Étude d'un mouvement générique

Le graphique de la figure 1 représente la hauteur d'une balle lancée verticalement vers le haut en fonction du temps.

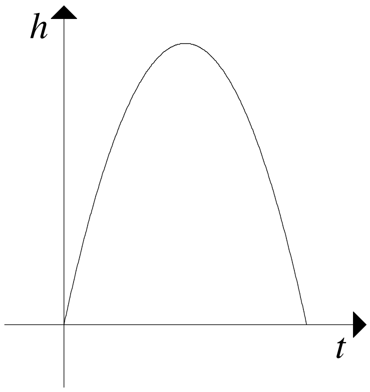

Figure 1

Celui de la figure 2 peut représenter le volume d'eau versée dans un vase en fonction du temps.

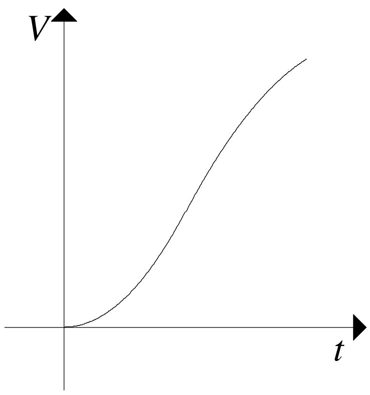

Figure 2

À ces graphiques, peuvent être associées des formules mais il n'en est pas toujours ainsi. Dans chaque cas, la variable indépendante est le temps, tandis que la variable dépendante représente tantôt la hauteur d'un objet, tantôt la vitesse d'un mobile, ou n'importe quelle grandeur qui varie dans le temps.

Les physiciens étudient ainsi les mouvements par le biais de fonctions du temps. Le plus souvent, ces mouvements sont régis par des forces particulières, telles que la force de pesanteur. Pour comprendre leur langage, nous étudions ci-après un mouvement complètement fictif sans nous préoccuper des forces en jeu. La situation traitée nous permettra d'apprendre à gérer toutes les particularités graphiques possibles.

Imprimé le 10 janvier 2007

1. Étude du mouvement d'une particule

Soit une particule (un point) qui se déplace arbitrairement sur un axe muni d'une origine et d'une unité (figure 3).

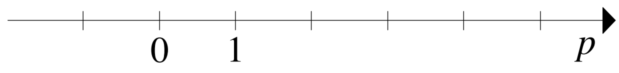

Figure 3

On considère que l'on peut connaître ce mouvement par le graphique qui représente la position p du mobile en fonction du temps t. On nous propose ainsi le graphique de la figure 4, où les unités sont, par exemple, le mètre pour la position et la minute pour le temps.

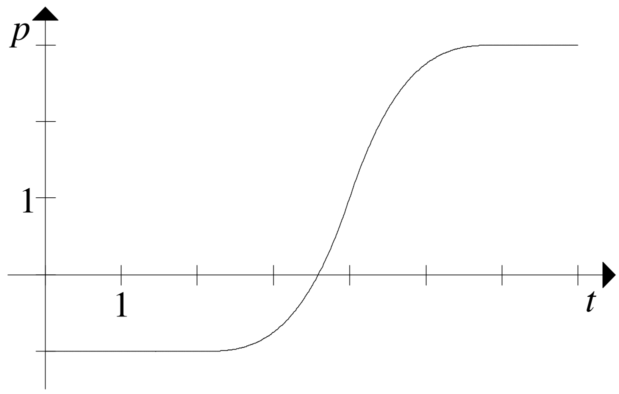

Figure 4

Le graphique de la figure 4, qui est courbe par endroits, n'est pas à confondre avec la trajectoire (rectiligne). Il ne représente pas non plus le profil vertical d'une route. Il donne tout simplement une valeur de la position du mobile à tout instant t. On dit que c'est le graphique de la **loi de mouvement**. Par exemple, en $t = 1$, la position du mobile est -1, c'est-à-dire que le mobile se trouve sur l'axe à gauche de l'origine ; quand $t = 4$, sa position vaut à peu près 1. Nous regarderons essentiellement trois caractéristiques de ce graphique : sa position par rapport à l'axe des t, sa croissance et sa concavité.

1.1 Position du graphique par rapport à l'axe des temps.

La position du graphique par rapport à l'axe des temps permet de savoir si la particule se situe à droite ou à gauche de l'origine sur la trajectoire telle qu'elle nous apparaît à la figure 3. Par exemple, entre $t = 0$ et $t = 1$, le mobile se situe à gauche de l'origine et sa position p est négative. Par contre, entre $t = 4$ et $t = 6$, il se situe à droite de l'origine et sa position est positive.

1.2 Croissance du graphique

Le graphique de $p\,(t)$ est strictement croissant par moments, « stationnaire » à d'autres. Dans le premier cas, cela signifie que les valeurs des positions de la particule augmentent

Imprimé le 10 janvier 2007

au cours du temps. C'est donc que la particule se meut sur l'axe dans le sens de sa flèche (vers la droite).

Sur les intervalles de temps où le graphique est parallèle à l'axe du temps (« palier »), le mobile ne change pas de position alors que le temps s'écoule. Il est donc à l'arrêt.

1.3 Vitesse moyenne du mobile

De $t = 2$ à $t = 5$, par exemple, le graphique est croissant. Mais cette croissance n'est pas aussi accentuée entre $t = 2$ et $t = 3$ qu'entre $t = 3$ et $t = 4$. En effet, la différence de position est d'environ $0,2$ pour le premier intervalle contre environ $0,8$ pour l'autre intervalle, de même longueur $\Delta t = 1$. C'est donc que le mobile à changé de vitesse. Nous estimerons donc utile de distinguer la vitesse moyenne du mobile sur différents intervalles. Sur le premier intervalle de temps, sa vitesse moyenne est de $0,2$ mètres par minute, tandis que sur le second, il est de $0,8$ mètres par minute. Nous aurions pu choisir Δt différent de 1, par exemple en considérant les intervalles de temps de $t = 2$ à $t = 2,5$ et de $t = 2,5$ à $t = 3$. Dans tous les cas, on a affaire à une moyenne. De manière générale, cette vitesse moyenne sur l'intervalle de temps $[t\ ; t + \Delta t]$ s'écrit

$$v_m = \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} \text{ ou encore } v_m = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Graphiquement, la vitesse moyenne correspond à la pente de la droite passant par les points $(t\ ; p(t))$ et $(t + \Delta t\ ; p(t + \Delta t))$ comme illustré à la figure 5. Dans ce calcul, on ne tient

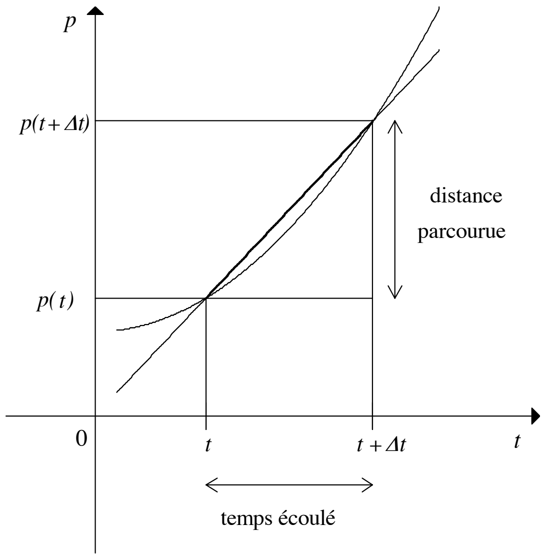

Figure 5

compte que des positions atteintes respectivement au début et à la fin de l'intervalle de temps. On ne tient donc pas compte d'un éventuel aller-retour. Dans ce cas, la différence de position ne correspondrait pas à la distance réelle parcourue qui, elle, serait plus grande. Par commodité, et jusqu'à nouvel ordre, nous considérerons que t est le début de l'intervalle de temps et que $t + \Delta t$ est la fin de l'intervalle de temps. Ainsi, $\Delta t > 0$. Nous écrirons donc toujours v_m comme ci-dessus.

1.4 Concavité du graphique

Considérons deux intervalles sur lesquels la « concavité » du graphique de la figure 4 n'est pas la même, alors que le graphique est croissant sur ces deux intervalles. Par exemple, sur [2 ; 4], on dit que la concavité est tournée vers le haut, ce qui se manifeste de la manière suivante : en divisant l'intervalle, par exemple en quatre parts égales, on obtient des écarts de position de plus en plus grands (figure 6).

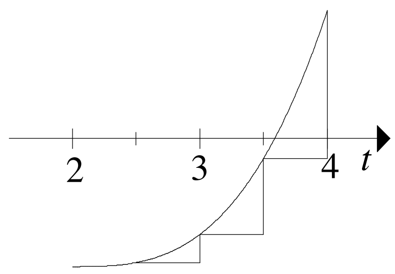

Figure 6

Dans l'intervalle [4 ; 6], au contraire, les écarts sont de plus en plus petits : on dira que la concavité est tournée vers le bas (figure 7).

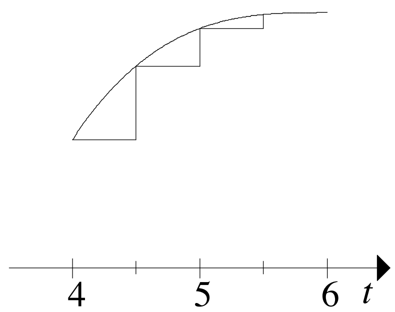

Figure 7

Dans le cas d'une concavité tournée vers le haut, les vitesses moyennes successives sont de plus en plus grandes ; elles sont de plus en plus petites dans le cas contraire.

À la lumière de ces deux exemples, on peut déjà se demander si la vitesse du mobile change à tout instant. Nous y reviendrons. Mais que signifierait une vitesse à un instant donné ? On appellera plus tard une telle vitesse « vitesse instantanée ». Dans la vie courante, la vitesse affichée par le compteur d'une voiture est censée être une vitesse instantanée (en réalité, elle est une vitesse moyenne estimée sur un court intervalle de temps). Il en va de même pour les radars de la police. En réalité, aucun appareil ne mesure une vitesse instantanée ! Pour l'instant, on pourrait relier intuitivement la **vitesse instantanée** et l'idée de **pente d'une courbe** en un point. Par exemple, si la courbe est croissante et que la concavité est tournée vers le haut, la pente est de plus en plus grande et on y verra là l'indice que le mobile accélère, et donc que sa vitesse instantanée est de plus en plus grande ; dans le cas d'une concavité tournée vers le bas, cette pente diminue et le mobile décélère. Ainsi, au moment où la concavité a changé de sens, la vitesse était maximale. Ce point s'appelle « point d'inflexion ».

2. Vers le concept de vitesse instantanée

Dans cette section, nous traiterons de deux questions :

Imprimé le 10 janvier 2007

- À quel moment un mobile de vitesse variable a-t-il une vitesse donnée ?
- Que vaut la vitesse d'un mobile à un moment donné, cette vitesse pouvant être variable ?

C'est surtout la deuxième question qui est l'enjeu de notre étude, mais la première lui sert de tremplin.

2.1 À quel moment un mobile possède-t-il une vitesse donnée ?

Nous concrétiserons cette question en comparant deux mobiles, l'un évoluant à vitesse constante et l'autre à vitesse variable.

Dans un premier exemple, les deux mobiles ont des lois de mouvement respectives données par les fonctions $p_1(t) = t^2$ et $p_2(t) = \sqrt{3} \cdot t$. Les graphiques de ces lois sont donnés à la figure 8.

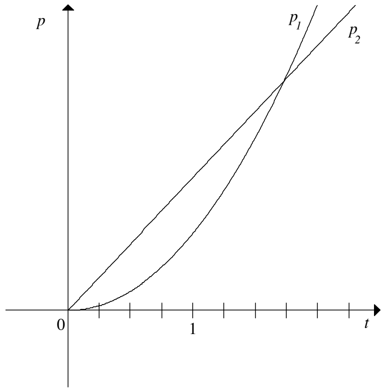

Figure 8

La particule P_2 possède une vitesse constante puisque sa loi de mouvement est représentée par une droite. Cette vitesse est donc égale à sa vitesse moyenne : $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \sqrt{3}$, qui est la pente de la droite. Par contre, la particule P_1 accélère sans cesse puisque la courbe qui représente sa loi de mouvement est de plus en plus « pentue ».

Demander quand les deux particules ont même vitesse revient à demander quand la particule P_1 possède une vitesse égale à $\sqrt{3}$. C'est bien là le type de question qui nous intéresse ici.

2.1.1 Comparer des déplacements sur des intervalles de temps de plus en plus petits

Pour déterminer quand les deux mobiles concernés à la figure 8 ont même vitesse, on va observer leurs déplacements respectifs sur des intervalles de temps identiques de plus en plus petits, ainsi que suggéré à la figure 9.

Lorsque le déplacement est identique (c'est-à-dire lorsque les hauteurs des contremarches de ces escaliers imaginaires sont égales pour un même intervalle de temps), c'est qu'on n'est « pas loin » de l'instant où les vitesses instantanées sont les mêmes. Et plus on diminue l'intervalle de temps fixé, meilleure sera la précision pour repérer l'instant cherché.

Calculons la hauteur des contremarches d'escalier donnant la variation de position de p_1 et de p_2 entre un instant t quelconque et un instant $t + \Delta t$, Δt étant fixé. Appelons Δp_1 la hauteur de la contremarche de p_1 et Δp_2 la hauteur de la contremarche de p_2 entre les instants t et $t+\Delta t$. On a $\Delta p_1 = (t + \Delta t)^2 - t^2 = 2t\cdot\Delta t + (\Delta t)^2$ et $\Delta p_2 = \sqrt{3}\,(t + \Delta t) - \sqrt{3}\cdot t =$

 Imprimé le 10 janvier 2007

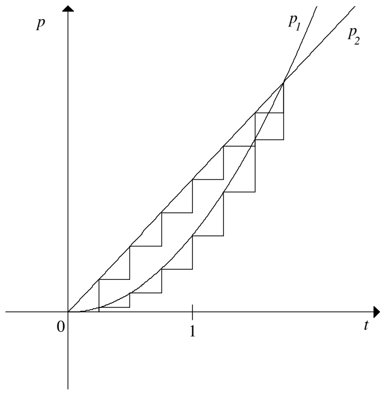

Figure 9

$\sqrt{3}\cdot\Delta t$. On cherche le moment où les hauteurs des contremarches sont égales. On égale donc Δp_1 à Δp_2 :

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \Leftrightarrow 2t\cdot\Delta t + (\Delta t)^2 = \sqrt{3}\cdot\Delta t \Leftrightarrow 2t + \Delta t = \sqrt{3}.$$

Cette égalité doit être vérifiée pour des Δt aussi petits soient-ils. Nous envisageons donc de rendre Δt nul, ce qui donne $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cette dernière procédure peut paraître bizarre puisqu'il s'agit de supprimer un terme (Δt) dans un des membres de l'équation, sans compensation dans l'autre membre. On peut donc avoir un doute sur le résultat : $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est-il bien l'instant où la particule P_1 a une vitesse de $\sqrt{3}$?

2.1.2 Valider la démarche précédente

Nous allons contrôler à présent que cette réponse est exacte, par d'autres moyens.

> D'une part, à l'instant cherché, l'écart entre les positions des deux mobiles doit être maximale. En effet, en $t = 0$, les deux particules sont au même endroit. Ensuite, l'écart entre elles croît : P_1 évolue donc à une vitesse inférieure à celle de P_2 qui vaut constamment $\sqrt{3}$ (voir figure 10). Dès le moment où l'écart diminue, c'est le contraire. Donc la vitesse de P_1 vaut $\sqrt{3}$ là où l'écart arrête de croître pour commencer à décroître.
>
> Ce raisonnement conduit à chercher pour quelle valeur de t la différence $\sqrt{3}\cdot t - t^2$ est maximale, ce qui est facile car cette différence est donnée par une expression du second degré. On obtient bien le résultat obtenu précédemment : $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

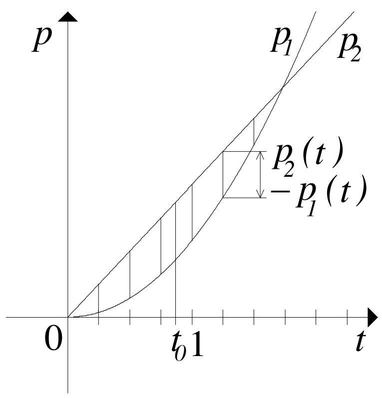

Figure 10

D'autre part, l'instant t cherché est celui pour lequel la courbe relative à P_1 possède une « pente » égale à $\sqrt{3}$. En effet, considérons des droites de pente $\sqrt{3}$ comme suggéré à la figure 11.

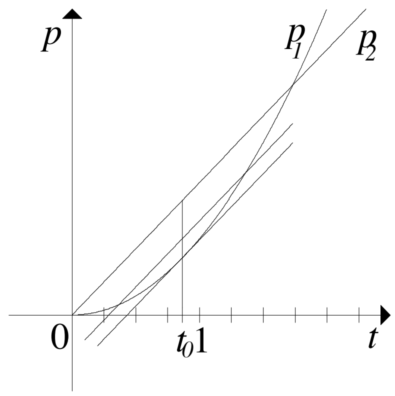

Figure 11

Si l'une de ces droites est sécante à la courbe $p_1(t)$, ses points de rencontre avec celle-ci déterminent un intervalle de temps sur lequel la vitesse moyenne de P_1 vaut $\sqrt{3}$. Vu que P_1 accélère, sa vitesse « instantanée » sur cet intervalle croît d'une valeur inférieure à $\sqrt{3}$ jusqu'à une valeur supérieure. Elle sera donc égale à $\sqrt{3}$ à un moment donné de cet intervalle. L'idée est alors de réduire cet intervalle à un point, en déterminant une droite de pente $\sqrt{3}$ qui ne rencontre la courbe $p_1(t) = t^2$ qu'en un seul point. La pente de cette droite étant connue, il ne reste qu'à déterminer le terme indépendant k de son équation, en exprimant que l'égalité $\sqrt{3} \cdot t + k = t^2$ ne peut être vérifiée que pour une seule valeur de t, ce qui se réalise seulement si le réalisant de cette équation du second degré s'annule : $3 + 4k = 0$, soit $k = -\frac{3}{4}$. La valeur de t correspondante vaut bien $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui est cohérent avec le travail antérieur.

2.1.3 Vers une généralisation

Nos investigations précédentes sont-elles généralisables ? Regardons modestement ce qui se passe lorsqu'on remplace $p_1(t) = t^2$ par $p_1(t) = t^3$, l'autre mouvement restant uniforme, par exemple $p_2(t) = \frac{3}{4}t$.

Comparer les déplacements de ces deux mobiles sur des intervalles de temps identiques de plus en plus petits revient, on l'a vu plus haut, à écrire que $\Delta p_1 = \Delta p_2$. Sachant que $\Delta p_1 = (t + \Delta t)^3 - t^3 = 3t^2 \cdot \Delta t + 3t \cdot (\Delta t)^2 + (\Delta t)^3$ et $\Delta p_2 = \frac{3}{4} \cdot \Delta t$, cette égalité conduit à

$$3t^2 + 3t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2 = \frac{3}{4}.$$

Si l'on prend $\Delta t = 0$, on obtient $t = \frac{1}{2}$.

Il nous est, cette fois, difficile de contrôler ce résultat comme précédemment. En effet, l'écart des positions respectives des deux mobiles s'écrit $\frac{3}{4}t - t^3$, fonction du troisième degré dont il est difficile, à ce stade de nos connaissances, de savoir si elle possède un maximum et, si oui, de le trouver.

Par ailleurs, la recherche d'une droite de pente $\frac{3}{4}$ n'ayant qu'un point commun avec $p_1(t) = t^3$ conduit à exprimer que l'équation $\frac{3}{4}t + k = t^3$, du troisième degré, possède une solution unique, ce qu'on ne sait pas faire non plus...

Il n'empêche que ce fameux calcul qui consiste à annuler Δt a de l'avenir, comme nous le verrons plus loin.

2.2 Que vaut la vitesse d'un mobile à un moment donné ?

2.2.1 Deux exemples

Revenons au mobile dont la loi de mouvement est la fonction $p(t) = t^2$. Le travail précédent nous donne une idée pour évaluer sa vitesse en un instant donné t, que nous noterons $v(t)$. Elle consiste à annuler Δt dans l'expression de sa vitesse moyenne sur $[t\,; t + \Delta t]$:

$$v_m = \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t,$$

ce qui donne $v(t) = 2t$.

On peut tester la légitimité de ce calcul sur le résultat trouvé à la section 2.1.1 : en $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, la vitesse du mobile vaut bien $\sqrt{3}$.

Pour ce qui est du mobile dont la loi de mouvement est $p(t) = t^3$, c'est pareil : on part de

$$v_m = \frac{(t + \Delta t)^3 - t^3}{\Delta t} = 3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2,$$

pour arriver à $v(t) = 3t^2$.

De nouveau, on constate que ce calcul corrobore le résultat supputé à la section 2.1.3 : en $t = \frac{1}{2}$, la vitesse du mobile vaut $\frac{3}{4}$.

Cette façon de calculer une vitesse variable en un instant donné a une certaine légitimité du seul fait qu'elle donne des résultats probants dans des cas particuliers significatifs. En effet, pour $p(t) = t^2$, nous pouvons imaginer une validation semblable à celle développée à la section 2.1.2 pour n'importe quelle valeur de t : par exemple, on prouvera que la vitesse vaut 2 en $t = 1$ en prouvant que l'instant auquel la vitesse vaut 2 est effectivement $t = 1$.

Pour ce qui est de $p(t) = t^3$, c'est plus délicat, comme on l'a vu à la section 2.1.3. Cependant, on ne voit pas a priori de raison qui empêcherait de généraliser de t^2 à t^3. D'autres mathématiciens avant nous, Fermat par exemple, ne se sont pas privés de *définir* ainsi une vitesse en un instant donné. Nous y reviendrons à la prochaine section.

> Mais, auparavant, proposons un argument supplémentaire : il est basé sur l'intuition que le mobile correspondant à $p(t) = t^3$ accélère à tout instant. Prenons $t = 1$: la vitesse supposée, donnée par $v(t) = 3t^2$, serait donc égale à 3. Supposons par l'absurde que cette vitesse soit strictement supérieure à 3, c'est-à-dire égale à $3+\varepsilon$ où $\varepsilon > 0$. Alors, en choisissant une valeur de Δt suffisamment petite, on pourrait rendre $3 + 3\Delta t + (\Delta t)^2$, c'est-à-dire v_m entre $t = 1$ et $t = 1 + \Delta t$, inférieure à $3 + \varepsilon$, ce qui contredirait le fait que le mobile accélère et donc que sa vitesse moyenne sur $[1\,; 1 + \Delta t]$ ne peut être que supérieure à sa vitesse en $t = 1$.
>
> Comme ce raisonnement peut être fait pour toute valeur de ε si petite et positive soit-elle, cela signifie que la vitesse du mobile ne peut être strictement supérieure à 3. On justifie de la même manière qu'elle ne peut être strictement inférieure à 3 en prenant $\Delta t < 0$ suffisamment petit et en rendant $3 + 3\Delta t + (\Delta t)^2$ plus grand que $3 - \varepsilon$. En outre, rien n'empêche de faire un tel raisonnement pour d'autres valeurs de t.
>
> Fort de ces raisons, nous officialisons ces calculs comme ci-dessous.

2.2.2 Vitesse instantanée d'un mobile

Soit un mobile P dont la loi de mouvement est donnée par la fonction $p(t)$. Nous avons vu que sa vitesse moyenne sur l'intervalle de temps $[t\,; t + \Delta t]$ est donnée par $\dfrac{\Delta p}{\Delta t}$; on l'appelle aussi taux moyen de variation de la position de P. Le résultat obtenu en supprimant de cette expression les termes contenant Δt, une fois faites toutes les simplifications algébriques classiques, s'appelle vitesse instantanée de P à l'instant t. On dit qu'il s'agit de la limite lorsque Δt tend vers 0 du taux de variation moyen de la position de P et on l'écrit

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Cette nouvelle loi s'appelle loi de vitesse du mobile P.

Remarque : si l'on remplaçait Δt par 0 avant les simplifications algébriques, on ne verrait rien du tout car on aurait 0 au numérateur et au dénominateur.

Remarque : par ailleurs, on a vu plus haut qu'aucun instrument n'est capable de mesurer une vitesse instantanée. *Seul l'esprit peut dépasser l'expérience : c'est une décision d'appeler* vitesse instantanée *l'expression obtenue en posant purement et simplement* Δt *égal à* 0 *dans l'expression simplifiée de la vitesse moyenne. C'est là un concept imaginé par l'être humain pour répondre à une question qui relève de l'instantané (si insaisissable pratiquement que les mesures ne peuvent que s'en approcher sans l'atteindre). Cette démarche paraîtra sans doute inhabituelle au lecteur. Car on s'imagine souvent qu'il suffit d'observer « les choses de la nature » pour en tirer des concepts immédiatement disponibles pour raisonner* (AHA, 1999).

2.3 Des vitesses négatives

Au début de cette brochure, nous avons évoqué le jet d'une balle dont le mouvement est représenté à la figure 1. La physique nous apprend que, dans ce cas, la loi de mouvement est une fonction du second degré, représentée par une parabole. Soit, par exemple, $h(t) = -5t^2 + 15t$ (t en secondes et h en mètres).

En vertu de ce qui précède, nous pouvons évaluer la vitesse de cette balle au moyen du calcul suivant

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (-10t - 5\Delta t + 15),$$

soit

$$v(t) = -10t + 15.$$

Mais un tel résultat nous oblige à considérer des vitesses négatives. Loin de nous gêner, cette conséquence est commode. Ainsi, lorsque $v(t)$ est positive, soit pour des valeurs de t comprises entre 0 et $\frac{3}{2}$, cela signifie que la balle monte ; quand cette vitesse est négative, c'est-à-dire pour des valeurs de t comprises entre $\frac{3}{2}$ et 3, c'est que la balle redescend. Par exemple, si $t = 1$, la vitesse vaut 5 m/s ; si $t = 2$, la vitesse vaut -5 m/s.

Le signe de la vitesse nous renseigne donc sur le sens du parcours, que ce soit celui d'une balle qui monte et qui descend, ou celui d'un mobile sur un axe gradué.

Lorsque la hauteur de la balle est maximale, sa vitesse est nulle (dans notre exemple, en $t = \frac{3}{2}$).

3. Un seul calcul, celui des dérivées, pour divers contextes

3.1 Un même problème vu sous deux angles différents

Soit une plaque en tôle dont on a retiré des carrés aux quatre coins selon la figure 12.

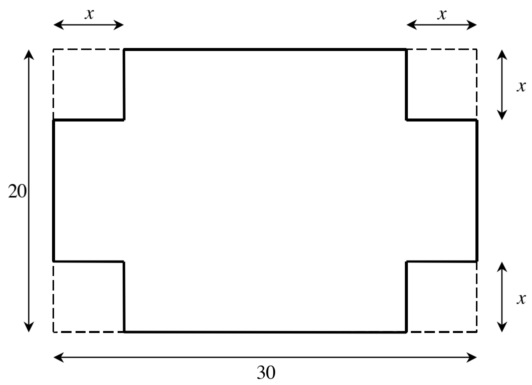

Figure 12

En relevant les bords de cette plaque, on obtient une boîte rectangulaire et ouverte dont la profondeur est x. On voudrait déterminer la valeur de x telle que le volume de la boîte soit maximum.

Le volume de la boîte est

$$V(x) = (20 - 2x)(30 - 2x)x = 4x^3 - 100x^2 + 600x = 4\left(x^3 - 25x^2 + 150x\right).$$

On remarque que, lorsque $x = 0$, le volume est nul, ce qui est logique puisqu'alors il n'y a pas de bord à plier pour constituer une boîte. De même, il n'est pas surprenant que, lorsque les coins coupés atteignent la moitié du plus petit côté (donc pour $x = 10$), le volume soit également nul puisqu'il y a des bords mais plus de fond à la boîte ! Il n'est pas difficile d'imaginer que lorsque x augmente à partir de 0, puisque des bords apparaissent et qu'il y a encore du fond à la boîte, il y aura un volume non nul ; et que si x augmente trop et se rapproche de 10, que le volume va diminuer pour finir par redevenir nul. On se doute donc qu'entre les valeurs $x = 0$ et $x = 10$, il y aura une valeur pour laquelle le volume de la boîte sera maximum, comme le confirme une esquisse du graphique de la fonction (figure 13). Mais comment déterminer cette valeur ?

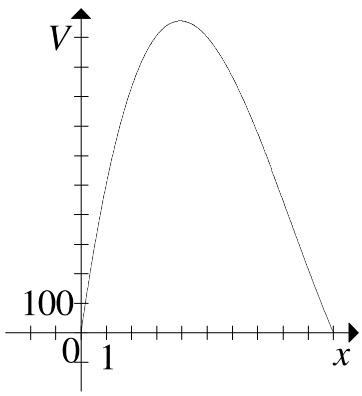

Figure 13

L'idée consiste ici à poser un autre regard sur ce graphique : on imagine le temps t à la place de la variable x et la position p d'un mobile sur une trajectoire rectiligne à la place du volume V de la boîte (figure 14).

Le problème devient alors de déterminer l'instant auquel la vitesse est nulle, sachant que

$$p(t) = 4t^3 - 100t^2 + 600t \text{ et que } 0 \leqslant t \leqslant 10.$$

Imprimé le 10 janvier 2007

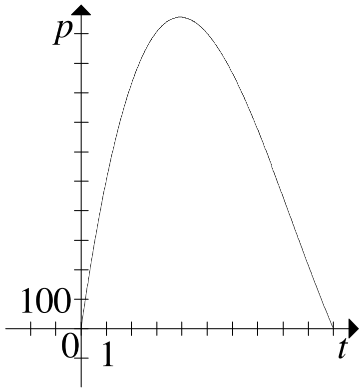

Figure 14

La vitesse $v(t)$ d'un tel mobile s'écrit

$$\begin{aligned}
v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4(t+\Delta t)^3 - 100(t+\Delta t)^2 + 600(t+\Delta t) - (4t^3 - 100t^2 + 600)\,t}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{12t(\Delta t)^2 + 12t^2\Delta t + 4(\Delta t)^3 - 200t\Delta t - 100(\Delta t)^2 + 600\Delta t}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left(12t\Delta t + 12t^2 + 4(\Delta t)^2 - 200t - 100\Delta t + 600\right) \\
&= 12t^2 - 200t + 600
\end{aligned}$$

Les valeurs de t pour lesquelles cette vitesse est nulle sont $\frac{25-5\sqrt{7}}{3} \approx 3,92$ et $\frac{25+5\sqrt{7}}{3} \approx 12,74$; cette dernière valeur étant supérieure à 10, on l'élimine.

Ainsi, le maximum du volume V sera atteint pour la même valeur de x que la valeur de t pour laquelle la vitesse v est nulle (et la position du mobile maximale), donc pour $x = \frac{25-5\sqrt{7}}{3} \approx 3,92$.

Un problème qui semblait nouveau, une fois ramené à l'étude connue du déplacement d'un mobile, a pu être résolu.

De même, l'expression $12t^2 - 200t + 600$ représente la vitesse instantanée d'un mobile en fonction du temps, c'est-à-dire le taux de variation instantané de la position du mobile par rapport au temps, mais représente également, au choix de la lettre près (elle devient $12x^2 - 200x + 600$), le taux de variation instantané[1] du volume de la boîte par rapport à la longueur des carrés découpés. Par abus de langage, on va jusqu'à parler de vitesse de variation du volume en fonction de la longueur des carrés découpés ou, plus souvent, de taux de variation instantané.

Faisons un pas de plus dans l'abstraction. Soit x n'importe quelle grandeur, explicitée ou non (dans ce dernier cas, on dira que x est simplement une variable indépendante) : si une autre grandeur y, explicitée ou non (dans ce dernier cas, on dira que y est une variable dépendant de x), s'exprime sous la forme $y = 4x^3 - 100x^2 + 600x$, alors, entre $x = 0$ et $x = 10$, y atteint un maximum en $x = \frac{25-5\sqrt{7}}{3} \approx 3,92$ et $12x^2 - 200x + 600$ représente la vitesse de variation instantanée de y en fonction de x.

[1] les mathématiciens n'ont pas trouvé un meilleur mot ici, bien que le problème de la boîte n'ait rien à voir avec le temps donc avec un instant...

Imprimé le 10 janvier 2007

3.2 De la vitesse instantanée à l'accélération instantanée

De la même manière que nous avons défini la vitesse instantanée à partir de la loi de mouvement, nous pouvons définir l'accélération instantanée $a(t)$ à partir de la loi de vitesse :

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Exemple : Soit une particule dont la loi de mouvement est $p(t) = 5t^2 + 3t - 7$. Sa loi de vitesse est alors $v(t) = 10t + 3$ et, par conséquent, sa loi d'accélération est $a(t) = 10$.

Dans ce premier exemple, l'accélération est positive. Donc la vitesse de la particule augmente sans cesse. Puisque la vitesse du mobile à un instant t correspond à la pente de la courbe à cet instant, le graphique de la loi de mouvement sera convexe. De fait, la loi de mouvement $p(t)$ est une fonction du second degré et le coefficient de t^2 est positif : il est alors bien connu que la concavité de la courbe est vers le haut.

Exemple : Soit une particule dont la loi de mouvement est $p(t) = 2t^3 - 18t^2 + 15t + 17$. Sa loi de vitesse est alors $v(t) = 6t^2 - 36t + 15$ et, par conséquent, sa loi d'accélération est $a(t) = 12t - 36$.

Dans cet exemple, on observe que lorsque t est supérieur à 3, l'accélération est positive, donc la vitesse est croissante et la courbe est convexe. Au contraire, si t est inférieur à 3, l'accélération est négative, donc la vitesse décroît et la courbe est concave.

Observons également que la croissance ou la décroissance de la vitesse ne donne aucune indication quant au signe de la vitesse. Ainsi, par exemple à $t = 4$, la vitesse est croissante (puisque $t > 3$) et elle est négative (elle vaut -33) ; tandis que, par exemple à $t = 7$, la vitesse est toujours croissante ($t > 3$) mais elle est positive (elle vaut 57). De même, à $t = 0$, la vitesse est décroissante (puisque $t < 3$) et elle est positive (elle vaut 15), tandis que, par exemple à $t = 1$, la vitesse est toujours décroissante (puisque $t < 3$) mais elle est négative (elle vaut -15).

3.3 Les fonctions dérivées et leur calcul rapide

Les sections 1 et 2 nous ont amenés à interpréter une même fonction dans des contextes variés.

Ainsi, la fonction $y = x^3$ peut indifféremment représenter le volume V d'un cube de côté c, la position p d'un mobile en fonction du temps, la vitesse v d'un autre mobile en fonction du temps, une accélération,... Il arrive, mais ce n'est pas systématique, que le choix des notations rappelle le contexte. Dans les cas précédents, on pourrait écrire $V = c^3$; $p = t^3$; $v = t^3$; $a = t^3$.

Dans les problèmes rencontrés jusqu'à présent, nous nous sommes focalisés sur un calcul particulier qui, dans le cas général, peut s'écrire

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Généralisons-le donc. Soit une fonction $y = f(x)$. On appelle taux de variation moyen sur l'intervalle $[x\ ; x + \Delta x]$ l'expression

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

On appelle **taux de variation instantané de f en x** ce que « devient » le taux de variation moyen lorsque Δx « tend vers 0 ». On le note

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

La fonction f' est, en quelque sorte, un « élément dérivé » de la fonction f. On l'appelle aussi, pour cette raison, la **fonction dérivée de f** ou, simplement, la dérivée de f.

Dans plusieurs cas, $f'(x)$ s'obtient en annulant Δx dans le taux moyen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, une fois faites toutes les simplifications algébriques classiques.

Par exemple, et pour mémoire, si $y = f(x) = x^2$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ et $f'(x) = 2x$. De manière succincte, on écrit $(x^2)' = 2x$.

> Lorsque les fonctions sont plus compliquées, il existe des règles de calcul rapide que la plupart des manuels scolaires développent. Ces règles sont précisées et justifiées partiellement en annexe. Contentons-nous, ici, d'en illustrer quelques-unes.
>
> Tout d'abord, nous savons que $(x^2)' = 2x$; $(x^3)' = 3x^2$. Suivant une sorte de régularité, on aurait aussi $(x^4)' = 4x^3$; $(x^5)' = 5x^4$ et, plus généralement, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_0$ (une démonstration plus avancée montre que cette formule reste vraie également pour $n \in \mathbb{Q}$ et même pour $n \in \mathbb{R}$). En particulier, si $n = 1$, $(x)' = 1$.
>
> Ensuite, d'après l'exemple travaillé à la section 1, on peut multiplier ces fonctions par des réels et additionner les résultats obtenus. Par exemple,
>
> $$\begin{aligned}(4x^3 - 100x^2 + 600x)' &= (4x^3)' + (-100x^2)' + (600x)' \\ &= 4(x^3)' - 100(x^2)' + 600(x)' \\ &= 4 \cdot 3x^2 - 100 \cdot 2x + 600 \cdot 1 \\ &= 12x^2 - 200x + 600.\end{aligned}$$
>
> Amusant, n'est-ce pas ?
>
> Enfin, on peut multiplier des fonctions entre elles. Mais les choses sont moins drôles. Par exemple, si $y = x^3 \cdot x^2$, il n'est pas vrai que $(x^3 \cdot x^2)'$ s'obtient en multipliant $(x^3)'$ par $(x^2)'$. Sinon, on arriverait à un résultat contradictoire avec une des règles citées précédemment :
>
> $$\begin{aligned}(x^3 \cdot x^2)' = (x^5)' &= 5x^4 \\ &\neq 3x^2 \cdot 2x.\end{aligned}$$
>
> Un autre exemple :
>
> $$\begin{aligned}(x^3)' &= 3x^2 \\ &\neq (x^2)' \cdot (x)' = 2x.\end{aligned}$$
>
> Bref, du travail en perspective !

Autre résultat important : le **signe de la dérivée** en un point indique si la fonction est croissante ou décroissante en ce point, c'est à dire si la pente à la courbe « monte » ou « descend ». Si la dérivée est **positive**, c'est que la fonction est **croissante** ; si la dérivée est **négative**, c'est que la fonction est **décroissante**.

Ce résultat est acquis pour les raisons suivantes :

- Nous avons vu à la section 1 que toute fonction peut être interprétée comme le mouvement d'un mobile en fonction du temps.
- De plus, à la section 3, nous avons vu que lorsque la vitesse d'un mobile (la dérivée de sa loi de position) est positive, c'est que sa loi de position est croissante, tandis que si sa vitesse est négative, c'est que sa loi de position est décroissante.

De même, au vu des observations faites aux sections 4, 1 et 2, nous pouvons affirmer que la concavité du graphique de la fonction est donnée par le **signe de la dérivée seconde** (c'est-à-dire la dérivée de la dérivée ; l'accélération dans un contexte cinématique). Si la dérivée seconde est **positive**, la **concavité est tournée vers le haut** (l'accélération est positive, donc la vitesse augmente sans arrêt) ; si la dérivée seconde est **négative**, la **concavité est tournée vers le bas** (l'accélération est négative, donc la vitesse diminue sans arrêt).

4. Des tangentes

À la section 2.1.2, à la figure 11, nous avions déplacé une droite qui n'avait finalement plus qu'un point de contact avec la courbe. Cette droite matérialisait la « pente » à la courbe, pente qui valait précisément la vitesse du mobile à un instant précis. Les mathématiciens ont donné à cette droite le nom de tangente.

Mais le mot tangente a déjà été utilisé les années antérieures : il s'agissait de la tangente au cercle. Elle était définie comme étant la droite passant par un point donné du cercle et ce point était précisément le seul contact de cette droite avec le cercle. Nous ferons désormais un usage différent des tangentes qui nous fera abandonner cette première vision. En particulier, nous considérerons des droites qui « collent » bien à la courbe aux alentours d'un point. Dans certains cas, ce ne sera pas contradictoire avec la notion de tangente au cercle, dans d'autres bien (voir figure 15 : ce que nous définirons comme étant la tangente à la courbe au point A d'abscisse 1 a non seulement un contact avec la courbe en ce point, mais aussi au point B d'abscisse -2).

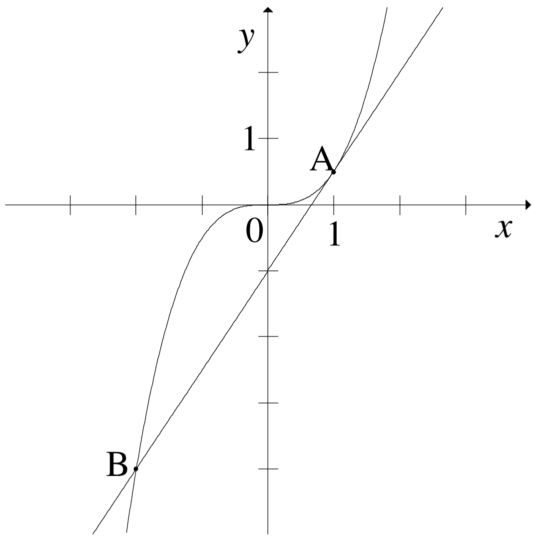

Figure 15

Pour cette raison, nous définirons la **tangente à une courbe en un point** comme étant la **droite qui passe par ce point** et dont le **coefficient angulaire est égal à la pente à la courbe en ce point**. Le point s'appelle point de tangence à la courbe ; il est

Imprimé le 10 janvier 2007

un point de contact entre la courbe et la tangente (mais pas nécessairement le seul). D'autre part, dans un contexte cinématique (page 4 de la section 4), nous avons interprété la pente d'une courbe en un point comme étant la vitesse instantanée à l'instant correspondant ; avec le même raisonnement fait à la fin de la section 3, on peut affirmer que **la pente cherchée est la dérivée de la fonction au point considéré** : ainsi, tangente et courbe auront même « pente » au point choisi. D'où la définition :

Soit une fonction f. Si la dérivée existe en $x = x_0$, alors la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_0 est la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

4.1 Droite-guide

Dans cette brochure, nous retiendrons deux utilisations de la tangente. La première est d'aider à représenter plus finement l'allure d'une courbe quand on ne dispose ni d'une calculatrice graphique ni d'un ordinateur. En effet, les tangentes ont alors le rôle de droites-guides : imaginons que l'on veuille tracer une courbe et que l'on en connaisse quelques points. Il y a beaucoup de manière de passer par un point donné. La figure 16 montre « quelques » manières de passer par le point $\left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.

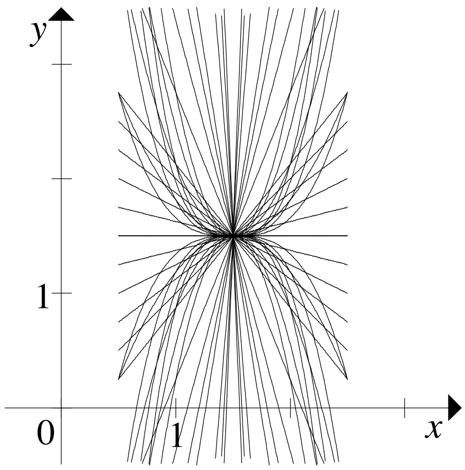

Figure 16

Si, en plus, on connaît la pente à la courbe en ce point, par exemple 1, cela élimine de nombreuses manières de s'approcher et de repartir du point. Il en reste cependant encore beaucoup (une infinité en fait) comme le montre la figure 17.

Si l'on s'en tient plus simplement à des fonctions du premier degré, dont le graphique est alors une droite, il ne reste qu'une droite qui passe par le point considéré et dont le coefficient angulaire est égal à la pente de la courbe en ce point (figure 18).

Typiquement, une fois tracée la tangente au point considéré, la courbe semble atterrir au point considéré, avant d'aussitôt en redécoller, comme à l'exemple de la figure 19.

C'est le « Touch and Go », un exercice pratiqué par les élèves-pilotes d'avion et qui consiste à poser leur appareil sur la piste pour en redécoller aussitôt. Il nous faut nuancer cette image : l'idée selon laquelle la tangente est une droite qui frôle une courbe n'est pas correcte. En effet, en un point d'inflexion par exemple, la courbe « se pose » effectivement d'un côté de la tangente, mais le « décollage » se déroule de l'autre côté de celle-ci, comme si l'avion atterrissant sur la piste, en redécollait par en-dessous ! Ainsi, en un point d'inflexion, la courbe traverse la tangente précisément en ce point (voir ce qui se produit au point d'abscisse 3 de la figure 20).

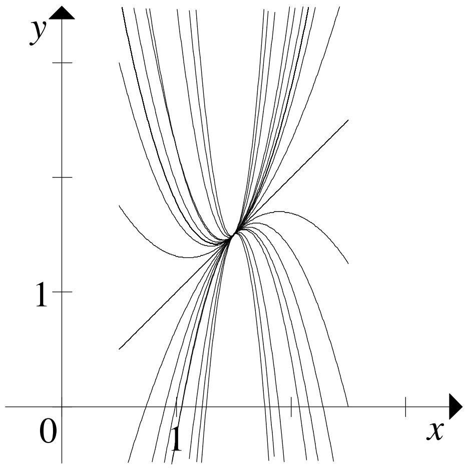

Figure 17

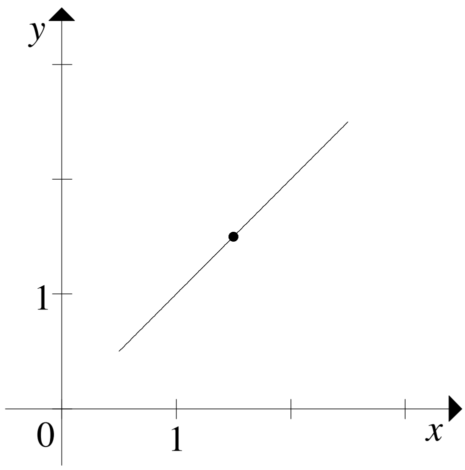

Figure 18

La figure 20 représente l'allure de la courbe représentative du mouvement d'un mobile se déplaçant selon une trajectoire rectiligne. Il démarre à l'instant $t = 0$ de la position $p = 2$, accélère jusqu'à l'instant $t = 3$; à cet instant, il occupe la position $p = 6$ et sa vitesse instantanée vaut 2 ; il décélère ensuite jusqu'à l'arrêt qui se produit à l'instant $t = 6$ et à la position $p = 10$; il fait alors demi-tour et atteint la position $p = 8,25$ à l'instant $t = 7,5$; sa vitesse vaut alors $-2,5$; il continue à décélérer jusqu'à l'instant $t = 9$ et la position $p = 2$; sa vitesse devient alors constante et vaut -6.

4.2 Droite-estimative

Un second usage de la tangente est de donner des estimations. La tangente en un point, du fait de sa « proximité » avec la courbe au « environs » de ce point, permet d'évaluer la valeur d'une fonction en un point « voisin » du point de référence. Par exemple, on sait que $\sqrt{9} = 3$; on peut vouloir connaître une valeur approchée de $\sqrt{10}$. En considérant la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ (sa dérivée est $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$) et en « lisant » la valeur cherchée sur la tangente, on a

$$\sqrt{10} \approx f(9) + f'(9) \cdot (10 - 9) = 3 + \frac{1}{2 \cdot 3} = 3 + \frac{1}{6} \approx 3,167$$

La figure 21 montre combien la tangente reste « longtemps » très proche de la courbe aux alentours de $x = 9$. Autrement dit, l'estimation proposée est très proche de la valeur « exacte » de $\sqrt{10}$.

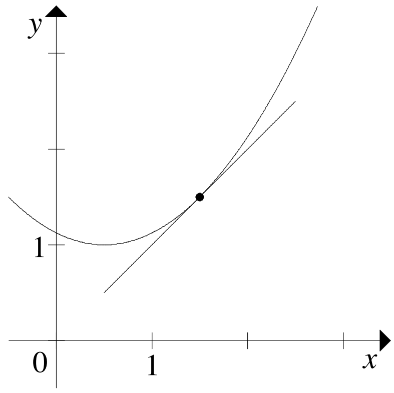

Figure 19

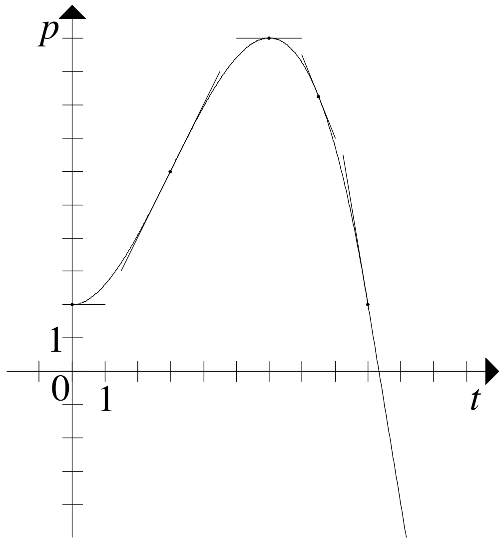

Figure 20

L'intérêt de faire cette estimation perd de son évidence si l'on dispose d'une simple calculatrice...

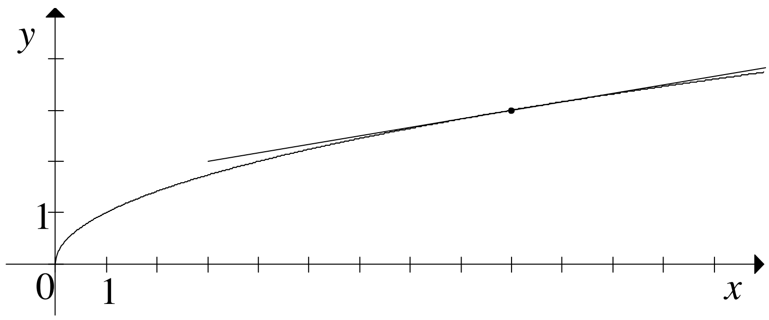

Figure 21

Imprimé le 10 janvier 2007

5. Énoncés destinés au élèves

Les feuilles ci-après sont destinées à être photocopiées et distribuées aux élèves, au fur et à mesure des besoins.

Imprimé le 10 janvier 2007

I Étude du mouvement d'une particule

Soit une particule (un point) qui se déplace arbitrairement sur un axe muni d'une origine et d'une unité (figure 1).

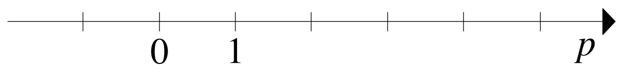

Figure 1

On considère que l'on peut connaître ce mouvement par le graphique qui représente la position p du mobile en fonction du temps t. On nous propose ainsi le graphique de la figure 2, où les unités sont, par exemple, le mètre pour la position et la minute pour le temps. Décrire par des phrases en français et le plus complètement possible le mouvement du mobile décrit par le graphique de la figure 2.

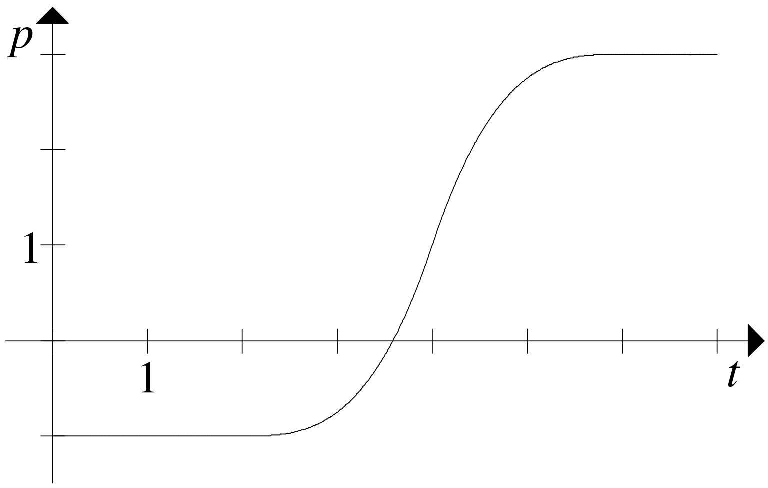

Figure 22

Imprimé le 10 janvier 2007

II Deux particules et une vitesse

Approche graphique

Considérons à présent deux particules P_1 et P_2 qui se déplacent sur un axe orienté comme à la figure 1. Leurs positions respectives p_1 et p_2 en fonction du temps sont données par les graphiques de la figure 3.

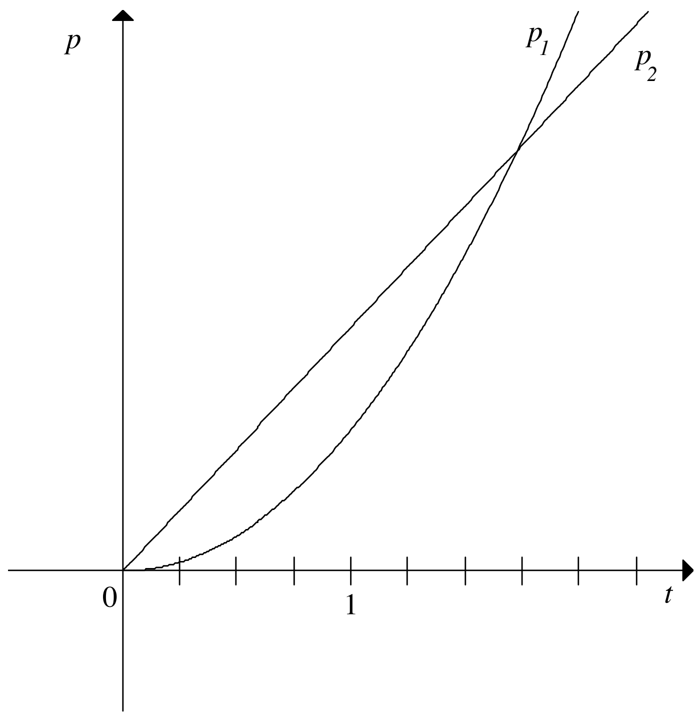

Figure 3

Décrire les mouvements de ces deux particules.

Y a-t-il un ou des moments où ces deux particules ont la même vitesse ? Justifier. Estimer ce ou ces moments.

Imprimé le 10 janvier 2007

Approche analytique

Considérons deux particules P_1 et P_2 qui se déplacent sur un axe orienté comme à la figure 1. Leurs positions respectives p_1 et p_2 en fonction du temps sont données par les fonctions

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \quad t^2 \\ p_2(t) &= \quad \sqrt{3} \cdot t \end{aligned}$$

À quel moment ces deux particules ont la même vitesse instantanée ? Justifier.

Quel est l'avantage de connaître les expressions analytiques des positions de P_1 et P_2 ?

Imprimé le 10 janvier 2007

III Deux autres particules et une vitesse

Considérons à présent deux particules P_1 et P_2 qui se déplacent sur un axe orienté comme à la figure 1. Leurs positions respectives p_1 et p_2 en fonction du temps sont données par les fonctions

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^3 \\ p_2(t) &= \tfrac{3}{4} \cdot t \end{aligned}$$

selon les graphiques de la figure 4.

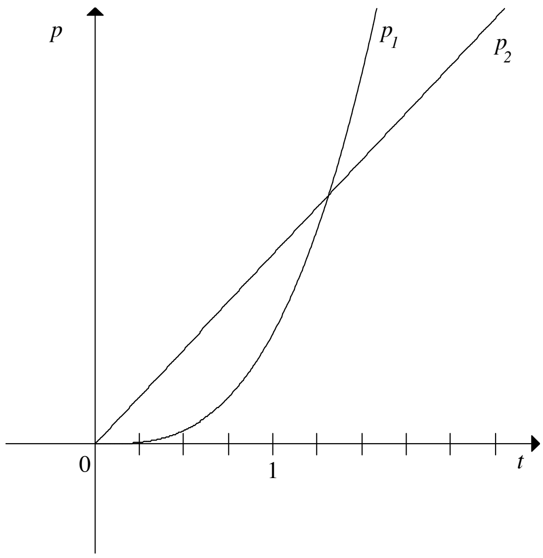

Figure 4

À quel moment ces deux particules ont la même vitesse instantanée ? Justifiez.

Imprimé le 10 janvier 2007

IV Voir une vitesse instantanée

Une loi de mouvement étrange ?

En guise d'introduction, nous allons nous intéresser au mouvement (plus compliqué qu'à la première section) d'une particule sur un axe comme à la figure 1. Décrire par des phrases en français et le plus complètement possible le mouvement du mobile décrit par le graphique de la figure 5. On pourra considérer par exemple que les unités sont le mètre pour la position et la minute pour le temps.

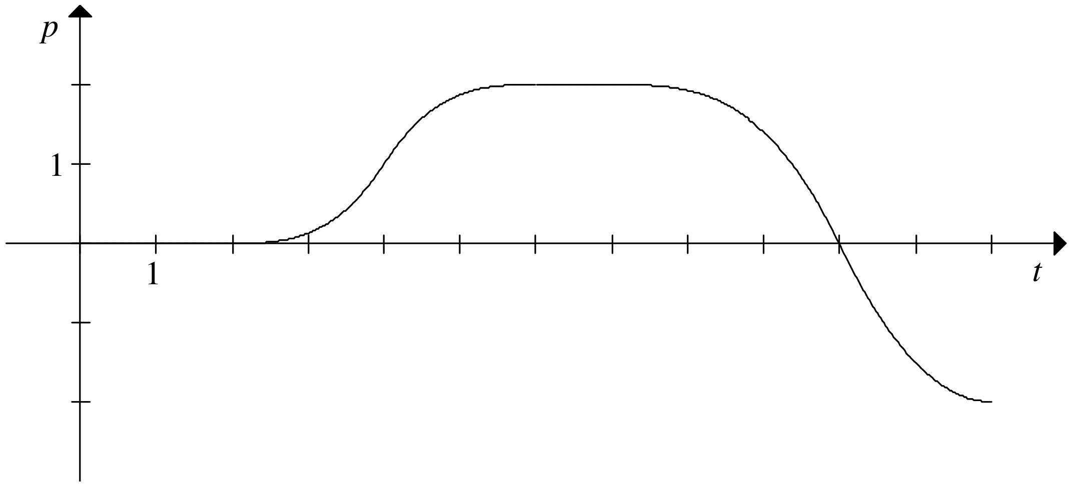

Figure 5

Imprimé le 10 janvier 2007

Touch and Go

Considérons un mobile sur une trajectoire rectiligne. Il démarre à l'instant $t = 0$ de la position $p = 2$. Il accélère jusqu'à l'instant $t = 3$. À cet instant, il occupe la position $p = 6$ et sa vitesse instantanée vaut 2. Il décélère ensuite jusqu'à l'arrêt qui se produit à l'instant $t = 6$ et à la position $p = 10$. Il fait alors demi-tour et atteint la position $p = 8,25$ à l'instant $t = 7,5$. Sa vitesse vaut alors $-2,5$. Il continue à décélérer jusqu'à l'instant $t = 9$ et la position $p = 2$. Sa vitesse devient alors constante et vaut -6.

Dessiner le plus précisément possible la loi de mouvement de ce mobile sur la figure 6.

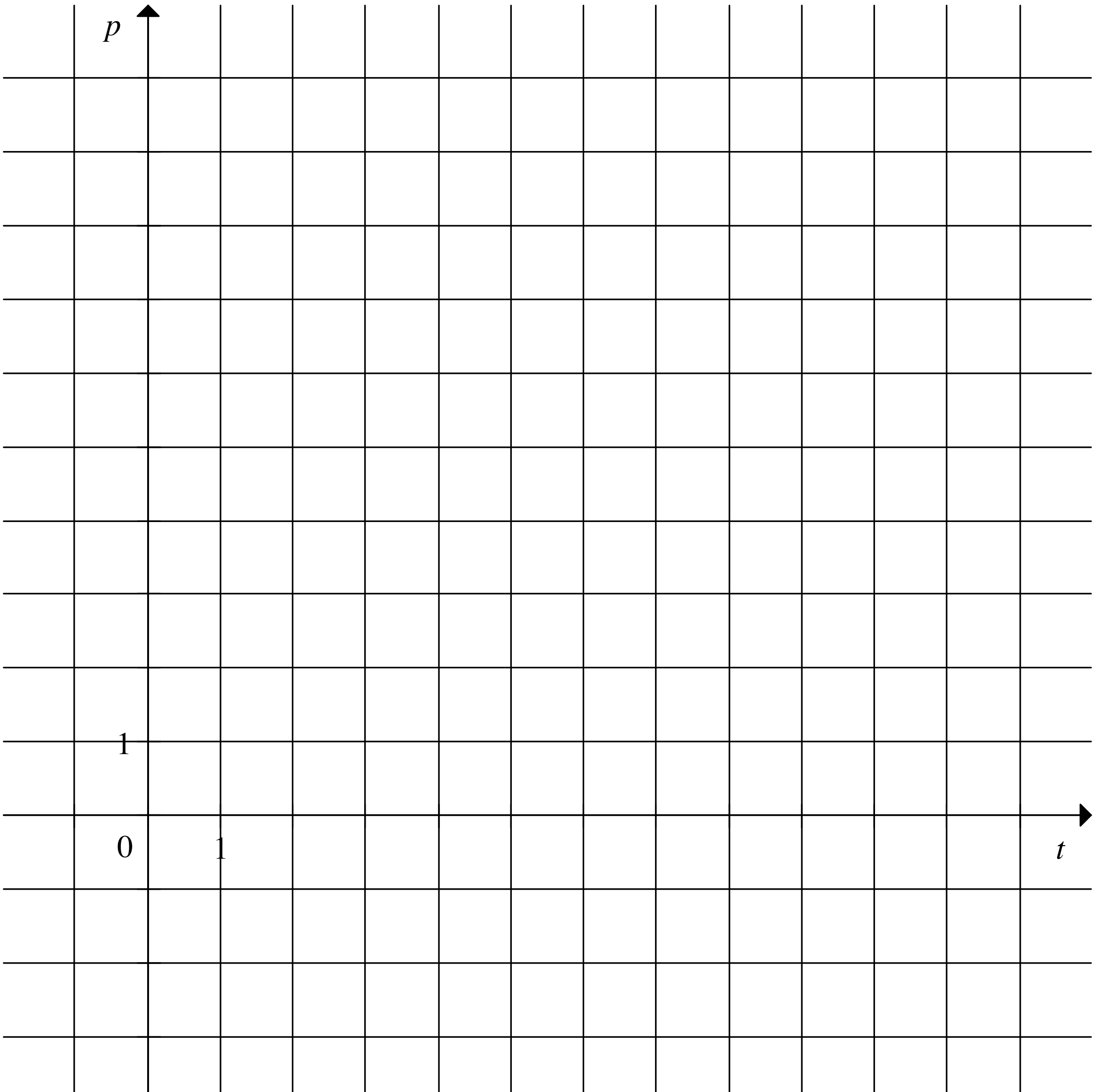

Figure 6

Imprimé le 10 janvier 2007

V Deux problèmes et une solution

Un mobile en mouvement

Considérons un mobile sur une trajectoire rectiligne et dont la loi de mouvement est donnée par la fonction

$$p(t) = 4\left(t^3 - 25t^2 + 150t\right)$$

Entre $t = 0$ et $t = 10$, à quel(s) instant(s) la distance du mobile à l'origine est maximale ? Que vaut alors sa vitesse ?

Un volume à optimiser

On considère à présent une plaque en tôle dont on a retiré les coins selon la figure 7.

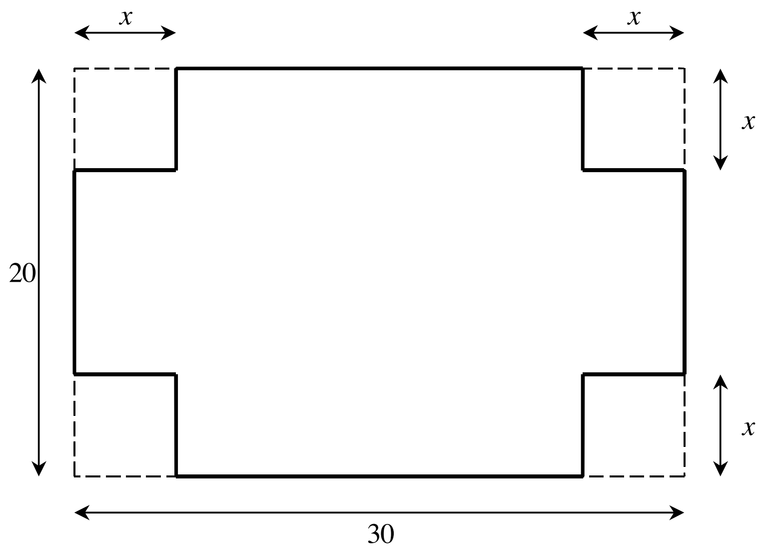

Figure 7

En pliant les bords de cette plaque, on obtient une boîte rectangulaire et ouverte dont la profondeur est x.

Déterminer la valeur de x telle que le volume de la boîte soit maximum.

Imprimé le 10 janvier 2007

VI Approximation par des droites

Certaines fonctions peuvent être remplacées localement par des fonctions du premier degré. L'intérêt d'un tel remplacement est que les images sont plus faciles à calculer. Ainsi,

$$\begin{array}{ll} \dfrac{1}{x} & \text{peut être remplacé par } -x+2 \text{ autour de } x=1 \\ \sqrt{x} & \text{peut être remplacé par } \dfrac{1}{6}x+\dfrac{3}{2} \text{ autour de } x=9 \end{array}$$

Comparez des valeurs numériques des images pour chacune des fonctions précédentes et de leurs remplaçants.

Comment déterminer les fonctions de remplacement ?

Imprimé le 10 janvier 2007