace des opérateurs différentiels. Toute quantification équivariante devant transformer un vecteur propre de  $C$  en un vecteur propre de  $\mathcal{C}$  de même valeur propre, on montre que  $C$  est diagonalisable et qu’on peut associer à tout vecteur propre  $P$  d’un certain degré de  $C$ , un vecteur propre de  $\mathcal{C}$  dont  $P$  est le terme de plus haut degré, et ce de manière unique (en un certain sens). Dans [5], les auteurs ont montré que l’opérateur  $C$  est diagonalisable pour toute algèbre IFFT  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{h}_0$  soit absolument simple. Cela leur a permis de traiter explicitement le cas des algèbres IFFT  $\mathfrak{so}(n, n)$  et  $\mathfrak{sp}(2n)$ .

- Dans [2], s’éloignant de l’interprétation physique initiale de la quantification, on considère la “quantification” projectivement équivariante comme un outil pour étudier les espaces d’opérateurs différentiels. C’est le premier exemple de quantification à valeurs dans des espaces d’opérateurs différentiels agissant sur des tenseurs. Des résultats du même type, mais pour des opérateurs multidifférentiels sont également présents dans [7, 8].
- Les constructions citées jusqu’à présent constituent ce que l’on appelle le cas plat de la quantification : elles ne sont définies qu’au dessus d’espaces vectoriels ou de variétés à structure projective ou conforme plate. Pour sortir de ce cadre restreint, l’idée a été d’exprimer la quantification au moyen de connexions linéaires, sur une variété quelconque. Cette idée a été mise en oeuvre notamment dans les articles [17, 29] dans le cas conforme et [10, 11] dans le cas projectif. Elle a été formalisée dans [28] : une *quantification naturelle et invariante* consiste en la donnée d’une quantification dépendant d’une connexion linéaire, qui est naturelle quand on considère tous ses arguments (y compris la connexion) et qui reste inchangée quand on change de connexion en

restant dans une classe d'équivalence de connexions. Le premier article démontrant l'existence d'une telle quantification pour des symboles de degré arbitraire est dû à M. Bordemann [9]. Il a été suivi par les travaux de S. Hansoul [21, 20], qui a étendu la construction de M. Bordemann aux opérateurs différentiels agissant sur des tenseurs arbitraires dans le cas projectif. Indépendamment, P. Mathonet et F. Radoux ont montré récemment l'existence de la quantification naturelle et invariante pour diverses situations géométriques correspondant aux algèbres IFFT en se basant sur la diagonalisation de l'opérateur de Casimir  $C$  cité plus haut dans le cas plat correspondant (voir [32, 33, 31, 30, 34] par exemple).

Cependant, même dans le cas plat, pour des opérateurs différentiels agissant entre densités, il existait à ce stade certaines algèbres pour lesquelles la méthode de [5] ne pouvait être utilisée telle quelle : les algèbres pour lesquelles  $\mathfrak{h}_0$  n'est pas absolument simple. Dans sa thèse de doctorat, D. Bukiriro a ainsi traité le cas de l'algèbre  $\mathfrak{su}(n, n)$  et montré que les résultats de [5] pouvaient être adaptés dans ce cas.

Nous traitons le cas de l'algèbre  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{R})$ , où les paramètres  $p$  et  $q$  réfèrent à une graduation de l'algèbre  $\mathfrak{g}$  pour laquelle on a  $\mathfrak{h}_0 \cong \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$ . L'hypothèse centrale de [5] n'est donc pas satisfaite si  $\inf(p, q) \geq 2$ . Cependant cette algèbre généralise directement l'algèbre projective  $\mathfrak{sl}(n + 1, \mathbb{R})$ .

Le premier chapitre est consacré au rappel des définitions et notions fondamentales indispensables à la présentation du travail. Il s'agit en premier lieu du rappel des notions de fibré des densités, espaces des opérateurs différentiels et espaces des symboles. Cela nous permettra de poser le problème de quantification en général dans le cas plat et de rappeler les principaux résultats obtenus dans ce cadre.

Dans le deuxième chapitre, il s'agit du rappel de la méthode de construction des quantifications  $\mathfrak{g}$ -équivariante, introduite dans [16] et développée dans [5]. Nous donnerons de nouvelles démonstrations, indépendantes des coordonnées, de certains résultats de [5].

Le troisième chapitre est consacré en premier lieu au rappel de la description algébrique de l'algèbre matricielle  $\mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{R})$  donnée dans [23] et de sa graduation. Nous utiliserons les formules données par S. Kobayashi et T. Naganô pour réaliser cette algèbre en champs de vecteurs sur l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}_{-1}$ . Nous donnerons ensuite le cadre géométrique dans lequel cette algèbre de champs de vecteurs apparaît naturellement : si l'algèbre de champs de vecteurs  $\mathfrak{sl}(n + 1, \mathbb{R})$  apparaît naturellement en géométrie projective, nous montrons qu'en général, l'algèbre IFFT  $\mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{R})$  est l'algèbre des champs fondamentaux associée à l'action du groupe  $PGL(p + q, \mathbb{R})$  sur la variété grassmannienne  $G_q^{p+q}(\mathbb{R})$ .

Dans le quatrième chapitre, nous faisons un calcul de l'opérateur de Casimir  $C$  de l'algèbre  $\mathfrak{sl}(p+q; \mathbb{R})$  agissant sur les symboles. Nous montrons qu'il est diagonalisable et décrivons son spectre. Nous donnons une description simple des espaces propres. Cela nous permet d'obtenir les valeurs dites résonantes du shift  $\delta$  pour la quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante, et d'obtenir l'existence et l'unicité de cette quantification quand  $\delta$  n'est pas résonante.

Cependant, la valeur spéciale  $\delta = 0$  s'avère résonante pour certaines valeurs de  $p$  et  $q$ . Nous calculons dans le cinquième chapitre un ensemble de valeurs contenant les valeurs dites critiques pour la quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante. Nous déterminons un ensemble de valeurs  $VC$ , tel que cette quantification existe et est unique pour tout  $\delta$  n'appartenant pas à  $VC$ . Nous montrons que  $VC$  ne contient que des nombres strictement positifs.

Nous devons cependant mentionner que le résultat d'existence proprement dit n'est pas neuf. Il peut être obtenu comme une conséquence des travaux récents de A. Cap et J. Silhan dans le cadre de la quantification naturelle et équivariante dans le cas courbe [13]. Cet article a été posté sur le web durant le dernier mois de rédaction de notre thèse. Cependant, les travaux de A. Cap et J. Silhan sont basés sur des méthodes différentes des nôtres. Notre résultat d'existence a donc le mérite de montrer que le schéma de construction introduit dans [16] continue à s'appliquer dans le cas qui nous intéresse. La question de l'unicité quant à elle n'est pas traitée dans les travaux de A. Cap et J. Silhan, puisqu'elle semble être spécifique au cas plat.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous illustrons la méthode de construction en écrivant des formules explicites pour la quantification des symboles de degré au plus deux.



# Abstract

In the framework of geometric quantization, one can roughly define a quantization as a correspondence between classical observables and quantum observables. Usually, classical observables are smooth functions of the positions  $(q_i)$  and the momenta  $(p_i)$  associated to a mechanical system. From the mathematical point of view, looking at the transformation law of the coordinates  $(p_i)$  shows that actually,  $(q_i, p_i)$  correspond to coordinates on the cotangent bundle  $T^*V$  of the manifold  $V$  defined by the positions. Classical observables are therefore smooth functions on  $T^*V$ . Moreover, they are most often polynomial with respect to the momenta. Let us denote  $\mathcal{S}_0(V)$  the space of such functions, and call them symbols.

Quantum observables are differential operators acting on wave functions. From the mathematical viewpoint, they are differential operators acting on half densities. Denoting by  $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(V)$  the space of such operators, a quantization is then a linear map

$$Q : \mathcal{S}_0(V) \rightarrow \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(V).$$

Moreover it has to fulfil the Dirac conditions.

There are some examples of such quantizations, but it is known that there is no natural bijective quantization, that is, roughly speaking, a quantization that would commute with the changes of coordinates (i.e. local diffeomorphisms).

In this work, we are interested in the concept of quantization introduced by C. Duval, P. Lecomte and V. Ovsienko in [26, 16] : if a Lie group  $G$  acts locally on the manifold  $V$ , one can define its action on the symbols and the differential operators. One then tries to find a bijective quantization  $Q$  that exchanges the actions of  $G$  on the symbols and on the differential operators. In other words, one looks for an isomorphism of representations of  $G$  from  $\mathcal{S}_0(V)$  to  $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}(V)$ .

From the infinitesimal point of view, to a group  $G$  is associated a Lie sub-algebra  $\mathfrak{g}$  of  $Vect(V)$ , the algebra of vector fields over  $V$ . A  $\mathfrak{g}$ -equivariant quantization is then an isomorphism of representations of  $\mathfrak{g}$  between the space of symbols and the space of differential operators.

In the seminal article [26], P. Lecomte and V. Ovsienko considered the projective group  $G = PGL(n+1, \mathbb{R})$  acting locally over  $\mathbb{R}^n$  by projective transformations. From the infinitesimal point of view, the corresponding algebra is  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$  which is realized as subalgebra of vector fields over  $\mathbb{R}^n$ , in fact the algebra spanned by the constant and linear fields and the quadratic fields of the form  $X_x = \alpha(x)\mathcal{E}_x$  where the Euler field  $\mathcal{E}$  is defined by  $\mathcal{E}_x = \sum_{i=1}^n x^i \partial_{x^i}$ . They imposed a natural condition of normalization to the quantization and they proved the existence and uniqueness of an equivariant quantization from the space of symbols  $\mathcal{S}_0(V)$  to the space  $\mathcal{D}_\lambda(V)$  of differential operators acting on  $\lambda$ -densities.

Then, with C. Duval in [16], they considered the case of the conformal group and the corresponding algebra  $\mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbb{R})$  realized as an algebra of vector fields at most quadratic over  $\mathbb{R}^{p+q}$ . They extended the problem to find an isomorphism between the space  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}(V)$  of differential operators mapping  $\lambda$ -densities into  $\mu$ -densities and the corresponding space of symbols. They proved the existence and uniqueness of the quantization if the shift  $\delta = \lambda - \mu$  does not belong to a countable critical set. They also proved that  $\delta = 0$  is not a critical value. In [27] and [18], case of differential operators over the densities modifying the weight of their arguments, in the projective context, was under consideration. The results were similar to those of in the conformal case.

These first works have been extended in various ways :

- A first extension of these results came from the idea to find other algebras  $\mathfrak{g}$  of equivariance with similar properties to those of the algebras  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$  and  $\mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbb{R})$ . In [4], the authors determined all the finite dimensional graded Lie subalgebras of polynomial vector fields. They proved that these algebras are exactly the irreducible filtered Lie algebras of finite type (IFFT-algebras) studied by Kobayashi and Naganu in [23]. So, it was natural to analyze the existence and uniqueness of the  $\mathfrak{g}$ -equivariant quantization for any IFFT algebra  $\mathfrak{g}$ . The authors showed in [5] and [8] that the method of quantization introduced in [16] could be generalized for many IFFT algebras.

Specifically, an IFFT algebra is a simple Lie algebra  $\mathfrak{g}$  with a decomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_k$  corresponding to polynomial vector fields with degree  $k+1$ . Moreover,  $\mathfrak{g}_0$  decomposes as the direct sum of a center of dimension one and of a semi-simple subalgebra  $\mathfrak{h}_0$ .

The method of quantization in [16] consists in computation of two Casimir operators : the first, denoted  $C$ , is associated to the space of symbols. The second, denoted  $\mathcal{C}$ , is associated to the space of differential operators. Any equivariant quantization must transform an eigenvector of  $C$  into an eigenvector of  $\mathcal{C}$  with same eigenvalue. So, one shows

that  $C$  is diagonalizable and that one can associate to any eigenvector  $P$  of  $C$  with some fixed degree an eigenvector of  $\mathcal{C}$  whose  $P$  is the term of highest degree. In [5], the authors showed that the operator  $C$  is diagonalizable for any IFFT algebras  $\mathfrak{g}$  such that  $\mathfrak{h}_0$  is absolutely simple. They examined explicitly the case of the IFFT algebras  $\mathfrak{so}(n, n)$  and  $\mathfrak{sp}(2n)$ .

- In [2], away of the initial physical interpretation of the quantization, one considers the projectively equivariant quantization as a tool to study the spaces of differential operators. It is the first example of quantization with values in spaces of differential operators acting on tensors. Similar results but for multidifferential operators are also present in [7, 8].
- The results mentioned so far constitute what is called the flat case of quantization : they are only defined above vector spaces or manifolds with flat projective or conformal structure.

To get out of this restricted framework, the idea was to express the quantization by means of linear connections over an arbitrary manifold. This idea has been implemented in the articles [17, 29] in the conformal case and [10, 11] in the projective case. It was formalized in [28] : a natural and invariant quantization is a quantization depending on a linear connection which is natural if one considers all its arguments (including the connection) and remains unchanged if one changes the connection, but staying in a class of equivalence of connections. The first article proving the existence of a such quantization for symbols of arbitrary degree is due to M. Bordemann [9]. It was followed by the works of S. Hansoul [21, 20] who extended the construction of M. Bordemann to differential operators acting on arbitrary tensors in the projective case. Besides, P. Mathonet and F. Radoux showed recently the existence of the natural and invariant quantization for various geometric situations corresponding to IFFT algebras relying on the diagonalization of the Casimir operators  $C$  cited above in the corresponding flat case (see [32, 33, 31, 30, 34] for instance).

However, even in the flat case for differential operators acting between densities, there were some algebras for which the method of [16] could not be used : those algebras for which  $\mathfrak{h}_0$  is not absolutely simple. In his doctoral thesis, D. Bukiriro has treated the case of the algebra  $\mathfrak{su}(n, n)$  and shown that the result in [5] could be adapted in this case.

We examine the case of the algebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ , where the parameters  $p$  and  $q$  refer to a grading of the algebra  $\mathfrak{g}$  for which one has  $\mathfrak{h}_0 \cong \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$ . The central hypothesis of [5] is thus not satisfied if  $\inf(p, q) \geq 2$ . However, this algebra generalizes directly the projective algebra  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ .

In the first chapter we recall the definitions and fundamental concepts and we set our notation. We first recall the concepts of densities, spaces of differential operators and spaces of symbols. This allows us set the problem of quantization in general in the flat case and to recall the principal results obtained in this framework.

In the second chapter, we remind the method of construction of  $\mathfrak{g}$ -equivariant quantizations introduced in [16] and developed in [5]. We give some new and coordinate free proofs of some results of [5].

The third chapter is devoted first to the algebraic description of the matrix algebra  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  given in [23] and its grading. We use the formulas given by S. Kobayashi and T. Nagano to realize this algebra into vector fields over the space  $\mathfrak{g}_{-1}$ . Then we give the geometric way in which this algebra of vector fields appears naturally : if the algebra of vector fields  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$  appears naturally in projective geometry, we show in general that the algebra  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  is the algebra of fundamental vector fields associated to the action of the group  $PGL(p+q, \mathbb{R})$  over the Grassmann manifold  $G_q^{p+q}$ .

In the fourth chapter, we perform the computation of the Casimir operator  $C$  of the algebra  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  acting on the symbols. We show that it is diagonalizable and describe its spectrum. We give a simple description of eigenspaces. This allows us to get the so-called resonant values of the shift  $\delta$  for the  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -equivariant quantization and to obtain the existence and uniqueness of this quantization if  $\delta$  is not resonant. However, the special value  $\delta = 0$  turns out to be resonant for some values of  $p$  et  $q$ . We calculate in the fifth chapter a set of values containing the so-called critical values for the  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -equivariant quantization, and show that such values are strictly positive.

We have to mention that the existence result is not new : it can be obtained as a consequence of the recent results of A. Cap and J. Silhan in the framework of natural and equivariant quantization in the curved (general) situation. Their paper was posted on the arxiv during the last month of redaction of this thesis. However, the results of A. Cap and J. Silhan are based on completely different methods. Therefore, our existence result has the advantage to show that the construction scheme of [16] still applies for the algebra under consideration. The uniqueness results are not dealt with by A. Cap and J. Silhan, since it seems that uniqueness can only hold in the flat situation.

Finally, in the last chapter we illustrate our construction by giving explicit formulas for the quantization of symbols of degree at most two.

# Chapitre 1

## Position du problème et notions nécessaires

Il s'agit tout d'abord dans ce premier chapitre de rappeler les quelques définitions et notions fondamentales indispensables à la présentation de ce travail. Ces notions sont celles de densités, d'opérateurs différentiels, de symboles et de quantifications, au sens de P. Lecomte et V. Ovsienko. Nous rappelons également les propriétés principales des algèbres d'équivariance déterminées dans [4]. Ces notions ont été présentées dans de nombreux travaux sur la quantification équivariante [26, 16, 6, 8, 21, 12]. Nous les rappelons pour faciliter la lecture de cet ouvrage et fixer nos notations.

Enfin, nous donnons aussi quelques résultats nécessaires au traitement spécifique de la quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante en décrivant les représentations tensorielles de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  décrites par des diagrammes et tableaux de Young.

### 1.1 Fibré des densités

Nous définissons tout d'abord l'espace vectoriel des densités au dessus d'un espace vectoriel réel  $E$  de dimension finie  $r$ . Nous notons  $\wedge^r(E)$  la  $r$ -ième puissance extérieure de  $E$ , c'est-à-dire l'espace des tenseurs antisymétriques  $r$  fois contravariants sur  $E$ .

**Définition 1.1.1.** *Une densité de poids  $\lambda \in \mathbb{R}$  sur  $E$  est une fonction*

$$\varphi : \wedge^r E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : \varphi(su) = |s|^\lambda \varphi(u), \quad \forall u \in \wedge^r E \setminus \{0\}, \quad \forall s \neq 0. \quad (1.1)$$

*On note  $\mathbb{F}_\lambda(E)$  l'espace des densités de poids  $\lambda$  sur  $E$ .*

En d'autres termes, une densité de poids  $\lambda$  n'est rien d'autre qu'une application homogène de poids  $\lambda$  sur la  $r$ -ième puissance extérieure de  $E$ , privée de l'origine.

Notons encore la propriété suivante, qui découle du fait que  $\wedge^r E$  est de dimension 1 :

**Proposition 1.1.2.** *L'espace  $\mathbb{F}_\lambda(E)$  est un espace vectoriel réel de dimension un. Si  $\{e_1, \dots, e_r\}$  est une base de  $E$  et si on note  $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^r\}$  la base duale, la densité  $|\epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^r|^\lambda \in \mathbb{F}_\lambda(E)$  définie par la relation*

$$|\epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^r|^\lambda(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) = 1$$

défini une base de  $\mathbb{F}_\lambda(E)$ .

Nous disons que  $|\epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^r|^\lambda$  est la densité de poids  $\lambda$  associée à la base  $\{e_1, \dots, e_r\}$ .

Dans la suite, nous aurons également besoin de connaître la structure de représentation du groupe  $GL(r, \mathbb{R})$  ou de son algèbre  $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{F}_\lambda(E)$ . La représentation du groupe est obtenue à partir de la représentation naturelle de  $GL(r, \mathbb{R})$  sur  $\wedge^r E$  en étendant cette représentation aux fonctions sur  $\wedge E$ . La représentation de l'algèbre est obtenue en dérivant celle du groupe.

**Définition 1.1.3.** *Le groupe  $GL(r, \mathbb{R})$  agit naturellement sur  $\mathbb{F}_\lambda(E)$  par*

$$\rho_\lambda(a)\varphi = |\det(a)|^{-\lambda}\varphi \quad \forall a \in GL(r, \mathbb{R}) \quad \forall \varphi \in \mathbb{F}_\lambda(E). \quad (1.2)$$

*L'espace  $\mathbb{F}_\lambda(E)$  est alors une représentation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{R})$  par*

$$\rho_{\lambda*}(A)\varphi = -\lambda \operatorname{tr}(A)\varphi \quad \forall A \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{R}) \quad \forall \varphi \in \mathbb{F}_\lambda(E). \quad (1.3)$$

Soit maintenant  $V$  une variété de dimension  $n$ , que nous supposons de classe  $C^\infty$ , séparée et à base dénombrable. On peut en tout point  $x$  considérer l'espace des densités de poids  $\lambda$  construit sur l'espace tangent  $T_x V$ . On forme alors l'union disjointe

$$\Delta^\lambda V = \bigcup_{x \in V} \mathbb{F}_\lambda(T_x V).$$

On a une projection naturelle

$$p : \Delta^\lambda V \rightarrow V : \varphi \in \mathbb{F}_\lambda(T_x V) \mapsto x.$$

On a alors la proposition suivante qui donne la structure de  $\Delta^\lambda V$  :

**Proposition 1.1.4.** *L'espace  $\Delta^\lambda V$  a une structure de variété qui fait de  $(\Delta^\lambda V, p, V)$  un fibré vectoriel appelé fibré des densités de poids  $\lambda$  sur  $V$ .*

**Remarque :** Les cartes de ce fibré vectoriel sont obtenues comme suit : si  $(U, (x^1, \dots, x^n))$  est une carte de  $V$ , on peut considérer, pour tout  $x \in U$  la densité associée à la base  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$  définie par la proposition 1.1.2. Nous la notons naturellement  $|dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|^\lambda$ . Alors, pour tout  $F \in \mathbb{F}_\lambda(T_x V)$ , il existe  $f \in \mathbb{R}$  tel que  $F = f|dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|^\lambda$  et on associe à  $F$  les coordonnées  $(x^1, \dots, x^n, f)$ . Il est alors facile de voir comment un changement de cartes sur  $V$  induit un changement de bases dans  $T_x V$  et modifie la coordonnée  $f$  de  $F$ .

Il sera également utile de considérer  $\Delta^\lambda V$  comme un fibré associé au fibré des repères linéaires sur  $V$ . Ayant un fibré vectoriel, nous pouvons considérer l'espace de ses sections de classe  $C^\infty$ .

**Définition 1.1.5.** *On appelle champs de densités de poids  $\lambda$  sur  $V$  (ou simplement densité de poids  $\lambda$  s'il n'y pas de confusion possible) une section de classe  $C^\infty$  du fibré  $\Delta^\lambda(V)$ . On note  $\mathcal{F}_\lambda(V)$  l'ensemble des champs de densités de poids  $\lambda$  sur  $V$ .*

Remarquons qu'au dessus d'une carte locale  $(U, (x^1, \dots, x^n))$  de  $V$ , un champ de densités  $F$  peut s'écrire

$$F(x) = f(x^1, \dots, x^n)|dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|^\lambda \quad (1.4)$$

L'expression locale de  $F$  est alors la fonction  $f$ .

Dans la suite, nous notons  $\text{Vect}(V)$  l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de classe  $C^\infty$  sur  $V$ . Nous pouvons maintenant utiliser ces expressions locales afin de définir la dérivée de Lie d'un champ de densité dans la direction d'un élément  $X$  de  $\text{Vect}(V)$ . En effet, si  $X$  est un champ de vecteurs, son flot permet de définir un pull-back sur le fibré des densités. En considérant la dérivée de l'action du flot, on obtient la définition classique de la dérivée de Lie. En coordonnées locales, si  $F$  s'exprime comme en (1.4), alors la dérivée de Lie  $L_X F$  s'écrit

$$L_X^\lambda(F)(x) = (X.f + \lambda \text{tr}(\frac{\partial X}{\partial x})f)|dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|^\lambda, \quad \forall X \in \text{Vect}(V). \quad (1.5)$$

où  $\frac{\partial X}{\partial x}$  est la matrice jacobienne de  $X$ .

En comparant cette expression avec la définition 1.1.3, on obtient finalement la forme

$$L_X^\lambda(F)(x) = X.F - \rho_{\lambda*}(\frac{\partial X}{\partial x})F. \quad (1.6)$$

Cette expression est générale pour la dérivée de Lie des sections de fibrés associés au fibré des repères linéaires. Elle nous sera utile dans la suite.

## 1.2 Espaces d'opérateurs différentiels

Donnons tout d'abord une définition générale des espaces d'opérateurs différentiels entre sections de fibrés vectoriels au dessus d'une même variété  $V$ . Nous considérons  $E_1 \rightarrow V$  et  $E_2 \rightarrow V$  deux fibrés vectoriels de classe  $C^\infty$  de fibres types  $F_1$  et  $F_2$  et nous notons  $\Gamma(E_1)$  et  $\Gamma(E_2)$  les espaces de sections de classe  $C^\infty$  correspondants.

**Définition 1.2.1.** *Un opérateur différentiel linéaire  $D$  d'ordre (au plus)  $k$  de  $\Gamma(E_1)$  dans  $\Gamma(E_2)$  est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $D : \Gamma(E_1) \rightarrow \Gamma(E_2)$  telle que, dans tout ouvert de carte et de trivialisations simultanées des fibrés  $E_1$  et  $E_2$ , l'expression locale de  $D$  est de la forme*

$$D(f)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x}^\alpha f \right)(x), \quad \forall f \in \Gamma(E_1), \quad (1.7)$$

où  $\alpha$  est un élément de  $\mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , où  $\frac{\partial}{\partial x}^\alpha$  veut dire  $\frac{\partial}{\partial x^1}^{\alpha_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^n}^{\alpha_n}$  et où  $c_\alpha(x)$  est une application linéaire entre les fibres  $F_1$  et  $F_2$ .

Nous pouvons maintenant particulariser cette définition aux cas d'opérateurs différentiels agissant entre espaces de champs de densités.

**Définition 1.2.2.** *On note  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V)$  l'espace des opérateurs différentiels d'ordre au plus  $k$  de  $\mathcal{F}_\lambda(V)$  dans  $\mathcal{F}_\mu(V)$ . On définit l'espace des opérateurs différentiels de  $\mathcal{F}_\lambda(V)$  dans  $\mathcal{F}_\mu(V)$  comme l'union des espaces  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V)$  :*

$$\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V). \quad (1.8)$$

Il est important pour la suite de noter la filtration de l'espace  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V)$ . En effet, on a

$$\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V) \subset \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^{k+1}(V)$$

pour tout entier naturel  $k$ .

De plus, puisque les fibres du fibré des densités sont de dimension 1, les applications linéaires de  $\mathbb{F}_\lambda(T_x V)$  dans  $\mathbb{F}_\mu(T_x V)$  sont les multiplications par des éléments de  $\mathbb{F}_{\mu-\lambda}(T_x V)$ . La forme locale d'un élément  $D$  de  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V)$  est donc donnée par

$$D(f)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x}^\alpha f \right)(x) \quad (1.9)$$

où  $c_\alpha$  est une densité de poids  $\delta = \mu - \lambda$  au dessus de la carte considérée. Cela conduit à la définition suivante.



**Définition 1.2.3.** *Le shift associé à l'espace  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V)$  est le nombre réel  $\delta = \mu - \lambda$ .*

Passons maintenant à la définition de la dérivée de Lie des opérateurs différentiels.

**Définition 1.2.4.** *La dérivée de Lie d'un opérateur différentiel  $D \in \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V)$  dans la direction de  $X \in \text{Vect}(V)$  est donnée par*

$$\mathcal{L}_X D = L_X^\mu \circ D - D \circ L_X^\lambda. \quad (1.10)$$

La dérivée de Lie d'un opérateur d'ordre  $k$  est encore un opérateur d'ordre  $k$ , puisque les termes d'ordre  $k+1$  de  $L_X^\mu \circ D$  et  $D \circ L_X^\lambda$  sont identiques. En d'autres termes, la dérivée de Lie respecte la filtration de  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V)$ . Cette propriété nous permettra de définir une dérivée de Lie sur l'espace gradué associé à l'espace filtré  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V)$ .

### 1.3 Espaces de symboles

L'espace des symboles est un espace naturellement associé à un espace d'opérateurs différentiels. Donnons directement la définition de cet espace dans le cas des espaces d'opérateurs définis plus haut.

**Définition 1.3.1.** *L'espace des symboles de degré  $k$  associé à  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V)$ , noté  $\mathcal{S}_\delta^k(V)$ , est l'espace des champs de tenseurs symétriques contravariants de degré  $k$ , à coefficients dans  $\delta$ -densités, où  $\delta = \mu - \lambda$ . L'espace des symboles est alors*

$$\mathcal{S}_\delta(V) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_\delta^k(V).$$

Nous sommes intéressés par la structure de représentation de  $\text{Vect}(V)$  qui existe sur l'espace des symboles. D'après la définition, les symboles de degré  $k$  sont les sections de classe  $C^\infty$  du fibré  $S^k TV \otimes \Delta^\delta(V) \rightarrow V$ . Puisque ce fibré est un fibré associé au fibré des repères linéaires, on peut obtenir la dérivée de Lie de ses sections de manière classique. Donnons la formule de la dérivée de Lie en coordonnées :

si on a

$$u = f \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \vee \cdots \vee \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|^\delta$$

et si  $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  alors

$$\begin{aligned} L_X^\delta u = & \left( \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} f + \delta \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} X^i \right) f \right) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \vee \cdots \vee \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|^\delta \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^k f \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \vee \cdots \vee \frac{\partial X^i}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial}{\partial x^i} \vee \cdots \vee \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|^\delta \end{aligned} \quad (1.11)$$

On remarque que, sur les trois types de termes présents dans cette formule, le facteur de  $\delta$  vient de la partie de type densité du symbole  $u$ , tandis que pour  $\delta = 0$ , on trouve exactement la dérivée de Lie des champs de tenseurs symétriques. Cette formule peut également être écrite sous une forme plus compacte, généralisant la formule (1.6). Il faut pour cela définir une action du groupe  $GL(n, \mathbb{R})$  et de son algèbre  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  sur la fibre type du fibré  $S^k TV \otimes \Delta^\delta(V) \rightarrow V$ .

**Définition 1.3.2.** *L'action naturelle de  $GL(n, \mathbb{R})$  sur  $S^k \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathbb{R}^n)$  est donnée par*

$$\rho_\delta(a)(x_1 \vee \cdots \vee x_k \otimes u) = ax_1 \vee \cdots \vee ax_k \otimes |\det(a)|^{-\delta} u,$$

pour tous  $x_1, \dots, x_k$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $u$  dans  $\mathbb{F}_\delta(\mathbb{R}^n)$  et  $a$  dans  $GL(n, \mathbb{R})$ .

L'action de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  sur le même espace est alors donnée par

$$\rho_{\delta*}(A)(x_1 \vee \cdots \vee x_k \otimes u) = \sum_{r=1}^k x_1 \vee \cdots \vee Ax_r \vee \cdots \vee x_k \otimes u - \delta \operatorname{tr}(A) x_1 \vee \cdots \vee x_k \otimes u, \quad (1.12)$$

pour tout  $A$  dans  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ .

La représentation du groupe  $GL(n, \mathbb{R})$  présentée ici est le produit tensoriel de sa représentation naturelle sur les tenseurs contravariants symétriques et de sa représentation sur les densités définie par (1.2). La représentation de l'algèbre est obtenue en dérivant celle du groupe, et est également le produit tensoriel de la représentation de l'algèbre sur les tenseurs symétriques et de la représentation fournie par les densités (voir la formule (1.3)).

On remarque alors que la dérivée de Lie peut être écrite en coordonnées locales sous la forme

$$L_X^\delta u = X.u - \rho_{\delta*} \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right) u, \quad (1.13)$$

pour tous  $u \in \mathcal{S}_\delta(V)$  et  $X \in \operatorname{Vect}(V)$ , si  $\frac{\partial X}{\partial x}$  désigne encore la matrice jacobienne du champ  $X$ . Cette expression généralise donc (1.6) et sera fondamentale dans la suite de ce travail.

Définissons maintenant l'opérateur symbole principal qui nous permettra de définir la condition de normalisation intervenant dans la notion de quantification. Nous l'utiliserons également pour rappeler le lien étroit existant entre l'espace  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V)$  et l'espace des symboles associé  $\mathcal{S}_\delta(V)$ .

**Définition 1.3.3.** *L'opérateur*

$$\sigma_k : \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V) \rightarrow \mathcal{S}_\delta^k(V) \quad (\delta = \mu - \lambda),$$

est défini en coordonnées par

$$\sigma_k(D)(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha(x) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \vee \cdots \vee \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n}$$

si  $D$  est donné par (1.9).

L'action de  $\sigma_k$  consiste donc à considérer les termes exactement d'ordre  $k$  dans  $D \in \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V)$ , en coordonnées et à les considérer comme un symbole de degré  $k$ . On peut montrer que l'application  $\sigma_k$  est indépendante du choix de coordonnées locales, en considérant d'une part les changements de variables pour les opérateurs différentiels et d'autre part les changements de variables pour les tenseurs symétriques à valeurs dans les  $\delta$ -densités. De plus, en calculant les termes de degré  $k$  dans l'expression locale de  $\mathcal{L}_X D$ , pour tout champ  $X$  et tout opérateur  $D \in \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V)$ , on constate qu'on a la relation suivante

**Proposition 1.3.4.** *L'opérateur  $\sigma_k$  est une application  $\text{Vect}(V)$ -équivariante de  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V)$  dans  $\mathcal{S}_\delta^k(V)$ . En d'autres termes, on a*

$$\sigma_k(\mathcal{L}_X D) = L_X^\delta \sigma_k(D)$$

pour tous  $X \in \text{Vect}(V)$  et  $D \in \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V)$ .

Afin de montrer le lien entre espaces d'opérateurs différentiels et espaces de symboles, nous définissons l'espace gradué associé à l'espace filtré  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V)$

**Définition 1.3.5.** *L'espace gradué associé à  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V)$  est*

$$\text{Gr}(\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V)) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \text{Gr}(\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V))_k,$$

où  $\text{Gr}(\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V))_k$  est l'espace quotient  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V)/\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^{k-1}(V)$ . On a posé bien sûr  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^{-1}(V) = \{0\}$ . Cet espace est une représentation de  $\text{Vect}(V)$  par passage au quotient de la représentation sur  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V)$  :

$$L_X[D] = [L_X D], \quad \forall D \in \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V), \forall k \in \mathbb{N}.$$

En se rappelant que  $\sigma_k$  est une application surjective et en notant que son noyau est visiblement  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^{k-1}(V)$ , on peut utiliser la proposition 1.3.4 pour obtenir

**Proposition 1.3.6.** *L'opérateur  $\sigma_k$  induit un isomorphisme de représentations de  $\text{Vect}(V)$  de  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V)/\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^{k-1}(V)$  dans  $\mathcal{S}_\delta^k(V)$  si  $\delta = \mu - \lambda$ .*

L'espace des symboles  $\mathcal{S}_\delta(V)$  est donc, à isomorphisme près, l'espace gradué associé à l'espace filtré  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V)$ .

Terminons cette section avec la définition de l'opérateur symbole principal

**Définition 1.3.7.** *L'opérateur symbole principal  $\sigma : \mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V) \rightarrow \mathcal{S}_\delta(V)$  est défini par la relation*

$$\sigma(D) = \sigma_k(D)$$

pour tout  $D$  dans  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V) \setminus \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^{k-1}(V)$ .

Il est cependant important de remarquer que l'opérateur  $\sigma$ , s'il n'est plus attaché à un ordre de différentiation comme  $\sigma_k$ , a le désavantage de ne pas être linéaire.

## 1.4 Quantifications $\mathfrak{g}$ -équivariantes

Nous donnons ici la définition des quantifications au sens de [26]. Nous donnons également la définition des quantifications équivariantes, ainsi que l'exemple fondamental des quantifications affinement équivariantes qui sera utilisé dans la construction générale des quantifications. Nous rappelons ensuite la classe d'algèbres déterminées dans [4] qui sont des candidats naturels pour être des algèbres d'équivariance, ainsi que les principales propriétés de ces algèbres.

**Définition 1.4.1.** *Une application bijective*

$$Q : \bigoplus_{l \leq k} \mathcal{S}_\delta^l(V) \rightarrow \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V)$$

vérifiant la condition de normalisation

$$\sigma_l \circ Q(P) = P, \quad \forall P \in \mathcal{S}_\delta^l(V), \quad \forall l \leq k. \quad (1.14)$$

est appelée *quantification à l'ordre  $k$* . Une quantification est une bijection linéaire

$$Q : \mathcal{S}_\delta(V) \rightarrow \mathcal{D}_{\lambda,\mu}(V)$$

satisfaisant la condition de normalisation (1.14) pour tout entier naturel  $l$ .

Il est clair que la restriction d'une quantification  $Q$  à  $\bigoplus_{l \leq k} \mathcal{S}_\delta^l(V)$  définit une quantification à l'ordre  $k$ , mais comme nous le verrons plus tard, il existe des valeurs de  $\delta$  pour lesquelles il existe des quantifications à l'ordre  $k$  pour certains  $k$  mais pas de quantification définie sur tout l'espace des symboles  $\mathcal{S}_\delta(V)$ .

**Définition 1.4.2.** *Si  $\mathfrak{g}$  est une sous-algèbre de  $\text{Vect}(V)$ , une quantification  $Q$  est  $\mathfrak{g}$ -équivariante si on a*

$$Q(L_X^\delta P) = \mathcal{L}_X Q(P), \quad \forall P \in \mathcal{S}_\delta(V), \quad \forall X \in \mathfrak{g} \quad (1.15)$$

La définition reste valable pour les quantifications à l'ordre  $k$ , mais évidemment on n'impose plus la condition d'équivariance que pour les symboles de degré inférieur ou égal à  $k$ .

L'inverse d'une quantification  $\mathfrak{g}$ -équivariante (à l'ordre  $k$ ) est appelé symbole  $\mathfrak{g}$ -équivariant (à l'ordre  $k$ ).

Voici un exemple fondamental dans la construction générale des quantifications équivariantes : on considère ici le cas particulier où  $V$  est  $\mathbb{R}^n$  et où  $\text{Aff} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, x^j \frac{\partial}{\partial x^i} (1 \leq i, j \leq n) \rangle$  est l'algèbre affine de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.4.3.** *Le symbole affine sur  $\mathbb{R}^n$  est défini par*

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Aff}} : \mathcal{D}_{\lambda, \mu}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{S}_\delta(\mathbb{R}^n) \\ D &\mapsto \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \vee \dots \vee \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

si  $D$  est donné par (1.9). L'application inverse, notée  $Q_{\text{Aff}}$ , est la quantification affine sur  $\mathbb{R}^n$ .

L'application  $\sigma_{\text{Aff}}$  définit une bijection qui échange les actions de  $\text{Aff}$  sur les symboles et opérateurs différentiels, puisque la différence entre  $\mathcal{L}_X$  et  $L_X^\delta$  fait intervenir les dérivées d'ordre 2 au moins du champ  $X$ . La quantification affine peut en fait être définie au dessus de tout espace affine (ou vectoriel)  $V$  : il suffit de choisir un repère dans l'espace affine et de considérer les coordonnées globales définies par ce repère et d'y définir  $Q_{\text{Aff}}$  en coordonnées comme plus haut. L'application ainsi définie sera indépendante du choix du repère puisque l'application définie plus haut commute avec l'action du groupe affine sur  $\mathbb{R}^n$ .

Nous rappelons dans les deux sous-sections suivantes les résultats sur les quantifications projectivement et conformément équivariantes obtenus dans [26, 16, 18, 27].

---

<sup>1</sup>C'est l'algèbre des champs fondamentaux associée à l'action naturelle du groupe affine sur  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.4.1 Quantification projectivement équivariante

L'algèbre projective sur  $\mathbb{R}^n$  est définie par

$$\mathfrak{g} = sl_{n+1} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, x^j \frac{\partial}{\partial x^k}, x^j \sum_{l=1}^n x^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad 1 \leq j, k \leq n \right\rangle.$$

C'est l'algèbre des champs fondamentaux associés à l'action locale du groupe  $PGL(n+1, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Cette algèbre donne lieu à la notion de quantification projectivement équivariante.

**Proposition 1.4.4** (P. Lecomte, V. Ovsienko [26]). *Il existe une unique quantification projectivement équivariante*

$$Q_p : \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}_{\lambda, \lambda}(\mathbb{R}^n).$$

Ce résultat est suivi par une étude du cas général par C. Duval, P. Lecomte et V. Ovsienko.

**Proposition 1.4.5** (C. Duval, V. Ovsienko [18], P. Lecomte [27]). *Quand  $\delta$  n'est pas critique, il existe une quantification projectivement équivariante unique, donnée par*

$$Q_p : \mathcal{S}_\delta^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k(\mathbb{R}^n) : \\ P \mapsto Q_{\text{Aff}} \left( \sum_{l=0}^k \frac{(\lambda + \frac{k-1}{n+1}) \dots (\lambda + \frac{k-l}{n+1})}{\gamma_{2k-1} \dots \gamma_{2k-l}} \binom{k}{l} \text{Div}^l P \right)$$

où

$$\gamma_r = \frac{n+r-(n+1)\delta}{n+1}$$

et

$$\text{Div}^l P(\eta^1, \dots, \eta^{k-l}) = \sum_{i_1 \dots i_l} \partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_l}} P(\epsilon^{i_1}, \dots, \epsilon^{i_l}, \eta^1, \dots, \eta^{k-l})$$

Les valeurs critiques de  $\delta$  dont il est question dans le théorème correspondent à l'annulation des constantes  $\gamma_r$ . Ces résultats peuvent être étendus directement aux variétés munies d'une structure projective plate.

### 1.4.2 Quantification conformément équivariante

Soit la métrique pseudo-Riemannienne de signature  $(p, q)$  sur  $\mathbb{R}^n$  ( $p+q=n$ ) définie par

$$g = \text{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^p, \overbrace{-1, \dots, -1}^q).$$

L'algèbre conforme associée à cette métrique est alors

$$so_{p+1,q+1} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \sum_{i=1}^n (Ax)^i \frac{\partial}{\partial x^i}, X_x^\alpha | k \leq n, A \in so(p, q, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}id, \alpha \in \mathbb{R}^{n*} \right\rangle. \quad (1.17)$$

où  $X_x^\alpha = \alpha(x) \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{2}g(x, x) \sum_{i=1}^n g^{ii} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Le résultat principal est alors le suivant :

**Proposition 1.4.6** (Duval, Lecomte, Ovsienko [16]). *Si  $\delta$  n'est pas critique, il existe une quantification conformément équivariante*

$$Q_c : \mathcal{S}_\delta^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(\mathbb{R}^n).$$

*Les valeurs critiques sont déterminées. Elles sont toutes strictement positives.*

Ce résultat s'adapte au cas des variétés à structure conforme plate. Il est similaire au résultat concernant l'algèbre projective en ce qui concerne l'existence. Il faut cependant noter qu'on ne dispose pas en général de formules explicites pour le cas conforme.

### 1.4.3 Sous-algèbres de champs polynomiaux

Les algèbres projective et conforme présentées plus haut ont plusieurs points communs :

- Elles sont de dimension finie ;
- Elles sont faites de champs dont les composantes sont des polynômes sur  $\mathbb{R}^n$  ;
- Elles se décomposent en sous-espaces formés de leurs champs constants, linéaires et quadratiques et cette décomposition est respectée par le crochet de Lie.

On a de plus les résultats suivants :

**Proposition 1.4.7.** *L'algèbre projective  $sl_{n+1}$  est maximale pour l'inclusion dans l'ensemble des sous-algèbres propres des champs polynomiaux sur  $\mathbb{R}^n$ .*

**Proposition 1.4.8** (Boniver, Lecomte [3]). *Si  $(p, q) \neq (1, 1)$ , l'algèbre conforme  $so_{p+1,q+1}$  est maximale pour l'inclusion dans l'ensemble des sous-algèbres propres des champs polynomiaux sur  $\mathbb{R}^n$ .*

Ces théorèmes de maximalité sont importants, parce qu'ils permettent de montrer que, même si les algèbres  $sl_{n+1}$  et  $so_{p+1,q+1}$  sont de dimension finie, les conditions d'équivariance qu'elles imposent sont les plus fortes possibles, si on ne veut pas demander l'équivariance par rapport à l'algèbre des champs

polynomiaux toute entière. On sait par ailleurs que cette dernière condition d'équivariance est en général très forte et ne laisse pas la possibilité d'obtenir un opérateur équivariant non trivial.

De cette constatation découle naturellement la question de classifier les algèbres de champs de vecteurs jouissant de ces propriétés. On note tout d'abord que la notion de composante polynomiale fait sens au dessus d'un espace vectoriel  $V$ . Rappelons les définitions formelles conduisant à cette classification.

**Définition 1.4.9.** *Soient  $V$  et  $V'$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Une application  $P$  de  $V$  dans  $V'$  est un polynôme si dans des bases  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $V$  et  $(e'_1, \dots, e'_m)$  de  $V'$ , les composantes de  $P(x)$  sont des fonctions polynomiales (au sens de  $\mathbb{K}^n$ ) des composantes de  $x$ .*

Si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie, l'espace tangent à  $V$  en tout point  $x$  s'identifie à  $V$  lui même. Un champ de vecteurs polynomial est alors une application polynomiale de  $V$  dans  $V$ . Si  $V$  est muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$ , on a des coordonnées globales de  $V$  associées à cette base. Nous notons  $e_i$  ou  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  le champ de vecteurs constant  $e_i$ .

**Définition 1.4.10.** *Nous notons  $\text{Vect}_*(V)$  l'ensemble des champs de vecteurs polynomiaux. C'est l'ensemble des champs de la forme  $\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  où  $X^i$  sont des fonctions polynomiales de  $V$  dans  $\mathbb{K}$ .*

Rappelons aussi que la sous-algèbre  $\text{Vect}_*(V)$  est une algèbre graduée. On a en effet

$$\text{Vect}_*(V) = \bigoplus_{k \geq -1} \text{Vect}_k(V),$$

où  $\text{Vect}_k(V)$  est l'ensemble des champs dont les composantes sont des fonction polynomiales homogènes de degré  $k + 1$ . Cette graduation est respectée par le crochet de Lie des champs de vecteurs : on a

$$[\text{Vect}_i(V), \text{Vect}_j(V)] \subset \text{Vect}_{i+j}(V), \quad \forall i, j \geq -1,$$

puisque si on définit le champ d'Euler  $\mathcal{E}$  par

$$\mathcal{E}_x = \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

alors  $\text{Vect}_i(V)$  est l'espace propre de  $ad(\mathcal{E})$  de valeur propre  $i$ . On peut maintenant définir la notion de sous-algèbre graduée de  $\text{Vect}_*(V)$  :

**Définition 1.4.11.** *Une sous-algèbre  $\mathfrak{g}$  de  $\text{Vect}_*(V)$  est graduée si elle admet la graduation*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq -1} \mathfrak{g}_i$$

où  $\mathfrak{g}_i \subset \text{Vect}_i(V)$  pour tout  $i \geq -1$ .



La condition imposée à une sous-algèbre graduée de  $\text{Vect}_*(V)$  implique directement qu'on a

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \quad \forall i, j \geq -1,$$

ce qui légitime l'utilisation du terme "graduée".

Un premier résultat pour la classification qui nous intéresse est donné par le théorème suivant

**Théorème 1.4.12** (Boniver, Mathonet [4]). *Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$  une sous-algèbre graduée de dimension finie de  $\text{Vect}_*(V)$ . Alors  $\mathfrak{g}$  est propre maximale dans  $\text{Vect}_*(V)$  si et seulement si*

- $\mathfrak{g}_{-1} = \text{Vect}_{-1}(V)$  ;
- $\mathfrak{g}$  est irréductible ( $\mathfrak{g}_0$  agit irréductiblement sur  $\mathfrak{g}_{-1}$ ) ;
- $\mathfrak{g}_1 \neq \{0\}$  ;
- Dans le cas réel,  $\mathfrak{g}$  n'admet pas de structure complexe.

En conséquence des trois premières propriétés énumérées dans ce théorème, toute sous-algèbre graduée, de dimension finie et propre maximale dans l'algèbre  $\text{Vect}_*(V)$  appartient à la classe des algèbres Filtrées Irréductibles de type Fini (algèbres IFFT) listées par S. Kobayashi et T. Nagano dans [23]. Dès lors, elles jouissent des propriétés des algèbres de cette classe :

**Proposition 1.4.13** (S. Kobayashi, T. Nagano [23]). *Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k$  une algèbre IFFT. Alors*

1.  $\mathfrak{g}$  est une algèbre simple ;
2.  $\mathfrak{g}$  est  $|1|$ -graduée, c'est-à-dire  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  ;
3. Les espaces  $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_0$  sont orthogonaux par rapport à la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . Cette forme est non dégénérée sur chacun de ces espaces. On a  $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_{-1}^*$ , en tant que représentations de  $\mathfrak{g}_0$  (via l'action adjointe).
4. L'algèbre  $\mathfrak{g}_0$  est réductive : elle s'écrit  $\mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{c}$  où  $\mathfrak{h}_0$  est semi-simple et où  $\mathfrak{c}$  est un centre de dimension 1 engendré par un élément  $e$  tel que  $\text{ad}(e)|_{\mathfrak{g}_k} = k\text{Id}$ , pour  $k \in \{-1, 0, 1\}$ .

Dans [23], S. Kobayashi et T. Nagano ont d'abord donné une liste d'algèbres simples *de matrices* avec leurs graduations :  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ . Ils ont ensuite montré dans [24] comment les plonger comme des sous-algèbres des champs de vecteurs polynomiaux sur l'espace vectoriel  $V = \mathfrak{g}_{-1}$  par la procédure suivante : si  $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ , ils ont posé

$$\begin{cases} \forall h \in \mathfrak{g}_{-1}, & X_x^h = -h \\ \forall h \in \mathfrak{g}_0, & X_x^h = -[h, x] \\ \forall h \in \mathfrak{g}_1, & X_x^h = -\frac{1}{2}[[h, x], x]. \end{cases} \quad (1.18)$$

Dans le théorème 1.4.12, on montre que l'algèbre matricielle  $\mathfrak{g}$ , plongée de cette façon dans  $\text{Vect}(\mathfrak{g}_{-1})$  est une sous-algèbre propre maximale de l'algèbre des champs polynomiaux  $\text{Vect}_*(\mathfrak{g}_{-1})$ .

Citons à titre d'exemple les algèbres pour lesquelles la quantification équivariante a été obtenue jusqu'à présent :

1. L'algèbre projective  $sl_{n+1}$  est obtenue à partir de  $sl(n+1, \mathbb{R})$  via la construction ci-dessus, si la graduation de  $sl(n+1, \mathbb{R})$  est donnée par

$$sl(n+1, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ \xi & -trA \end{pmatrix}, \quad A \in gl(n, \mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^{n*} \right\}$$

et par l'isomorphisme  $\varphi : sl(n+1, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus gl(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^{n*}$  donné par

$$\begin{pmatrix} A & v \\ \xi & -trA \end{pmatrix} \mapsto (v, A + trA \text{Id}, \xi).$$

La quantification projectivement équivariante a été étudiée dans [26, 18, 27].

2. L'algèbre conforme  $so_{p+1, q+1}$  est obtenue à partir de  $so(p+1, q+1, \mathbb{R})$ . Elle est isomorphe à  $\mathbb{R}^{p+q} \oplus so(p, q, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \text{Id} \oplus \mathbb{R}^{p+q*}$ . En effet, on peut décrire l'algèbre par

$$so(p+1, q+1, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} -a & v^{\flat} & 0 \\ \xi^{\sharp} & A & v \\ 0 & \xi & a \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} A \in so(p, q, \mathbb{R}), a \in \mathbb{R}, \\ v \in \mathbb{R}^{p+q}, \xi \in \mathbb{R}^{p+q*} \end{array} \right. \right\},$$

où  $\sharp$  et  $\flat$  sont les isomorphismes entre  $\mathbb{R}^{p+q}$  et  $\mathbb{R}^{p+q*}$  induits par la métrique  $g = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$  de signature  $(p, q)$ .

L'isomorphisme est donné par

$$\begin{pmatrix} -a & v^{\flat} & 0 \\ \xi^{\sharp} & A & v \\ 0 & \xi & a \end{pmatrix} \mapsto (v, A - a \text{Id}, \xi).$$

La quantification équivariante par rapport à cette algèbre a été étudiée dans [16].

3. L'algèbre symplectique correspond également à une algèbre IFFT :

$$sp(2n, \mathbb{K}) \cong S^2\mathbb{K}^n \oplus sl(n, \mathbb{K}) \oplus \mathbb{K} \text{Id} \oplus S^2\mathbb{K}^{n*}$$

Elle est réalisée en une sous-algèbre propre maximale de  $\text{Vect}_*(S^2\mathbb{K}^n)$ .

4. L'algèbre orthogonale  $\mathfrak{so}(n, n, \mathbb{K})$  porte un autre type de graduation que celui cité plus haut. On a en effet

$$\mathfrak{so}(n, n, \mathbb{K}) \cong \wedge^2 \mathbb{K}^n \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) \oplus \mathbb{K}\text{Id} \oplus \wedge^2 \mathbb{K}^{n*}$$

Elle peut être réalisée comme une sous-algèbre propre maximale dans  $\text{Vect}_*(\wedge^2 \mathbb{K}^n)$ . Ces deux derniers exemples ont été traités dans [5]. Ils apparaissent naturellement quand on considère respectivement la variété des sous-espaces totalement isotropes maximaux par rapport à une forme symplectique ou par rapport à une forme bilinéaire symétrique de signature  $(n, n)$ .

5. L'algèbre  $\mathfrak{su}(n, n)$  peut être définie comme suit : on considère l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^{2n}$  muni de la forme sesquilinéaire de signature  $(n, n)$  définie par

$$H(X, Y) = \sum_{j=1}^n (x_j \bar{y}_j - x_{j+n} \bar{y}_{j+n}), \text{ si } X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n)$$

L'algèbre  $\mathfrak{su}(n, n)$  est alors la sous-algèbre réelle de  $\mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C})$  formée des matrices qui préservent la forme  $H$  (au sens des algèbres) :

$$\mathfrak{su}(n, n) = \{A \in \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C}) : H(AX, Y) + H(X, AY) = 0, \forall X, Y \in \mathbb{C}^{2n}\}$$

Cette algèbre porte également une graduation à trois termes :

$$\mathfrak{su}(n, n) \cong \mathfrak{u}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}e \oplus \mathfrak{u}(n, \mathbb{C})^*,$$

où  $\mathfrak{u}(n, \mathbb{C})$  est l'espace vectoriel des matrices anti-hermitiennes, et où  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^{\mathbb{R}}$  désigne l'algèbre  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  vue comme une algèbre de Lie réelle. L'algèbre  $\mathfrak{su}(n, n)$  apparaît naturellement lorsque l'on considère, comme plus haut, la variété des  $n$ -plans totalement isotropes pour  $H$ .

#### 1.4.4 Lien avec la mécanique quantique

En mécanique quantique, dans le cadre de la quantification géométrique, on peut définir une quantification comme une opération qui consiste à associer une observable quantique –un opérateur différentiel– à une observable classique, c'est-à-dire une fonction des coordonnées de position et d'impulsion  $(q_k, p_k)$ . Une quantification est donc un opérateur

$$Q : \{f(p_k, q_k)\} \rightarrow \{\text{opérateurs différentiels}\}.$$

On demande de plus que la correspondance satisfasse les conditions de Dirac :

$$Q(-i\hbar\{f, g\}) = [Q(f), Q(g)] \quad \text{et} \quad Q(1) = \text{Id}.$$

Remarquons que si les  $q_k$  sont les coordonnées d'une variété  $V$ , alors la loi de transformation des coordonnées  $p_k$  implique que  $(q_k, p_k)$  soient des coordonnées sur l'espace cotangent à cette variété. Si on se restreint aux fonctions qui sont polynomiales en les coordonnées  $p_k$ , on obtient un espace de fonctions qui est isomorphe à l'espace  $\mathcal{S}_0(V)$ . En résumé, l'espace  $\mathcal{S}_0(V)$  est l'espace des observables classiques. D'autre part, l'espace des observables quantiques est l'espace  $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(V)$  des opérateurs agissant sur les demi-densités. Une quantification est donc un opérateur (linéaire)

$$Q : \mathcal{S}_0(V) \rightarrow \mathcal{D}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(V)$$

satisfaisant les conditions de Dirac.

Un exemple d'une telle quantification est donné par

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 & \rightarrow \text{Id} \\ q_k & \rightarrow \widehat{q}_k = q_k \cdot \\ p_k & \rightarrow \widehat{p}_k = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k} \\ f(p_k, q_k) & \rightarrow \widehat{f} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k}, q_k \cdot \right) \end{array} \right. ,$$

si  $f$  est une fonction polynomiale en les coordonnées  $p_k$ .

La correspondance ainsi définie connaît quelques problèmes :

Elle n'est pas bien définie. En effet, puisque les fonctions forment une algèbre commutative, contrairement aux opérateurs différentiels, on a  $p_k q_k = q_k p_k$  mais  $\widehat{p}_k \widehat{q}_k \neq \widehat{q}_k \widehat{p}_k$ .

Il faut donc soit choisir un ordre dans lequel on place les variables quantifiées  $\widehat{p}_k, \widehat{q}_k$  et cela conduit à la notion de prescription d'ordre, ou ajouter une règle de symétrisation, qui correspond à prendre la moyenne sur toutes les prescriptions possibles :

$$q_k p_k \longrightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar}{i} q_k \circ \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k} \circ q_k \right).$$

En conséquence, la quantification n'est pas unique et dépend d'un choix arbitraire.

Elle n'a pas un bon comportement vis-à-vis des changements de coordonnées. Cela veut dire que la quantification dépend du choix d'un système de coordonnées. C'est une situation que l'on essaie d'éviter en géométrie

différentielle, où on préfère définir des objets intrinsèques, c'est-à-dire indépendants du choix des coordonnées. Cependant, il est bien connu qu'on ne peut pas trouver une quantification qui soit une bijection et qui se comporte bien vis-à-vis des changements de coordonnées les plus généraux. Au niveau infinitésimal, cela revient à dire qu'il n'existe pas de quantification bijective qui commute avec tous les champs de vecteurs. On est donc amené à restreindre l'ensemble des changements de coordonnées admissibles, et à chercher des quantifications qui commuteraient avec ces changements de coordonnées admissibles. Pour ce faire, on considère des variétés munies de structures additionnelles et on considère les coordonnées adaptées à ces structures. Cela restreint l'ensemble des changements de coordonnées possibles, et au niveau infinitésimal, cela revient à demander que la quantification commute avec les champs de vecteurs d'une sous-algèbre  $\mathfrak{g}$  de  $\text{Vect}(V)$ , c'est-à-dire qu'elle soit  $\mathfrak{g}$ -équivariante. Toutes les algèbres citées dans la section précédente sont des algèbres associées à une structure additionnelle sur une variété.

Enfin mentionnons que la condition d'équivariance, dans tous les cas cités, implique l'unicité de la quantification de  $\mathcal{S}_0(V)$  dans  $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(V)$ .

## 1.5 Structure et représentations de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  joue un rôle fondamental dans ce travail. D'une part l'algèbre d'équivariance  $\mathfrak{g}$  que nous considérons est isomorphe à  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  pour un certain  $n$ , mais, comme nous le verrons au troisième chapitre, la partie semi-simple  $\mathfrak{h}_0$  de l'algèbre  $\mathfrak{g}_0$  intervenant dans la décomposition est isomorphe à  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$ . D'après la méthode de construction que nous allons décrire au chapitre suivant, nous allons décomposer certaines représentations de cette dernière algèbre en irréductibles. Il nous a donc paru utile de rappeler les outils importants qui apparaissent dans la description de ces représentations irréductibles. Nous suivons les notations de [15]. Nous commençons par la structure de l'algèbre  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , nous continuons avec la description des représentations irréductibles en termes de leurs plus hauts poids, ou de tableaux de Young, et nous terminons par la règle de Littlewood et Richardson, qui nous permettra d'étudier les sous-espaces arborescents que nous allons introduire à la section 2.5, ainsi que l'unicité de la quantification.

### 1.5.1 Structure de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$

Nous considérons le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  est l'espace vectoriel des applications linéaires de  $\mathbb{K}^n$ , dont le crochet est le commu-

tateur. L'algèbre  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  est alors l'idéal de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  formé des applications linéaires de trace nulle. Dans cette section, nous considérons la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  dans  $\mathbb{K}^n$  et nous considérons  $(\epsilon^1, \dots, \epsilon^n)$  la base duale de  $\mathbb{K}^{n*}$ . A l'aide de la base de  $\mathbb{K}^n$  ainsi fixée, nous identifions  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  à l'ensemble des matrices de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  aux mêmes matrices, mais de trace nulle. Nous utilisons la notation tensorielle pour les applications linéaires, ainsi  $e_k \otimes \epsilon^j$  représente l'opérateur

$$E_k^j : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n : x \mapsto \epsilon^j(x)e_k.$$

Notons que  $E_k^j$  correspond à la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui situé sur la ligne  $k$  et la colonne  $j$  qui vaut 1. On notera encore  $\langle \epsilon^j, x \rangle$  ou  $\langle x, \epsilon^j \rangle$  l'évaluation  $\epsilon^j(x)$ . Dès lors  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  est engendré en tant qu'espace vectoriel par les applications linéaires

$$E_k^j (1 \leq j \neq k \leq n) \quad \text{et} \quad E_j = E_j^j - E_n^n (1 \leq j < n).$$

Les matrices  $E_j, j < n$  forment une base de la sous-algèbre de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  formée des matrices diagonales. Cette sous-algèbre, que nous notons  $\mathfrak{l}_0$  est la *sous-algèbre de Cartan* standard de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ . Nous notons  $\{\delta_j : j < n\}$  la base de  $\mathfrak{l}_0^*$  duale de  $\{E_j : j < n\}$ , c'est-à-dire la base telle que  $\delta_j(E_k) = \delta_{j,k}$ , pour tous  $j, k < n$ . On pose également  $\delta_n = -\sum_{j=1}^{n-1} \delta_j$ , de sorte que pour tout  $j \leq n$ , on a  $\delta_j(\text{diag}(h_1, \dots, h_n)) = h_j$ .

Les racines de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  sont les valeurs propres simultanées des  $\{ad(h) : h \in \mathfrak{l}_0\}$ . Ce sont des éléments de  $\mathfrak{l}_0^*$ . On voit aisément que l'ensemble des racines (non nulles) est  $\Lambda = \{\delta_j - \delta_k : j \neq k \in \{1, \dots, n\}\}$ . L'espace propre correspondant à la racine  $\delta_j - \delta_k$  est de dimension un et est généré par  $E_j^k$ .

Un système simple de racines est une base spéciale de  $\mathfrak{l}_0^*$ . Pour  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  on peut choisir  $\{\delta_j - \delta_{j+1} : j = 1, \dots, n-1\}$  comme système simple. Cette base particulière de  $\mathfrak{l}_0^*$  permet d'introduire un ordre (l'ordre lexicographique) sur l'enveloppe linéaire réelle<sup>2</sup> des racines, noté  $\mathfrak{l}_{0, \mathbb{R}}^*$ . Cet espace est simplement l'espace vectoriel réel engendré par  $\{\delta_1, \dots, \delta_{n-1}\}$ .

La forme de Killing de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  est donnée par

$$\beta : (A, B) \mapsto 2n \operatorname{tr}(AB).$$

Sa restriction à la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{l}_0$  est non singulière et induit une dualité qui à tout  $\lambda \in \mathfrak{l}_0^*$  associe  $h_\lambda \in \mathfrak{l}_0$  tel que  $\beta(h_\lambda, x) = \lambda(x)$  pour tout  $x \in \mathfrak{l}_0$ .

Cette dualité n'est pas difficile à écrire explicitement : on a

$$\beta(E_i, E_j) = 2n(1 + \delta_{i,j})$$

<sup>2</sup>Quand  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , cet ensemble coïncide avec  $\mathfrak{l}_0^*$ .

de sorte que dans la base  $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$  de  $\mathfrak{l}_0$ , la forme bilinéaire  $\beta$  se représente par la matrice  $B = 2n(\text{Id} + A)$  où  $A$  est la matrice carrée de dimension  $n-1$  dont tous les éléments sont égaux à 1. On note que  $A^2 = (n-1)A$ ; ce qui permet de vérifier que  $B^{-1} = \frac{1}{2n}(\text{Id} - \frac{1}{n}A)$ . En utilisant la définition des éléments  $h_\lambda$  pour  $\lambda$  dans  $\mathfrak{l}_0^*$ , on voit que les composantes de  $h_{\delta_i}$  dans la base  $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$  sont données par la  $i$ -ème colonne de  $B^{-1}$ , dès lors, on a pour tout  $i \leq n-1$

$$h_{\delta_i} = \frac{1}{2n} \left( E_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} E_j \right),$$

ce qui implique

$$h_{\delta_n} = - \sum_{i=1}^{n-1} h_{\delta_i} = - \frac{1}{2n^2} \sum_{j=1}^{n-1} E_j.$$

On note  $\mathfrak{l}_{0,\mathbb{R}}$  le sous-espace vectoriel réel de  $\mathfrak{l}_0$  sur lequel les racines prennent des valeurs réelles. C'est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires réelles des matrices  $E_j$ . C'est donc  $\mathfrak{l}_0$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et une forme réelle de  $\mathfrak{l}_0$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . De plus, les espaces vectoriels  $\mathfrak{l}_{0,\mathbb{R}}$  et  $\mathfrak{l}_{0,\mathbb{R}}^*$  sont duaux l'un de l'autre.

La restriction de  $\beta$  à  $\mathfrak{l}_{0,\mathbb{R}}$  est un produit scalaire. On munit  $\mathfrak{l}_{0,\mathbb{R}}^*$  du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  qui fait de la bijection  $\lambda \mapsto h_\lambda$  une isométrie : on pose

$$(\lambda, \mu) = \beta(h_\lambda, h_\mu), \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{l}_{0,\mathbb{R}}^*.$$

Ce produit scalaire joue un rôle fondamental dans le calcul des valeurs propres des opérateurs de Casimir des représentations de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ . On utilise l'expression de  $h_{\delta_i}$  trouvée plus haut et on obtient directement

$$(\delta_i, \delta_j) = \frac{1}{2n^2} (n\delta_{ij} - 1) \quad \forall i, j \leq n. \quad (1.19)$$

En général pour

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \delta_i, \quad \text{et} \quad \pi = \sum_{i=1}^n \pi_i \delta_i$$

on obtient

$$(\omega, \pi) = \frac{1}{2n} \left( \sum_{i=1}^n \omega_i \pi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \pi_j \right) \quad (1.20)$$

Un dernier ingrédient intervient dans le calcul de l'opérateur de Casimir sur les représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ . Il s'agit de vecteur de Weyl  $\rho_S$ , qui vaut la demi-somme des racines positives. Puisque les racines positives

sont celles qui sont combinaisons linéaires à coefficients (entiers) positifs des racines simples, ce sont exactement les racines qui s'écrivent  $\delta_i - \delta_j$  avec  $i$  inférieur à  $j$ . On a donc

$$\rho_S = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\delta_i - \delta_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (n+1-2i)\delta_i = - \sum_{i=1}^n i\delta_i, \quad (1.21)$$

puisque  $\sum_{i=1}^n \delta_i = 0$  par définition.

Enfin, on peut calculer le produit scalaire de  $2\rho_S$  avec les éléments de base de  $\mathfrak{l}_{0,\mathbb{R}}^*$  :

$$(\delta_j, 2\rho_S) = \frac{n-2j+1}{2n} \quad (1.22)$$

pour tout  $j \leq n$ .

### 1.5.2 Diagrammes et tableaux de Young

Soit  $(E, \rho)$  une représentation (complexe, de dimension finie) de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . La restriction de  $\rho$  à la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{l}_0$  définit une représentation de l'algèbre abélienne  $\mathfrak{l}_0$ . Un vecteur poids de  $(E, \rho)$  est alors un vecteur propre (non nul) simultané des  $\rho(h) : h \in \mathfrak{l}_0$ . La valeur propre dépend de  $h$  en général et est donc en fait un élément de  $\mathfrak{l}_0^*$ . Cette valeur propre est un poids de  $(E, \rho)$ . En résumé,  $\alpha \in \mathfrak{l}_0^*$  est un poids si il existe  $u \in E \setminus \{0\}$  tel que

$$\rho(h)u = \alpha(h)u \quad \forall h \in \mathfrak{l}_0.$$

Les racines introduites à la section précédente sont donc les poids de la représentation adjointe de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ .

Si de plus, dans l'équation précédente, le vecteur  $u$  est tel que  $\rho(E_j^k)u = 0$  pour tout  $j < k$ , le vecteur  $u$  est dit vecteur de plus haut poids de la représentation. Le poids  $\mu$  est alors appelé plus haut poids. Toute représentation complexe de dimension finie de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  admet au moins un vecteur de plus haut poids. Le sous espace engendré par l'action des matrices  $E_j^k$  pour  $j > k$  sur ce vecteur est une sous-représentation irréductible de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . Enfin, pour toute représentation irréductible de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , le plus haut poids est unique et détermine la représentation irréductible à isomorphisme près. On montre également que les plus hauts poids  $\mu$  des représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  sont entiers et dominants : ils vérifient les conditions

$$\frac{2(\mu, \lambda_i)}{|\lambda_i|^2} \in \mathbb{N},$$



pour toute racine simple  $\lambda_i$ . Enfin, tout poids entier et dominant est le plus haut poids d'une représentation irréductible de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . Ceci permet de calculer les types possibles de représentations de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  en calculant tous les poids entiers et dominants. On montre que ces poids sont donnés par les expressions de la forme

$$\sum_{j=1}^n \eta_j \delta_j$$

où les coefficients  $\eta_j$  sont des naturels tels que  $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_n \geq 0$ .

Notons que dans la décomposition, on peut ajouter la même constante à chaque  $\eta_j$ , puisqu'on a par définition  $\sum_{j=1}^n \delta_j = 0$ . La décomposition n'est donc pas unique, mais cela n'aura pas d'incidence dans les calculs qui suivent. On peut d'ailleurs au besoin rendre cette décomposition unique en forçant  $\eta_n = 0$ .

On vérifie par exemple que la représentation naturelle de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  sur  $\mathbb{C}^n$  est irréductible de plus haut poids  $\delta_1$  (les poids sont en fait exactement et du plus haut au plus bas  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ ) et que la représentation duale sur  $\mathbb{C}^{n*}$  est irréductible de plus haut poids  $-\delta_n = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$ .

Passons aux définitions des diagrammes de Young et des tableaux associés que nous utilisons dans ce travail. Les diagrammes de Young interviennent dans beaucoup de domaines mathématiques, par exemple dans la théorie des nombres, où un diagramme de Young (ou de Ferrers) représente une partition particulière d'un nombre entier. Dans notre situation, les diagrammes sont associés aux plus haut poids des représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ .<sup>3</sup> Nous utilisons plus particulièrement le fait que les tableaux associés aux diagrammes de Young permettent de caractériser la décomposition d'un produit tensoriel de deux représentations irréductibles. Cette règle de décomposition est connue sous le nom de règle de Littlewood- Richardson. Nous suivons ici la présentation de [14] et [8].

**Définition 1.5.1.** *Un diagramme de Young ou diagramme de Ferrers  $D$  de taille  $k \in \mathbb{N}$  et de profondeur  $d \in \mathbb{N}$  est le diagramme associé à une partition*

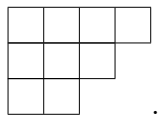
$$k = \sum_{j=1}^d k_j$$

les  $k_j$  étant des nombres tels que  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_d > 0$ . On construit le diagramme comme une juxtaposition de rangées de carrés, alignés à gauche et dont les longueurs sont les nombres  $k_1, \dots, k_d$ .

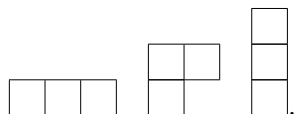
---

<sup>3</sup>C'est au départ les représentations de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  qui sont caractérisées, mais la restriction à  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  n'est pas difficile à obtenir.

Par exemple, le diagramme de taille 9 et de profondeur 3, correspondant à la partition  $(4, 3, 2)$  de 9 est donné par



Tous les diagrammes de taille 3 sont donnés par



L'intervention des diagrammes de Young dans la théorie des représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  est alors simple à définir.

**Définition 1.5.2.** *A une représentation irréductible  $(E, \rho)$  de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , de plus haut poids  $\eta = \sum_{j=1}^n \eta_j \delta_j$ , on associe le diagramme de Young de profondeur au plus  $n$  dont les lignes sont de longueur  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ .*

Ainsi, la représentation irréductible  $\mathbb{C}^n$  de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , de plus haut poids  $\delta_1$ , correspond au diagramme constitué d'une seule case, tandis que la représentation  $\mathbb{C}^{n*}$  correspond au diagramme formé de  $n - 1$  lignes de longueur 1.

Il faut aussi remarquer que, puisque le plus haut poids associé à une représentation irréductible n'est pas univoquement déterminé, il en est de même pour le diagramme de Young associé. Ainsi, deux diagrammes correspondent à la même représentation irréductible si l'un peut être obtenu à partir de l'autre en ajoutant à gauche un certain nombre de colonnes comptant  $n$  cases.

Inversément, à chaque classe de diagrammes ainsi définie, de profondeur au plus  $n$ , on associe une classe de représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  dont le poids est défini par le diagramme.

On peut obtenir un modèle concret de cette représentation comme un sous-espace stable pour l'action de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  dans  $\otimes^k \mathbb{C}^n$  si le diagramme est de taille  $k$ . Cette représentation est obtenue à partir de la construction de Weyl qui définit un sous-espace  $\mathcal{Y}_D(\otimes^k \mathbb{C}^n)$  de  $\otimes^k \mathbb{C}^n$ , image de ce dernier sous l'action d'un projecteur nommé *symétriseur de Young*. Avant de définir ces projecteurs, il nous faut définir les tableaux de Young.

**Définition 1.5.3.** *Un tableau de Young, associé à un diagramme  $D$  de taille  $k$  est obtenu en remplissant les cases de  $D$  avec les nombres naturels.*

La partition associée au diagramme sous-jacent s'appelle la forme du tableau.

**Définition 1.5.4.** *Un tableau de Young associé à  $D$  est standard si les naturels qu'il contient sont  $1, \dots, k$  et s'ils sont rangés de façon croissante dans chaque ligne, de gauche à droite, et dans chaque colonne, de haut en bas.*

Par exemple, les tableaux standards de taille trois sont exactement

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad T_4 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}.$$

A tout tableau standard  $T$ , on peut associer deux sous-groupes du groupe de permutations de  $\{1, \dots, k\}$  :

**Définition 1.5.5.** *Pour tout tableau  $T$ , on définit*

$$R(T) = \{\nu : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\} : \nu \text{ préserve les lignes de } T\}$$

et

$$C(T) = \{\nu : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\} : \nu \text{ préserve les colonnes de } T\}.$$

On rappelle que le groupe des permutations de  $\{1, \dots, k\}$  agit à gauche sur  $\otimes^k \mathbb{C}^n$  par

$$\gamma(\nu)(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = x_{\nu^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x_{\nu^{-1}(k)}$$

pour toute permutation  $\nu$  et tous  $x_1, \dots, x_k$  dans  $\mathbb{C}^n$ . On peut alors définir le symétriseur de Young associé à un tableau standard  $T$  :

**Définition 1.5.6.** *Soit  $T$  un tableau standard de taille  $k$  et de profondeur au plus  $n$ . On pose*

$$r(T) : \otimes^k \mathbb{C}^n \rightarrow \otimes^k \mathbb{C}^n : u \mapsto \sum_{\nu \in R(T)} \gamma(\nu)u,$$

$$c(T) : \otimes^k \mathbb{C}^n \rightarrow \otimes^k \mathbb{C}^n : u \mapsto \sum_{\nu \in C(T)} \text{sgn}(\nu) \gamma(\nu)u,$$

et enfin

$$s(T) = c(T) \circ r(T).$$

On peut montrer qu'on a  $s(T)^2 = m_T s(T)$ , où  $m_T$  est un rationnel non nul, de sorte que  $1/m_T s(T)$  est un projecteur.

**Définition 1.5.7.** *Le symétriseur de Young associé à un tableau standard  $T$  de taille  $k$  et de profondeur au plus  $n$  est l'opérateur*

$$\mathcal{Y}_T : \otimes^k \mathbb{C}^n \rightarrow \otimes^k \mathbb{C}^n : u \mapsto 1/m_T s(T)(u).$$

À titre d'exemple, montrons le calcul du projecteur associé au tableau  $T_2$  donné plus haut. Dans ce cas, on a  $R(T) = \{\text{Id}, (12)\}$  et  $C(T) = \{\text{Id}, (13)\}$  de sorte que  $\mathcal{Y}_{T_2}$  est un multiple de

$$s(T_2) = (\text{Id} - \gamma(13)) \circ (\text{Id} + \gamma(12)) = \text{Id} + \gamma(12) - \gamma(13) - \gamma(123).$$

On voit que  $m_{T_2} = 3$  et on obtient

$$\mathcal{Y}_{T_2} = \frac{1}{3}(\text{Id} + \gamma(12) - \gamma(13) - \gamma(123)).$$

De la même manière, on obtient

$$\mathcal{Y}_{T_1} = \frac{1}{6}(\text{Id} + \gamma(12) + \gamma(13) + \gamma(23) + \gamma(123) + \gamma(132)).$$

De manière générale, le symétriseur de Young associé au tableau standard formé d'une seule ligne est le symétriseur. On a aussi

$$\mathcal{Y}_{T_3} = \frac{1}{3}(\text{Id} - \gamma(12) + \gamma(13) - \gamma(132)).$$

Et enfin

$$\mathcal{Y}_{T_4} = \frac{1}{6}(\text{Id} - \gamma(12) - \gamma(13) - \gamma(23) + \gamma(123) + \gamma(132)).$$

Ici aussi, c'est un fait général : le symétriseur associé au tableau formé d'une seule colonne est l'antisymétriseur.

**Proposition 1.5.8.** *Pour tout  $T$  standard de taille  $k$  et de profondeur au plus  $n$ , le sous-espace  $\mathcal{Y}_T(\otimes^k \mathbb{C}^n)$  est stable pour la représentation naturelle de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . C'est une représentation irréductible dont le plus haut poids est associé au diagramme sous-jacent à  $T$ .*

La représentation  $\mathcal{Y}_T(\otimes^k \mathbb{C}^n)$  est appelée *module de Weyl* associé à  $T$ . Si nous continuons notre exemple précédent, la représentation  $\otimes^3 \mathbb{C}^n$  pour  $n \geq 3$  contient 4 modules de Weyl. Elle se décompose en la somme directe de ces quatre sous-représentations irréductibles. En général, c'est toujours le cas, comme indiqué dans la proposition suivante, mais les projecteurs sur les irréductibles de la décomposition ne sont pas les projecteurs définis plus haut car ils ne satisfont pas toujours la relation

$$\mathcal{Y}_T \circ \mathcal{Y}_{T'} = 0.$$

Il faut alors définir de nouveaux projecteurs qui sont des combinaisons linéaires de compositions de ceux que nous venons de définir.

**Proposition 1.5.9.** *La représentation naturelle de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  sur  $\otimes^k \mathbb{C}^n$  se décompose en  $\bigoplus_{T \text{ standard}} \mathcal{Y}_T(\mathbb{C}^n)$  où  $T$  parcourt les tableaux standards de taille  $k$  et de profondeur au plus  $n$ . Chaque irréductible  $\mathcal{Y}_T(\mathbb{C}^n)$  a le plus haut poids associé au diagramme sous-jacent à  $T$ .*

D'autre part, si  $T$  et  $T'$  sont des tableaux standards associés au même diagramme, on sait que les représentations  $\mathcal{Y}_T(\otimes^k \mathbb{C}^n)$  et  $\mathcal{Y}_{T'}(\otimes^k \mathbb{C}^n)$  sont équivalentes. Il sera utile de faire le lien entre ces représentations.

**Proposition 1.5.10** ([19]). *Si  $T$  et  $T'$  sont deux tableaux de taille  $k$  et de profondeur au plus  $n$ , alors il existe une permutation  $\nu$  de  $\{1, \dots, k\}$  qui transforme  $T$  en  $T'$ , on a alors*

$$\mathcal{Y}_T \circ \gamma(\nu) = \gamma(\nu) \circ \mathcal{Y}_{T'}.$$

On peut le constater sur les symétriseurs calculés plus haut. De manière générale, quand les projecteurs sur les irréductibles ne sont pas les applications  $\mathcal{Y}_T$ , l'entrelacement entre deux irréductibles est une combinaison linéaire d'actions de permutations.

Cette proposition montre qu'il suffit, pour connaître les symétriseurs pour tous les tableaux standards associés à un diagramme  $D$ , de connaître le symétriseur associé au tableau naturel  $T_{\text{nat}}$ <sup>4</sup> associé à  $D$ , c'est-à-dire le tableau rempli avec les nombres de 1 à  $k$  consécutivement de gauche droite, ligne après ligne.

**Définition 1.5.11.** *Un tableau de Young semi-standard associé à  $D$  est un tableau obtenu en remplissant  $D$  avec des nombres  $j$  parmi  $1, \dots, k$  de façon que les  $j$  soient strictement croissants dans les colonnes lues de haut en bas et non décroissants dans les lignes lues de gauche à droite.*

**Exemple :** Tableau de Young semi-standard de forme  $(5, 3, 1)$

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 3 | 5 | 7 |   |   |
| 9 |   |   |   |   |

Notons qu'un tableau standard est semi-standard. La réciproque n'est pas vraie parce que dans les tableaux semi-standards, un même nombre peut être répété plusieurs fois.

**Définition 1.5.12.** *On appelle contenu d'un tableau  $D$  de taille  $k$  le vecteur  $(\#_k(1), \dots, \#_k(n))$ ,  $\#_c(j)$  étant le nombre de fois que le nombre  $j$  se trouve dans les  $c$  premières cases ( $j \geq 2$ ), les cases étant ordonnées ici de droite à gauche et de haut en bas.*

---

<sup>4</sup>C'est un des tableaux naturels possibles

Par exemple,  $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$  est le contenu du tableau ci-dessus.

**Définition 1.5.13.** *Un tableau est dit bien ordonné si  $\#_c(j) \leq \#_c(j-1)$ ,  $\forall c \in \{1, \dots, k\}, \forall j \geq 2$ .*

**Définition 1.5.14.** *Un tableau tordu est la différence de deux tableaux : si le tableau  $D_1$  est inclus dans le tableau  $D$ , le tableau tordu  $D/D_1$  est le tableau obtenu en ne tenant pas compte des cases du tableau  $D_1$  dans celles de  $D$ . Toutes les définitions ci-dessus se généralisent directement au cas des tableaux tordus.*

Nous pouvons maintenant formuler la règle de décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles, selon [14, 8].

**Proposition 1.5.15** (Règle de Littlewood et Richardson). *Si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  décrites respectivement par les diagrammes  $D_1$  et  $D_2$  et si  $D$  est le diagramme décrivant une sous-représentation  $V$  dans la décomposition de  $V_1 \otimes V_2$  en composantes irréductibles alors la multiplicité de  $V$  est égale au nombre de tableaux semi-standards tordus de contenu  $D_2$ , bien ordonné et de forme  $D/D_1$ .*

Cette règle est la généralisation de la première règle de Young dont nous rappelons l'énoncé.

**Proposition 1.5.16** (Première règle de Young). *Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  décrites respectivement par les diagrammes  $D_1$  et  $D_2$ . On suppose que  $D_2$  est une ligne de longueur  $h$  et que  $D_1 = (k_1, \dots, k_n)$  est de taille  $k$ . Alors  $V_1 \otimes V_2$  est une somme de sous-représentations irréductibles inéquivalentes deux à deux ; cette somme contient une seule sous-représentation décrite par chaque diagramme  $D' = (d'_1, \dots, d'_n)$  de taille  $k + h$  vérifiant*

$$k_1 \leq d'_1, k_j \leq d'_j \leq k_{j-1}, \quad \forall j > 1.$$

# Chapitre 2

## La construction classique

Nous rappelons ici les grandes lignes de la méthode de construction de quantifications équivariantes introduite par C. Duval, P. Lecomte et V. Ovsienko dans [16] et généralisée depuis dans des contextes divers (voir par exemple [5, 2, 33, 12]). Elle repose sur le calcul de deux opérateurs de Casimir : le premier est noté  $C$  et est associé à la représentation  $L_X$  (1.13) de l'algèbre d'équivariance  $\mathfrak{g} \subset Vect(V)$  sur l'espace des symboles, le second, noté  $\mathcal{C}$ , est associé à la représentation  $\mathcal{L}_X$  (1.10) de l'algèbre  $\mathfrak{g}$  sur l'espace des opérateurs différentiels correspondants. Nous nous restreignons au cas où  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie.

Dans cette section, nous considérons une algèbre IFFT  $\mathfrak{g}$  (voir section 1.4.3), que nous voyons indifféremment comme une algèbre abstraite (matricielle) ou comme une sous-algèbre de  $Vect(\mathfrak{g}_{-1})$ , en utilisant le plongement (1.18). On est donc amené à considérer le problème de quantification équivariante sur l'espace vectoriel  $V = \mathfrak{g}_{-1}$ .

Le fait que  $V$  soit un espace vectoriel nous permet en fixant une base, de considérer des coordonnées globales et de simplifier la description des densités, des symboles et des opérateurs différentiels en utilisant la proposition suivante :

**Proposition 2.0.17.** *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie. On a les isomorphismes suivants*

1. *Le fibré des densités  $\Delta^\lambda(V)$  s'identifie au fibré trivial  $V \times \mathbb{F}_\lambda(V)$  ;*
2. *L'espace des densités  $\mathcal{F}_\lambda(V)$  s'identifie dès lors à  $C^\infty(V, \mathbb{F}_\lambda(V))$  ;*
3. *L'espace  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k(V)$  s'identifie à  $\mathcal{D}^k(C^\infty(V, \mathbb{F}_\lambda(V)), C^\infty(V, \mathbb{F}_\mu(V)))$  ;*
4. *L'espace  $\mathcal{S}_\delta^k(V)$  s'identifie à  $C^\infty(V, S^k V \otimes \mathbb{F}_\delta(V))$ .*

Les dérivées de Lie sur les espaces  $C^\infty(V, \mathbb{F}_\lambda(V))$  et  $C^\infty(V, S^k V \otimes \mathbb{F}_\delta(V))$  sont données respectivement par les formules (1.6) et (1.13), tandis que celle sur  $\mathcal{D}^k(C^\infty(V, \mathbb{F}_\lambda(V)), C^\infty(V, \mathbb{F}_\mu(V)))$  est donnée par le commutateur.

## 2.1 La quantification affine

Une première étape technique, mais qui permet d'alléger les notations, consiste à formuler le problème de quantification uniquement sur l'espace des symboles. Pour cela, on considère un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(\mathfrak{g}_{-1})$  dans  $\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$  et on l'utilise pour transporter la structure de représentation de  $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}(\mathfrak{g}_{-1})$  sur  $\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$ .

Plus précisément, ayant fixé une base de l'espace vectoriel, on l'identifie à  $\mathbb{R}^n$  pour un certain  $n$  et on utilise la quantification et le symbole affines (voir la définition 1.4.3). On définit une dérivée de Lie sur  $\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$  qui transforme ces bijections en isomorphismes de représentations de  $\mathfrak{g}$  en posant

$$\mathcal{L}_X S = \sigma_{\text{Aff}} \circ \mathcal{L}_X \circ Q_{\text{Aff}}(S) \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall S \in \mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}). \quad (2.1)$$

On peut alors constater que la donnée d'une quantification  $Q_{\mathfrak{g}}$  est équivalente à la donnée d'une quantification

$$Q : (\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), L^\delta) \rightarrow (\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), \mathcal{L}), \quad (2.2)$$

c'est-à-dire d'un isomorphisme de  $\mathfrak{g}$ -représentations entre ces deux espaces, appliquant  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$  dans  $\oplus_{l \leq k} \mathcal{S}_\delta^l(\mathfrak{g}_{-1})$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et satisfaisant la condition de normalisation

$$(Q(S))_k = S \quad \forall S \in \mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1}), \forall k \in \mathbb{N}$$

où  $S_k$  représente la projection dans  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$  pour tout symbole  $S$ .

## 2.2 Opérateurs de Casimir

Comme nous l'avons déjà mentionné, la construction de la quantification équivariante dans [16] repose sur l'étude d'opérateurs de Casimir. Nous rappelons les définitions et propriétés générales de tels opérateurs. Nous citons les résultats de [5] qui permettent en général de prouver l'existence de quantifications et leur unicité quand  $\delta$  n'est pas une valeur *résonante*.

**Définition 2.2.1.** *La forme de Killing d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{l}$  sur un corps  $\mathbb{K}$  est l'application bilinéaire symétrique définie par*

$$\beta : \mathfrak{l} \times \mathfrak{l} \rightarrow \mathbb{K} : (A, B) \mapsto \beta(A, B) = \text{tr}(\text{ad}(A)\text{ad}(B)),$$

où  $\text{ad}$  désigne la représentation adjointe de  $\mathfrak{l}$ .



On sait qu'une algèbre est semi-simple si et seulement si sa forme de Killing est non dégénérée (c'est le critère de Cartan). Dans ce cas, la forme de Killing définit une dualité de l'algèbre dans elle-même qui permet la définition suivante.

**Définition 2.2.2.** *Si  $\mathfrak{l}$  est une algèbre de Lie semi-simple, pour toute base  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $\mathfrak{l}$  il existe une base  $(u_1^*, \dots, u_n^*)$  telle que  $\beta(u_i, u_j^*) = \delta_{ij}, \forall i, j \leq n$ . Ces bases sont appelées Killing-duales.*

On peut alors définir l'opérateur de Casimir associé à toute représentation  $(E, \rho)$  d'une algèbre de Lie semi-simple :

**Définition 2.2.3.** *Si  $(E, \rho)$  est une représentation d'une algèbre semi-simple  $\mathfrak{l}$ , l'opérateur de Casimir de cette représentation est défini par*

$$C_\rho : E \rightarrow E : x \mapsto \sum_{i=1}^n \rho(u_i) \rho(u_i^*) x,$$

où  $(u_i : i \leq n)$  et  $(u_i^* : i \leq n)$  sont des bases Killing-duales de  $\mathfrak{l}$ .

On peut vérifier que l'opérateur ainsi défini ne dépend que de l'algèbre et de la représentation : il est indépendant du choix des bases. Il a les propriétés fondamentales suivantes :

**Proposition 2.2.4.** *Soit  $(E, \rho)$  une représentation de  $\mathfrak{l}$  semi-simple.*

1. *L'opérateur  $C_\rho$  est un entrelacement de la représentation  $(E, \rho)$  : on a*

$$\rho(x) \circ C_\rho = C_\rho \circ \rho(x) \quad \forall x \in \mathfrak{l};$$

2. *Si  $(E', \rho')$  est une autre représentation de  $\mathfrak{l}$  et si  $T : (E, \rho) \rightarrow (E', \rho')$  est un entrelacement, c'est-à-dire*

$$T \circ \rho(x) = \rho'(x) \circ T \quad \forall x \in \mathfrak{l},$$

*alors on a*

$$C_{\rho'} \circ T = T \circ C_\rho; \tag{2.3}$$

3. *Si  $u$  est un vecteur propre de  $C_\rho$  de valeur propre  $\alpha$ , alors  $T(u)$  est un vecteur propre de  $C_{\rho'}$  de valeur propre  $\alpha$ .*

La première propriété est utile pour calculer les opérateurs de Casimir que nous utiliserons. La deuxième est une conséquence directe de la définition de  $C_\rho$  et  $C_{\rho'}$  et permet de démontrer la troisième, qui va donner directement une condition nécessaire que doit satisfaire toute quantification  $Q$ .

Nous pouvons maintenant particulariser ces notions au cas d'une algèbre IFFT  $\mathfrak{g}$  et aux représentations  $(\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), L^\delta)$  et  $(\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), \mathcal{L})$  discutées à la section précédente.

**Définition 2.2.5.** On note respectivement  $C$  et  $\mathcal{C}$  les opérateurs de Casimir associés à  $(\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), L^\delta)$  et  $(\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), \mathcal{L})$ . On a donc explicitement pour tout  $P \in \mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$

$$\begin{cases} C(P) = \sum_{i=1}^n L_{X^{u_i}} \circ L_{X^{u_i^*}} P \\ \mathcal{C}(P) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{X^{u_i}} \circ \mathcal{L}_{X^{u_i^*}} P \end{cases},$$

si  $(u_i : i \leq n)$  et  $(u_i^* : i \leq n)$  sont des bases Killing-duales de  $\mathfrak{g}$  (vue comme algèbre abstraite).

D'après la proposition 2.2.4, et puisque la quantification  $Q$  (2.2) est un isomorphisme de représentations, on obtient la condition suivante sur  $Q$  :

**Proposition 2.2.6** (Duval, Lecomte, Ovsienko). Si  $P \in \mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$  est un vecteur propre de  $C$  de valeur propre  $\alpha$  alors  $Q(P)$

1. est un vecteur propre de  $\mathcal{C}$  de valeur propre  $\alpha$  ;
2. doit s'écrire  $P_k + P_{k-1} + \dots + P_0$ , où  $P_j$  est dans  $\mathcal{S}_\delta^j(\mathfrak{g}_{-1})$  pour tout  $0 \leq j \leq k$  ;
3. doit satisfaire la condition de normalisation  $P_k = P$ .

En d'autres termes, la quantification  $Q$  doit faire correspondre à tout vecteur propre  $P$  de  $C$  de degré  $k$ , un vecteur propre de  $\mathcal{C}$  de même valeur propre et de degré inférieur ou égal à  $k$ , dont  $P$  est le terme de plus haut degré.

Dans [16], les auteurs ont montré que cette condition est suffisante pour autant qu'il y ait suffisamment de vecteurs propres et qu'on puisse garantir l'unicité du vecteur propre de  $\mathcal{C}$  associé à tout vecteur propre homogène de  $C$ . Plus précisément, le résultat est le suivant :

**Proposition 2.2.7** (Duval, Lecomte, Ovsienko). Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. L'opérateur  $C$  est diagonalisable<sup>1</sup> ;
2. A tout vecteur propre  $P \in \mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$  de  $C$ , on peut faire correspondre un **unique** vecteur propre de  $\mathcal{C}$  (de même valeur propre) qui s'écrit  $\hat{P} = P + P_{k-1} + \dots + P_0$ , où  $P_j$  est dans  $\mathcal{S}_\delta^j(\mathfrak{g}_{-1})$  pour tout  $0 \leq j \leq k-1$  ;

alors la correspondance linéaire  $Q$  définie par  $Q(P) = \hat{P}$  est une quantification  $\mathfrak{g}$ -équivariante. Elle est unique.

La preuve de ce résultat se trouve notamment dans [16, 5, 12]. Cependant, puisque ce résultat sous-tend toute la construction des quantifications équivariantes, il nous a paru naturel de la reproduire.

<sup>1</sup>C'est-à-dire si  $\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$  est somme directe d'espaces propres, forcément gradués.

*Démonstration.* Prouvons tout d'abord l'unicité. D'après la condition nécessaire évoquée plus haut, toute quantification  $Q$  doit associer à un symbole  $P$ , vecteur propre de  $C$  et homogène de degré  $k$ , un vecteur propre de  $\mathcal{C}$  de même valeur propre et de la forme  $\hat{P} = P + P_{k-1} + \dots + P_0$ . Puisque ce vecteur est unique, la restriction de la quantification est unique sur tout espace propre de  $C$ . On conclut en notant que par hypothèse, l'espace  $\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$  est la somme directe des espaces propres de  $C$ .

Passons maintenant à l'existence. Il suffit de montrer que l'application proposée convient :

$$\mathcal{L}_X Q(P) = Q(L_X^\delta P) \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

pour tout  $P \in \mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$ , vecteur propre de  $C$  de valeur propre  $\alpha$ , puisque  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$  est somme des espaces propres de  $C$ .

Les deux membres de cette égalité sont vecteurs propres de  $\mathcal{C}$  de valeur propre  $\alpha$ . En effet, par définition  $Q(P)$  est vecteur propre de  $\mathcal{C}$  de valeur propre  $\alpha$ , et il en est donc de même pour  $\mathcal{L}_X Q(P)$ , puisque  $\mathcal{L}_X$  commute avec  $\mathcal{C}$  (voir proposition 2.2.4). Pour le membre de droite, on note que  $L_X^\delta P$  est encore dans  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$ , par définition de  $L_X^\delta$ , et que c'est encore un vecteur propre de  $C$ , puisque  $C$  et  $L_X^\delta$  commutent. Donc on obtient un vecteur propre de  $\mathcal{C}$  en appliquant  $Q$ , par définition.

Le terme de plus haut degré de ces deux membres est  $L_X^\delta P$ . En effet, pour le membre de droite, c'est la définition même de  $Q$ . Pour le membre de gauche, on note qu'on a  $\mathcal{L}_X = L_X^\delta + \gamma(X)$ , où  $\gamma(X)$  diminue le degré de ses arguments (voir la section suivante pour plus de détails). Le terme de plus haut degré est donc le terme de plus haut degré de  $L_X^\delta Q(P)$ , c'est-à-dire  $L_X^\delta P$ .

Les deux membres de l'égalité sont donc deux expressions de l'unique vecteur propre de  $\mathcal{C}$  associé au vecteur propre  $L_X^\delta P$  de  $C$ .  $\square$

La proposition qui vient d'être énoncée donne une marche à suivre pour construire une quantification  $\mathfrak{g}$ -équivariante : on prouve que  $C$  est diagonalisable et on détermine ses espaces propres. On étudie ensuite les espaces propres de  $\mathcal{C}$  et on construit la correspondance  $P \mapsto \hat{P}$  décrite dans les deux propositions précédentes. Dans les sections suivantes, nous rassemblons les résultats concernant les opérateurs  $C$  et  $\mathcal{C}$  qui sont valables pour toutes les algèbres IFFT. Nous montrons pourquoi certains d'entre eux ne s'appliquent pas directement au cas de  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ . Nous utiliserons essentiellement les notations de [5].

## 2.3 L'opérateur $C$

Le résultat principal de [5] est le suivant (avec les notations de 1.4.13)

**Théorème 2.3.1.** *Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et si  $\mathfrak{h}_0$  est simple ou si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et la complexifiée  $\mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$  de  $\mathfrak{h}_0$  est simple alors l'opérateur de casimir  $C$  est diagonalisable.*

Ce résultat s'applique notamment aux algèbres projectives, conformes, à  $\mathfrak{so}(n, n, \mathbb{K})$  et  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{K})$ . Il ne s'applique pas à  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  quand  $p$  et  $q$  sont strictement supérieurs à 1, puisque pour cette algèbre, nous verrons dans le chapitre suivant que  $\mathfrak{h}_0$  est isomorphe à  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$ , et n'est donc pas simple.

Nous devons donc voir comment ce résultat peut éventuellement être récupéré dans le cas de l'algèbre qui nous préoccupe. Donnons sans démonstration les considérations intermédiaires de [5], qui restent valables pour toutes les algèbres IFFT et conduisent à ce résultat général.

**Proposition 2.3.2** (Boniver, Mathonet). *Pour toute algèbre IFFT  $\mathfrak{g}$ , on peut choisir une base  $(e_r, a_s, e, \varepsilon^r)$  où  $e_r \in \mathfrak{g}_{-1}$ ,  $a_s \in \mathfrak{h}_0$ ,  $\varepsilon^r \in \mathfrak{g}_1$  et où  $e$  est l'élément défini à la proposition 1.4.13, telle que la base Killing duale soit de la forme  $(\varepsilon^r, a'_s, \frac{1}{2d}e, e_r)$  où  $a'_s$  est dans  $\mathfrak{h}_0$  et  $d = \dim \mathfrak{g}_{-1}$ . On a alors la relation*

$$\sum_{r=1}^{\dim \mathfrak{g}_{-1}} [e_r, \varepsilon^r] = -\frac{1}{2}e.$$

Dans la suite, on utilisera uniquement une telle base, adaptée à la graduation de  $\mathfrak{g}$ , pour calculer les opérateurs de Casimir.

Pour écrire les opérateurs de Casimir, nous aurons besoin d'explicitier la formule (1.13). A cette fin, la proposition suivante facilite la tâche :

**Proposition 2.3.3.** *Pour tout  $h \in \mathfrak{g}_0$ , la différentielle  $\frac{\partial X^h}{\partial x}$  du champ  $X^h$  est donnée par  $-ad(h)|_{\mathfrak{g}_{-1}}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de voir qu'on a par définition de  $X^h$  (voir formule 1.18) :

$$X_x^h = -[h, x] = -ad(h)|_{\mathfrak{g}_{-1}}(x) \quad \forall x \in \mathfrak{g}_{-1},$$

et le résultat suit puisque  $ad(h)|_{\mathfrak{g}_{-1}}$  est une application linéaire de  $\mathfrak{g}_{-1}$  dans  $\mathfrak{g}_{-1}$ .  $\square$

Comme on le voit dans la preuve précédente, l'action adjointe de  $\mathfrak{g}_0$  sur  $\mathfrak{g}_{-1}$  permet d'appliquer  $\mathfrak{g}_0$  sur une sous-algèbre de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$ . Dès lors, toute représentation de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$  induit une représentation de  $\mathfrak{g}_0$  et cela permet de poser la définition suivante.

**Définition 2.3.4.** On note  $\rho^k$  la représentation de  $\mathfrak{g}_0$  sur  $S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$  induite par la représentation  $\rho_{\delta^*}$  via l'action adjointe de  $\mathfrak{g}_0$  sur  $\mathfrak{g}_{-1}$ . On a donc

$$\rho^k(h) = \rho_{\delta^*}(ad(h)|_{\mathfrak{g}_{-1}}), \quad \forall h \in \mathfrak{g}_0$$

où  $\rho_{\delta^*}$  est défini par la formule (1.12)<sup>2</sup>

A titre d'exemple, on peut calculer  $\rho^k(e)$ , où  $e$  est défini par la proposition 1.4.13 : on a

$$\rho^k(e) = \rho_{\delta^*}(ad(e)|_{\mathfrak{g}_{-1}}) \quad \text{et} \quad ad(e)|_{\mathfrak{g}_{-1}} = -\text{Id}_{\mathfrak{g}_{-1}}$$

donc  $\rho^k(e) = -\rho_{\delta^*}(\text{Id}_{\mathfrak{g}_{-1}}) = (-k + n\delta)\text{Id}$ .

On peut maintenant donner une formule simple pour la dérivée de Lie dans la direction de  $X^h$  pour  $h$  dans  $\mathfrak{g}_0$  : on a

$$(L_{X^h}^\delta P)_x = (X^h.P)_x + \rho^k(h)P_x, \quad (2.4)$$

pour tous  $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ ,  $h \in \mathfrak{g}_0$  et  $P \in \mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1}) \cong C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}))$ .

On utilise cette dernière formule et on écrit l'opérateur de Casimir à l'aide de la base définie par la proposition 2.3.2. On utilise le fait que cet opérateur commute avec  $L_{X^h}^\delta$  pour tout  $h$  dans  $\mathfrak{g}_{-1}$  et qu'il est donc à coefficients constants et on obtient finalement :

**Proposition 2.3.5** (Boniver, Mathonet). *La restriction de l'opérateur de Casimir  $C$  à  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1}) \cong C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}))$  est donnée par*

$$C = \frac{1}{2d}(d\delta - k)(d\delta - d - k)\text{Id} + \sum_{s=1}^{\dim \mathfrak{h}_0} \rho^k(a_s)\rho^k(a'_s), \quad (2.5)$$

où  $d$  est la dimension de  $\mathfrak{g}_{-1}$ .

Ce résultat est important. Il montre par exemple que  $C$  est un opérateur différentiel d'ordre zéro à coefficients constants. Il montre aussi que pour calculer définitivement  $C$ , il faut étudier la représentation  $(S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), \rho^k)$  de l'algèbre  $\mathfrak{h}_0$ , puisque  $a_s$  et  $a'_s$  décrivent des bases de  $\mathfrak{h}_0$ . En fait, on peut montrer que l'application  $\sum_{s=1}^{\dim \mathfrak{h}_0} \rho^k(a_s)\rho^k(a'_s)$  est un entrelacement de cette représentation. Il est proche de l'opérateur de Casimir de cette représentation, mais ce n'est pas cet opérateur de Casimir car les bases décrites par les vecteurs  $a_s$  et  $a'_s$  ne sont pas Killing-duales par rapport à la forme de Killing de  $\mathfrak{h}_0$  mais bien par rapport à la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . Enfin, terminons cette section par un premier résultat quant à la représentation  $(S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), \rho^k)$ .

<sup>2</sup>La formule (1.12) n'est donnée que pour une action de  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  sur des tenseurs sur  $\mathbb{R}^n$ . Il est évident qu'elle se généralise en une action de  $\mathfrak{gl}(V)$  sur des tenseurs construits sur  $V$  pour tout espace vectoriel  $V$  de dimension finie.

**Proposition 2.3.6.** *La représentation  $(S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), \rho^k)$  de  $\mathfrak{h}_0$  est isomorphe à  $(S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_0(\mathfrak{g}_{-1}), \rho^k)$ , ou encore à  $(S^k \mathfrak{g}_{-1}, \rho^k)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer qu'on a  $\text{tr}(ad(h)|_{\mathfrak{g}_{-1}}) = 0$  pour tout  $h$  dans  $\mathfrak{h}_0$ . Puisque  $\mathfrak{h}_0$  est semi-simple, on a  $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0] = \mathfrak{h}_0$ , donc  $h$  est une somme de crochets  $[h', h'']$  et  $ad([h', h''])|_{\mathfrak{g}_{-1}} = [ad(h')|_{\mathfrak{g}_{-1}}, ad(h'')|_{\mathfrak{g}_{-1}}]$ , ce qui suffit.  $\square$

Dans la suite, nous allons considérer la décomposition en sous-espaces stables irréductibles

$$S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}) = \bigoplus_{\eta} I_{k,\eta} \quad (2.6)$$

On notera également  $E_{k,\eta} = C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, I_{k,\eta})$  de sorte que

$$\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1}) \cong C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})) = \bigoplus_{\eta} E_{k,\eta}$$

et nous montrerons que, comme dans [5], la restriction de  $C$  à  $E_{k,\eta}$  est un multiple de l'identité.

## 2.4 L'opérateur $\mathcal{C}$ et les valeurs résonantes

Il existe un lien fort entre les opérateurs  $C$  et  $\mathcal{C}$ . Ce lien a été montré dans [5] pour toutes les algèbres IFFT. Il est basé sur l'application  $\gamma$ , qui sert à mesurer la différence entre les représentations  $(\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), L)$  et  $(\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), \mathcal{L})$  de l'algèbre IFFT  $\mathfrak{g}$ .

**Définition 2.4.1.** *L'opérateur  $\gamma$  est défini par*

$$\gamma : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})) : h \mapsto \gamma(h) = \mathcal{L}_{X^h} - L_{X^h}$$

Citons quelques propriétés importantes de cette application.

**Proposition 2.4.2** (Boniver, Mathonet). *L'application  $\gamma$  a les propriétés suivantes :*

1. *C'est un 1-cocycle de Chevalley-Eilenberg et s'annule sur  $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$  ;*
2. *Si  $h \in \mathfrak{g}_1$  et  $k \in \mathbb{N}$ , la restriction de  $\gamma(h)$  à  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$  est à valeurs dans  $\mathcal{S}_\delta^{k-1}(\mathfrak{g}_{-1})$  ;*
3. *Si  $h \in \mathfrak{g}_1$ ,  $\gamma(h)$  est un opérateur d'ordre 0 à coefficients constants ;*
4. *Pour tous  $h, h' \in \mathfrak{g}_1$ , on a  $[\gamma(h), \gamma(h')] = 0$ .*

D'après la troisième propriété, si  $\mathfrak{h}$  est dans  $\mathfrak{g}_1$ , la restriction de l'opérateur  $\gamma(h)$  aux symboles constants est à valeurs dans les symboles constants, et l'opérateur est complètement déterminé par cette restriction. On peut même en donner une expression complètement algébrique.

**Proposition 2.4.3** (Mathonet, Radoux). *Pour tous  $h \in \mathfrak{g}_1$ ,  $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}_{-1}$  et  $A \in \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$ , on a :*

$$\begin{aligned} \gamma(h)(X_1 \vee \dots \vee X_k \otimes A) &= -\lambda \sum_{i=1}^k \text{tr}(ad_{\mathfrak{g}_{-1}}([X_i, h])) X_1 \vee \dots (i) \dots \vee X_k \otimes A \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \sum_{j < i} X_1 \vee \dots (i, j) \dots \vee X_k \vee [X_j, [X_i, h]] \otimes A \end{aligned}$$

où  $ad_{\mathfrak{g}_{-1}}([X_i, h])$  est vu comme un élément de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$ .

**Remarque :** Dans la suite, on pourra considérer  $\gamma$  comme une application linéaire de  $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$  dans  $\mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$ , cette identification se fait via la relation

$$\gamma(h \otimes P) = \gamma(h)(P).$$

La restriction de  $\gamma$  aux fonctions constantes donne alors par la même formule un opérateur que nous notons également  $\gamma$ , de  $\mathfrak{g}_1 \otimes S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$  dans  $S^{k-1} \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

On peut maintenant définir un dernier ingrédient pour obtenir le lien entre les opérateurs de Casimir. On utilise encore les notations de la proposition 2.3.2.

**Définition 2.4.4.** *On définit l'opérateur*

$$N : \mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}) \rightarrow \mathcal{S}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}) : P \rightarrow 2 \sum_{r=1}^{\dim \mathfrak{g}_{-1}} \gamma(\varepsilon^r) L_{X^{\varepsilon^r}} P.$$

D'après les propriétés de  $\gamma$ , il est clair que  $N$  diminue le degré de ses arguments. Plus précisément, on a  $N : \mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1}) \rightarrow \mathcal{S}_\delta^{k-1}(\mathfrak{g}_{-1})$  pour tout  $k$  (donc  $N$  est localement nilpotent). Cette propriété sera importante pour déterminer les vecteurs propres de  $\mathcal{C}$ , puisque  $N$  intervient dans son calcul :

**Proposition 2.4.5.** *Les opérateurs de Casimir  $C$  et  $\mathcal{C}$  sont liés par la formule*

$$\mathcal{C} = C + N.$$

Cette proposition est facile à obtenir en écrivant la définition de  $\mathcal{C}$  dans une base obtenue à la proposition 2.3.2 et en remplaçant  $\mathcal{L}_{X^h}$  par  $L_{X^h}^\delta$  pour tout  $h$  dans  $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$  et par  $L_{X^h}^\delta + \gamma(h)$  pour tout  $h$  dans  $\mathfrak{g}_1$ . Elle a de plus été détaillée dans [5, 12] par exemple.

Supposons maintenant que  $C$  soit diagonalisable et étudions la deuxième condition de la proposition 2.2.7. Elle s'écrit

$$\mathcal{C}(\hat{P}) = \alpha\hat{P}$$

où  $\hat{P} = P_k + P_{k-1} + \dots + P_0$  avec  $P_k = P$ , vecteur propre de valeur propre  $\alpha$  de  $C$  dans  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$ . Elle est équivalente, d'après la proposition ci-dessus à

$$(C + N)(P_k + P_{k-1} + \dots + P_0) = \alpha(P_k + P_{k-1} + \dots + P_0).$$

Puisque  $N$  diminue le degré de ses arguments, cette condition est équivalente à un système d'équations triangulaire, obtenu en projetant l'équation précédente sur  $\mathcal{S}_\delta^i(\mathfrak{g}_{-1})$  pour  $i$  inférieur à  $k$  :

$$\begin{cases} CP_k = \alpha P_k \\ CP_{k-1} + NP_k = \alpha P_{k-1} \\ \dots \\ CP_i + NP_{i+1} = \alpha P_i, i \in \{0, \dots, k-1\} \end{cases}$$

Puisque  $P_k = P$  est vecteur propre de  $C$  de valeur propre  $\alpha$ , la première condition est toujours vérifiée et on obtient donc le système d'équations

$$\begin{cases} P_k = P \\ (C - \alpha\text{Id})P_i = -NP_{i+1} \quad \forall i \in \{0, \dots, k-1\} \end{cases} \quad (2.7)$$

Rappelons que nous souhaitons trouver des conditions pour que cette équation admette une solution unique. Cela est trivialement le cas si l'opérateur  $(C - \alpha\text{Id})$  est non singulier sur  $\mathcal{S}_\delta^i$  pour  $i \leq k$ . C'est cette remarque qui conduit à la définition des valeurs résonantes, ou des valeurs résonantes à l'ordre  $k_0$ .

**Définition 2.4.6.** *Une valeur  $\delta$  est résonante (à l'ordre  $k_0$ ) s'il existe  $l < l' (\leq k_0)$  tels que les spectres de  $C|_{\mathcal{S}_\delta^l}$  et  $C|_{\mathcal{S}_\delta^{l'}}$  ont une valeur en commun.*

On a donc obtenu le résultat fondamental suivant :

**Théorème 2.4.7.** *Si  $C$  est diagonalisable et si  $\delta$  n'est pas résonante (à l'ordre  $k_0$ ), alors il existe une quantification  $\mathfrak{g}$ -équivariante (à l'ordre  $k_0$ ). Cette quantification est unique.*

La recherche des valeurs résonantes consiste donc à trouver toutes les valeurs  $\delta$  pour lesquelles des valeurs propres de l'opérateur  $C$  sur des symboles de degré différents peuvent coïncider. Elle est donc uniquement basée sur l'analyse du spectre de  $C$  et ne nécessite pas par exemple le calcul explicite de  $\gamma$  ou de  $\mathcal{C}$ .



## 2.5 Espaces arborescents et valeurs critiques

Il a été montré dans [16] que la condition d'être non résonante est une condition trop forte sur  $\delta$  pour assurer l'existence, et même l'unicité, de la quantification  $\mathfrak{so}(p+1, q+1)$ -équivariante. Ce phénomène est général : il existe des valeurs résonantes de  $\delta$  pour lesquelles la quantification  $\mathfrak{g}$ -équivariante existe. C'est le cas notamment pour la valeur  $\delta = 0$ , qui est particulièrement importante pour le lien avec la mécanique quantique. Ce constat mène à la définition de valeurs résonantes critiques et de valeurs résonantes non critiques, pour lesquelles la quantification continue d'exister. Grosso modo, la définition de ces valeurs repose sur une analyse plus fine de l'équation (2.7) : pour obtenir une solution, il n'est pas nécessaire que l'opérateur  $(C - \alpha \text{Id})$  soit non singulier sur tout l'espace des symboles de degré inférieur à  $k$ , il suffit qu'il soit inversible sur un sous-espace vectoriel contenant le membre de droite de chaque équation. On peut alors garantir l'existence et l'unicité de  $\hat{P}$  sur ce sous-espace vectoriel et obtenir l'existence de la quantification. Cependant, le symbole  $\hat{P}$  n'est plus unique et il est plus difficile d'obtenir l'unicité de la quantification. Dans cette section, nous présentons la définition du sous-espace vectoriel sur lequel on doit étudier la non dégénérescence de  $(C - \alpha \text{Id})$  et nous montrons l'existence de la quantification si  $\delta$  n'est pas critique. Nous suivons la démarche de [5]. Cependant, nous avons obtenu des preuves plus élégantes de certains résultats de [5] qui ne recourent plus aux expressions en coordonnées mais sont basées sur les propriétés algébriques des opérateurs intervenant dans la construction.

Commençons par quelques résultats concernant les sous-espaces stables pour les dérivées de Lie  $L_X^\delta$  et  $\mathcal{L}_X$ , et sur l'opérateur  $\gamma$ .

**Définition 2.5.1.** *L'espace  $\mathfrak{g}_1 \otimes (S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}))$  peut être muni d'une structure de représentation de  $\mathfrak{g}_0$  définie par*

$$\alpha(g)(h \otimes P) = \text{ad}(g)h \otimes P + h \otimes \rho^k(g)P$$

pour tous  $g \in \mathfrak{g}_0$ ,  $h \in \mathfrak{g}_1$  et  $P \in S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$ .

La représentation ainsi définie n'est rien d'autre que le produit tensoriel des représentations  $\mathfrak{g}_1$  et  $S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$  de  $\mathfrak{g}_0$ . Cette représentation permet d'écrire une propriété fondamentale de  $\gamma$ , ou plutôt de sa restriction aux symboles constants.

**Proposition 2.5.2.** *L'opérateur*

$$\gamma : \mathfrak{g}_1 \otimes (S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})) \rightarrow S^{k-1} \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$$

est  $\mathfrak{g}_0$ -équivariant.

*Démonstration.* Il suffit de considérer la relation

$$[\mathcal{L}_{X^g}, \mathcal{L}_{X^h}] = \mathcal{L}_{X^{[g,h]}},$$

avec  $g$  dans  $\mathfrak{g}_0$  et  $h$  dans  $\mathfrak{g}_1$ . On utilise alors le fait que  $\gamma$  s'annule sur  $\mathfrak{g}_0$  pour obtenir la relation

$$[L_{X^g}^\delta, L_{X^h}^\delta + \gamma(h)] = L_{X^{[g,h]}}^\delta + \gamma([g, h]),$$

sur  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$ . En évaluant cette identité sur un symbole constant  $P \in S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$ , on obtient

$$\rho^k(g)\rho^k(h)P + \rho^{k-1}(g)\gamma(h)P - (\rho^k(h) + \gamma(h))\rho^k(g)P = \rho^k([g, h])P + \gamma([g, h])P.$$

Enfin, puisque  $\rho^k$  est une représentation, on obtient

$$\rho^{k-1}(g)\gamma(h \otimes P) = \gamma(h \otimes \rho^k(g)P) + \gamma([g, h] \otimes P) = \gamma(\alpha(g)(h \otimes P)),$$

comme annoncé.  $\square$

**Corollaire 2.5.3.** *Si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable de la représentation  $(S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), \rho^k)$  de  $\mathfrak{g}_0$ , alors le sous-espace*

$$\gamma(\mathfrak{g}_1)F = \langle \{\gamma(h)f : h \in \mathfrak{g}_1, f \in F\} \rangle$$

*est un sous-espace stable de  $(S^{k-1} \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), \rho^{k-1})$ .*

*Démonstration.* Le sous-espace  $\gamma(\mathfrak{g}_1)F$  s'écrit aussi  $\gamma(\mathfrak{g}_1 \otimes F)$ .  $\square$

Enfin, nous avons

**Proposition 2.5.4.** *Si  $F$  est un sous-espace stable de la représentation  $(S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), \rho^k)$  de  $\mathfrak{g}_0$ , alors  $C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, F)$  est un sous-espace stable de la représentation  $(\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1}), L^\delta)$  de  $\mathfrak{g}$ .*

*Démonstration.* Soit  $P$  dans  $C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, F)$ . On considère  $h$  dans  $\mathfrak{g}$  et on montre que  $(L_{X^h}^\delta P)(x)$  est dans  $F$  pour tout  $x$  dans  $\mathfrak{g}_{-1}$ . Si  $h$  est dans  $\mathfrak{g}_{-1}$ , alors on a

$$(L_{X^h}^\delta P)(x) = (X^h.P)(x),$$

qui est dans  $F$  car c'est la dérivée d'une fonction à valeurs dans  $F$ , prise au point  $x$ . Si  $h$  est dans  $\mathfrak{g}_0$ , nous avons déjà vu que

$$(L_{X^h}^\delta P)(x) = (X^h.P)(x) + \rho^k(h)P(x).$$

Nous avons vu que le premier terme est dans  $F$ . Le deuxième est également dans  $F$  car  $F$  est stable pour la représentation  $\rho^k$ . Il reste à traiter le cas où  $h$  est dans  $\mathfrak{g}_1$ . Dans ce cas, nous utilisons la formule (1.13) :

$$(L_{X^h}^\delta P)(x) = (X^h.P)(x) - \rho_{\delta*} \left( \frac{\partial X^h}{\partial x}(x) \right) P(x),$$

où  $\frac{\partial X^h}{\partial x}(x)$  désigne la matrice Jacobienne de  $X^h$ . Cette matrice représente en fait la différentielle de  $X^h$  au point  $x$ . Si nous montrons que cette différentielle est en fait un élément  $\text{ad}(h'_x) \in \text{ad}(\mathfrak{g}_0) \subset \text{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$ , alors le dernier terme sera  $\rho^k(h'_x)P(x)$  et sera donc dans  $F$  puisque  $F$  est stable par  $\rho^k$ .

On calcule alors cette différentielle

$$X_{*x}^h(u) = \frac{\partial}{\partial t} X_{(x+tu)}^h|_{t=0},$$

qui d'après la formule (1.18) vaut

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{2} [[h, x+tu], x+tu] \right)|_{t=0} = -\frac{1}{2} ([[h, u], x] + [[h, x], u]).$$

Puisque  $\mathfrak{g}_{-1}$  est commutatif, en utilisant l'identité de Jacobi, on obtient finalement

$$X_{*x}^h(u) = -\text{ad}([h, x])u.$$

On a donc obtenu l'élément  $h'_x$  annoncé et le résultat suit.  $\square$

On peut maintenant définir comme dans [16, 5] les *sous-espace arborescents* :

**Définition 2.5.5.** *Si  $F$  est un sous-espace stable de  $(S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), \rho^k)$ , alors on pose*

$$\mathcal{T}_\gamma(F) = \bigoplus_{l=0}^k \mathcal{T}_\gamma^l(F)$$

où

$$\mathcal{T}_\gamma^0(F) = F$$

et

$$\mathcal{T}_\gamma^{l+1}(F) = \gamma(\mathfrak{g}_1)(\mathcal{T}_\gamma^l(F)),$$

pour tout  $l$  dans  $\{0, \dots, k\}$ .

Le sous-espace  $\mathcal{T}_\gamma(F)$  est le sous-espace arborescent associé à  $F$ . La propriété principale de ce sous-espace est la suivante.

**Proposition 2.5.6.** *Si  $F$  est stable dans  $(S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}), \rho^k)$ , l'espace*

$$C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, \mathcal{T}_\gamma(F)) = \bigoplus_{l=0}^k C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, \mathcal{T}_\gamma^l(F))$$

*est stable pour  $L_{X^h}^\delta$  et  $\mathcal{L}_{X^h}$ , pour  $h \in \mathfrak{g}$ .*

*Démonstration.* Pour la stabilité pour  $L_{X^h}^\delta$ , on utilise la proposition 2.5.4, puisque  $\mathcal{T}_\gamma^l(F)$  est stable pour la représentation  $\rho^{k-l}$  de  $\mathfrak{g}_0$ , par le corollaire 2.5.3. Pour la stabilité pour  $\mathcal{L}_{X^h}$ , on note que

$$\mathcal{L}_{X^h} = L_{X^h}^\delta + \gamma(h),$$

et que  $\gamma(h)$  applique  $C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, \mathcal{T}_\gamma^l(F))$  dans  $C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, \mathcal{T}_\gamma^{l+1}(F))$ , par définition de  $\mathcal{T}_\gamma^l(F)$ .  $\square$

En se rappelant la décomposition de l'espace des symboles (2.6) qui conduit à

$$S_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1}) \cong C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, S^k \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})) = \bigoplus_\eta C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, I_{k,\eta})$$

et en supposant que sur  $E_{k,\eta} = C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, I_{k,\eta})$ , l'opérateur de Casimir  $C$  vaut  $\alpha_{k,\eta} \text{Id}$ , on arrive à la définition des valeurs critiques :

**Définition 2.5.7.** *Une valeur résonante de  $\delta$  est critique s'il existe  $k, \eta$  tels que la valeur propre  $\alpha_{k,\eta}$  appartient au spectre de la restriction de  $C$  à*

$$\bigoplus_{l \geq 1} \mathcal{T}_\gamma^l(E_{k,\eta}) = C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, \mathcal{T}_\gamma^l(I_{k,\eta})), \quad l \in \mathbb{N}.$$

**Remarques :** Cette définition contient un abus de langage. En effet, la construction de  $\mathcal{T}_\gamma^l(E_{k,\eta})$  dépend explicitement de  $\gamma$ , donc de  $\lambda$ . Le fait d'être dans une situation critique n'est donc plus lié uniquement à  $\delta$ , mais bien au couple  $(\lambda, \mu)$  tel que  $\mu - \lambda = \delta$ . On pourrait alors plus précisément adopter la définition précédente pour le couple  $(\lambda, \mu)$  et déclarer  $\delta$  critique s'il existe au moins un couple  $(\lambda, \mu)$  critique avec  $\delta = \mu - \lambda$ .

On peut aussi définir les valeurs critiques à l'ordre  $k_0$  en demandant dans la définition que  $k$  soit inférieur ou égal à  $k_0$ . Cela permet d'analyser l'existence de quantifications à l'ordre  $k_0$ .

On peut alors formuler le résultat principal :

**Théorème 2.5.8.** *Si la restriction de l'opérateur  $C$  à chaque sous-espace  $E_{k,\eta} = C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, I_{k,\eta})$  ( $k \leq k_0$ ) est un multiple de l'identité et si  $\delta$  n'est pas critique (à l'ordre  $k_0$ ), il existe une quantification équivariante (à l'ordre  $k_0$ ).*

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle de la proposition 2.2.7 et du théorème 2.4.7 : si  $P$  est dans  $E_{k,\eta}$ , la condition sur  $\delta$  permet de lui associer un unique vecteur propre  $\hat{P}$  de  $\mathcal{C}$  satisfaisant les mêmes conditions que dans la proposition 2.2.7, mais appartenant à  $\mathcal{T}_\gamma(E_{k,\eta})$ . Pour terminer la preuve de la même manière que dans la proposition 2.2.7, il faut montrer que dans ces conditions, les symboles  $\mathcal{L}_X Q(P)$  et  $Q(L_X^\delta P)$  sont dans le sous-espace  $\mathcal{T}_\gamma(E_{k,\eta})$  pour tout  $X$  champ de vecteurs de  $\mathfrak{g}$ . Pour le premier, on utilise le fait que  $Q(P)$  est dans cet espace et que ce dernier est stable pour  $\mathcal{L}_X$ , vu la proposition 2.5.6. Pour le second, on note que  $L_X^\delta P$  est dans  $E_{k,\eta}$  vu la proposition 2.5.4, ce qui suffit vu la définition de  $Q$ .  $\square$

**Remarque :** Dans le cas où  $\delta$  est résonant mais non critique, il existe au moins une quantification équivariante. Cependant, on ne peut plus garantir l'unicité comme dans le cas non résonant. Il sera nécessaire d'étudier ce problème séparément.

# Chapitre 3

## L'algèbre $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ et la géométrie Grassmannienne

Dans ce chapitre, nous donnons la description algébrique de l'algèbre  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  et de la graduation qui en fait une algèbre IFFT. Cette description matricielle a été donnée par Kobayashi et Nagano dans [23]. Elle généralise celle de l'algèbre projective étudiée par P. Lecomte et V. Ovsienko. Nous identifions les sous-algèbres  $\mathfrak{g}_{-1}$ ,  $\mathfrak{g}_0$  et  $\mathfrak{g}_1$  ainsi que la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}_0$  sur  $\mathfrak{g}_{-1}$ . Nous utilisons la formule (1.18) pour obtenir une algèbre de champs de vecteurs maximale dans l'ensemble des sous-algèbres propres de  $\text{Vect}_*(\mathfrak{g}_{-1})$ .

Ensuite, nous montrons que cette algèbre peut être décrite simplement de manière plus géométrique. Pour ce faire, nous considérons la variété grassmannienne  $G_q^{p+q}$  et nous identifions  $\mathfrak{g}_{-1}$  à un domaine de carte naturel de cette variété. L'action naturelle du groupe  $PGL(p+q, \mathbb{R})$  sur la grassmannienne, que nous détaillons, induit dès lors une action locale sur le domaine de carte  $\mathfrak{g}_{-1}$ . Nous montrons enfin que l'algèbre de champs de vecteurs fondamentaux sur  $\mathfrak{g}_{-1}$  définis par cette action locale coïncide avec celle décrite de manière algébrique. Ces constructions généralisent l'interprétation géométrique de l'algèbre  $\mathfrak{sl}_{n+1}$  dans le cadre de la géométrie projective.

### 3.1 Description algébrique de $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$

Commençons par la description de la graduation de  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ . Elle est donnée dans [23, p.892]

**Proposition 3.1.1.** *Soit  $e$  l'élément de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  défini par*

$$e = \begin{pmatrix} a\text{Id}_p & 0 \\ 0 & b\text{Id}_q \end{pmatrix}$$

où

$$a = -\frac{q}{p+q} \quad \text{et} \quad b = \frac{p}{p+q}.$$

L'application  $\text{ad}(e)$  est diagonalisable et ses espaces propres, de valeur propres  $-1, 0$  et  $1$  sont respectivement

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : A_3 \in M(p, q; \mathbb{R}) \right\}$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} : A_1 \in \text{gl}(p, \mathbb{R}), \quad A_2 \in \text{gl}(q, \mathbb{R}), \quad \text{tr}A_1 + \text{tr}A_2 = 0 \right\}$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_4 & 0 \end{pmatrix} : A_4 \in M(q, p; \mathbb{R}) \right\}.$$

On a dès lors  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  et  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}^1$  pour  $i, j \in \{-1, 0, 1\}$ .

*Démonstration.* Il suffit de vérifier directement que les espaces proposés sont bien des espaces propres. On a visiblement alors  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  et la dernière assertion découle du fait que  $\text{ad}(e)$  est une dérivation.  $\square$

Nous pouvons maintenant calculer le centre et la partie semi-simple de  $\mathfrak{g}_0$ .

**Proposition 3.1.2.** *La sous-algèbre  $\mathfrak{g}_0$  est réductive : on a*

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{R}e$$

où  $e$  est l'élément central de  $\mathfrak{g}_0$  défini par la proposition 3.1.1 et où

$$\mathfrak{h}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} : A_1 \in \text{sl}(p, \mathbb{R}), A_2 \in \text{sl}(q, \mathbb{R}) \right\}.$$

*Démonstration.* Nous pouvons écrire pour  $A_1 \in \text{gl}(p, \mathbb{R})$  et  $A_2 \in \text{gl}(q, \mathbb{R})$  :

$$A_1 = \left( A_1 - \frac{\text{tr}A_1}{p} \text{Id}_p \right) + \frac{\text{tr}A_1}{p} \text{Id}_p$$

$$A_2 = \left( A_2 - \frac{\text{tr}A_2}{q} \text{Id}_q \right) + \frac{\text{tr}A_2}{q} \text{Id}_q$$

Un élément de  $\mathfrak{g}_0$  s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 - \frac{\text{tr}A_1}{p} \text{Id}_p & 0 \\ 0 & A_2 - \frac{\text{tr}A_2}{q} \text{Id}_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\text{tr}A_1}{p} \text{Id}_p & 0 \\ 0 & \frac{\text{tr}A_2}{q} \text{Id}_q \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>On pose  $\mathfrak{g}_i = \{0\}$  si  $i \notin \{-1, 0, 1\}$ .

Puisque  $\text{tr}A_2 = -\text{tr}A_1$ , il suffit de mettre en évidence  $\text{tr}A_2$  et  $\frac{p+q}{pq}$  dans la deuxième matrice et on obtient

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 - \frac{\text{tr}A_1}{p}\text{Id}_p & 0 \\ 0 & A_2 - \frac{\text{tr}A_2}{q}\text{Id}_q \end{pmatrix} + \frac{(p+q)\text{tr}A_2}{pq}e,$$

ce qui suffit.  $\square$

Identifions maintenant les éléments présents dans la décomposition de  $\mathfrak{g}$

**Proposition 3.1.3.** *L'algèbre  $\mathfrak{h}_0$  est isomorphe à  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  par*

$$i_0 : \mathfrak{h}_0 \rightarrow \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R}) : \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \mapsto A_1 + A_2. \quad (3.1)$$

Les algèbres  $\mathfrak{g}_{-1}$  et  $\mathfrak{g}_1$  sont respectivement identifiées en tant qu'espaces vectoriels à  $\mathbb{R}_q^p$  et  $\mathbb{R}_p^q = \mathbb{R}_q^{p*}$  par les isomorphismes

$$i_{-1} : \mathfrak{g}_{-1} \rightarrow \mathbb{R}_q^p : \begin{pmatrix} 0 & A_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto A_3, \quad (3.2)$$

et

$$i_1 : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathbb{R}_p^q : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_4 & 0 \end{pmatrix} \mapsto A_4. \quad (3.3)$$

*Démonstration.* Nous montrons simplement que  $i_0$  est un isomorphisme. Nous considérons

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

deux éléments de  $\mathfrak{h}_0$ .

D'une part, on a

$$[A, B] = \begin{pmatrix} [A_1, B_1] & 0 \\ 0 & [A_2, B_2] \end{pmatrix}$$

et donc

$$i_0([A, B]) = [A_1, B_1] + [A_2, B_2]$$

D'autre part, on a

$$[i_0(A), i_0(B)] = [A_1, B_1] + [A_1, B_2] + [A_2, B_1] + [A_2, B_2]$$

Puisque  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  sont des idéaux de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$ , les deux termes du milieu sont nuls et on a

$$i_0([A, B]) = [i_0(A), i_0(B)]$$

$\square$



La représentation adjointe de  $\mathfrak{g}_0$  sur  $\mathfrak{g}_{-1}$  joue un rôle fondamental dans la construction de la quantification. Il est utile de la lire à travers les isomorphismes donnés dans la proposition précédente.

**Proposition 3.1.4.** *La représentation adjointe de  $\mathfrak{h}_0$  sur  $\mathfrak{g}_{-1}$  définit une représentation  $\rho'$  de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}_q^p$  donnée par*

$$\rho'(A_1, A_2)A_3 = A_1A_3 - A_3A_2 \quad (3.4)$$

pour tous  $(A_1, A_2) \in \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  et  $A_3 \in \mathbb{R}_q^p$ . Si on utilise les bases canoniques de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^q$  pour identifier  $\mathbb{R}_q^p$  et  $\mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^{q*}$ , cette représentation est exactement le produit tensoriel extérieur des représentations naturelles  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^{q*}$  de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  respectivement.

*Démonstration.* La lecture de la représentation en question se fait via le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}_0 \times \mathfrak{g}_{-1} & \longrightarrow & \mathfrak{g}_{-1} \\ \downarrow i_0 \quad \downarrow i_{-1} & & \downarrow i_{-1} \\ \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_q^p & \longrightarrow & \mathbb{R}_q^p \end{array}$$

On en déduit la représentation de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}_q^p$  :

$$\begin{aligned} \rho'(A_1, A_2)A_3 &= i_{-1}([i_0^{-1}(A_1, A_2), i_{-1}^{-1}(A_3)]) \\ &= i_{-1}([\left(\begin{array}{cc} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 0 & A_3 \\ 0 & 0 \end{array}\right)]) \\ &= i_{-1}\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & A_1A_3 - A_3A_2 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\right) \\ &= A_1A_3 - A_3A_2. \end{aligned}$$

Maintenant, si  $u$  est dans  $\mathbb{R}^p$  et  $\xi$  dans  $\mathbb{R}^{q*}$ ,  $u \otimes \xi$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$ , donc un élément de  $\mathbb{R}_q^p$  (on utilise les bases canoniques de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^q$  pour identifier applications linéaires et matrices). L'action de  $A_1 \in \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  sur  $u$  est donnée par  $\alpha(A_1)u = A_1u$ , tandis que l'action de  $A_2 \in \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  sur  $\xi$  est donnée par  $\beta(A_2)\xi(v) = -\xi(A_2v)$  pour tout  $v$  dans  $\mathbb{R}^q$ . La représentation produit tensoriel extérieur est alors

$$\alpha \otimes \beta(A_1, A_2)(u \otimes \xi) = \alpha(A_1)u \otimes \xi + u \otimes \beta(A_2)\xi = A_1 \circ u \otimes \xi - u \otimes \xi \circ A_2,$$

ce qui montre que  $\rho'$  coïncide avec  $\alpha \otimes \beta$ . □

Montrons maintenant comment l'algèbre  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  se réalise en une algèbre de champs de vecteurs.

**Proposition 3.1.5.** *L'algèbre  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  se réalise en une algèbre de champs de vecteurs polynomiaux sur  $\mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}_q^p$  par*

$$\begin{cases} X_h^{h'} = -h', & \forall h' \in \mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}_q^p \\ X_h^{h'} = -h'_1 h + h h'_2, & \forall h' = \begin{pmatrix} h'_1 & 0 \\ 0 & h'_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_0 \\ X_h^{h'} = h h' h, & \forall h' \in \mathfrak{g}_1 \cong \mathbb{R}_p^q. \end{cases}$$

*Démonstration.* Nous allons nous servir des isomorphismes de la proposition 3.1.3 et des formules (1.18). Ces dernières montrent que la première formule est triviale. Pour tout  $h \in \mathbb{R}_q^p$  nous avons

$$(i_{-1})^{-1}(h) = \begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{-1}.$$

Si nous considérons  $h' = \begin{pmatrix} h'_1 & 0 \\ 0 & h'_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_0$ , nous avons

$$X_h^{h'} = i_{-1}(-[h', (i_{-1})^{-1}(h)]).$$

Après calcul, nous trouvons le champ

$$X_h^{h'} = -h'_1 h + h h'_2$$

De même, si  $h' \in \mathbb{R}_p^q$ , nous avons

$$i_1^{-1}(h') = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h' & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_1.$$

et

$$X_h^{h'} = -\frac{1}{2} i_{-1}([i_1^{-1}(h'), (i_{-1})^{-1}(h)], (i_{-1})^{-1}(h)),$$

ce qui donne après développement des crochets

$$X_h^{h'} = h h' h,$$

et le résultat est prouvé. □

## 3.2 Description géométrique

Dans les premiers travaux sur la quantification équivariante, P. Lecomte et V. Ovsienko ont considéré l'algèbre projective. Cette algèbre est isomorphe à  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ . C'est une sous-algèbre de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$ . Elle

porte la graduation  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  définie plus haut. Cette réalisation particulière de  $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$  comme une algèbre de champs de vecteurs est déterminée par l'action du groupe  $PGL(n+1, \mathbb{R})$  sur l'espace projectif  $P^n(\mathbb{R})$ , qui induit une action locale de  $PGL(n+1, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^n$ , vu comme un ouvert de l'espace projectif. Dans ce qui suit, nous allons généraliser cette construction géométrique permettant de définir une algèbre de champs de vecteurs isomorphe à  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ , sur l'espace  $\mathbb{R}_q^p$ . Nous montrerons que cette généralisation est naturelle : il suffit de considérer la variété grassmannienne  $G_q^{p+q}$  au lieu de l'espace projectif  $G_1^{n+1}$ .

### 3.2.1 Les grassmanniennes $G_q^{p+q}(\mathbb{K})$

Nous rappelons la définition générale des variétés grassmanniennes ainsi que l'action naturelle du groupe  $PGL(p+q, \mathbb{R})$  sur  $G_q^{p+q}(\mathbb{R})$ . Nous calculons ensuite l'action locale de  $PGL(p+q, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}_q^p$  et nous montrons que les champs de vecteurs fondamentaux associés à cette action coïncident avec les champs (1.18) obtenus par la construction algébrique due à Kobayashi et Nagano (voir proposition 3.1.5).

**Définition 3.2.1.** Soit  $E = \mathbb{K}^n$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On appelle  $k$ -plan de  $E$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $k$ . On appelle grassmannienne  $G_k^n(\mathbb{K})$  l'ensemble des  $k$ -plans de  $E$ .

**Remarque :** D'après la définition, les espaces projectifs sont des cas particuliers de grassmanniennes, en effet, on a  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = G_1^{n+1}(\mathbb{K})$ . Rappelons la structure de variété des grassmanniennes. Cela est rendu simple en considérant les variétés de Stiefel.

**Définition 3.2.2.** Un  $k$ -repère de  $\mathbb{K}^n$  est un  $k$ -uplet ordonné  $\{U_1, \dots, U_k\}$  de vecteurs linéairement indépendants dans  $\mathbb{K}^n$ . L'ensemble des  $k$ -repères de  $\mathbb{K}^n$  est appelé variété de Stiefel et est noté  $V'_{n,k}(\mathbb{K})$ .

**Remarque :** On identifie  $V'_{n,k}(\mathbb{K})$  à un ouvert de  $\mathbb{K}_k^n$  en associant au  $k$ -repère  $\{U_1, \dots, U_k\}$  la matrice  $A = (U_1 \dots U_k)$ .

Pour tout ensemble  $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$  (où  $i_1, \dots, i_k$  sont rangés par ordre croissant), et  $A$  dans  $\mathbb{K}_k^n$ , on note  $A_I$  la matrice obtenue en sélectionnant dans  $A$  les lignes  $i_1, \dots, i_k$ . On définit également les ouverts de  $\mathbb{K}_k^n$  :

$$\mathcal{O}_I = \{A \in \mathbb{K}_k^n : \det(A_I) \neq 0\}, \quad (3.5)$$

et on a

$$V'_{n,k}(\mathbb{K}) = \cup_{I \subset \{1, \dots, n\}} \mathcal{O}_I.$$

Le lien entre la variété de Stiefel et la grassmannienne peut être formulé comme suit

**Proposition 3.2.3.** *Le groupe  $GL(k, \mathbb{K})$  agit naturellement à droite sur  $\mathbb{K}_k^n$ , donc sur  $V'_{n,k}$ . L'application naturelle*

$$p : V'_{n,k} \rightarrow G_k^n : \{U_1, \dots, U_k\} \mapsto \langle U_1, \dots, U_k \rangle$$

*passse au quotient en une bijection  $\tilde{p} : V'_{n,k}/GL(k, \mathbb{K}) \rightarrow G_k^n$ .*

*Démonstration.* On voit directement que  $p$  est surjective puisque tout  $k$  plan est l'image d'une quelconque de ses bases. Cependant,  $p$  n'est pas injective puisque tous les  $k$ -repères qui définissent le même  $k$ -plan ont la même image. Cependant, deux  $k$ -repères  $\{U_1, \dots, U_k\}$  et  $\{U'_1, \dots, U'_k\}$  définissent le même  $k$  plan si et seulement si il existe des nombres  $s_{ij}$  ( $i, j \leq k$ ) tels que

$$U'_j = \sum_{i=1}^k s_{ij} U_i \quad \forall j \leq k.$$

Ceci s'écrit encore, si  $S$  est la matrice dont  $s_{ij}$  sont les éléments :

$$(U'_1 \dots U'_k) = (U_1 \dots U_k) \cdot S,$$

et donc  $p$  passe au quotient de manière bijective.  $\square$

Ce résultat permet de faire de  $G_k^n$  un espace topologique homéomorphe au quotient  $V'_{n,k}/GL(k, \mathbb{K})$  via l'application  $\tilde{p}$ . Puisque le passage au quotient  $V'_{n,k} \rightarrow V'_{n,k}/GL(k, \mathbb{K})$  est ouvert, on voit que les ensembles  $p(\mathcal{O}_I)$  forment un recouvrement ouvert de  $G_k^n$ . Chacun de ces ouverts est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{K}^{k(n-k)}$  et on montre que cela fournit un atlas de classe  $C^\infty$  de  $G_k^n(\mathbb{R})$  :

**Proposition 3.2.4.** *La grassmannienne  $G_k^n(\mathbb{R})$  a une structure de variété de classe  $C^\infty$ .*

*Démonstration.* Pour toute partie  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$ , notons  $\bar{I}$  le complémentaire de  $I$  dans  $\{1, \dots, n\}$ . Définissons l'application

$$\varphi_I : p(\mathcal{O}_I) \rightarrow \mathbb{R}_k^{n-k} : p(A) \mapsto (AA_I^{-1})_{\bar{I}}.$$

Cette application est bien définie, puisque si  $p(A) = p(A')$ , on a  $A' = AS$  pour  $S$  dans  $GL(k, \mathbb{R})$ , donc  $A'_I = A_I S$  et donc on a  $A'_I A_I^{-1} = AS(S^{-1}A_I^{-1}) = AA_I^{-1}$ . De plus pour tout  $A$  dans  $\mathcal{O}_I$ , il existe un unique  $B$  tel que  $p(B) = p(A)$  et tel que  $B_I = \text{Id}_k$ . Cet élément est visiblement égal à  $AA_I^{-1}$ . Il est univoquement déterminé par  $B_{\bar{I}}$ . L'application  $\varphi_I$  est donc surjective. Cela étant, son inverse est facile à déterminer. Si on définit

$$i_I : \mathbb{R}_k^{n-k} \rightarrow \mathcal{O}_I : C \mapsto i_I(C) : \begin{cases} (i_I(C))_I = \text{Id}_k \\ (i_I(C))_{\bar{I}} = C \end{cases},$$

on voit directement que  $p \circ i_I$  est l'inverse de  $\varphi_I$ .

On peut alors calculer le changement de carte  $\varphi_J \circ \varphi_I^{-1}$  sur  $\varphi_I(p(\mathcal{O}_I \cap \mathcal{O}_J))$  : on voit que c'est la composée des applications  $i_I, m_J : \mathcal{O}_J \rightarrow \mathbb{R}_k^{n-k} : A \mapsto AA_J^{-1}$ , et la projection  $p_J : A \mapsto A_J$ .  $\square$

Venons en maintenant aux actions de groupes qui vont générer les champs fondamentaux.

**Proposition 3.2.5.** *La grassmannienne  $G_q^{p+q}(\mathbb{R})$  a une structure de variété homogène. En effet les groupes  $GL(p+q, \mathbb{R})$  et  $PGL(p+q, \mathbb{R})$  agissent transitivement sur  $G_q^{p+q}(\mathbb{R})$  par*

$$j(A, \langle U_1, \dots, U_q \rangle) = \langle AU_1, \dots, AU_q \rangle.^2$$

Le stabilisateur du  $q$ -plan  $V = \langle e_{p+1}, \dots, e_{p+q} \rangle$  est donné par

$$H' = \left\{ A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix} : A_1 \in \mathbb{R}_p^p, A_2 \in \mathbb{R}_q^q, A_4 \in \mathbb{R}_p^q \right\} \subset GL(p+q, \mathbb{R})$$

ou  $H = H'/\mathbb{R}_0\text{Id} \subset PGL(p+q, \mathbb{R})$ .

*Démonstration.* L'action du groupe  $GL(p+q, \mathbb{R})$  sur  $G_q^{p+q}(\mathbb{R})$  est le passage au quotient de son action naturelle par multiplication à gauche sur  $V_{p+q,q}'$ . Or cette action sur les  $q$ -repères est transitive : étant donnés deux  $q$ -repères, il est possible de les compléter pour obtenir deux bases de  $\mathbb{R}^{p+q}$ , et il existe alors une bijection linéaire qui applique une base sur l'autre, donc un  $q$ -repère sur l'autre.

Il est facile de voir que les multiples de l'identité dans  $GL(p+q, \mathbb{R})$  ont une action triviale sur  $G_q^{p+q}(\mathbb{R})$  : les  $q$ -plans  $\langle U_1, \dots, U_q \rangle$  et  $\langle rU_1, \dots, rU_q \rangle$  sont égaux pour tout  $r \neq 0$ . Dès lors l'action  $j$  passe au quotient  $PGL(p+q, \mathbb{R}) = GL(p+q, \mathbb{R})/\mathbb{R}_0\text{Id}$  en une action, elle aussi transitive, définie par  $\tilde{j}([A], V) = j(A, V)$ .

Calculons maintenant le stabilisateur de  $V = \langle e_{p+1}, \dots, e_{p+q} \rangle$ . La matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix}$$

est telle que  $AV = V$  si et seulement si les vecteurs  $Ae_{p+j}$  ont une projection nulle sur  $\langle e_1, \dots, e_p \rangle$  pour  $j \leq q$ . Mais les composantes de  $Ae_{p+j}$  sont données par la  $j$ -ème colonne de la matrice

$$\begin{pmatrix} A_3 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

La condition est donc que  $A_3$  soit nulle.  $\square$

<sup>2</sup>On considère juste l'image d'un  $q$ -plan par une bijection linéaire.

Remarquons que le groupe  $GL(p+q, \mathbb{R})$  n'est pas semi-simple et que son action sur la grassmannienne n'est pas effective. Le sous-groupe  $H'$  s'identifie comme groupe topologique à  $(GL(p, \mathbb{R}) \times GL(q, \mathbb{R})) \times \mathbb{R}_p^q$  dont l'algèbre

$$\left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix} : A_1 \in \mathbb{R}_p^p, A_2 \in \mathbb{R}_q^q, A_4 \in \mathbb{R}_p^q \right\}$$

est visiblement isomorphe à  $(\mathfrak{gl}(p, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(q, \mathbb{R})) \times \mathbb{R}_p^q$ , et donc pas à  $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  (voir la section 3.1). Cependant, c'est le cas pour le groupe  $H$  :

**Proposition 3.2.6.** *L'algèbre du sous-groupe  $H$  est isomorphe à  $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ .*

*Démonstration.* Puisque  $H$  est le quotient  $H'/\mathbb{R}_0\text{Id}$ , son algèbre est

$$\left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix} : A_1 \in \mathbb{R}_p^p, A_2 \in \mathbb{R}_q^q, A_4 \in \mathbb{R}_p^q \right\} / \mathbb{R}\text{Id}.$$

On prouve l'isomorphisme avec  $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  en remarquant que dans toute classe d'équivalence pour ce quotient, il y a exactement une et une seule matrice de trace nulle. Précisément, l'application de l'algèbre de  $H$  dans  $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  définie par

$$\psi : \left[ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix} \right] \mapsto \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr}A_1 + \text{tr}A_2}{p+q} \text{Id}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie.  $\square$

**Corollaire 3.2.7.** *La grassmannienne  $G_q^{p+q}$  s'identifie au quotient  $PGL(p+q, \mathbb{R})/H$ .*

### 3.2.2 Champs de vecteurs fondamentaux sur $\mathbb{R}_q^p$

Nous avons décrit dans la section précédente deux façons de voir l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_q^p \cong \mathfrak{g}_{-1}$  comme un sous-ensemble de la grassmannienne  $G_q^{p+q}$  : il s'agit de la carte  $\varphi_{\{p+1, \dots, p+q\}}^{-1}$ , et de l'application  $i = \tilde{j}_V \circ \pi \circ \exp \circ i_{-1}^{-1}$ , où  $i_{-1}$  est défini à la proposition 3.1.3,  $\exp$  est l'exponentielle du groupe  $PGL(p+q, \mathbb{R})$ ,  $\pi$  est la projection de  $PGL(p+q, \mathbb{R})$  sur  $PGL(p+q, \mathbb{R})/H$  et  $\tilde{j}_V$  la bijection de ce dernier espace sur  $G_q^{p+q}$  qui à  $[A]$  associe  $j([A], V)$  (voir proposition 3.2.5).

En fait, ces identifications coïncident : on a en effet d'une part (vu la proposition 3.2.4)

$$\varphi_{\{p+1, \dots, p+q\}}^{-1}(h) = p\left( \begin{pmatrix} h \\ \text{Id}_q \end{pmatrix} \right)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} i(h) &= \tilde{j}_V \circ \pi \circ \exp \begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{j}_V \circ \pi \begin{pmatrix} \text{Id}_p & h \\ 0 & \text{Id}_q \end{pmatrix} \\ &= j \left( \begin{pmatrix} \text{Id}_p & h \\ 0 & \text{Id}_q \end{pmatrix}, V \right) = p \left( \begin{pmatrix} h \\ \text{Id}_q \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

De même, les actions locales sur  $\mathbb{R}_q^p$  induites par l'action à gauche de  $PGL(p+q, \mathbb{R})$  sur  $PGL(p+q, \mathbb{R})/H$  ou sur  $G_q^{p+q}$  coïncident. Elles font l'objet du résultat suivant.

**Proposition 3.2.8.** *L'action locale de  $PGL(p+q, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}_q^p$  induite par l'identification de cet espace à un ouvert de  $G_q^{p+q}$  est donnée par*

$$\begin{aligned} \gamma : \Omega \subset PGL(p+q, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_q^p &\rightarrow \mathbb{R}_q^p \\ \left[ \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix} \right], h &\mapsto (A_1 h + A_3)(A_4 h + A_2)^{-1}, \end{aligned}$$

où  $\Omega$  est l'ensemble déterminé par la condition  $\det(A_4 h + A_2) \neq 0$ .

*Démonstration.* Considérons l'action de  $PGL(p+q, \mathbb{R})$  définie par le passage aux cartes. Elle est donc définie, pour

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix}$$

par

$$\begin{aligned} \gamma([A], h) &= \varphi_{\{p+1, \dots, p+q\}} j(A, \varphi_{\{p+1, \dots, p+q\}}^{-1}(h)) \\ &= \varphi_{\{p+1, \dots, p+q\}} j \left( A, p \left( \begin{pmatrix} h \\ \text{Id}_q \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= \varphi_{\{p+1, \dots, p+q\}} p \left( \begin{pmatrix} A_1 h + A_3 \\ A_4 h + A_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= (A_1 h + A_3)(A_4 h + A_2)^{-1}, \end{aligned}$$

et le résultat est prouvé.

A titre de vérification, montrons le calcul pour l'action à gauche de  $PGL(p+q, \mathbb{R})$  sur le quotient  $PGL(p+q, \mathbb{R})/H$ . Elle est définie pour le même  $A$  que plus haut par

$$\gamma([A], h) = \left[ \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix} \right] \left[ \begin{pmatrix} \text{Id}_p & h \\ 0 & \text{Id}_q \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} A_1 & A_1 h + A_3 \\ A_4 & A_4 h + A_2 \end{pmatrix} \right].$$

Or, dans  $PGL(p+q, \mathbb{R})/H$ , on a

$$\left[ \begin{pmatrix} A_1 & A_1 h + A_3 \\ A_4 & A_4 h + A_2 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} \text{Id}_p & h' \\ 0 & \text{Id}_q \end{pmatrix} \right]$$

si et seulement si il existe  $U \in Gl(p, \mathbb{R})$ ,  $V \in Gl(q, \mathbb{R})$  et  $W \in \mathbb{R}_p^q$  tels que

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_1h + A_3 \\ A_4 & A_4h + A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id}_p & h' \\ 0 & \text{Id}_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ W & V \end{pmatrix}.$$

Cette condition est équivalente à

$$\begin{cases} A_1 & = U + h'W \\ A_1h + A_3 & = h'V \\ A_4 & = W \\ A_4h + A_2 & = V, \end{cases}.$$

Cela qui donne en définitive

$$h' = (A_1h + A_3)(A_4h + A_2)^{-1},$$

ce qui fournit le résultat annoncé.  $\square$

Nous pouvons maintenant en venir au résultat principal de cette section :

**Théorème 3.2.9.** *Les champs fondamentaux sur  $\mathbb{R}_q^p$  associés à l'action locale  $\gamma$  sont exactement les champs définis par la formule (1.18) et calculés à la proposition 3.1.5.*

*Démonstration.* Rappelons que les champs fondamentaux associés à l'action locale  $\gamma$  sont donnés par l'application

$$X : \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Vect}(\mathbb{R}_q^p) : h' \mapsto X_h^{h'} = D_t \gamma(\exp -th', h)|_{t=0},$$

pour tout  $h' \in \mathbb{R}_q^p$ . On détaille alors les trois cas  $h' \in \mathfrak{g}_{-1}$ ,  $h' \in \mathfrak{g}_0$ , et  $h' \in \mathfrak{g}_1$ .

Pour  $h' \in \mathbb{R}_q^p \cong \mathfrak{g}_{-1}$ , on a

$$\exp -th' = \left[ \begin{pmatrix} \text{Id}_p & -th' \\ 0 & \text{Id}_q \end{pmatrix} \right]$$

et donc par la proposition 3.2.8, on a

$$\gamma(\exp -th', h) = h - th'$$

et donc  $X_h^{h'} = -h'$ .

Pour  $h' \in \mathfrak{g}_0$ , on a

$$h' = \left[ \begin{pmatrix} h'_1 & 0 \\ 0 & h'_2 \end{pmatrix} \right] \in \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{R})/\mathbb{R}\text{Id},$$



donc

$$\exp -th' = \left[ \begin{pmatrix} \exp -th'_1 & 0 \\ 0 & \exp -th'_2 \end{pmatrix} \right] \in GL(p+q, \mathbb{R})/\mathbb{R}_0\text{Id}.$$

Ainsi, toujours par la proposition 3.2.8, on a

$$\gamma(\exp -th', h) = (\exp -th'_1)h \exp th'_2.$$

Dès lors, on arrive visiblement à

$$X_h^{h'} = -h'_1 h + h h'_2.$$

Soit finalement un élément  $h' \in \mathbb{R}_p^q \cong \mathfrak{g}_1$ . On a ici

$$\exp -th' = \left[ \begin{pmatrix} \text{Id}_p & 0 \\ -th' & \text{Id}_q \end{pmatrix} \right] \in PGL(p+q, \mathbb{R}).$$

On peut donc calculer l'action comme plus haut et on trouve

$$\gamma(\exp -th', h) = h(\text{Id}_q - th'h)^{-1}.$$

En tenant compte de la formule

$$D_t(A(t)^{-1}) = -A(t)^{-1}(D_t A(t))A(t)^{-1},$$

valable pour toute courbe  $A(t)$  dans  $GL(p+q, \mathbb{R})$ , on obtient

$$X_h^{h'} = h h' h,$$

et le résultat est prouvé. □

# Chapitre 4

## Existence et unicité I : valeurs résonantes

Nous suivons dans ce chapitre la méthode décrite dans le chapitre 2 pour construire la quantification équivariante. Nous montrons en fait que l'opérateur de Casimir de l'algèbre  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  agissant sur l'espace des symboles est diagonalisable. Nous obtenons ce résultat principal en comparant les formes de Killing de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  et de la sous-algèbre  $\mathfrak{h}_0 \cong \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  et ensuite en utilisant la décomposition de  $S^k \mathbb{R}_q^p$  en irréductibles pour la représentation de  $\mathfrak{h}_0$  décrite par la définition 2.3.4 et la proposition 3.1.4. Ce résultat principal nous permet de définir les valeurs résonantes pour la quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante et d'obtenir l'existence et l'unicité de cette quantification quand  $\delta$  n'est pas une valeur résonante. Nous utilisons dans cette section les notations de la section 2.3.

### 4.1 Formes de Killing et opérateur de Casimir

Nous commençons par rappeler l'expression générale de la forme de Killing de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ . Il est bien connu que la forme de Killing de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  est donnée par

$$\beta_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})}(A, B) = 2n \operatorname{tr}(AB) \quad \forall A, B \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}).$$

Puisque  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  est une forme réelle de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , sa forme de Killing est donnée par la même formule :

$$\beta_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})}(A, B) = 2n \operatorname{tr}(AB) \quad \forall A, B \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}).$$

Nous pouvons maintenant comparer la restriction de la forme de Killing de  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  à  $\mathfrak{h}_0$  et la forme de Killing de  $\mathfrak{h}_0$ . Puisque  $\mathfrak{h}_0$  est somme directe de

deux idéaux simples, nous comparons les restrictions de ces formes bilinéaires à chacun de ces idéaux. Afin d'alléger les notations, nous écrirons  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  pour l'idéal de  $\mathfrak{h}_0$  isomorphe à  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  par l'isomorphisme  $i_0$ . On a alors la comparaison suivante.

**Proposition 4.1.1.** *Nous vérifions que*

$$\beta_{\mathfrak{h}_0}|_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})} = \frac{p}{p+q} \beta_{\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})}|_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})}$$

et

$$\beta_{\mathfrak{h}_0}|_{\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})} = \frac{q}{p+q} \beta_{\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})}|_{\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})}$$

*Démonstration.* Pour calculer la forme de Killing de  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  restreinte à  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$ , nous appliquons la formule générale donnée plus haut. Pour calculer celle de  $\mathfrak{h}_0$  restreinte à  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$ , nous utilisons le fait que la restriction de la forme de Killing à un idéal est la forme de Killing de l'idéal, et donc dans ce cas la forme de Killing de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$ . On a donc

$$\beta_{\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})}|_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})} \left( \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2(p+q) \operatorname{tr} A_1 A_2$$

et

$$\beta_{\mathfrak{h}_0}|_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})} \left( \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \beta_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})}(A_1, A_2) = 2p \operatorname{tr} A_1 A_2.$$

On a donc visiblement

$$\beta_{\mathfrak{h}_0}|_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})} = \frac{p}{p+q} \beta_{\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})}|_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})}$$

On vérifie de la même façon la deuxième formule.  $\square$

On peut maintenant préciser le calcul de l'opérateur de Casimir introduit à la section 2.3. On utilise la formule (2.5) et on est ramené à calculer l'opérateur

$$C_0 = \sum_{s=1}^{\dim \mathfrak{h}_0} \rho^k(a_s) \rho^k(a'_s),$$

où  $(a_s)$  et  $(a'_s)$  sont des bases de  $\mathfrak{h}_0$  duales pour la forme de Killing de  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ .

Lisons tout d'abord la représentation  $\rho^k$  de  $\mathfrak{h}_0$  sur  $S^k \mathfrak{g}_{-1}$  (voir définition 2.3.4) à travers les isomorphismes  $\mathfrak{h}_0 \cong \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{g}_{-1} \cong \mathbb{R}_q^p$  :

**Proposition 4.1.2.** *La représentation  $(S^k \mathbb{R}_q^p, \rho^k)$  de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  est donnée par l'extension naturelle de  $\rho'$  (voir la proposition 3.1.4), c'est-à-dire*

$$\rho^k(A_p, A_q)(B_1 \vee \cdots \vee B_k) = \sum_{i=1}^k B_1 \vee \cdots \vee \underbrace{(A_p B_i - B_i A_q)}_i \vee \cdots \vee B_k \quad (4.1)$$

pour tous  $A_p \in \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$ ,  $A_q \in \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  et  $B_1, \dots, B_k \in \mathbb{R}_q^p$ .

*Démonstration.* D'après la proposition 3.1.4, les représentations  $(\mathfrak{g}_{-1}, \text{ad})$  et  $(\mathbb{R}_q^p, \rho')$  se correspondent via les isomorphismes cités plus haut. Il en est donc de même pour leurs extensions naturelles à  $S^k \mathfrak{g}_{-1}$  et  $S^k \mathbb{R}_q^p$  définies par la formule (1.12), en  $\delta = 0$  vu la proposition 2.3.6.  $\square$

**Remarque :** La formule (4.1) définit également une représentation de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  sur  $\otimes^k \mathbb{R}_q^p$ , si on remplace les produits symétriques par des produits tensoriels. Cette représentation, qui est également l'extension naturelle de  $\rho'$  à l'espace considéré, sera également notée  $\rho^k$ . Passons maintenant au calcul de  $C_0$  :

**Proposition 4.1.3.** *Soit  $E \otimes F$  un sous-espace stable irréductible de  $S^k \mathfrak{g}_{-1}$  ou  $S^k \mathbb{R}_q^p$  pour la représentation  $\rho^k$  de  $\mathfrak{h}_0$ , où  $E$  est une représentation irréductible de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  et  $F$  une représentation irréductible de  $\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$ . La restriction de  $C_0$  à  $C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, E \otimes F)$  ou à  $E \otimes F$  est donnée par*

$$\frac{p}{p+q} C_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})} \otimes \text{Id}_F + \frac{q}{p+q} \text{Id}_E \otimes C_{\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})}$$

où  $C_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})}$  est l'opérateur de Casimir de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  agissant sur  $E$ .

*Démonstration.* L'opérateur  $C_0$  est un opérateur différentiel d'ordre 0, même si on le voit comme un opérateur de  $C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, E \otimes F)$  dans lui-même, il se restreint à un opérateur de  $E \otimes F$  dans lui-même<sup>1</sup>. D'autre part, on sait que  $C_0$  est indépendant du choix de la base  $\{a_1, \dots, a_{d_0}\}$  dans  $\mathfrak{h}_0$  ( $d_0 = \dim \mathfrak{h}_0$ ). Puisque  $\mathfrak{h}_0$  est somme des idéaux  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$ , il est naturel de choisir une base adaptée à cette décomposition : notons  $r = p^2 - 1$ , choisissons une base  $\{a_1, \dots, a_r\}$  dans  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  et notons  $\{a_1^*, \dots, a_r^*\}$  la base  $\beta_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})}$ -duale. De même, notons  $\{a_{r+1}, \dots, a_{d_0}\}$  une base de  $\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  et  $\{a_{r+1}^*, \dots, a_{d_0}^*\}$  la base  $\beta_{\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})}$ -duale. Définissons ensuite, pour  $i \in \{1, \dots, d_0\}$  :

$$a'_i = \begin{cases} \frac{p}{p+q} a_i^* & \text{si } i \leq r \\ \frac{q}{p+q} a_i^* & \text{si } i > r \end{cases}$$

<sup>1</sup>Une autre façon de le voir est de constater que  $C_0$  est défini par sa restriction sur les fonctions constantes

Les bases  $\{a_1, \dots, a_{d_0}\}$  et  $\{a'_1, \dots, a'_{d_0}\}$  sont alors des bases  $\beta_{\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})}$ -duales dans  $\mathfrak{h}_0$ . En effet, on a bien

$$\beta_{\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})}(a_i, a'_j) = 0 \quad \forall i \neq j \leq d_0,$$

car si  $i$  et  $j$  sont tous les deux inférieurs à  $r$  ou strictement supérieurs à  $r$ , cela découle directement de la définition des  $a_j^*$  et de la proposition 4.1.1, tandis que si l'un est strictement supérieur et l'autre inférieur à  $r$ , cela découle du fait que les idéaux  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  sont orthogonaux pour la forme  $\beta_{\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})}$ . Enfin, si  $i \leq r$ , on a

$$\beta_{\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})}(a_i, a'_i) = \frac{p}{p+q} \beta_{\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})}(a_i, a_i^*) = \beta_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})}(a_i, a_i^*) = 1,$$

et on conclut de même si  $i > r$ .

On peut alors calculer  $C_0$  en utilisant cette base particulière :

$$C_0 = \sum_{s=1}^{\dim \mathfrak{h}_0} \rho^k(a_s) \rho^k(a'_s) = \frac{p}{p+q} \sum_{s=1}^r \rho^k(a_s) \rho^k(a_s^*) + \frac{q}{p+q} \sum_{s=r+1}^{d_0} \rho^k(a_s) \rho^k(a_s^*).$$

Pour conclure, il suffit de noter que pour  $e \in E$  et  $f \in F$ , on a

$$\rho(a)(e \otimes f) = (\rho_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})}(a)e) \otimes f, \quad \forall a \in \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$$

et

$$\rho(a)(e \otimes f) = e \otimes \rho_{\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})}(a)f \quad \forall a \in \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} C_0(e \otimes f) &= \\ \frac{p}{p+q} \sum_{s=1}^r \rho_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})}(a_s) \rho_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})}(a_s^*) e \otimes f &+ \frac{q}{p+q} e \otimes \sum_{s=1}^r \rho_{\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})}(a_s) \rho_{\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})}(a_s^*) f \\ &= \frac{p}{p+q} C_{\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})}(e) \otimes f + \frac{q}{p+q} e \otimes C_{\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})}(f), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

Pour calculer l'opérateur de Casimir de  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  sur l'espace des symboles, il nous reste à calculer les opérateurs de Casimir de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  sur des représentations  $E$  et  $F$  tels que  $E \otimes F$  apparaisse dans la décomposition en irréductibles de la représentation  $(S^k \mathfrak{g}_{-1}, \rho^k)$  comme représentation de  $\mathfrak{h}_0$ . Cette décomposition est connue et donnée par le théorème suivant.

**Proposition 4.1.4** ([19, p.256]). *La représentation  $(S^k \mathbb{R}_q^p, \rho^k)$  de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  se décompose en*

$$S^k \mathfrak{g}_{-1} \cong \bigoplus_{\eta} F_{\eta} \otimes F_{\eta}^*$$

où  $F_{\eta}$  est la représentation irréductible de plus haut poids  $\eta$  et où  $\eta$  parcourt tous les poids entiers dominants de longueur  $k$  et de profondeur inférieure ou égale à  $\min(p, q)$ .

**Remarque :** Dans cette proposition, on considère  $F_{\eta}$  comme une représentation de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  et on peut donc en avoir un modèle explicite en calculant le module de Weyl dans  $\otimes^k \mathbb{C}^p$ , tandis que  $F_{\eta}^*$  est la représentation duale de  $F_{\eta}$  vue comme représentation de  $\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$ .

Nous ne donnons pas la démonstration de cette proposition. Cependant, nous montrons dans les quelques lignes qui suivent comment on peut l'interpréter de manière plus concrète.

Commençons par identifier la représentation  $(S^k \mathbb{R}_q^p, \rho^k)$  comme un sous-espace des applications linéaires de  $\otimes^k \mathbb{R}^q$  dans  $\otimes^k \mathbb{R}^p$ . Pour ce faire nous utilisons l'identification de  $(\otimes^k \mathbb{R}_q^p, \rho^k)$  (voir la remarque suivant la proposition 4.1.2) à l'ensemble des applications de  $\otimes^k \mathbb{R}^q$  dans  $\otimes^k \mathbb{R}^p$  :

**Proposition 4.1.5.** *La représentation  $(\otimes^k \mathbb{R}_q^p, \rho^k)$  de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  est isomorphe à  $((\otimes^k \mathbb{R}^p) \otimes (\otimes^k \mathbb{R}^q)^*, \rho^{\otimes}) \cong (\mathcal{L}(\otimes^k \mathbb{R}^q, \otimes^k \mathbb{R}^p), \rho^{\otimes})$  où  $\rho^{\otimes}$  est le produit tensoriel extérieur des représentations naturelles de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$ . L'isomorphisme  $\psi$  est défini par*

$$\psi(B_1 \otimes \cdots \otimes B_k)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = B_1 x_1 \otimes \cdots \otimes B_k x_k,$$

pour tous  $B_1, \dots, B_k \in \mathbb{R}_q^p \cong \mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^{q*}$  et tous  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^q$ .

*Démonstration.* On vérifie que l'application  $\psi$  de l'énoncé est bien définie puisqu'elle est visiblement linéaire sur chacun des facteurs. On peut également l'exprimer dans la base de  $\otimes^k (\mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^{q*})$  associée à la base de  $\mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^{q*}$   $\{(e_i \otimes \epsilon^j) : i \leq p, j \leq q\}$  : on a

$$\psi((e_{i_1} \otimes \epsilon^{j_1}) \otimes \cdots \otimes (e_{i_k} \otimes \epsilon^{j_k})) = (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) \otimes (\epsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{j_k}),$$

puisque par définition, ces deux éléments de  $\mathcal{L}(\otimes^k \mathbb{R}^q, \otimes^k \mathbb{R}^p)$  appliquent l'élément  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$  de  $\otimes^k \mathbb{R}^q$  sur  $x_1^{j_1} \cdots x_k^{j_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ . Cela permet de voir que  $\psi$  est une bijection qu'on peut donner en général : si

$$t = \sum t_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} (e_{i_1} \otimes \epsilon^{j_1}) \otimes \cdots \otimes (e_{i_k} \otimes \epsilon^{j_k}),$$

alors

$$\psi(t) = \sum t_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} (e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) \otimes (\epsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{j_k}).$$

L'application  $\psi$  est également un isomorphisme de représentations . En effet, on a pour  $A_p \in \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  et  $A_q \in \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} & \psi(\rho^k(A_p, A_q)(B_1 \otimes \cdots \otimes B_k))(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k B_1 x_1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{(A_p B_i x_i - B_i A_q x_i)}_i \otimes \cdots \otimes B_k x_k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & (\rho^{\otimes}(A_p, A_q)\psi(B_1 \otimes \cdots \otimes B_k))(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \\ &= \rho_{\text{nat}}(A_p)(B_1 x_1 \otimes \cdots \otimes B_k x_k) - \psi(B_1 \otimes \cdots \otimes B_k) \circ \rho_{\text{nat}}(A_q)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \\ &= \sum_{i=1}^k B_1 x_1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{A_p B_i x_i}_i \otimes \cdots \otimes B_k x_k - \sum_{i=1}^k B_1 x_1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{B_i A_q x_i}_i \otimes \cdots \otimes B_k x_k, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.  $\square$

Déterminons maintenant le sous-espace  $\psi(S^k \mathbb{R}_q^p) = \psi(S^k \mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^{q*})$  :

**Proposition 4.1.6.** *Le sous-espace  $S^k \mathbb{R}_q^p$  de  $\otimes^k \mathbb{R}_q^p$  s'identifie par  $\psi$  à l'espace des applications linéaires de  $\otimes^k \mathbb{R}^q$  dans  $\otimes^k \mathbb{R}^p$  qui commutent avec l'action des permutations sur ces deux espaces.*

*Démonstration.* La proposition résulte directement de la remarque suivante : si  $l = \psi(B_1 \otimes \cdots \otimes B_k)$ , alors on a pour toute permutation  $\mu$

$$\begin{aligned} \gamma(\mu) \circ l \circ \gamma(\mu^{-1})(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) &= \gamma(\mu) \circ l(x_{\mu(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\mu(k)}) \\ &= \gamma(\mu)(B_1 x_{\mu(1)} \otimes \cdots \otimes B_k x_{\mu(k)}) \\ &= B_{\mu^{-1}(1)} x_1 \otimes \cdots \otimes B_{\mu^{-1}(k)} x_k \\ &= \psi(\gamma(\mu)(B_1 \otimes \cdots \otimes B_k))(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k), \end{aligned}$$

pour tous  $x_1, \dots, x_k$  dans  $\mathbb{R}^q$ .  $\square$

La décomposition en irréductibles de  $(\otimes^k \mathbb{R}_q^p, \rho^k)$  est facile à obtenir, avec les notations de la proposition 1.5.9 :

**Proposition 4.1.7.** *La représentation  $(\otimes^k \mathbb{R}_q^p, \rho^k)$  de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$  se décompose en*

$$\bigoplus_{T, T'} \mathcal{Y}_T(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{Y}_{T'}(\mathbb{R}^q)^*$$

où  $T$  (resp.  $T'$ ) parcourt tous les tableaux standards de taille  $k$  et de profondeur au plus  $p$  (resp.  $q$ ).

*Démonstration.* Puisqu'on a

$$\otimes^k \mathbb{R}^q = \oplus_{T' \text{ standard}} \mathcal{Y}_{T'}(\mathbb{R}^q) \quad \text{et} \quad \otimes^k \mathbb{R}^p = \oplus_{T \text{ standard}} \mathcal{Y}_T(\mathbb{R}^p),$$

où  $T$  et  $T'$  sont comme dans l'énoncé, et puisque  $\otimes^k \mathbb{R}_q^p$  est isomorphe à  $\mathcal{L}(\otimes^k \mathbb{R}^q, \otimes^k \mathbb{R}^p)$ , on a visiblement

$$\otimes^k \mathbb{R}_q^p \cong \oplus_{T, T'} \mathcal{Y}_T(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{Y}_{T'}(\mathbb{R}^q)^*.$$

De plus, les sous-espaces  $\mathcal{Y}_T(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{Y}_{T'}(\mathbb{R}^q)^*$  sont irréductibles car ce sont des produits tensoriels extérieurs de représentations irréductibles.  $\square$

**Remarque :** Si on note  $v_T^p$  le projecteur de  $\otimes^k \mathbb{R}^p$  dans  $\mathcal{Y}_T(\mathbb{R}^p)$ , on a pour tout  $l \in \mathcal{L}(\otimes^k \mathbb{R}^q, \otimes^k \mathbb{R}^p)$ ,

$$l = \sum_{T, T'} v_T^p \circ l \circ v_{T'}^q.$$

Puisque l'opérateur  $v_T^p \circ l \circ v_{T'}^q$  est nul sur  $\mathcal{Y}_{T''}(\mathbb{R}^q)$  pour  $T'' \neq T$ , il s'identifie à un opérateur de  $\mathcal{Y}_{T'}(\mathbb{R}^q)$  dans  $\mathcal{Y}_T(\mathbb{R}^p)$ . Le projecteur de  $\mathcal{L}(\otimes^k \mathbb{R}^q, \otimes^k \mathbb{R}^p)$  sur  $\mathcal{Y}_T(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{Y}_{T'}(\mathbb{R}^q)^*$  est donc donné par  $l \mapsto v_T^p \circ l \circ v_{T'}^q$ . Il reste maintenant à identifier les irréductibles présentes dans la décomposition du sous-espace  $S^k(\mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^{q*})$ .

**Lemme 4.1.8.** *Pour tout  $l \in \psi(S^k(\mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^{q*})) \subset \mathcal{L}(\otimes^k \mathbb{R}^q, \otimes^k \mathbb{R}^p)$ , et tout tableau  $T$ , on a*

$$l \circ v_T^q = v_T^p \circ l,$$

où  $v_T^n$  désigne le projecteur de  $\otimes^k \mathbb{R}^n$  sur  $\mathcal{Y}_T(\mathbb{R}^n)$ , pour  $n \in \{p, q\}$ .

*Démonstration.* Il est bien connu que tout entrelacement de  $\otimes^k \mathbb{R}^n$  dans lui-même est une combinaison linéaire d'action de permutations. C'est donc aussi le cas pour  $v_T^p$  et  $v_T^q$  qui ont la même expression en termes de permutations. On utilise alors la proposition 4.1.6.  $\square$

En conséquence, on a pour tout  $l \in \psi(S^k(\mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^{q*}))$ , la relation

$$v_T^p \circ l \circ v_{T'}^q = 0$$

pour tout  $T \neq T'$ , puisque dans ce cas, on  $v_T^p \circ v_{T'}^p = 0$ .

Dès lors, dans la décomposition de  $S^k(\mathbb{R}_q^p)$  n'apparaissent que des facteurs du type  $v_T^p \circ v_T^p$ . D'autre part, si  $T$  et  $T'$  sont des tableaux associés au même diagramme, il existe un entrelacement  $e$  de  $\mathcal{Y}_T(\mathbb{R}^p)$  dans  $\mathcal{Y}_{T'}(\mathbb{R}^p)$ , qui est encore une combinaison linéaire d'action de permutations. On a donc encore  $l \circ e(u) = e \circ l(u)$  pour tout  $u \in \mathcal{Y}_T(\mathbb{R}^p)$ , donc la restriction de  $l$  à  $\mathcal{Y}_{T'}(\mathbb{R}^p)$  est



complètement déterminée par la restriction de  $l$  à  $\mathcal{Y}_T(\mathbb{R}^p)$ , et il n'y a donc qu'un seul terme par diagramme admissible dans la décomposition de  $S^k \mathbb{R}_q^p$ , ce qui explique le résultat 4.1.4.

Nous pouvons maintenant passer au calcul explicite de l'opérateur  $C_0$  et enfin de l'opérateur de Casimir de  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  sur l'espace des symboles. Commençons par deux résultats préliminaires déjà présents dans [5] et [12].

**Lemme 4.1.9.** *L'opérateur de Casimir de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  sur une représentation irréductible  $F_\eta$  de plus haut poids  $\eta = \sum_{i=1}^n k_i \delta_i$  vaut  $\alpha_\eta \text{Id}$  où*

$$\begin{aligned} \alpha_\eta &= \frac{1}{2n^2} \left[ \sum_{i,j}^n k_i k_j (n\delta_{ij} - 1) - 2 \sum_{i,j}^n k_i j (n\delta_{ij} - 1) \right] \\ &= \frac{1}{2n^2} \left[ n \sum_{i=1}^n k_i (k_i - 2i) - k^2 + n(n+1)k \right]. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On sait (voir par exemple [22, p.122]) que l'opérateur de Casimir vaut  $\alpha_\eta \text{Id}$  où

$$\alpha_\eta = (\eta, \eta + 2\rho_S),$$

où  $(\cdot, \cdot)$  est le produit scalaire défini sur les racines de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  et donné par l'équation (1.19) et où  $\rho_S$  est le vecteur de Weyl, correspondant à la demi-somme des racines positives. D'après la formule (1.21), on a

$$(\eta, \eta + 2\rho_S) = \frac{1}{2n^2} \left[ \sum_{i,j=1}^n k_i k_j (n\delta_{ij} - 1) - 2 \sum_{i,j=1}^n k_i j (n\delta_{ij} - 1) \right],$$

ce qui donne la première formule. On obtient alors la deuxième formule en développant cette expression.  $\square$

**Lemme 4.1.10.** *Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple,  $(V, \rho)$  une représentation de dimension finie de  $\mathfrak{g}$  et  $(V^*, \rho^*)$  la représentation duale. Si l'opérateur de Casimir  $C_{\mathfrak{g}, \rho}$  vaut  $\alpha_V \text{Id}_V$  alors on a  $C_{\mathfrak{g}, \rho^*} = \alpha_V \text{Id}_{V^*}$ .*

*Démonstration.* Soient  $u \in V, \xi \in V^*$ . Soient  $v_i$  une base de  $V$  et  $v'_i$  la base Killing duale. Par définition de l'opérateur de Casimir, nous avons

$$\langle C_{V^*} \xi, u \rangle = \left\langle \sum_i \rho^*(v_i) \rho^*(v'_i) \xi, u \right\rangle.$$

Par définition de  $\rho^*$ , cette dernière expression vaut

$$- \sum_i \langle \rho^*(v'_i) \xi, \rho^*(v_i) u \rangle = \langle \xi, \sum_i \rho^*(v'_i) \rho^*(v_i) u \rangle = \alpha_V \langle \xi, u \rangle.$$

$\square$

Le résultat principal est le suivant :

**Théorème 4.1.11.** *L'opérateur de Casimir  $C$  de  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  sur  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$  est diagonalisable. Sa restriction à  $C^\infty(\mathfrak{g}_{-1}, F_\eta \otimes F_\eta^* \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1}))$  vaut  $\alpha_{(\delta,k,\eta)}\text{Id}$ , où*

$$\alpha_{(\delta,k,\eta)} = \frac{pq}{2}\delta^2 - \left(\frac{pq}{2} + k\right)\delta + \frac{p+q+1}{p+q}k + \frac{1}{p+q} \sum_{i=1}^r \eta_i(\eta_i - 2i) \quad (4.2)$$

*Démonstration.* D'après la proposition 2.3.5, la restriction de l'opérateur de Casimir à  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$  vaut

$$C = \frac{1}{2pq}(pq\delta - k)(pq\delta - pq - k)\text{Id} + \sum_{s=1}^{\dim \mathfrak{h}_0} \rho^k(a_s)\rho^k(a'_s),$$

où le dernier opérateur n'est rien d'autre que  $C_0$ . On utilise alors la proposition 4.1.4 pour avoir la décomposition en irréductibles sous  $\mathfrak{h}_0$  de  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$ , la proposition 4.1.3 pour ramener le calcul de  $C_0$  au calcul de deux opérateurs de Casimir sur des représentations irréductibles, ainsi que les deux lemmes précédents pour obtenir la restriction de  $C$  au sous-espace de l'énoncé :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2pq}(pq\delta - k)(pq\delta - pq - k)\text{Id} \\ &\quad + \frac{1}{2p(p+q)} \left[ p \sum_{i=1}^r \eta_i(\eta_i - 2i) - k^2 + p(p+1)k \right] \\ &\quad + \frac{1}{2q(p+q)} \left[ q \sum_{i=1}^r \eta_i(\eta_i - 2i) - k^2 + q(q+1)k \right], \end{aligned}$$

où  $r \leq \inf\{p, q\}$ . On obtient alors la formule annoncée après regroupement et simplification.  $\square$

## 4.2 Existence et unicité

Nous pouvons maintenant obtenir les valeurs résonantes (à l'ordre  $k_0$ ), en suivant les résultats de la section 2.4

**Proposition 4.2.1.** *Les valeurs résonantes à l'ordre  $k_0$  pour la quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante sont données par*

$$VR(k_0) = \left\{ \frac{p+q+1}{p+q} + \frac{\sum_i^r (\eta_i^2 - \eta_i'^2) - 2 \sum_i^r i(\eta_i - \eta_i')}{(p+q)(k-l)}, l < k (\leq k_0) \right\}$$

où  $\eta$  et  $\eta'$  sont respectivement de taille  $k$  et  $l$  et de profondeur  $r \leq \inf\{p, q\}$ .

*Démonstration.* Les valeurs résonantes sont données par les égalités des valeurs propres correspondant à  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathfrak{g}_{-1})$  et  $\mathcal{S}_\delta^l(\mathfrak{g}_{-1})$  pour  $l < k$ . On doit trouver la solution  $\delta$  de l'équation

$$\alpha_{(\delta,k,\eta)} = \alpha_{(\delta,l,\eta')}$$

pour tous  $\eta$  et  $\eta'$  admissibles. Cela donne une équation du premier degré dont la solution est la valeur annoncée.  $\square$

Le théorème 2.4.7 dans le cas de  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  s'écrit alors :

**Théorème 4.2.2.** *Si  $\delta$  n'est pas dans  $VR(k_0)$ , alors il existe une quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante à l'ordre  $k_0$ . Cette quantification est unique.*

Terminons ce chapitre par la liste des valeurs résonantes à l'ordre  $k_0$  pour des petites valeurs de  $k_0$  :

**Proposition 4.2.3.** *Les valeurs résonantes à l'ordre  $k_0$  sont données par*

1. *Il n'y a pas de valeur résonante à l'ordre 0 ;*
2. *L'unique valeur résonante à l'ordre 1 est égale à  $\delta = 1$ .*
3. *On a*

$$VR(2) = \left\{ \frac{p+q-2}{p+q}, \frac{p+q-1}{p+q}, 1, \frac{p+q+1}{p+q}, \frac{p+q+2}{p+q} \right\}$$

4. *Les valeurs résonantes à l'ordre 3 sont données par*

$$VR(3) = \left\{ \frac{p+q-8}{p+q}, \frac{p+q-4}{p+q}, \frac{p+q-3}{p+q}, \frac{p+q-2}{p+q}, \frac{p+q-1}{p+q}, \right. \\ \left. 1, \frac{p+q+1}{p+q}, \frac{p+q+2}{p+q}, \frac{p+q+3}{p+q}, \frac{p+q+4}{p+q}, \frac{p+q+8}{p+q} \right\}$$

On constate que certaines de ces valeurs peuvent être négatives ou nulles. Ainsi, pour  $p = q = 4$  la première valeur est nulle, et la valeur importante  $\delta = 0$  est donc résonante. Nous allons dans le chapitre suivant montrer que pour cette valeur, la quantification existe quand même.

# Chapitre 5

## Existence et unicité II : valeurs critiques

Dans ce chapitre, nous étudions les valeurs critiques pour la quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante. Rappelons que cette distinction critique/non critique parmi les valeurs résonantes a été introduite par C. Duval, P. Lecomte et V. Ovsienko [16] dans le cadre de la quantification conformément équivariante afin de montrer que la quantification existe pour  $\delta = 0$ . Dans la section 2.5, nous avons résumé la construction générale donnée dans [5] pour les algèbres IFFT en général. Nous appliquons cette méthode au cas de  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  : nous calculons les types d'isomorphie possibles des irréductibles présentes dans la décomposition du sous-espace arborescent (voir définition 2.5.5) associé à toute composante irréductible de  $S^k \mathfrak{g}_{-1}$ . Cela nous permet de localiser les valeurs critiques de  $\delta$  dans un ensemble  $VC$  et de démontrer qu'elles sont toutes strictement positives. Nous démontrons ensuite que si  $\delta$  n'est pas dans cet ensemble  $VC$ , la quantification est encore une fois unique. Nous utilisons dans cette section les notations de la section 2.5.

### 5.1 Existence de la quantification

Pour obtenir les valeurs critiques et l'existence de la quantification en dehors de ces valeurs, nous allons mettre en oeuvre la définition 2.5.7 et appliquer le théorème 2.5.8 dans le cas de l'algèbre qui nous préoccupe. Cependant, comme dans [5], nous souhaitons éviter le calcul explicite du sous-espace arborescent  $\mathcal{T}_\gamma(I_{k,\eta})$  associé à une irréductible  $I_{k,\eta} \cong F_\eta \otimes F_\eta^*$  (voir la décomposition 4.1.4) de  $S^k \mathbb{R}_q^p$ . Nous nous limitons à la connaissance des composantes irréductibles qui peuvent y figurer. Cela amène la définition suivante :

**Définition 5.1.1.** Soit  $K = F_\eta \otimes F_\eta^* \subset S^k \mathbb{R}_q^p$  une composante irréductible sous  $\mathfrak{h}_0 \cong \mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$ . Nous définissons  $\mathcal{T}'^1(K)$  comme étant la somme de toutes les composantes irréductibles  $J_{\eta'}$  de  $S^{k-1} \mathbb{R}_q^p$  isomorphes à une composante irréductible  $\mathfrak{g}_1 \otimes K$ . Nous posons ensuite  $\mathcal{T}'^2(K) = \bigoplus_{\eta'} \mathcal{T}'^1(J_{\eta'})$  et continuant récursivement, nous écrivons

$$\mathcal{T}'(K) = K \oplus \bigoplus_{l \geq 1} \mathcal{T}'^l(K).$$

Nous avons alors immédiatement le résultat suivant :

**Proposition 5.1.2.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et toute composante irréductible  $K$  de  $S^k \mathbb{R}_q^p$ , on a  $\mathcal{T}_\gamma(K) \subset \mathcal{T}'(K)$ .

Définissons un ordre sur les diagrammes de Young :

**Définition 5.1.3.** Soient  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  et  $\eta' = (\eta'_1, \dots, \eta'_n)$  des diagrammes de Young. On dit que  $\eta'$  est plus petit que  $\eta$  et on note  $\eta' \leq \eta$  si on a  $\eta'_i \leq \eta_i$  pour tout  $i \leq n$ . On note aussi  $\eta' < \eta$  si  $\eta' \leq \eta$  et  $\eta' \neq \eta$ .

Nous pouvons alors décrire une condition nécessaire d'appartenance au sous-espace  $\mathcal{T}'_\gamma(K)$ .

**Proposition 5.1.4.** Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $K \cong F_\eta \otimes F_\eta^*$  une composante irréductible de  $S^k \mathbb{R}_q^p$ . Soit encore  $l \leq k$  et  $L \cong F_{\eta'} \otimes F_{\eta'}^*$  une composante irréductible de  $S^l \mathbb{R}_q^p$ . Si  $L$  est dans  $\mathcal{T}'(K)$ , alors on a  $\eta' \leq \eta$ .

*Démonstration.* Nous montrons que le résultat est vrai pour  $L$  dans  $\mathcal{T}'^1(K)$ . Le résultat sera alors directement prouvé par induction, vu la construction de  $\mathcal{T}'(K)$ . Nous présentons donc les diagrammes qui décrivent les sous-représentations qui se trouvent dans la décomposition de  $\mathfrak{g}_1 \otimes K$  et également dans la décomposition en irréductibles de  $S^{k-1} \mathbb{R}_q^p$ . On a  $\mathfrak{g}_1 \cong \mathbb{R}^{p^*} \otimes \mathbb{R}^q$ , donc décomposer  $\mathfrak{g}_1 \otimes K$  revient à décomposer

$$(\mathbb{R}^{p^*} \otimes \mathbb{R}^q) \otimes (F_\eta \otimes F_\eta^*)$$

qui est isomorphe à

$$(\mathbb{R}^{p^*} \otimes F_\eta) \otimes (\mathbb{R}^q \otimes F_\eta^*).$$

Remarquons que cette représentation est bien le produit tensoriel extérieur d'une représentation de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  et d'une représentation de  $\mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$ . Nous cherchons les composantes irréductibles de cette représentation qui apparaissent également dans la décomposition de  $S^{k-1} \mathbb{R}_q^p$ , elles sont donc nécessairement de la forme

$$F_{\eta'} \otimes F_{\eta'}^*,$$

où  $\eta'$  correspond à un poids de la décomposition de  $S^{k-1}\mathbb{R}_q^p$ , c'est-à-dire à un diagramme de Young de taille  $k-1$  (voir la proposition 4.1.4). Il suffit donc de décomposer  $\mathbb{R}^{p^*} \otimes F_\eta$  comme représentation de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$  et de ne garder que les représentations correspondant à des tableaux de taille  $k-1$ .

Nous utilisons les notations de la proposition 1.5.15. Nous posons donc  $V_1 = F_\eta$  et  $V_2 = \mathbb{R}^{p^*}$ ,  $D_1$  le diagramme décrivant  $V_1$  et  $D_2$  le diagramme décrivant  $V_2$ . Rappelons que la représentation  $\mathbb{R}^{p^*}$  a pour poids  $-\delta_p = \delta_1 + \dots + \delta_{p-1}$ . Dès lors, elle est représentée par une colonne de longueur  $p-1$  et est isomorphe à  $\wedge^{p-1}(\mathbb{R}^p)$ . On a donc

$$V_2 = (\underbrace{1, \dots, 1}_{p-1}, 0).$$

Soit enfin  $D$  le diagramme correspondant à  $\eta'$ , composante irréductible de  $F_\eta \otimes \mathbb{R}^{p^*}$  et calculons la multiplicité de  $D$ . Pour que cette multiplicité soit au moins 1, il faut avoir  $D \geq D_1$ , pour qu'il existe un tableau tordu  $D/D_1$ . De plus, on doit avoir un tableau tordu de contenu  $D_2$ , il doit donc contenir les nombres  $1, \dots, p-1$  exactement une fois. Le tableau  $D$  contient donc exactement  $p-1$  cases de plus que le tableau  $D_1$ .

De plus, les lignes du tableau  $D/D_1$  contiennent au plus une seule case. En effet, supposons qu'une ligne contienne deux cases ou plus. On a alors une partie du tableau  $D/D_1$  donnée par  $\begin{bmatrix} i & j \end{bmatrix}$ . Puisque le tableau doit être semi-standard et  $i \neq j$ , on a  $i < j$ . D'autre part, il faut que le tableau soit bien ordonné. Si la case contenant  $j$  porte le numéro  $u$ , celle contenant  $i$  porte le numéro  $u+1$  et on a donc  $\#_u(j) = 1$  et  $\#_u(i) = 0$ , ce qui contredit le caractère bien ordonné du tableau.

En résumé, le diagramme  $D$  est obtenu en ajoutant  $p-1$  cases au diagramme  $D_1$ , mais en ajoutant au plus une case par ligne. Le diagramme ainsi formé contient  $k+p-1$  cases. Il doit en plus être équivalent à un diagramme contenant  $k-1$  cases. Or des diagrammes sont équivalents s'ils diffèrent par une (ou plusieurs) colonne de hauteur  $p$ . On doit donc pouvoir retirer une colonne du tableau  $D$ . Le diagramme final est donc obtenu en retirant une case au diagramme  $D_1$  et est donc plus petit.  $\square$

Nous pouvons maintenant localiser les valeurs critiques pour la quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante :

**Théorème 5.1.5.** *Les valeurs critiques (à l'ordre  $k_0$ ) appartiennent à l'ensemble*

$$VC(k_0) = \left\{ \frac{p+q+1}{p+q} + \frac{\sum_{i=1}^r (\eta_i^2 - \eta_i'^2) - 2 \sum_{i=1}^r i(\eta_i - \eta_i')}{(p+q)(k-l)}, \eta > \eta' \right\}, \quad (5.1)$$

où  $\eta$  et  $\eta'$  sont respectivement de taille  $k$  et  $l$  ( $l < k$ ) et de profondeur  $r \leq \inf\{p, q\}$ .

Elles sont strictement positives. En particulier, il existe une quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante sur les opérateurs qui préservent le poids de leurs arguments.

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle de la proposition 4.2.1. Cependant, on ne doit comparer chaque valeur  $\alpha_{(\delta, k, \eta)}$  correspondant à une représentation irréductible  $K \cong F_\eta \otimes F_\eta^*$  de  $S^k \mathbb{R}_q^p$  qu'aux valeurs propres de  $C$  restreint à  $\mathcal{T}_\gamma(K)$ . On conclut par la proposition 5.1.4 qu'il suffit donc de comparer  $\alpha_{(\delta, k, \eta)}$  et  $\alpha_{(\delta, l, \eta')}$  pour  $\eta' < \eta$ . Cela conduit à l'expression (5.1). Montrons que les valeurs critiques sont strictement supérieures à zéro. En effet, puisqu'on a  $\eta_i \geq \eta'_i$  pour tout  $i \leq r$ , la valeur

$$\frac{p+q+1}{p+q} + \frac{[\sum_{i=1}^r (\eta_i^2 - \eta'_i{}^2) - 2 \sum_{i=1}^r i(\eta_i - \eta'_i)]}{(p+q)(k-l)}$$

est supérieure ou égale à

$$\frac{p+q+1}{p+q} + \frac{1}{(p+q)(k-l)} \sum_{i=1}^r (\eta_i^2 - \eta'_i{}^2) - \frac{2r}{(p+q)(k-l)} \sum_{i=1}^r (\eta_i - \eta'_i)$$

Le second terme est strictement supérieur à 0, et puisque  $\sum_{i=1}^r \eta_i = k$ , et  $\sum_{i=1}^r \eta'_i = l$ , la somme du dernier terme et du premier vaut exactement  $\frac{p+q+1-2r}{p+q}$ , qui est positif puisque  $r = \inf\{p, q\}$ .  $\square$

Nous pouvons donc utiliser le théorème 2.5.8 :

**Théorème 5.1.6.** *Si  $\delta$  n'est pas dans  $VC(k_0)$  il existe une quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante à l'ordre  $k_0$ .*

Terminons cette section en illustrant le théorème 5.1.5, par le calcul des ensembles  $VC(k_0)$  pour  $k_0 = 1, 2, 3$ .

**Théorème 5.1.7.** *Les valeurs résonantes à l'ordre 1, 2, 3 sont localisées dans les ensembles suivants :*

- pour  $k_0 = 1$ , l'ensemble  $VC(1) = \{1\}$  ;
- pour  $k_0 = 2$ , l'ensemble  $VC(2)$  est donné par

$$\left\{ \frac{p+q-2}{p+q}, \frac{p+q-1}{p+q}, 1, \frac{p+q+1}{p+q}, \frac{p+q+2}{p+q} \right\}$$

– pour  $k_0 = 3$ , l'ensemble  $VC(3)$  est donné par

$$\left\{ \frac{p+q-4}{p+q}, \frac{p+q-3}{p+q}, \frac{p+q-2}{p+q}, \frac{p+q-1}{p+q}, 1, \frac{p+q+1}{p+q}, \frac{p+q+2}{p+q}, \frac{p+q+3}{p+q}, \frac{p+q+4}{p+q} \right\}$$

*Démonstration.* Notons  $Res(k, l, \eta, \eta')$  la valeur de  $\delta$  obtenue en résolvant l'équation  $\alpha_{(\delta, k, \eta)} = \alpha_{(\delta, l, \eta')}$ . Pour  $k_0 \leq 2$ , on a  $VR(k_0) = VC(k_0)$  c'est-à-dire

$$Res(k, l, \eta, \eta') = \frac{p+q+1}{p+q} + \frac{\sum_{i=1}^r (\eta_i^2 - \eta_i'^2) - 2 \sum_{i=1}^r i(\eta_i - \eta_i')}{(p+q)(k-l)}$$

On montre ainsi que  $VC(1) = \{1\}$  puisqu'il ne contient que  $Res(1, 0, (1), (0))$ . Il suffit alors de prendre  $k = 1, l = 0, \eta = (1), \eta' = (0)$  dans la formule en haut.

A l'ordre 2, nous avons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} Res(2, 0, (2), (0)) &= \frac{p+q+1}{p+q} + \frac{(2^2 - 0^2)}{(p+q)(2-0)} - 2 \frac{[1(2-0)]}{(p+q)(2-0)} \\ &= \frac{p+q+1}{p+q} \end{aligned}$$

De la même manière, on a

$$Res(2, 0, (1, 1), (0)) = \frac{p+q-1}{p+q}, \quad Res(2, 1, (2), (1)) = \frac{p+q+2}{p+q},$$

et enfin

$$Res(2, 1, (1, 1), (1)) = \frac{p+q-2}{p+q}.$$

On obtient  $VC(2)$  en ajoutant l'unique valeur de  $VC(1)$  aux valeurs trouvées ci-dessus.

Pour calculer  $VC(3)$ , il faut ajouter aux valeurs que nous venons de calculer les valeurs provenant des diagrammes de taille 3. Ainsi, nous calculons

$$\begin{aligned} Res(3, 2, (3), (2)) &= \frac{p+q+4}{p+q}, & Res(3, 1, (3), (1)) &= \frac{p+q+3}{p+q}, \\ Res(3, 0, (3), (0)) &= \frac{p+q+2}{p+q}, & Res(3, 2, (2, 1), (2)) &= \frac{p+q-2}{p+q}, \\ Res(3, 2, (2, 1), (1, 1)) &= 1, & Res(3, 1, (2, 1), (1)) &= \frac{p+q-1}{p+q}, \\ Res(3, 0, (2, 1), (0)) &= 1, & Res(3, 2, (1, 1, 1), (1, 1)) &= \frac{p+q-4}{p+q}, \\ Res(3, 1, (1, 1, 1), (1)) &= \frac{p+q-3}{p+q}, & Res(3, 0, (1, 1, 1), (0)) &= \frac{p+q-2}{p+q}. \end{aligned}$$



Enfin, les valeurs résonantes

$$Res(3, 2, (1, 1, 1), (2)) = \frac{p+q-8}{p+q} \quad \text{et} \quad Res(3, 2, (3), (1, 1)) = \frac{p+q+8}{p+q}$$

ne sont pas dans  $VC(3)$  puisque le deuxième diagramme n'est pas dans le sous-espace arborescent défini par le premier car il ne lui est pas inférieur.  $\square$

**Remarques :** Certaines des valeurs de  $VC(2)$  et  $VC(3)$  pourraient sembler pouvoir être négatives, contredisant ainsi le théorème 5.1.5. Cependant il faut voir que les valeurs annoncées correspondent à des diagrammes qui n'existent pas pour de petites valeurs de  $p$  ou  $q$ . Ce n'était pas le cas pour la valeur  $\frac{p+q-8}{p+q}$  qui est bien résonante à partir de l'ordre 3 et peut être nulle.

Pour  $q = 1$ , nous avons l'ensemble

$$VR(2) = VC(2) = \left\{1, \frac{p+2}{p+1}, \frac{p+3}{p+1}\right\}.$$

Ce sont les valeurs résonantes à l'ordre 2 du cas projectif (voir [25]).

## 5.2 Unicité de la quantification

Nous savons d'après le théorème 2.4.7 que la quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante à l'ordre  $k_0$  est unique quand  $\delta$  n'est pas dans l'ensemble des valeurs résonantes  $VR(k_0)$  (voir la proposition 4.2.1). Dans cette section, nous montrons que c'est encore vrai si  $\delta$  est dans  $VR(k_0)$  mais pas dans  $VC(k_0)$  (voir la proposition 5.1.5). Plus précisément, nous allons démontrer le théorème suivant.

**Théorème 5.2.1.** *Si  $\delta$  n'est pas dans  $VC(k_0)$ , il existe une unique quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante de l'espace  $\bigoplus_{k=0}^{k_0} \mathcal{S}_\delta^k(\mathbb{R}_q^p)$  dans l'espace  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^{k_0}(\mathbb{R}_q^p)$ .*

Nous considérons alors deux quantifications à l'ordre  $k_0$ ,  $Q$  et  $Q'$  et nous étudions, pour  $k \leq k_0$ , l'application

$$Q^{-1} \circ Q' : \mathcal{S}_\delta^k(\mathbb{R}_q^p) \rightarrow \bigoplus_{0 \leq l \leq k} \mathcal{S}_\delta^l(\mathbb{R}_q^p) : P \longmapsto \sum_{l=0}^k P'_l, \quad P'_l \in \mathcal{S}_\delta^l(\mathbb{R}_q^p).$$

On a évidemment  $P'_k = P$ , par définition des quantifications. Nous allons montrer que nécessairement, sous les hypothèses du théorème 5.2.1 chacun des termes  $P'_l$  est nul pour  $l < k$ . Plus formellement, nous considérons les projections naturelles

$$\pi_l : \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathcal{S}_\delta^r(\mathbb{R}_q^p) \rightarrow \mathcal{S}_\delta^l(\mathbb{R}_q^p)$$

et nous posons

$$I_l = \pi_l \circ Q^{-1} \circ Q' : \mathcal{S}_\delta^k(\mathbb{R}_q^p) \rightarrow \mathcal{S}_\delta^l(\mathbb{R}_q^p) : P \mapsto P'.$$

Nous allons montrer que nécessairement  $I_l = 0$  pour tout  $l < k \leq k_0$ , quand  $\delta$  n'est pas dans  $VC(k_0)$ . La propriété principale de ces applications est la suivante.

**Lemme 5.2.2.** *L'application  $I_l$  commute avec  $L_X^\delta$ , pour tout  $X \in \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Les quantifications  $Q$  et  $Q'$  étant  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariantes, il en est de même de  $Q^{-1}$  et on a

$$\begin{aligned} I_l \circ L_X^\delta &= \pi_l \circ Q^{-1} \circ Q' \circ L_X^\delta = \pi_l \circ Q^{-1} \circ \mathcal{L}_X \circ Q' = \pi_l \circ L_X^\delta \circ Q^{-1} \circ Q' \\ &= L_X^\delta \circ \pi_l \circ Q^{-1} \circ Q' = L_X^\delta \circ I_l, \end{aligned}$$

comme annoncé. □

Nous allons montrer un résultat plus général que l'annulation des applications  $I_l$  : en fait, toute application linéaire  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante de  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathbb{R}_q^p)$  dans  $\mathcal{S}_\delta^l(\mathbb{R}_q^p)$  pour  $l < k \leq k_0$  est nulle si  $\delta$  n'est pas dans  $VC(k_0)$ .

**Lemme 5.2.3.** *Toute application linéaire  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante de  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathbb{R}_q^p)$  dans  $\mathcal{S}_\delta^l(\mathbb{R}_q^p)$  pour  $l < k$  est un opérateur différentiel à coefficients constants.*

*Démonstration.* Soit  $T$  une telle application. Le fait que  $T$  soit un opérateur différentiel a été prouvé en général (cfr [21, Lemme7.1]). De plus, en coordonnées  $(x_1^1, \dots, x_q^p)$  de  $\mathbb{R}_q^p$ , l'opérateur  $T$  s'écrit

$$T(u)(x) = \sum_{|\alpha|=0}^R T_\alpha(x) (\partial_x^\alpha u)(x), \quad u \in \mathcal{S}_\delta^k(\mathbb{R}_q^p)$$

où  $\alpha = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_q^p)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1^1 + \dots + \alpha_q^p$ ,

$$\partial_x^\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial x_1^1} \right)^{\alpha_1^1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_q^p} \right)^{\alpha_q^p}$$

et  $T_\alpha(x)$  est une application linéaire de  $S^k \mathbb{R}_q^p \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathbb{R}_q^p)$  dans  $S^l \mathbb{R}_q^p \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathbb{R}_q^p)$ . Puisque l'algèbre de champs de vecteurs  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  contient tous les champs constants, on a pour tout  $u$  comme plus haut

$$L_{\frac{\partial}{\partial x_j^i}}^\delta \circ T(u) = T \circ L_{\frac{\partial}{\partial x_j^i}}^\delta u \tag{5.2}$$

Développons le premier membre :

$$\begin{aligned} L_{\frac{\partial}{\partial x_j}^\delta} \circ \sum_{|\alpha| \leq R} T_\alpha(x) (\partial_x^\alpha u)(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j^i} \left[ \sum_{|\alpha| \leq R} T_\alpha(x) (\partial_x^\alpha u)(x) \right] \\ &= \sum_{|\alpha| \leq R} \left( \frac{\partial}{\partial x_j^i} T_\alpha(x) \right) (\partial_x^\alpha u)(x) + \sum_{|\alpha| \leq R} T_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x_j^i} (\partial_x^\alpha u)(x) \end{aligned}$$

Puisque les dérivées partielles commutent, le deuxième terme est égal au second membre de (5.2). Donc le premier terme est nul. Cela montre que les applications linéaires  $T_\alpha(x)$  sont indépendantes de  $x$  et le résultat est prouvé.  $\square$

**Lemme 5.2.4.** *Toute application linéaire  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante de  $\mathcal{S}_\delta^k(\mathbb{R}_q^p)$  dans  $\mathcal{S}_\delta^l(\mathbb{R}_q^p)$  pour  $l < k$  est un opérateur différentiel homogène d'ordre  $k-l$ .*

*Démonstration.* Utilisons les notations du lemme précédent et écrivons

$$T = \sum_{r=0}^R T_r$$

où

$$T_r = \sum_{|\alpha|=r} T_\alpha \partial_x^\alpha$$

est un opérateur différentiel homogène d'ordre  $r$ . Nous savons que  $T$  commute avec la dérivée de Lie dans la direction du champ d'Euler :

$$L_{\mathcal{E}}^\delta \circ \sum_{r=0}^R T_r(u) = \sum_{r=0}^R T_r \circ L_{\mathcal{E}}^\delta u \quad (5.3)$$

où le champ d'Euler est défini par  $\mathcal{E} = X^e$ , où  $e$  est défini par la proposition 3.1.1 et  $X_x^e = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_q^p$ . En coordonnées, on a donc

$$\mathcal{E} = \sum_{i,j} x_j^i \partial_{x_j^i} = x \partial_x$$

En utilisant la formule (1.13) pour ce champ, on a

$$L_{\mathcal{E}}^\delta u = x \partial_x u + (pq\delta - k)u, \quad \forall u \in \mathcal{S}_\delta^k(\mathbb{R}_q^p).$$

Le second membre de (5.3) devient

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^R T_r \circ L_{\mathcal{E}}^\delta u &= \sum_{r=0}^R \sum_{|\alpha|=r} T_\alpha \partial_x^\alpha [x \partial_x u + (pq\delta - k)u] \\ &= \sum_{r=0}^R \sum_{|\alpha|=r} T_\alpha \partial_x^\alpha (x \partial_x u) + (pq\delta - k) \sum_{r=0}^R \sum_{|\alpha|=r} T_\alpha (\partial_x^\alpha u). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Or, si  $|\alpha| = r$ , on a immédiatement

$$\partial_x^\alpha(x\partial_x u) = r\partial_x^\alpha u + x\partial_x\partial_x^\alpha u.$$

Dès lors, l'expression (5.4) vaut

$$\sum_{r=0}^R rT_r(u) + \sum_{r=0}^R \sum_{|\alpha|=r} T_\alpha(x\partial_x\partial_x^\alpha u) + (pq\delta - k) \sum_{r=0}^R T_r(u) \quad (5.5)$$

Calculons maintenant le premier membre de (5.3). Puisque pour tout  $v \in \mathcal{S}_\delta^l(\mathbb{R}_q^p)$ , on a

$$L_{\mathcal{E}}^\delta v = x\partial_x v + (pq\delta - l)v,$$

on trouve immédiatement

$$L_{\mathcal{E}}^\delta \circ \sum_{r=0}^R T_r(u) = \sum_{r=0}^R \sum_{|\alpha|=r} T_\alpha x\partial_x^\alpha(\partial_x u) + (pq\delta - l) \sum_{r=0}^R T_r(u) \quad (5.6)$$

Finalement, puisque les expressions (5.5) et (5.6) sont égales, on en déduit que

$$\sum_{r=0}^R (k - l - r)T_r = 0.$$

Dès lors tous les termes  $T_r$  sont nécessairement nuls sauf  $T_{k-l}$  éventuellement, et  $T$  est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants homogène d'ordre  $k - l$ .  $\square$

Nous arrivons maintenant au résultat principal.

**Lemme 5.2.5.** *Soient  $k, l \in \mathbb{N}$  tels que  $l < k \leq k_0$ . Si  $\delta$  n'appartient pas à l'ensemble  $VC(k_0)$  (voir (5.1)), il n'existe pas d'entrelacement non nul de  $(\mathcal{S}_\delta^k(\mathbb{R}_q^p), L_X^\delta)$  dans  $(\mathcal{S}_\delta^l(\mathbb{R}_q^p), L_X^\delta)$  considérés comme représentations de  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Nous avons déjà démontré que  $T$  est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants homogène d'ordre  $k-l$ . Nous utilisons l'identification de  $\mathcal{S}_\delta^m(\mathbb{R}_q^p)$  à  $C^\infty(\mathbb{R}_q^p, S^m\mathbb{R}_q^p \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathbb{R}_q^p))$  pour  $m = k, l$ . Pour toute composante irréductible  $M$  de  $S^m\mathbb{R}_q^p$  sous  $\mathfrak{h}_0$ , le sous-espace  $C^\infty(\mathbb{R}_q^p, K \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathbb{R}_q^p))$  est un sous-espace stable pour la représentation  $L^\delta$  de  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ , vu la proposition 2.5.4. On peut donc, pour toutes composantes irréductibles  $K$  de  $S^k\mathbb{R}_q^p$  sous  $\mathfrak{h}_0$  (resp.  $L$  de  $S^l\mathbb{R}_q^p$  sous  $\mathfrak{h}_0$ ), considérer l'opérateur  $T_{KL}$ , projection sur  $C^\infty(\mathbb{R}_q^p, L \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathbb{R}_q^p))$  de la restriction de  $T$  à  $C^\infty(\mathbb{R}_q^p, K \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathbb{R}_q^p))$ .

Par construction, l'opérateur  $T_{KL}$  est  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariant, et il est clair que si  $T$  n'est pas nul, un des opérateurs  $T_{KL}$  n'est pas nul.

Supposons donc que  $T_{KL}$  n'est pas nul et tentons d'obtenir une contradiction. Puisque  $T_{KL}$  est  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariant, il échange les opérateurs de Casimir des représentations entre lesquelles il est défini. Avec les notations du théorème 4.1.11, si  $K \cong F_\eta \otimes F_\eta^*$  et  $L \cong F_{\eta'} \otimes F_{\eta'}^*$ , on a l'égalité

$$\alpha(\delta, k, \eta) = \alpha(\delta, l, \eta').$$

Nous allons montrer qu'on a nécessairement  $\eta' \leq \eta$ , et obtenir ainsi une contradiction avec l'hypothèse  $\delta \notin VC(k_0)$ .

Nous considérons la restriction de  $T_{KL}$  au sous-espace de  $C^\infty(\mathbb{R}_q^p, K \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathbb{R}_q^p))$ , formé des fonctions polynomiales homogènes de degré  $k-l$ . Puisque  $T$  est un opérateur différentiel d'ordre  $k-l$ , cette restriction détermine entièrement  $T_{KL}$  et ne peut donc être nulle. D'autre part, puisque  $T$  est également à coefficients constants, l'image de ce sous-espace est dans l'ensemble des fonctions constantes à valeurs dans  $L \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathbb{R}_q^p)$ , que nous identifions à ce dernier espace.

En tant que représentation de  $\mathfrak{h}_0$  via  $L^\delta$ , l'espace des fonctions polynomiales homogènes de degré  $k-l$  est isomorphe à  $S^{k-l}(\mathbb{R}_q^p)^* \otimes K$  (on a simplement identifié les fonctions polynomiales sur un espace vectoriel aux tenseurs symétriques sur son dual, et tenu compte du fait que  $\mathfrak{h}_0$  n'agit pas sur  $F_\delta(\mathbb{R}_q^p)$ ). On a donc une application  $\mathfrak{h}_0$ -équivariante de  $S^k(\mathbb{R}_q^p)^* \otimes K$  dans  $L$ . Le raisonnement est alors similaire à celui de la preuve de la proposition 5.1.4 : la représentation  $L \cong F_{\eta'} \otimes F_{\eta'}^*$  doit apparaître dans la décomposition en irréductibles sous  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$  de

$$S^{k-l}(\mathbb{R}_q^p)^* \otimes K \subset \otimes^{k-l}(\mathbb{R}_q^p)^* \otimes K \cong (\otimes^{k-l}(\mathbb{R}^p)^* \otimes F_\eta) \otimes (\otimes^{k-l}(\mathbb{R}^q) \otimes F_\eta^*)$$

Nous cherchons les irréductibles présentes dans  $\otimes^{k-l}\mathbb{R}^{p*} \otimes F_\eta$  comme représentation de  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R})$ . Nous avons montré dans la preuve de la proposition 5.1.4 que les irréductibles présentes dans  $\mathbb{R}^{p*} \otimes F_\eta$  correspondent à des diagrammes de Young obtenus en ajoutant  $p-1$  cases au diagramme de  $F_\eta$ , avec au plus une case ajoutée par colonne. Nous en déduisons que les diagrammes des irréductibles de  $\otimes^{k-l}\mathbb{R}^{p*} \otimes F_\eta$  sont obtenus en ajoutant  $(k-l)(p-1)$  cases au diagramme de  $F_\eta$  avec au plus  $k-l$  cases ajoutées par ligne. Comme nous devons comparer ces diagrammes à celui de  $F_{\eta'}$ , nous devons retirer  $k-l$  colonnes de hauteur  $p$ . La procédure pour passer du diagramme de  $F_\eta$  à celui de  $F_{\eta'}$  consiste donc à supprimer  $k-l$  cases et on a bien  $\eta' \leq \eta$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 5.2.1.

*Démonstration.* Si  $Q$  et  $Q'$  sont deux quantifications  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariantes à l'ordre  $k_0$ , alors chaque projection de  $\pi_l \circ Q^{-1} \circ Q'$  sur  $\mathcal{S}_\delta^l(\mathfrak{g}_{-1})$  ( $l < k$ ) est  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante. Elle est donc nulle. Cela montre que  $Q^{-1} \circ Q'(P) = P, \forall P \in \mathcal{S}_\delta^k, \forall k \leq k_0$ . Donc  $Q^{-1} \circ Q'$  est l'application identique, ce qui implique que  $Q$  est unique.  $\square$

# Chapitre 6

## Quantification équivariante des symboles d'ordre 1 et 2

Dans ce dernier chapitre, nous voulons illustrer les résultats d'existence en présentant des formules explicites pour la quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante pour des symboles d'ordre 1 et 2. Nous suivons la méthode exposée aux chapitres précédents et détaillons tout d'abord des formules explicites pour les opérateurs  $\gamma$  et  $N$ , sur les symboles d'ordre 1 et 2.

Dans tout ce chapitre, il sera nécessaire de disposer de bases de  $\mathbb{R}_q^p \cong \mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^{q*}$  et de  $\mathbb{R}_p^q \cong \mathbb{R}^q \otimes \mathbb{R}^{p*}$ . Nous notons  $(e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  et  $(e'_1, \dots, e'_q)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^q$ . Nous notons également  $(\epsilon^1, \dots, \epsilon^p)$  la base de  $\mathbb{R}^{p*}$  duale de  $(e_1, \dots, e_p)$  et  $(\epsilon^1, \dots, \epsilon^q)$  la base de  $\mathbb{R}^{q*}$  duale de  $(e'_1, \dots, e'_q)$ . Nous définissons alors

$$e_s^r = \epsilon^r \otimes e_s \in \mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^{q*} \quad \text{et} \quad \varepsilon_r^s = \epsilon'^s \otimes e'_r \in \mathbb{R}^q \otimes \mathbb{R}^{p*}, \quad (6.1)$$

pour tous  $s \leq p$  et  $r \leq q$ .

Nous identifions librement  $\mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^{q*}$  aux applications linéaires de  $\mathbb{R}^q$  dans  $\mathbb{R}^p$  ou à l'ensemble des matrices  $\mathbb{R}_q^p$ , de sorte que  $e_s^r$  désigne, selon le contexte, un tenseur, une application linéaire ou une matrice.

Enfin, les espaces  $\mathbb{R}_q^p$  et  $\mathbb{R}_p^q$  sont mis en dualité par la forme bilinéaire

$$B : \mathbb{R}_q^p \times \mathbb{R}_p^q \rightarrow \mathbb{R} : (A, B) \mapsto \text{tr}(AB). \quad (6.2)$$

Nous avons alors le résultat suivant :

**Proposition 6.1.** *Les bases  $(e_s^r : s \leq p, r \leq q)$  et  $(\varepsilon_r^s : s \leq p, r \leq q)$  sont B-duales : on a*

$$B(e_s^r, \varepsilon_j^i) = \delta_j^r \delta_s^i,$$

pour tous  $r, j \leq q$  et  $s, i \leq p$ .

*Démonstration.* On a  $B(e_s^r, \varepsilon_j^i) = \text{tr}(\epsilon^r \otimes e_s \epsilon'^i \otimes e'_j) = \delta_j^r \text{tr}(\epsilon^i \otimes e_s)$ .  $\square$

## 6.1 Formules explicites pour $\gamma$

Nous calculons dans cette section l'application  $\gamma$  dont il est question à la définition 2.4.1, dans le cas de l'algèbre  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ . Nous calculons les ingrédients présents dans la formule donnée par la proposition 2.4.3 dans ce cas particulier. Ceux-ci nous permettent d'obtenir une formule complètement explicite pour les symboles d'ordre 1 et 2.

Ainsi, nous calculons le double crochet présent dans la formule donnée à la proposition 2.4.3 :

**Lemme 6.1.1.** *Pour tous  $X, Y \in \mathbb{R}_q^p \cong \mathfrak{g}_{-1}$ , et tout  $h \in \mathbb{R}_p^q \cong \mathfrak{g}_1$ , on a*

$$[X, [Y, h]] = [[h, Y], X] = -XhY - YhX.$$

*Démonstration.* La première égalité est évidente par l'antisymétrie du crochet de Lie. La deuxième s'obtient aisément en considérant les plongements de  $\mathbb{R}_q^p$  et  $\mathbb{R}_p^q$  dans  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ . Cependant, remarquons que nous avons démontré la relation

$$[[h, X], X] = -2XhX, \quad \forall X \in \mathfrak{g}_{-1}, \quad h \in \mathfrak{g}_1 \quad (6.3)$$

Nous savons aussi que si  $Q$  est une forme quadratique sur un espace vectoriel  $V$ , alors la forme bilinéaire symétrique  $Bil$  associée est telle que  $Q(X) = Bil(X, X)$ ,  $\forall X \in V$  et on peut exprimer la forme bilinéaire  $Bil$  en fonction de  $Q$  par les formules de polarisation suivantes

$$Bil(X, Y) = \frac{1}{2}(Q(X+Y) - Q(X) - Q(Y)) \quad (6.4)$$

Nous pouvons donc écrire en utilisant (6.3) et (6.4)

$$\begin{aligned} [X, [Y, h]] &= [[h, Y], X] \\ &= \frac{1}{2}(-2(X+Y)h(X+Y) + 2XhX + 2YhY) \\ &= -XhY - YhX \end{aligned}$$

ce qui donne directement le résultat.  $\square$

Un deuxième ingrédient fondamental pour le calcul de  $\gamma$  peut maintenant être calculé :

**Lemme 6.1.2.** *Pour tous  $h \in \mathbb{R}_p^q \cong \mathfrak{g}_1$ , et  $X \in \mathbb{R}_q^p \cong \mathfrak{g}_{-1}$ , on a :*

$$tr(ad_{\mathfrak{g}_{-1}}([X, h])) = (p+q)tr(hX).$$



*Démonstration.* L'application dont on doit calculer la trace est, d'après le résultat précédent :

$$ad_{\mathfrak{g}_{-1}}([X, h]) : \mathfrak{g}_{-1} \rightarrow \mathfrak{g}_{-1} : Y \mapsto [[X, h], Y] = XhY + YhX.$$

Pour calculer la trace, nous l'évaluons sur la base de  $\mathfrak{g}_{-1}$  définie au début du chapitre. On a donc par définition de la trace d'une application linéaire et de la dualité  $B$  entre  $\mathbb{R}_q^p$  et  $\mathbb{R}_p^q$  :

$$\begin{aligned} \text{tr}(ad_{\mathfrak{g}_{-1}}([X, h])) &= \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^p \text{tr}[(Xh\epsilon^r \otimes e_s + \epsilon^r \otimes e_s hX)\epsilon'^s \otimes e'_r] \\ &= \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^p \text{tr}(Xh\epsilon'^s \otimes e'_s + \epsilon^r \otimes e_r hX) \\ &= q \sum_{s=1}^p \text{tr}(Xh\epsilon'^s \otimes e'_s) + p \sum_{r=1}^q \text{tr}(\epsilon^r \otimes e_r hX) \\ &= q \text{tr}(Xh\text{Id}_p) + p \text{tr}(\text{Id}_q hX). \end{aligned}$$

Le résultat suit par l'invariance de la trace par permutation circulaire, que nous avons déjà utilisée à la deuxième ligne.  $\square$

Après ces deux lemmes, nous pouvons maintenant traduire la proposition 2.4.3 en formules explicites pour la restriction de  $\gamma$  aux symboles de degré 1 et 2 respectivement et dans le cas de l'algèbre  $\mathfrak{sl}(p+q)$ . Nous avons les résultats suivants :

**Théorème 6.1.3.** *Pour tous  $X \in S^1 \mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1}$ ,  $A \in \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$  et  $h \in \mathfrak{g}_1$ , on a*

$$\gamma(h)(X \otimes A) = -\lambda(p+q)\text{tr}(hX)A.$$

*Démonstration.* Il suffit de noter que dans l'expression de  $\gamma$ , le double crochet disparaît pour les symboles de degré 1. L'expression intrinsèque de  $\gamma$  quand  $k = 1$  est donc donnée par

$$\gamma(h)X = -\lambda \text{tr}(ad_{\mathfrak{g}_{-1}}([X, h]))A.$$

Il suffit d'appliquer le lemme 6.1.2.  $\square$

Passons aux symboles de degré 2 :

**Lemme 6.1.4.** *Pour tous  $X, Y \in \mathfrak{g}_{-1}$ ,  $A \in \mathbb{F}_\delta(\mathfrak{g}_{-1})$  et  $h \in \mathfrak{g}_1$ , on a*

$$\gamma(h)(X \vee Y \otimes A) = [-(p+q)\lambda(\text{tr}(hX)Y + \text{tr}(hY)X) - XhY - YhX] \otimes A.$$

*De plus, si on pose  $X = x \otimes \xi$  et  $Y = y \otimes \eta$  ( $x, y \in \mathbb{R}^p$ ,  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{q*}$ ), on a*

$$\begin{aligned} \gamma(h)(x \otimes \xi \vee y \otimes \eta) &= -(p+q)\lambda(\langle \xi, hx \rangle y \otimes \eta + \langle \eta, hy \rangle x \otimes \xi) \\ &\quad - \langle \xi, hy \rangle x \otimes \eta - \langle \eta, hx \rangle y \otimes \xi \end{aligned}$$

*Démonstration.* L'expression intrinsèque de  $\gamma$  quand  $k = 2$  est donnée par

$$\begin{aligned} \gamma(h)(X \vee Y \otimes A) = & (-\lambda\{tr(ad_{\mathfrak{g}_{-1}}([X, h])Y) + tr(ad_{\mathfrak{g}_{-1}}([Y, h])X)\} \\ & + [X, [Y, h]]) \otimes A \end{aligned}$$

Tous les termes du second membre sont déjà calculés dans les lemmes 6.1.2 et 6.1.1, ce qui donne le résultat de la première partie. Pour la deuxième partie, il suffit d'appliquer la première partie et de calculer la trace des diades apparaissant dans les expressions.  $\square$

Afin d'obtenir des formules explicites, nous devons également pouvoir décomposer un symbole selon les composantes irréductibles de  $S^k\mathbb{R}_q^p$  sous  $\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R})$ . D'après la proposition 4.1.4,  $S^0\mathbb{R}_q^p$  et  $S^1\mathbb{R}_q^p \cong \mathbb{R}_q^p$  sont simples. La décomposition explicite de  $S^2\mathbb{R}_q^p$  est la suivante :

**Proposition 6.1.5.** *Avec les notations de la proposition précédente l'élément  $T = (x \otimes \xi) \vee (y \otimes \eta)$  de  $S^2\mathbb{R}_q^p$  se décompose, si  $\inf(p, q) \geq 2$  en*

$$T_S = \frac{1}{2}((x \otimes \xi) \vee (y \otimes \eta) + (x \otimes \eta) \vee (y \otimes \xi))$$

et

$$T_A = \frac{1}{2}((x \otimes \xi) \vee (y \otimes \eta) - (x \otimes \eta) \vee (y \otimes \xi)).$$

*Démonstration.* L'espace des tenseurs symétriques de degré 2 est la somme directe de deux irréductibles :

$$S^2(\mathbb{R}_q^p) \cong S^2\mathbb{R}^p \otimes S^2\mathbb{R}^{q*} \oplus \wedge^2\mathbb{R}^p \otimes \wedge^2\mathbb{R}^{q*}$$

L'injection  $i : S^2\mathbb{R}^p \otimes S^2\mathbb{R}^{q*} \rightarrow S^2(\mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^{q*})$  est donnée par

$$\begin{aligned} i(x \vee y \otimes \xi \vee \eta) &= \frac{1}{4}((x \otimes \xi) \otimes (y \otimes \eta) + (x \otimes \eta) \otimes (y \otimes \xi) \\ &\quad + (y \otimes \eta) \otimes (x \otimes \xi) + (y \otimes \xi) \otimes (x \otimes \eta)) \\ &= \frac{1}{4}(2(x \otimes \xi) \vee (y \otimes \eta) + 2(x \otimes \eta) \vee (y \otimes \xi)) \\ &= \frac{1}{2}((x \otimes \xi) \vee (y \otimes \eta) + (x \otimes \eta) \vee (y \otimes \xi)). \end{aligned}$$

On voit donc que les termes de la forme  $T_S$  et leurs combinaisons linéaires engendrent une des deux irréductibles. L'application  $T \mapsto T_S$  consiste à symétriser en  $(x, y)$  (ou en  $(\xi, \eta)$ ) et est visiblement un projecteur. On a alors  $T_A = T - T_S$ .  $\square$

En conservant les mêmes notations, on peut calculer  $\gamma(h)$  sur les tenseurs  $T_S$  et  $T_A$  (nous omettrons cependant la partie densité, qui n'intervient pas dans le calcul) :

**Proposition 6.1.6.** *Pour  $T = (x \otimes \xi) \vee (y \otimes \eta)$ , et  $h \in \mathfrak{g}_1 \cong \mathbb{R}_p^q$ , on a*

$$\gamma(h)T_S = -\frac{(p+q)\lambda+1}{2}(\langle \xi, hx \rangle y \otimes \eta + \langle \eta, hy \rangle x \otimes \xi + \langle \eta, hx \rangle y \otimes \xi + \langle \xi, hy \rangle x \otimes \eta)$$

et

$$\gamma(h)T_A = \frac{-(p+q)\lambda+1}{2}(\langle \xi, hx \rangle y \otimes \eta + \langle \eta, hy \rangle x \otimes \xi - \langle \eta, hx \rangle y \otimes \xi - \langle \xi, hy \rangle x \otimes \eta).$$

*Démonstration.* Il suffit de calculer la somme ou la différence des deux termes :

$$\frac{1}{2}\gamma(h)((x \otimes \xi) \vee (y \otimes \eta)) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\gamma(h)((x \otimes \eta) \vee (y \otimes \xi))$$

Le premier terme est déjà donné par la deuxième partie du lemme 6.1.4. Le second est semblable au premier : il suffit d'interchanger les places de  $\xi$  et  $\eta$ . Donc, le résultat  $\gamma(h)T_S$  s'écrit explicitement comme la somme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[-(p+q)\lambda(\langle \xi, hx \rangle y \otimes \eta + \langle \eta, hy \rangle x \otimes \xi) - \langle \xi, hy \rangle x \otimes \eta - \langle \eta, hx \rangle y \otimes \xi] \\ & + \frac{1}{2}[-(p+q)\lambda(\langle \eta, hx \rangle y \otimes \xi + \langle \xi, hy \rangle x \otimes \eta) - \langle \eta, hy \rangle x \otimes \xi - \langle \xi, hx \rangle y \otimes \eta] \end{aligned}$$

En regroupant les termes, nous trouvons bien

$$-\frac{(p+q)\lambda+1}{2}(\langle \xi, hx \rangle y \otimes \eta + \langle \eta, hy \rangle x \otimes \xi + \langle \eta, hx \rangle y \otimes \xi + \langle \xi, hy \rangle x \otimes \eta)$$

Le résultat  $\gamma(h)T_A$  s'obtient de la même manière.  $\square$

## 6.2 Formules explicites de la quantification des symboles de degré 1 et 2

Pour trouver les formules explicites, nous allons nous servir des résultats de la section précédente ainsi que de la relation de récurrence 2.7 donnée par la construction classique de la quantification équivariante. Cependant, il nous reste à fixer quelques notations : nous utilisons des coordonnées sur  $\mathfrak{g}_{-1}$  :

**Définition 6.2.1.** Pour tout  $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ ,  $x$  se décompose dans la base  $(e_s^r : s \leq p, r \leq q)$  (voir (6.1)) en

$$x = \sum_{s=1}^p \sum_{r=1}^q x_r^s e_s^r.$$

Les coordonnées de  $x$  sont le tableau de nombres  $(x_r^s)_{s \leq p, r \leq q}$ .

Nous décomposons également les symboles de degré 1 et 2 en utilisant la base  $(e_s^r : s \leq p, r \leq q)$  et nous ne mentionnons plus explicitement le poids de densité dans l'expression des symboles. Ainsi, si  $T$  est un élément de  $\mathcal{S}_\delta^1(\mathbb{R}_q^p) \cong C^\infty(\mathbb{R}_q^p, \mathbb{R}_q^p \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathbb{R}_q^p))$ , nous écrivons

$$T = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q T_j^i e_i^j$$

où les coefficients  $T_j^i$  sont des fonctions sur  $\mathbb{R}_q^p$ . De même, pour un élément  $T$  de  $\mathcal{S}_\delta^2(\mathbb{R}_q^p) \cong C^\infty(\mathbb{R}_q^p, S^2\mathbb{R}_q^p \otimes \mathbb{F}_\delta(\mathbb{R}_q^p))$ , nous écrivons

$$T = \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q T_{kl}^{ij} e_i^k \vee e_j^l.$$

Nous supposons naturellement que les coefficients (fonctionnels)  $T_{kl}^{ij}$  sont symétriques par permutation des blocs  $\binom{i}{k}$  et  $\binom{j}{l}$  c'est-à-dire

$$T_{kl}^{ij} = T_{lk}^{ji}, \quad \forall i, j, k, l.$$

Il nous reste à calculer l'opérateur  $N$  donné par la définition 2.4.4. Pour ce faire, nous devons considérer des bases duales de  $\mathfrak{g}_{-1}$  et  $\mathfrak{g}_1$ .

**Lemme 6.2.2.** Les bases  $(e_s^r : s \leq p, r \leq q)$  et  $(\epsilon_r^s : s \leq p, r \leq q)$  sont  $\beta_{\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})}$ -duales, si

$$\epsilon_r^s = \frac{1}{2(p+q)} \epsilon_r^s.$$

*Démonstration.* Il suffit de voir qu'en identifiant  $\mathbb{R}_q^p$  et  $\mathbb{R}_p^q$  à des sous-espaces de  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ , la forme  $\beta_{\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})}$  sur ces deux espaces se réduit à  $2(p+q)B$  où  $B$  est défini par (6.2).  $\square$

On a dès lors

**Proposition 6.2.3.** L'opérateur  $N : \mathcal{S}_\delta^k(\mathbb{R}_q^p) \rightarrow \mathcal{S}_\delta^{k-1}(\mathbb{R}_q^p)$  vaut

$$-\frac{1}{p+q} \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^p \gamma(\epsilon_s^r) \frac{\partial}{\partial x_s^r}.$$

*Démonstration.* On applique la définition 2.4.4 pour obtenir

$$N = 2 \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^p \gamma(\epsilon_r^s) L_{X^{e_s^r}}.$$

Il reste alors à appliquer le lemme 6.2.2 et à calculer la dérivée de Lie présente dans la formule. Par définition, le champ  $X^{e_s^r}$  est constant et vaut  $-e_s^r$  en tout point. Sa différentielle est donc nulle et la dérivée de Lie se réduit (au signe près) à la dérivée partielle par rapport à la coordonnée associée à  $e_s^r$ , c'est à dire  $x_r^s$ .  $\square$

### 6.2.1 Quantification des symboles de degré 1

Nous pouvons maintenant directement appliquer la méthode classique de quantification :

**Théorème 6.2.4.** *Si  $\delta \neq 1$ , alors la quantification  $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$ -équivariante est donnée par*

$$T = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q T_j^i e_i^j \mapsto \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q T_j^i e_i^j + \frac{\lambda}{1-\delta} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \frac{\partial}{\partial x_j^i} T_j^i.$$

*Démonstration.* La quantification est donnée, d'après la formule (2.7) par  $Q(T) = \hat{T} = \hat{T}_1 + \hat{T}_0$  où  $\hat{T}_1 = T$  et  $\hat{T}_0$  est donné par

$$(\alpha_0 - \alpha_1) \hat{T}_0 = -N(\hat{T}_1) = -N(T).$$

De plus, vu la formule (4.2), les valeurs propres  $\alpha_1$  et  $\alpha_0$  associées respectivement à  $\mathcal{S}_\delta^1(\mathbb{R}_q^p)$  et  $\mathcal{S}_\delta^0(\mathbb{R}_q^p)$  sont données par

$$\alpha_1 = \frac{pq}{2} \delta^2 - \frac{pq}{2} \delta - \delta + 1$$

et

$$\alpha_0 = \frac{pq}{2} \delta^2 - \frac{pq}{2} \delta$$

de sorte que

$$\alpha_1 - \alpha_0 = -\delta + 1.$$

On a donc

$$\hat{T}_0 = \frac{1}{1-\delta} N(T) = -\frac{1}{(p+q)(1-\delta)} \sum_{r,j=1}^q \sum_{i,s=1}^p \left( \frac{\partial}{\partial x_s^r} T_j^i \right) \gamma(\epsilon_s^r) e_i^j.$$

Il reste à calculer l'expression  $\gamma(\epsilon_s^r) e_i^j$  qui vaut  $-\lambda(p+q) \text{tr}(\epsilon_s^r e_i^j)$  par le théorème 6.1.3. Enfin, cette expression vaut  $-\lambda(p+q)(\delta_i^r \delta_s^j)$ , par la proposition 6.1 et le résultat est démontré.  $\square$

### 6.2.2 Quantification des symboles de degré 2

Nous appliquons la même méthode que dans la section précédente. Le résultat est un peu plus long à obtenir puisque les symboles de degré 2 sont la somme de deux espaces propres de l'opérateur de Casimir  $C$ .

**Théorème 6.2.5.** *Si  $\delta \notin VC(2)$ , et si  $\inf(p, q) \geq 2$ , la quantification des symboles de degré 2 est donnée par*

$$T = \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q T_{kl}^{ij} e_i^k \vee e_j^l \mapsto \hat{T}_S + \hat{T}_A,$$

où  $\hat{T}_S$  et  $\hat{T}_A$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \hat{T}_S = & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q T_{kl}^{ij} (e_i^k \vee e_j^l + e_i^l \vee e_j^k) \\ & + \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q \left[ \frac{(p+q)\lambda + 1}{p+q+2 - (p+q)\delta} \left( \frac{\partial}{\partial x_l^j} T_{kl}^{ij} e_i^k + \frac{\partial}{\partial x_i^j} T_{kl}^{ij} e_j^k \right) \right. \\ & \left. + \frac{[(p+q)\lambda + 1](p+q)\lambda}{2[-\delta(p+q) + p+q+1][-\delta(p+q) + p+q+2]} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k^i \partial x_l^j} T_{kl}^{ij} + \frac{\partial^2}{\partial x_k^j \partial x_l^i} T_{kl}^{ij} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_A = & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q T_{kl}^{ij} (e_i^k \vee e_j^l - e_i^l \vee e_j^k) \\ & + \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q \left[ \frac{(p+q)\lambda - 1}{p+q-2 - (p+q)\delta} \left( \frac{\partial}{\partial x_l^j} T_{kl}^{ij} e_i^k - \frac{\partial}{\partial x_i^j} T_{kl}^{ij} e_j^k \right) \right. \\ & \left. + \frac{[(p+q)\lambda - 1](p+q)\lambda}{2[-\delta(p+q) + p+q-1][-\delta(p+q) + p+q-2]} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k^i \partial x_l^j} T_{kl}^{ij} - \frac{\partial^2}{\partial x_k^j \partial x_l^i} T_{kl}^{ij} \right) \right]. \end{aligned}$$

*Démonstration.* D'après la construction générale, il faut d'abord décomposer  $T$  en ses composantes selon les espaces propres de  $C$ . On a en fait, d'après la proposition 6.1.5

$$T = T_S + T_A$$

où

$$T_S = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q T_{kl}^{ij} (e_i^k \vee e_j^l + e_i^l \vee e_j^k)$$

et

$$T_A = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q T_{kl}^{ij} (e_i^k \vee e_j^l - e_i^l \vee e_j^k).$$

Les valeurs propres correspondantes sont données par

$$\alpha_S = \frac{pq}{2}\delta^2 - \frac{pq}{2}\delta - 2\delta + 2\frac{p+q+1}{p+q}$$

et

$$\alpha_A = \frac{pq}{2}\delta^2 - \frac{pq}{2}\delta - 2\delta + 2\frac{p+q-1}{p+q}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \alpha_S - \alpha_1 &= -\delta + \frac{p+q+2}{p+q} & \text{et} & \quad \alpha_S - \alpha_0 = -2\delta + 2\frac{p+q+1}{p+q}, \\ \alpha_A - \alpha_1 &= -\delta + \frac{p+q-2}{p+q} & \text{et} & \quad \alpha_A - \alpha_0 = -2\delta + 2\frac{p+q-1}{p+q}. \end{aligned}$$

On peut donc calculer  $Q(T_S) = \hat{T}_S = T_S + T_{S,1} + T_{S,0}$  (et de façon analogue  $Q(T_A)$ ), par les formules

$$T_{S,1} = \frac{1}{\alpha_S - \alpha_1} N(T_S) \quad \text{et} \quad T_{S,0} = \frac{1}{\alpha_S - \alpha_0} N(T_{S,1}).$$

On calcule

$$N(T_S) = -\frac{1}{2(p+q)} \sum_{s,i,j=1}^p \sum_{r,k,l=1}^q \left( \frac{\partial}{\partial x_s^r} T_{kl}^{ij} \right) \gamma(\varepsilon_s^r)(e_i^k \vee e_j^l + e_i^l \vee e_j^k).$$

En calculant  $\gamma(\varepsilon_s^r)\frac{1}{2}(e_i^k \vee e_j^l + e_i^l \vee e_j^k)$  en utilisant la proposition 6.1.6, on obtient finalement

$$\begin{aligned} N(T_S) &= \frac{(p+q)\lambda + 1}{2(p+q)} \sum_{s,i,j=1}^p \sum_{r,k,l=1}^q \left( \frac{\partial}{\partial x_s^r} T_{kl}^{ij} \right) (\delta_i^r \delta_s^k e_j^l + \delta_j^r \delta_s^l e_i^k + \delta_s^k \delta_j^r e_i^l + \delta_i^r \delta_s^l e_j^k) \\ &= \frac{(p+q)\lambda + 1}{2(p+q)} \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q \left( \frac{\partial}{\partial x_k^i} T_{kl}^{ij} e_j^l + \frac{\partial}{\partial x_l^j} T_{kl}^{ij} e_i^k + \frac{\partial}{\partial x_k^j} T_{kl}^{ij} e_i^l + \frac{\partial}{\partial x_l^i} T_{kl}^{ij} e_j^k \right) \end{aligned}$$

En tenant compte de la symétrie par blocs des coefficients  $T_{kl}^{ij}$ , on obtient finalement

$$N(T_S) = \frac{(p+q)\lambda + 1}{(p+q)} \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q \left( \frac{\partial}{\partial x_l^j} T_{kl}^{ij} e_i^k + \frac{\partial}{\partial x_l^i} T_{kl}^{ij} e_j^k \right).$$

Des calculs similaires nous donnent l'expression de  $N(T_A)$  :

$$N(T_A) = \frac{(p+q)\lambda - 1}{(p+q)} \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q \left( \frac{\partial}{\partial x_l^j} T_{kl}^{ij} e_i^k - \frac{\partial}{\partial x_l^i} T_{kl}^{ij} e_j^k \right).$$

Ceci nous permet de calculer  $T_{S,1}$  :

$$T_{S,1} = \frac{(p+q)\lambda + 1}{p+q+2 - (p+q)\delta} \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q \left( \frac{\partial}{\partial x_l^j} T_{kl}^{ij} e_i^k + \frac{\partial}{\partial x_l^i} T_{kl}^{ij} e_j^k \right).$$

De manière analogue, on a

$$T_{A,1} = \frac{(p+q)\lambda - 1}{p+q-2 - (p+q)\delta} \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q \left( \frac{\partial}{\partial x_l^j} T_{kl}^{ij} e_i^k - \frac{\partial}{\partial x_l^i} T_{kl}^{ij} e_j^k \right).$$

Il nous reste à calculer  $N(T_{S,1})$  et  $N(T_{A,1})$ . On procède comme dans la preuve du théorème 6.2.4 et on trouve :

$$N(T_{S,1}) = \frac{\lambda[(p+q)\lambda + 1]}{p+q+2 - (p+q)\delta} \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q \left( \frac{\partial}{\partial x_k^i} \frac{\partial}{\partial x_l^j} T_{kl}^{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k^j} \frac{\partial}{\partial x_l^i} T_{kl}^{ij} \right).$$

Enfin :

$$T_{S,0} = \frac{[(p+q)\lambda + 1](p+q)\lambda}{2[-\delta(p+q) + p+q+1][-\delta(p+q) + p+q+2]} \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k^i \partial x_l^j} T_{kl}^{ij} + \frac{\partial^2}{\partial x_k^j \partial x_l^i} T_{kl}^{ij} \right).$$

De la même manière, on obtient

$$T_{A,0} = \frac{[(p+q)\lambda - 1](p+q)\lambda}{2[-\delta(p+q) + p+q-1][-\delta(p+q) + p+q-2]} \sum_{i,j=1}^p \sum_{k,l=1}^q \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k^i \partial x_l^j} T_{kl}^{ij} - \frac{\partial^2}{\partial x_k^j \partial x_l^i} T_{kl}^{ij} \right),$$

et le résultat est prouvé.  $\square$



# Conclusion

Nous avons étudié dans ce travail l'existence et l'unicité de la quantification équivariante pour l'algèbre  $\mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{R})$ .

L'importance de cette algèbre tient au fait qu'elle apparaît naturellement en géométrie Grassmannienne, et généralise donc directement le cas de l'algèbre projective  $\mathfrak{sl}(n + 1, \mathbb{R})$  considérée dans le premier article [26] concernant la quantification équivariante.

Jusqu'à présent, cette algèbre constituait le dernier exemple important dans la classe des algèbres irréductibles filtrées de type fini pour lequel on ne pouvait pas directement appliquer les résultats généraux d'existence et d'unicité tels que prouvés dans [16] et [5]. Nous avons apporté une réponse positive aux questions d'existence et d'unicité en montrant que les résultats de ces deux articles peuvent être adaptés au cas de  $\mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{R})$ . Nous avons illustré le caractère explicite de la construction proposée au travers des formules explicites données dans le dernier chapitre.

# Bibliographie

- [1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics. *Lett. Math. Phys.*, 1(6) :521–530, 1975/77.
- [2] F. Boniver, S. Hansoul, P. Mathonet, and N. Poncin. Equivariant symbol calculus for differential operators acting on forms. *Lett. Math. Phys.*, 62(3) :219–232, 2002.
- [3] F. Boniver and P. B. A. Lecomte. A remark about the Lie algebra of infinitesimal conformal transformations of the Euclidean space. *Bull. London Math. Soc.*, 32(3) :263–266, 2000.
- [4] F. Boniver and P. Mathonet. Maximal subalgebras of vector fields for equivariant quantizations. *J. Math. Phys.*, 42(2) :582–589, 2001.
- [5] F. Boniver and P. Mathonet. IFFT-equivariant quantizations. *J. Geom. Phys.*, 56(4) :712–730, 2006.
- [6] Fabien Boniver. *Symboles  $sl_{m+1}$ -équivariants et classification de modules d'opérateurs différentiels sur les variétés*. Thèse de doctorat. Université de Liège, 1998.
- [7] Fabien Boniver. Projectively equivariant symbol calculus for bidifferential operators. *Lett. Math. Phys.*, 54(2) :83–100, 2000.
- [8] Fabien Boniver. *Sous-algèbres maximales de champs de vecteurs et symboles équivariants associés*. Thèse de doctorat. Université de Liège, 2001.
- [9] M. Bordemann. Sur l'existence d'une prescription d'ordre naturelle projectivement invariante. *Submitted for publication, math.DG/0208171*.
- [10] Sofiane Bouarroudj. Projectively equivariant quantization map. *Lett. Math. Phys.*, 51(4) :265–274, 2000.
- [11] Sofiane Bouarroudj. Formula for the projectively invariant quantization on degree three. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(4) :343–346, 2001.
- [12] Denis Bukiriro. *Quantification  $su(n, n)$ -équivariante*. Thèse de doctorat. Université de Liège, 2008.

- [13] A. CAp and J. Silhan. Equivariant quantizations for ahs-structures. *Submitted for publication, math.DG 0904.3278*.
- [14] Marc De Wilde. *Représentations du groupe linéaire*. Notes de séminaire. Université de Liège, 1995.
- [15] Marc De Wilde. *Algèbres de Lie de dimension finie*. Notes de cours. Université de Liège, 2000.
- [16] C. Duval, P. Lecomte, and V. Ovsienko. Conformally equivariant quantization : existence and uniqueness. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(6) :1999–2029, 1999.
- [17] C. Duval and V. Ovsienko. Conformally equivariant quantum Hamiltonians. *Selecta Math. (N.S.)*, 7(3) :291–320, 2001.
- [18] C. Duval and V. Ovsienko. Projectively equivariant quantization and symbol calculus : noncommutative hypergeometric functions. *Lett. Math. Phys.*, 57(1) :61–67, 2001.
- [19] Roe Goodman and Nolan R. Wallach. *Representations and invariants of the classical groups*, volume 68 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [20] Sarah Hansoul. Projectively equivariant quantization for differential operators acting on forms. *Lett. Math. Phys.*, 70(2) :141–153, 2004.
- [21] Sarah Hansoul. Existence of natural and projectively equivariant quantizations. *Adv. Math.*, 214(2) :832–864, 2007.
- [22] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978. Second printing, revised.
- [23] Shoshichi Kobayashi and Tadashi Nagano. On filtered Lie algebras and geometric structures. I. *J. Math. Mech.*, 13 :875–907, 1964.
- [24] Shoshichi Kobayashi and Tadashi Nagano. On filtered Lie algebras and geometric structures. III. *J. Math. Mech.*, 14 :679–706, 1965.
- [25] P. B. A. Lecomte. On the cohomology of  $\mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R})$  acting on differential operators and  $\mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R})$ -equivariant symbol. *Indag. Math. (N.S.)*, 11(1) :95–114, 2000.
- [26] P. B. A. Lecomte and V. Yu. Ovsienko. Projectively equivariant symbol calculus. *Lett. Math. Phys.*, 49(3) :173–196, 1999.
- [27] Pierre B. A. Lecomte. Classification projective des espaces d’opérateurs différentiels agissant sur les densités. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(4) :287–290, 1999.

- [28] Pierre B. A. Lecomte. Towards projectively equivariant quantization. *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, (144) :125–132, 2001. Noncommutative geometry and string theory (Yokohama, 2001).
- [29] S. E. Loubon Djounga. Conformally invariant quantization at order three. *Lett. Math. Phys.*, 64(3) :203–212, 2003.
- [30] P. Mathonet and F. Radoux. Existence of natural and conformally invariant quantizations of arbitrary symbols. *Submitted for publication, arXiv :0811.3710*.
- [31] P. Mathonet and F. Radoux. On natural and conformally equivariant quantizations. *J. London Math. Soc. to appear, arXiv :0707.1412*.
- [32] P. Mathonet and F. Radoux. Natural and projectively equivariant quantizations by means of Cartan connections. *Lett. Math. Phys.*, 72(3) :183–196, 2005.
- [33] P. Mathonet and F. Radoux. Cartan connections and natural and projectively equivariant quantizations. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 76(1) :87–104, 2007.
- [34] F. Radoux. Explicit formula for the natural and projectively equivariant quantization. *Lett. Math. Phys.*, 78(2) :173–188, 2006.
- [35] N. M. J. Woodhouse. *Geometric quantization*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1992. Oxford Science Publications.

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Définitions et notions nécessaires</b>                                | <b>13</b> |
| 1.1      | Fibré des densités . . . . .   | 13        |
| 1.2      | Espaces d'opérateurs différentiels . . . . .                             | 16        |
| 1.3      | Espaces de symboles . . . . .  | 17        |
| 1.4      | Quantifications $\mathfrak{g}$ -équivariantes . . . . .                  | 20        |
| 1.4.1    | Quantification projectivement équivariante . . . . .                     | 22        |
| 1.4.2    | Quantification conformément équivariante . . . . .                       | 22        |
| 1.4.3    | Sous-algèbres de champs polynomiaux . . . . .                            | 23        |
| 1.4.4    | Lien avec la mécanique quantique . . . . .                               | 27        |
| 1.5      | Structure et représentations de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ . . . . . | 29        |
| 1.5.1    | Structure de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ . . . . .                    | 29        |
| 1.5.2    | Diagrammes et tableaux de Young . . . . .                                | 32        |
| <b>2</b> | <b>La construction classique</b>   | <b>39</b> |
| 2.1      | La quantification affine . . . . .                                       | 40        |
| 2.2      | Opérateurs de Casimir . . . . .  | 40        |
| 2.3      | L'opérateur $C$ . . . . .  | 44        |
| 2.4      | L'opérateur $\mathcal{C}$ et les valeurs résonantes . . . . .            | 46        |
| 2.5      | Espaces arborescents et valeurs critiques . . . . .                      | 49        |
| <b>3</b> | <b>Géométrie Grassmannienne</b>  | <b>54</b> |
| 3.1      | Description algébrique de $\mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{R})$ . . . . .   | 54        |
| 3.2      | Description géométrique . . . . .  | 58        |
| 3.2.1    | Les grassmanniennes $G_q^{p+q}(\mathbb{K})$ . . . . .                    | 59        |
| 3.2.2    | Champs de vecteurs fondamentaux sur $\mathbb{R}_q^p$ . . . . .           | 62        |
| <b>4</b> | <b>Valeurs résonantes</b>  | <b>66</b> |
| 4.1      | Formes de Killing et opérateur de Casimir . . . . .                      | 66        |
| 4.2      | Existence et unicité . . . . .   | 74        |

|  |           |
|--|-----------|
| <i>TABLE DES MATIÈRES</i>  | 102       |
| <b>5 Valeurs critiques</b>   | <b>76</b> |
| 5.1 Existence de la quantification . . . . .   | 76        |
| 5.2 Unicité de la quantification . . . . .   | 81        |
| <b>6 Quantification aux ordres 1 et 2</b>  | <b>87</b> |
| 6.1 Formules explicites pour $\gamma$ . . . . .  | 88        |
| 6.2 Formules explicites de la quantification des symboles de degré<br>1 et 2 . . . . . | 91        |
| 6.2.1 Quantification des symboles de degré 1 . . . . .                                 | 93        |
| 6.2.2 Quantification des symboles de degré 2 . . . . .                                 | 94        |