Académie Universitaire Wallonie-Europe

Université de Liège

FACULTE DES SCIENCES
Didactique et épistémologie des mathématiques

Formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution secondaire et l'institution universitaire.

Le cas éclairant du thème des dérivées.

Dissertation présentée par

Emmanuelle Rouy

en vue de l'obtention du grade de Docteur en Sciences

Sous la direction de Maggy Schneider

Le 13 décembre 2007

Jury :

Prof. P. Gérard (Président)	Dépt de Mathématiques - Université de Liège
Prof. M. Schneider	Dépt de Mathématiques - Université de Liège
Prof. B. Hespel	Dépt Sciences, Philosophies, Sociétés – Facultés N.-D. de la Paix
Prof. P. Lecomte	Dépt de Mathématiques - Université de Liège
Prof. A. Mercier	UMR, ADEF, INRP - Université de Provence
Prof. J. Winkin	Dépt de Mathématiques- Facultés N.-D. de la Paix

Prélude

Je peux bien vous l'avouer maintenant : je n'ai pas toujours été sûre d'arriver un jour à ces quelques pages, à la fois les dernières et les premières. Pourtant, c'est bien pour ce groupe de mots mis en lignes (je crois qu'il n'y a plus de synonyme à chapitre, section, partie, paragraphe, etc.) que mes convictions n'ont jamais failli.

Remercier d'abord ma directrice de thèse, Maggy Schneider. Savait-elle à quoi elle s'engageait en acceptant de me faire travailler ? Quoi qu'il en soit, elle a bien tenu le coup et je n'y serais pas arrivée sans ses lectures, ses relectures, ses questions …… et toutes ses petites phrases ! Celles qui exprimaient enfin l'idée autour de laquelle je tournais, et celles qui me renvoyaient chercher d'autres mots, encore et toujours.

Et puis, reconnaissez qu'elle m'a choisi un comité d'encadrement idéal, dans lequel se rencontrent les disciplines et les nations. M'encadrer avec des portes ouvertes, voilà qui devait me maintenir sur la bonne voie. Merci à ceux qui ont accepté de se confronter aux premières hésitations et qui m'ont posé les questions m'obligeant à préciser la mienne.

Je tiens aussi à remercier à l'Université de Liège le professeur Véronique De Keyser et le professeur Jean-Marie Bouquegneau qui m'ont permis de poser mes valises sur le sol belge, ainsi que le professeur Bernadette Mérenne qui mit en place le cadre nécessaire à la recherche en didactique.

Merci aussi à tous ceux, parents, amis et compagnons de tous poils, qui ont accompagné ce travail et en ont permis la réalisation, aussi bien sur le plan matériel que sur le plan moral.

Merci aussi à tous les élèves, étudiants et collègues qui ont accepté d'expliciter les difficultés propres à l'enseignement des mathématiques et qui m'ont apporté le matériau sans lequel je n'aurais eu que des intuitions.

Merci à Sonia qui fut assez téméraire pour affronter le tyran et m'offrir une relecture rigoureuse.

Merci enfin à ceux qui contribueront à faire croître les quelques graines que ce travail aura pu semer.

Résumé

Ce travail étudie les difficultés éprouvées par les étudiants en formation initiale à passer du statut d'étudiant universitaire à celui de professeur du secondaire. En analysant leurs pratiques et leurs discours à propos de l'enseignement de la dérivée et du critère de croissance, nous montrerons comment ils adoptent spontanément des pratiques d'ostension déguisée pour pallier l'absence de discours technologique, c'est-à-dire de discours rationnel et justificatif.

Sur base d'une analyse spécifique du thème mathématique concerné, nous caractériserons deux niveaux de rationalité. Le premier correspond à la modélisation mathématique d'un système intra ou extra-mathématique formé d'objets mentaux (ici, la détermination de grandeurs), et le second concerne un travail d'organisation déductive du modèle ainsi créé (ici, l'analyse réelle) et de ses propriétés. A ces deux niveaux de rationalité peuvent alors être associés des niveaux de discours qui leur sont spécifiques et qui nous serviront à analyser les pratiques et discours des élèves-professeurs.

En confrontant les élèves-professeurs à des projets d'enseignement relevant de ces différents niveaux, nous mettrons alors en évidence comment l'absence d'identification du premier niveau, commea l'impossibilité à comprendre le milieu effectivement proposé aux élèves, amène les élèves-professeurs à mettre en place un discours hybride tentant de faire cohabiter des arguments de nature visuelle sur les objets mentaux avec des énoncés directement extraits de la théorie.

Nous en dégagerons des perspectives concernant l'enseignement du thème mathématique choisi, mais aussi les enjeux de la formation initiale et de la recherche en didactique sur cette formation.

Abstract

This work intends to study the difficulties of young mathematics' teachers when they leave university.

Through the analysis of their practices when teaching the theme of derivatives, we point out that a specific level of rationality cannot be identified, neither in the discourse, nor in the attention paid to the fundamental mathematics underlying two different kinds of organisations. One is concerned with the modelling of intra (or extra) mathematical systems dealing with "mental objects" (here, the questions related to instantaneous speed), while the other one focuses on the elaboration of an autonomous deductive construction (here, the calculus).

A specific analysis of the theme will allow us to describe two levels of mathematical discourse, used to support our analysis of students' practices. Faced to the impossibility to set up a consistent and rational discourse adapted to the resources actually offered to pupils, young teachers try to support sentences and results extracted from the theory with figures and strictly visual arguments.

This study may thus highlight specific difficulties related to the teaching of derivatives, and point out innovative questions for teachers' training and for research on teachers' practices.

Table des matières

Chapitre 1

La question étudiée

1.1 Question initiale

Nous supposerons qu'une des difficultés rencontrées en formation initiale réside dans la confrontation de ceux que nous appellerons les « élèves-professeurs » avec différentes organisations rationnelles concernant aussi bien les objets et les procédures mathématiques que les discours qui les accompagnent. La présence simultanée de ces différentes organisations et la difficulté à les articuler entre elles nous invitent à envisager la formation initiale comme une aide à la transition de l'université au secondaire[1], par analogie avec la transition secondaire-université faisant l'objet de recherches et de mesures d'accompagnement spécifiques. Au delà des facteurs liés aux changements d'environnement, de modes d'étude, d'objectifs et de préoccupations, ce rapprochement entre les deux périodes nous paraît en effet motivé par une problématique commune : la mise en perspective de différents niveaux d'organisation des connaissances mathématiques elles-mêmes. Nous voudrions par ce travail mettre en évidence que de telles périodes font se rencontrer des organisations qui ne relèvent pas de la même posture, voire de la même culture, et dont la cohabitation concurrente génère la tentation de les « fondre » entre elles au risque d'aller alors à l'encontre de l'intégration souhaitée. Un des enjeux de la formation peut alors consister dans l'utilisation d'outils d'analyse des transpositions proposées afin d'expliciter la place du savoir mathématique dans les organisations didactiques.

[1] Dans la mesure où nos observations concernent principalement les dispositifs de formation des professeurs du secondaire supérieur, cette formation ayant lieu après les études universitaires. La référence ultérieure à la formation des professeurs du secondaire inférieur permettra d'étudier la généralisation possible de nos conclusions. Rappelons ici que la Belgique propose pour ces derniers une formation spécifique après le secondaire, ce qui constitue une différence avec la France.

Mettre lors de la formation initiale l'accent sur la non transparence du savoir enseigné, et donc sur l'aide au questionnement de ce savoir et de ses transpositions, peut aussi être considéré dans une perspective de recherche de « vigilance épistémologique » au sens où l'entend Marc Legrand :

> *Se référer à l'acte de « faire des mathématiques » ;*
> *Se questionner sur la signification de l'acte d'en « faire faire » : pourquoi, comment, et dans quelle éthique ?*
> *Rechercher une consistance épistémologique en matière d'aide à l'enseignement.*
> *(Legrand, 2003)*

Il s'agit là d'une entreprise délicate si l'on en juge par plusieurs travaux relatifs à la formation initiale des enseignants. En particulier, elle n'est pas étrangère à un approfondissement conséquent des connaissances mathématiques tel que le décrit Aline Robert :

> *A notre avis, les futurs enseignants ont surtout besoin d'acquérir une nouvelle disponibilité de leurs connaissances mathématiques, qui leur garantira l'assurance qui leur manque souvent terriblement même si cela ne se voit pas : ce n'est plus la disponibilité pour résoudre des problèmes non triviaux, c'est la disponibilité de leurs connaissances mathématiques pour s'adapter aux élèves, donc à la fois pour les entendre sur le plan mathématique et pour leur répondre.*
> *(Robert, 1995)*

Dans le foisonnement de recherches sur la formation initiale des enseignants nous choisirons donc de polariser notre étude sur la manière dont les élèves-professeurs utilisent leurs connaissances mathématiques en liaison avec leurs connaissances didactiques. Ces dernières existent en effet en tant que conception première et font l'objet de la formation en cours. Quant aux connaissances mathématiques, elles ont chez ces étudiants un statut particulier lié au fait qu'elles ont fait l'objet d'un enseignement pendant leurs études secondaires, puis pendant leurs études universitaires, et qu'ils sont maintenant dans une nouvelle transition entre les deux mêmes institutions remettant donc face à face les différentes organisations mathématiques rencontrées.

Ce saut d'une institution à l'autre doit-il provoquer un oubli ou peut-il favoriser une mise en perspective des connaissances? Le phénomène avait été évoqué par Félix Klein, cité par Hans Freudenthal (1973), au moyen de l'expression *« double forgetting »* suggérant qu'il fallait

« oublier » les mathématiques scolaires avant d'entrer à l'université, mais aussi « oublier » les mathématiques de l'université avant de « retourner à l'école ». Une mise en perspective consisterait par contre à utiliser les connaissances universitaires pour questionner les transpositions proposées dans le secondaire.

Le rôle joué ici par le changement d'institution, mais aussi le caractère dit professionalisant de la formation, nous amèneront à nous référer essentiellement à l'approche anthropologique du didactique[2] et nous inciteront à choisir un objet mathématique présentant une double visibilité institutionnelle, à savoir la dérivée et le sens de variation d'une fonction. En effet, ce sujet présente des difficultés intrinsèques que nous décrirons et qui sont traitées selon deux dynamiques très différentes dans les deux institutions en jeu dans la formation initiale.

1.2 Motivations et observations antérieures

Ce questionnement est par ailleurs directement lié à notre expérience personnelle d'enseignante dans le secondaire, puis d'assistante dans le cadre de la formation des futurs agrégés pour l'enseignement secondaire supérieur belge, expérience qui nous a amenée à faire plusieurs observations nous indiquant quelques pistes de réflexion. Comme enseignante, nous avons été confrontée à la difficulté de donner des explications rationnelles et raisonnées hors d'un cadre théorique[3]. Comme assistante en formation initiale, nous avons constaté la tendance des étudiants à construire leurs préparations de leçons selon un standard qui semble parfois prendre le dessus sur toute volonté individuelle de procéder autrement. En première analyse, nous pouvions remarquer alors un curieux tiraillement entre des pratiques ostensives[4] relevant presque de l'empirisme, et ce que Isabelle Bloch (2005) appelle *une « conception formaliste des professeurs débutants »*. Celle-ci se traduit par exemple en « bouffées de rigueur » lesquelles consistent à insister sur des notations mais aussi sur des résultats ou des justifications dont la difficulté théorique dépasse vraisemblablement le niveau du public cible, tandis que d'autres points nous semblant plus

[2] L'éclairage des cadres théoriques de didactique est développé dans ce chapitre en 1.4.
[3] Notamment après une formation à l'époque des mathématiques modernes.
[4] On parle de pratiques ostensives lorsque le professeur « montre » aux élèves l'objet à définir. Le lien avec l'empirisme sera développé dans le Chapitre 3.

caractéristiques de la rationalité mathématique sont masqués. Une autre catégorie d'observations concerne un sentiment de malaise de ne pouvoir expliquer des résultats couramment utilisés[5] et la soudaine perception de ne pas maîtriser l'articulation de certaines argumentations, certaines risquant même d'être circulaires. C'est un peu comme s'il fallait alors se poser la question « *finalement qu'est-ce qui dépend de quoi ?* », celle-là même qui rendit nécessaire l'axiomatisation, selon les termes de Rudolf Bkouche (2002).

L'ensemble de ces observations traduit à nos yeux la difficulté pour l'enseignant débutant[6] d'élaborer un discours technologique[7] « convenable », au sens où ce discours doit convenir aux élèves auxquels il est destiné, à l'institution et à ses représentants, mais surtout à l'enseignant lui-même qui est alors particulièrement confronté à l'articulation de différents « *cadres de rationalité* [8]». Cette difficulté s'exprimerait par des « emprunts » à ce qu'on nomme théorie mathématique dans l'institution universitaire et surtout à ce qui y ressemble dans les manuels proposés pour le secondaire. Faits par référence à ce qui est appelé « rigueur mathématique », ces emprunts demeureraient alors isolés sans pouvoir s'articuler en un discours rationnel, à la fois justificatif et cohérent, qui soit propre à l'enseignant. Cette même difficulté pourrait également être un obstacle à l'appropriation de projets d'enseignement basés sur une forme de rationalité différente de la théorie mathématique proprement dite.

---

[5] Citons ici le cas d'une étudiante qui demandait comment justifier l'obtention des valeurs trigonométriques des angles remarquables autrement que par la lecture de la figure, mais qui se posait aussi de nombreuses questions quant à la justification de l'inégalité triangulaire qu'elle devait utiliser explicitement comme argument dans une démonstration. Un autre exemple concerne les règles du calcul algébrique, à commencer par la simple résolution d'une équation du premier degré dont les élèves-professeurs à ce niveau ne peuvent fournir qu'une justification sous forme de règle.

[6] L'appellation « élève-professeur » souhaite mettre en évidence le double statut des étudiants qui sont étudiants de leur université mais pour devenir professeurs. Comme on le verra plus tard, certains sont par ailleurs déjà professeurs. Les études menées en France parlent plus volontiers de professeurs stagiaires ou professeurs débutants dans la mesure où ces étudiants sont dans une institution dédiée à la formation des enseignants (IUFM) et sont souvent observés lors de leur dernière année alors qu'ils ont une classe en responsabilité complète.

[7] Dans la TAD d'Y. Chevallard (1992), la notion d'organisation mathématique fait intervenir un discours technologique comme étant un discours rationnel, justificatif et cohérent, dont la fonction est de valider les techniques mises en place pour résoudre les tâches proposées. Ce discours technologique est en quelque sorte l'entrée dans le bloc « savoir » expliquant le bloc « savoir-faire ». Nous verrons dans le Chapitre 3 que la nature de ce discours est en elle-même problématique.

[8] La notion de cadre de rationalité a été proposée par A. Lerouge (2000) en référence à l'épistémologie de Mario Bunge (1983) et vise à exprimer l'articulation d'une rationalité culturelle et d'une rationalité personnelle. Ces référents théoriques seront précisés au Chapitre 3.

1.3. Choix d'un thème mathématique

1.3.1 Le savoir comme difficulté de la formation initiale

Différentes recherches concernant la formation initiale des professeurs de mathématiques suggèrent effectivement de manière plus ou moins marquée qu'un des enjeux de cette formation pourrait être le changement de posture vis-à-vis de ce qui est usuellement présenté comme la rationalité mathématique, notamment de par la coexistence de connaissances acquises à l'université et de connaissances associées au niveau d'enseignement.

Il est bien sûr possible de considérer la dimension individuelle et de rechercher l'existence de certains profils plus ou moins adaptés à une telle transformation. Cette optique permet alors au formateur de modifier éventuellement la manière dont il proposera des actions et analysera les réponses des élèves-professeurs, de manière à conserver la qualité relationnelle nécessaire à cette formation et favoriser ainsi le questionnement qu'il souhaite susciter.

Quant à la nature de ce questionnement et à la conception des actions à y associer, elles nous semblent relever en grande partie du savoir mathématique lui-même. S'il existe des facteurs humains à prendre en compte dans la formation des professeurs, on ne peut oublier que le problème fondamental reste donc les mathématiques, avec leur rapport complexe à la fois au monde réel et sensible et à la théorisation. Selon notre hypothèse, c'est la modification de rapport qui est susceptible de faire apparaître des « questions de rigueur » chez les élèves-professeurs.

Pourtant, ou heureusement, tous les thèmes mathématiques ne sont pas égaux devant cette difficulté et nous pouvons envisager que les sujets potentiellement difficiles, et donc intéressants pour nous, seront les thèmes enseignés à la fois dans le secondaire et à l'université mais surtout au sein desquels le changement de statut des objets dépasse la dialectique outil-objet[9] définie par Régine Douday (1984), pour donner lieu à un véritable

[9] La dialectique outil-objet (DOO) propose de prendre en compte le statut que possède un objet mathématique dans une activité donnée, ainsi que les changements amenés à ce statut. Un même concept possède en effet une facette « outil » lorsqu'il sert à résoudre un problème et une facette « objet » lorsqu'il est étudié pour ses propriétés mathématiques.

« renversement outil-objet » en référence à l'inversion antididactique dont parle H. Freudenthal :

> *Je vais donner un exemple instructif pris dans l'algèbre. Il y a des programmes et des manuels qui jugent utile d'enseigner le système axiomatique de Peano. Cela veut dire qu'on formule ces axiomes, qu'ensuite on en dérive le principe de l'induction complète et qu'on applique cet axiome à la démonstration de théorèmes, par exemple de celui du binôme. C'est un exemple de l'inversion antididactique. Il est évident que l'intelligence du principe de l'induction complète doit précéder celle du système de Peano. Mais il y a plus. Personne ne peut formuler ce principe très compliqué de l'induction complète, avant qu'il ne l'ait découvert, et pour le découvrir, il faut l'avoir appliqué au moins une fois. La didactique correcte serait: d'abord donner à l'élève des occasions d'appliquer ce principe instinctivement, puis lui faire découvrir l'élément commun dans ces applications, ensuite vérifier par de nouveaux exemples, s'il a assimilé le principe, enfin lui faire trouver une expression verbale de ce principe, c'est-à-dire sa formulation explicite. Après ces préparatifs on pourrait enseigner les axiomes de Peano, pourvu que l'élève dispose d'expérience axiomatique acquise au cours de l'axiomatisation de systèmes plus simples que celui dont proviennent les axiomes de Peano.*
> *(Freudenthal, 1963)*

L'opposition diamétrale qui existe alors entre le bloc tâche/technique et le bloc discours/théorie des organisations associées au savoir considéré est selon nous une source majeure des difficultés que le futur enseignant va rencontrer, puisqu'elle concerne son propre rapport au savoir qu'il souhaite enseigner.

1.3.2 Un cas éclairant dans l'analyse: l'association tangente-dérivée

Dans le domaine de l'analyse, les recherches de Maggy Schneider (1988, 1991) montrent en particulier les difficultés d'apprentissage des concepts de dérivée et de tangente[10]. Elle y met en évidence la difficulté des élèves à associer pente de tangente et dérivée, ainsi qu'une tendance des élèves à transférer le passage à la limite du cadre numérique symbolisé au cadre géométrique[11].

Mais notre première lecture de préparations de leçons sur ce sujet nous incite à dire que les élèves font en fait exactement ce qui leur est demandé. En effet, la démarche la plus fréquemment adoptée par les élèves-professeurs[12] pour introduire la notion de dérivée

---

[10] Ces difficultés sont également étudiées par B. Cornu (1983) et A. Sierpinska (1985). C. Castela (1995) montre de plus l'opposition réelle entre les conceptions algébrique, géométrique et analytique de la tangente.

[11] Voir le Chapitre 4.

[12] Même si les pratiques sont vraisemblablement assez proches chez les professeurs plus expérimentés, nous choisirons de concentrer notre étude sur les élèves-professeurs lors de la formation initiale, et ce pour plusieurs raisons. Premièrement parce qu'on peut y observer vers quelles pratiques se dirigent « spontanément» ces futurs professeurs. C'est pourquoi le recours à l'ostension sans justification associée à une expérience de gestion de classe, ainsi que le refus d'utiliser les connaissances universitaires pourtant plus proches peuvent effectivement paraître symptomatiques de difficultés spécifiques aux savoirs en jeu. Deuxièmement pour des raisons d'opportunités d'observations permises par notre fonction. Troisièmement pour mettre en évidence la nécessité de consacrer la

consiste à proposer une courbe (très rarement associée à l'expression analytique de la fonction), à y positionner deux points et la sécante correspondante, puis à « déplacer» un des deux points vers l'autre, sans motivation annoncée[13]. Il est ensuite affirmé que « la sécante tend vers la tangente », et que le quotient différentiel (parfois exprimé auparavant) tend donc vers la pente de la tangente. Enfin le nombre dérivé est défini comme étant la pente de cette tangente et la limite du quotient lorsqu'elle existe. Ces préparations observées pendant 5 ans laissaient donc une impression de malaise : une absence totale de question (pourquoi et pour quoi définir la dérivée ?), un flou quant au statut des énoncés, un nombre dérivé défini comme pente d'une tangente non définie (ou recevant rapidement la définition de « (position) limite de sécantes »), une application[14] éventuelle à la « question[15] » de la vitesse instantanée, et très vite les formules de dérivation et des exercices de calcul. Bien sûr les problèmes dits « d'application » indiqués à la fin de la préparation (comme à la fin des manuels) sont nombreux et intéressants, mais les professeurs s'étonnent souvent de la difficulté des élèves à mobiliser la notion de dérivée dans ces problèmes. A ce sujet, M. Schneider rappelle, par exemple, que

> *[..] savoir interpréter la dérivée comme pente de tangente n'entraîne pas que l'on sache interpréter la dérivée de l'aire du disque comme son périmètre.*
> *(Schneider, 2001)*

Selon H. Freudenthal (1963), leur insuccès auprès de l'élève pourrait s'expliquer par le fait qu'on « *lui demande de retourner à un niveau où il ne s'est jamais exercé* »[16]. Selon notre hypothèse, nous suggérons que cette difficulté relève aussi de cette quasi-incompatibilité entre les deux organisations. En effet, comme nous le verrons plus en détail au Chapitre 4, la

---

formation initiale non seulement aux facteurs humains liés à l'enseignement et à la maîtrise des connaissances mathématiques mais surtout à provoquer un questionnement du savoir mathématique. Même si les actions proposées montreront une persistance de la difficulté, cette période apparaît en effet comme le seul moment du cursus où de telles questions peuvent être abordées, tout en laissant au futur professeur la liberté de ses choix ultérieurs et de la poursuite de la réflexion épistémologique entamée pendant cette période de transition.

[13] En particulier la question d'une intersection réduite à un point n'est ni énoncée, ni questionnée.

[14] Nous choisirons de parler plutôt d'une illustration, en nous inspirant de P. Hilton (1987) pour qui l'application est « ce que la théorie aide à comprendre », tandis que l'illustration est « ce qui aide à comprendre la théorie ».

[15] En fait, la définition de vitesse instantanée comme « limite de vitesse moyenne » est en général déléguée au cours de physique.

[16] Freudenthal parlait à ce sujet en ces termes *« ce qui devrait être le point de départ apparaît après coup sous le titre d'applications. On fait un dessert non digérable de ce qui aurait été bon pour hors d'œuvre ».* Nous lui laissons la responsabilité du jugement porté, de même que lorsqu'il définit une « bonne didactique », mais l'image fournit une piste de réflexion sur le fait que ces problèmes dits d'application n'atteignent en général pas leur objectif, créant un malentendu supplémentaire entre le professeur qui voulait intéresser ses élèves et ces derniers qui ne sont pas dans la même dynamique.

dérivée est un objet mathématique apparu progressivement comme technique commune dans la résolution de problèmes de natures particulièrement différentes. Le transfert demandé d'un contexte à l'autre n'est donc immédiat que pour le mathématicien qui a l'avantage d'y être autorisé par sa connaissance de la théorie.

Toujours suite à la lecture de préparations de leçons, nous avons observé que le sujet « dérivée première et variation de fonction » faisait encore intervenir la tangente, toujours pas définie dans la plupart des cas, jusqu'à lui faire jouer le rôle d'argument essentiel : quelques tangentes dessinées sur une courbe et la fonction[17] est croissante sur l'intervalle…..

La manière dont dérivée et tangente sont ainsi associées pour définir un objet sur base d'un objet non défini, puis pour « prouver visuellement » le critère de croissance nous paraissait déjà mériter une investigation plus poussée, notamment pour identifier le rôle éventuellement attribué à la notion de rigueur mathématique dans ces pratiques.

Cette approche combinant dérivée et tangente pourrait permettre une dynamique de changement de cadre au sens de R. Douady, par exemple en aménageant effectivement le passage de « la tangente » comme objet géométrique à « la tangente » comme objet analytique. Mais le transfert de notions d'un cadre à l'autre risque ici de se faire plutôt sous forme d'analogie, demeurant de plus implicite, entre deux cadres mathématiques proposant chacun une modélisation du même monde sensible mais par le biais d'axiomatiques différentes[18].

Interrogé pour notre étude sur « la rigueur mathématique »[19], un professeur de l'Université de Liège en proposait comme définition «*la conscience d'être dans un système axiomatique, et qu'on reste dans ce système* », et précisait que la connexion entre géométrie et analyse pouvait en constituer un enjeu :

[17] Là aussi, il est rarement proposé de travailler sur une fonction dont on connaît l'expression.

[18] Nous ne chercherons pas ici à savoir si la fonction de l'axiomatique est de rendre compte du sensible. L'existence d'axiomatiques différentes pour un même domaine, mais aussi d'une terminologie cherchant à distinguer axiome et postulat, puis principe ou règle, donne une idée de la complexité de cette question. Mais elle reste associée à notre étude dans la mesure où il nous semble que cette non-explicitation des moments où des actes sont posés (acte de définition, acte d'énoncé des cas d'isométrie ou de similitude, etc.) est justement source de difficultés en donnant l'illusion que le rapport entre les mathématiques et le monde sensible va de soi.

[19] La méthodologie est décrite au Chapitre 5.

> *[…] la géométrie euclidienne a envahi l'analyse ; or ce sont deux choses différentes donc il faut rétablir la séparation, en tout cas la conscience de la séparation. Je suis persuadé que les analystes raisonnent par analogies géométriques. Ça sert l'intuition, mais il ne faudrait pas faire des démonstrations par analogie. Ça serait dangereux. C'est utile mais ça doit être détecté. Il faut avoir conscience qu'on fait une analogie.*
> *[…] Nos élèves, quand ils sont bien assis dans un univers, dans un cadre mathématique donné, ça se passe assez bien….mais il faudrait attirer leur attention quand ils donnent des exemples… même dans les représentations graphiques….que c'est le passage entre l'analyse et la géométrie et qu'il y a là deux structures mathématiques différentes et que si on veut illustrer l'une à partir de l'autre… là je suis sûr qu'ils ne sont pas tellement conscients de ce qu'ils font …quand on fait des graphiques de fonction, quand on interprète une dérivée par une tangente, on établit une connexion entre deux univers et je ne suis pas sûr qu'ils en sont conscients.*
> *(E.R-5)*

Dans son exemple d'inversion anti-didactique, H. Freudenthal évoque précisément la place à accorder aux axiomes, et « oppose » deux approches :

1) énoncer les axiomes et s'en servir ;

2) les faire utiliser de manière implicite pour ensuite motiver leur formulation. La première est souvent présentée comme un enseignement basé sur l'architecture déductive des mathématiques, tandis que la deuxième est parfois présentée comme un modèle « idéal » d'apprentissage.

Nous noterons que, si le sens de parcours change, le rôle de l'axiome est reconnu dans les deux cas. Or nos premières observations résumées brièvement ci-dessus nous semblent relever d'une troisième approche : travailler en utilisant une axiomatique mais sans l'énoncer et sans motiver sa formulation. Vraisemblablement adoptée comme compromis entre, d'une part, la connaissance des mathématiques et, d'autre part, des objectifs pédagogiques, une telle approche amènerait alors à rapprocher directement la théorie mathématique du monde sensible qu'elle cherche à modéliser mais en occultant, inconsciemment et avec la meilleure volonté du monde, le discours médiateur entre le sensible et l'intelligible. Notre étude cherchera donc aussi à identifier comment la dimension axiomatique des théories mathématiques intervient dans la confrontation des élèves-professeurs aux différentes transpositions du thème de la dérivée.

1.4 Eclairage des cadres théoriques

Cette première formulation de la question à étudier met en avant les thèmes de la rigueur, dont il nous faudra expliciter les liens avec la rationalité et avec la théorisation, et de la formation initiale. Dans le souci de les mettre en relation, les différents cadres théoriques sont porteurs d'explications *a priori.* Nous résumerons ici les principaux éléments d'analyse, dont l'utilisation sera approfondie dans les chapitres ultérieurs.

1.4.1 La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)

La TAD d'Yves Chevallard (1992) est ici une référence principale par son éclairage institutionnel. En effet, les élèves-professeurs sont de ce point de vue des « mutants », quittant l'université pour accéder à une institution dont ils sont sortis 4 ou 5 ans auparavant mais avec un autre statut. Or, du point de vue mathématique, il s'agit là, comme Michèle Artigue et d'autres l'ont montré, d'institutions différentes au sens où le rapport institutionnel aux mathématiques y revêt des formes spécifiques[20]. Si l'on étudie souvent le passage du secondaire à l'université, il est moins fréquent d'analyser la transition inverse vécue par les élèves-professeurs. Il n'est pourtant pas exclu que des dysfonctionnements liés à cette transition expliquent certaines conduites dans la façon d'enseigner les mathématiques au secondaire. De ce point de vue, notre étude sur les élèves-professeurs pourrait être éclairante pour l'étude des pratiques enseignantes, fussent-elles celles de professeurs plus chevronnés.

La TAD invite précisément à prendre en compte que le savoir et les pratiques associées sont différents d'une institution à l'autre, ce qui se manifeste par l'existence dans les institutions d'une organisation des savoirs mathématiques en « praxéologie[21]» :

-T, la tâche c'est-à-dire la question à résoudre (le « pour quoi »);

-τ, la technique conçue pour la réalisation des tâches ;

-θ, la technologie ou discours rationnel destiné à rendre intelligible cette technique et à en valider l'usage pour réaliser la tâche (le « pourquoi »);

-Θ, la théorie apportant une justification de niveau supérieur aux assertions que contient le discours technologique. Dans notre étude, elle constitue un niveau supérieur de rationalité,

[20] Dans sa communication à Namur en juillet 2005, M. Artigue parle aussi de « cultures mathématiques différentes ».
[21] Le mot « praxéologie » vise à associer dans un même mot la pratique (praxis) et le discours sur la pratique (logos).

lié au projet d'une organisation déductive autonome. L'étudiant devenant professeur se trouve donc dans la position inconfortable d'avoir étudié les théories et de devoir (re)travailler l'articulation tâche/technique pour des techniques naturalisées, ainsi que la mobilisation d'un discours technologique ne pouvant être la théorie, ce qui l'oblige à relativiser la rigueur éventuellement associée.

Cette organisation en praxéologies est de plus relative à une institution donnée. D'une part, parce qu'une institution privilégie souvent l'une ou l'autre technique, et donc le discours rationnel éventuellement associé, par rapport à d'autres disponibles pour un même type de tâches et, d'autre part, parce qu'un même discours peut être perçu comme théorique dans l'institution secondaire mais « seulement » technologique dans l'institution universitaire.

En outre, dans sa TAD, Y. Chevallard analyse l'activité mathématique sous l'angle d'une dialectique entre des ostensifs et les non-ostensifs associés. Les ostensifs sont les objets « matériels », ou du moins perceptibles par les sens : mots, gestes, écrits, dessins, graphiques, symboles,…. C'est par la manipulation de ces ostensifs que l'on peut évoquer un objet mathématique, qui est par essence non-ostensif. Ces ostensifs sont caractérisés par une valence sémiotique (capacité à produire du sens) et une valence instrumentale (capacité à s'intégrer dans des manipulations techniques, technologiques et théoriques). Cette dialectique ostensif / non-ostensif, devenue invisible, pourrait favoriser un glissement de la conception de rigueur devenant le fait d'utiliser les ostensifs en conformité, au risque de masquer « *la dimension fonctionnelle de la rigueur* » (Noirfalise et al., 1996).

Enfin, ces élèves-professeurs sont dans un contexte dit professionnalisant et sont assez rapidement amenés[22] à choisir des pratiques, et donc implicitement des discours sur ces pratiques motivant les choix effectués. Ils sont donc en fait en train de poser les bases d'une praxéologie professionnelle qui devrait articuler les organisations mathématiques proprement dites avec les organisations didactiques. On pourra en effet parler de praxéologie didactique dans laquelle la tâche est « enseigner la dérivée » et pour laquelle une technique peut être « utiliser la tangente »[23].

[22] De par la prestation des stages en responsabilité, même sous des formes différentes selon les dispositifs.

[23] Voir aussi le Chapitre 3 sur les référents théoriques et le Chapitre 4 proposant une analyse des OM et OD liées à dérivée et tangente.

1.4.2 La Dialectique Outil-Objet (DOO)

Au sein de la perspective précédente, la DOO définie par R. Douady (1984) nous apparaît aussi éclairante. C'est en effet au moment de préparer ses propres leçons qu'on détecte un objet utilisé implicitement (objet caché, souvent les fonctions ou la notion de continuité, ou même la notion de nombre réel) et qu'alors il y a risque de ne pas s'autoriser à utiliser comme outil un objet qu'on n'a pas encore défini, et d'adopter une des deux attitudes consistant soit à éviter de le rendre trop évident, soit à en faire un objet à définir préalablement. Deux ouvrages majeurs, les Eléments d'Euclide comme les Eléments de Bourbaki, sont en effet réputés pour être des exemples de rigueur, « *aucun argument ne pouvant être avancé s'il n'a pas été démontré dans un volume antérieurement* » (Verdier, 2000). Un glissement de cette conception de la rigueur pourrait alors devenir :

aucun argument ne pouvant être utilisé sans l'avoir démontré,

aucun objet ne peut être utilisé sans l'avoir défini.

Par conséquent il y a lieu pour nous de penser qu'un des problèmes de l'étudiant devenant professeur est de faire face à cette dialectique. Dans notre étude, cette dialectique sera de plus compliquée par la distinction entre un « objet mental [24]» (notion commune) et un concept (notion définie mathématiquement), dont nous verrons l'enjeu en ce qui concerne la tangente.

De plus, la notion de changement de cadre accompagnant cette dialectique permet d'associer à un objet ou à une propriété mathématique une explication issue d'un autre cadre (par exemple des identités remarquables peuvent être expliquées par une représentation géométrique de deux carrés de côté a et (a+b)). Se pose alors la question de distinguer l'explication de la justification[25]. Les étudiants utilisent d'ailleurs très peu les changements de cadre préférant s'attacher à une théorie, justement caractérisée par la capacité à produire des énoncés et démonstrations de même nature. Mais les sujets choisis ici les amènent à travailler

---

[24] Notion définie par Freudenthal : *« sorte de substituts primitifs des concepts proprement mathématiques et qui peuvent à terme opposer des difficultés à la formation de ceux-ci »*. Parmi ces objets mentaux on trouve l'aire et le volume, pour lesquels on arrive souvent à une confusion entre la grandeur et le nombre qui la mesure, mais aussi la tangente (cf Schneider, 1988).

[25] Remarquons que cette représentation reçoit souvent le statut d'interprétation géométrique sans discours accompagnant, et qu'ici aussi une confusion pourrait naître, renforcée par le fait qu'une problématisation plus numérique (par exemple les serveurs s'occupant soit d'une table de 10 personnes soit de deux tables de 4 et 6 personnes) est rarement proposée.

avec au moins deux cadres, la géométrie et l'analyse, ce qui pose des difficultés selon nos constats antérieurs.

1.4.3 La Théorie des Situations Didactiques (TSD)

Nous ferons l'hypothèse que les difficultés de transition vécues par les élèves-professeurs s'expliquent par la spécificité du contrat et la difficulté à revenir sur les apprentissages antérieurs et les discours associés, ceux-ci disparaissant spontanément au profit des théories qui leur apportent la légitimité mathématique. C'est pourquoi les notions de contrat et de milieu nous paraissent éclairantes.

La TSD de Guy Brousseau (1998) met l'accent sur la notion de contrat didactique représentant l'ensemble des attentes explicites et implicites existant entre professeur et élève, et qui influencent le comportement de l'un comme de l'autre. En la généralisant à un « contrat de formation » cette notion est ici intéressante puisque l'étudiant est dans un contrat didactique particulier avec les institutions prenant part à la formation. Il est souvent encore étudiant de l'université tandis qu'il est également soumis à une « norme de terrain » ainsi qu'à ses propres souvenirs d'élève. Selon le dispositif de formation, l'influence du contrat pourrait empêcher de prendre la distance requise par rapport à chacune des institutions. D'autre part, « l'abandon » d'un discours strictement théorique pour une autre forme de rationalité requiert vraisemblablement une « autorisation ».

Cette même TSD définit le milieu comme l'ensemble des éléments (matériels, sociaux, cognitifs, etc.) permettant la dévolution aux élèves d'une question et dont les rétro-actions alimentent la dynamique d'action/validation/formulation dans une situation d'enseignement. Dans notre étude, le milieu de l'élève va être pris en compte au travers de la représentation qu'en a l'élève-professeur. En particulier, nous regarderons dans quelle mesure les étudiants sont conscients du milieu créé par certaines activités, puis nous leur proposerons d'utiliser explicitement le concept de milieu pour analyser les organisations didactiques qui leur sont proposées.

Ce faisant, le milieu pour l'élève devient en quelque sorte un élément du milieu du professeur. La notion peut donc faire l'objet d'une extension et Claire Margolinas (2005a, 2005b) propose une structuration du milieu du professeur, incluant les différents niveaux de connaissance mobilisables par l'enseignant et donc les possibilités d'interactions entre ces niveaux[26]. C'est aussi dans cette acception qu'il nous intéressera, en particulier pour définir des actions de formation visant à modifier le milieu du professeur débutant.

1.5 Trame de la thèse

1.5.1 Objectifs et déroulement de l'étude

La question étudiée est donc celle d'une difficulté supposée des élèves-professeurs à trouver un discours technologique adapté à leurs élèves du secondaire, lorsque c'est à ce niveau qu'ils enseignent. Cette difficulté se concrétiserait par l'adoption d'un discours se voulant aussi proche que possible du discours proprement théorique des mathématiciens[27], masquant alors certains enjeux en termes de rationalité, ainsi que par la difficulté à s'approprier des situations de type adidactique nécessitant justement ce type de discours. Cette difficulté nous semble par ailleurs expliquer pourquoi lorsqu'on préconise un enseignement des mathématiques différent d'une présentation suivant leur architecture déductive, cela peut en fait constituer un véritable obstacle dont l'origine est à comprendre dans les savoirs mathématiques.

Sur deux sujets dont nous montrerons qu'ils sont symptomatiques de cette difficulté supposée, à savoir l'introduction de la dérivée et le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction, nous observerons et analyserons les choix effectués par les élèves-professeurs en constatant que leur posture vis-à-vis de « la rigueur » est une explication possible de leurs choix. L'analyse de leurs productions et de leurs réactions à différentes actions proposées dans le cadre de la formation, actions destinées à les aider à prendre conscience de leur propre posture face à la rationalité mathématique et d'autres possibles qui s'offrent à eux, montrera ensuite la persistance des difficultés évoquées dans notre hypothèse.

[26] Nous verrons au Chapitre 2 comment C. Margolinas utilise ce modèle pour analyser l'activité de professeurs stagiaires. Nous y ferons également référence pour notre analyse des données dans le Chapitre 6.

[27] C'est ce que nous appellerons une "praxéologie à trous" au sens où le discours technologique faisant fonction est une version censurée du discours théorique

Nous montrerons en particulier que, dans le cas de la dérivée, les organisations didactiques utilisent la notion de tangente pour résoudre l'opposition entre l'organisation globale théorique et les transpositions disponibles pour le secondaire. « Prendre la tangente » serait alors un moyen de construire une organisation didactique cohérente puisque les organisations mathématiques ne le sont (apparemment) pas entre elles. Tout en reposant presque intégralement sur une forme d'empirisme (avec le recours spontané à des pratiques ostensives), cette organisation didactique permet de préserver le formalisme (en tant que construction théorique) de l'analyse.

Si cette hypothèse présente *a priori* un caractère générique, notre travail considère volontairement le savoir visé comme partie prenante de la difficulté supposée. Même si une composante individuelle doit jouer un rôle, le changement de posture est en quelque sorte « à réinventer » pour chaque thème mathématique à enseigner. C'est pourquoi les résultats présenteront dans le même temps des caractéristiques spécifiques aux objets mathématiques abordés et des potentialités de généralisation des actions de formation présentées ici.

1.5.2 Trois plans d'explications et un plan d'actions

Si notre étude part d'un constat sur les pratiques spontanément adoptées par les élèves-professeurs, nous proposerons dans un premier temps d'en rechercher des explications selon plusieurs plans, à savoir :

1) la spécificité de la période de formation initiale, en montrant comment des recherches sur ce thème identifient et analysent des problématiques proches de celles que nous souhaitons étudier ;

2) la nature du savoir mathématique, et notamment la dialectique outil-objet qui, avec les changements de cadre, permet l'évolution du savoir mais génère dans le même temps différentes postures par rapport à un concept, postures que nous associerons à des niveaux de rationalité ;

3) la question des transpositions de ce savoir, et le rôle des institutions dans la différenciation de ces transpositions.

Ensuite, nous reviendrons au contexte de la formation initiale pour exposer les actions de formation et les réactions des étudiants.

1.5.3 Résumé et déroulement des chapitres

Ce Chapitre 1 visait à exposer notre question initiale.

Le Chapitre 2 sera consacré à une investigation des problématiques propres à la formation initiale et au rôle que la didactique peut y jouer. Nous cernerons progressivement les études mettant en évidence des constats semblables ainsi que les éléments d'analyse qui y sont proposés. Cela nous permettra de positionner notre travail par rapport à d'autres recherches portant sur la formation initiale en mathématiques.

Le Chapitre 3 aura ensuite pour objectif de préciser comment les cadres théoriques nous permettent d'élaborer une grille de lecture des transpositions du savoir ainsi que des pratiques et discours observés. En particulier, la nature du discours technologique par rapport à la théorie sera mise en relation avec l'identification de deux fonctions de « la rigueur », à savoir la rigueur comme recherche de rationalité et la rigueur comme construction d'un formalisme. La notion de cadre de rationalité sera associée à l'existence de deux types de praxéologies, le premier correspondant à un travail allant du système vers sa modélisation et le deuxième correspondant à un travail sur le modèle. Dans ce même chapitre, nous analyserons comment, parmi différentes conceptions des mathématiques et de leur apprentissage, l'empirisme peut être associé aux pratiques relevant de l'ostension déguisée.

Le Chapitre 4 proposera ensuite une analyse du thème mathématique et de ses transpositions. Nous étudierons les rôles respectifs des deux concepts de dérivée et de tangente dans l'histoire, puis ferons l'analyse des transpositions existantes à la lumière des référents mis en place dans le chapitre précédent. Cela nous conduira alors à une re-formulation de notre question en termes de savoirs et organisations mathématiques

Le Chapitre 5 décrira la méthodologie utilisée pour notre étude. Nous y présenterons le contexte, à savoir les dispositifs de formation initiale, et l'ensemble des actions menées pour recueillir des informations à la fois sur les pratiques des élèves-professeurs, et sur les discours accompagnant ces pratiques. En particulier, nous chercherons à confronter les étudiants à un projet d'enseignement relevant d'une rationalité « inhabituelle », de manière à étudier comment ils perçoivent le milieu effectivement proposé aux élèves.

Le Chapitre 6 proposera alors une analyse de ces données.

Enfin, le Chapitre 7 cherchera à identifier les conclusions possibles de notre étude, mais aussi les questions qu'elle aura soulevées.

Chapitre 2

Echos d'autres recherches sur les élèves-professeurs

Comme nous l'avons dit précédemment, l'enseignement secondaire et l'enseignement universitaire sont des institutions différentes au sens où elles impliquent chacune un rapport collectif aux mathématiques qui leur est spécifique, ceci indépendamment de la formation initiale des jeunes professeurs.
Il nous paraît alors utile de caractériser chez ces élèves-professeurs ce qui leur est propre. Sans pouvoir être exhaustive ici, nous avons donc voulu nous référer à des documents décrivant, d'une part, la spécificité et les difficultés attendues de cette transition aussi bien sous l'angle du contrat didactique particulier que sous celui des difficultés liées à la discipline et, d'autre part, à des travaux de didactique caractérisant les pratiques enseignantes des professeurs en formation initiale ou débutants de manière à voir les questions qui continuent de se poser à ce sujet et comment le didactique peut les analyser.

En cherchant comment d'autres recherches ont pu aborder des questions proches de la problématique que nous souhaitons traiter ici, nous pourrons adopter progressivement un point de vue plus analytique et montrer la nécessité de compléter les résultats généraux en prenant en considération la spécificité des savoirs en jeu.

2.1 Une période critique sur le plan du rapport au savoir

La criticité de cette période est en fait évoquée depuis longtemps. Dans « La mesure des grandeurs », Henri Lebesgue[28] s'inquiétait déjà de la formation des maîtres en mathématiques :

> *[…] ces efforts de compréhension d'ensemble, de coordination qui me paraîtraient pouvoir servir plus efficacement à la formation des futurs professeurs que le travail exigé d'eux : le fignolage verbal de leçons isolées.*
> *(Lebesgue, 1975)*

Encore auparavant, Evariste Galois[29] disait :

> *Quand leur laissera-t-on du temps pour méditer sur cet amas de connaissances, pour coordonner cette foule de propositions sans suite, de calculs sans liaison ?*
> *(Galois)*

Pourtant les institutions des différents pays —nous ne pouvons cependant ici parler que de ce qui concerne la France et la Belgique— ont tardé à prendre en compte le devenir professionnel des étudiants en mathématiques, et plus spécifiquement de ceux qui se destinaient à l'enseignement. Sans doute en vertu de deux principes encore prégnants aujourd'hui, à savoir l'illusion de transparence des contenus et une certaine perception du métier, qui induisent des modèles de formation consistant en la seule connaissance de la discipline, connaissance conçue en un sens que nous montrerons réducteur, et en une formation sur le terrain.

2.1.1 Deux obstacles

Le premier est une « *illusion de transparence* » (Chevallard, 1991) selon laquelle le savoir à enseigner ne serait qu'un savoir savant, et donc qu'il suffit de connaître sa discipline pour bien l'enseigner. C'est ne pas tenir compte du phénomène de la transposition didactique (Chevallard, 1991) par laquelle le « savoir savant » devient « le savoir à enseigner ». C'est aussi ce phénomène qui est vécu par chaque nouvel enseignant lorsqu'il doit établir des liens entre les théories étudiées et les contenus des programmes. Ce premier obstacle a pour conséquence de considérer soit qu'il n'est pas

[28] Cité dans Friedelmeyer (2001)
[29] Cité dans Bouvier (1981)

besoin de formation, soit qu'elle peut consister en une vérification des connaissances. Pourtant, pour Joël Briand (1998) :

> *Le fait de penser que le professeur doit seulement savoir ce qu'il aura à enseigner a deux conséquences : lorsque les contenus mathématiques sont jugés triviaux par les étudiants, ceux-ci n'envisagent pas spontanément d'autre action d'enseignement que celle de l'ostension ; et lorsque les contenus sont jugés difficiles, alors l'inquiétude du point de vue de la maîtrise des savoirs réduit toute disponibilité à une approche didactique.*
> *(Briand, 1998)*

Le deuxième obstacle est la position selon laquelle « *enseigner est un art et cela ne s'apprend pas* ». Cette phrase, face à laquelle le formateur doit souvent légitimer son existence, peut appeler des réponses du type « un art, ça s'exerce », et même en demandant : « *De quel art s'agit-il ? Celui du peintre ou celui de l'artisan ?* » (Robert, 1991), on est pourtant alors amené à envisager une formation du type « observation d'un expert » ou « apprentissage des gestes du métier » par une sorte de « compagnonnage ».

Ce mouvement du professeur de mathématiques passant du statut d'expert à celui d'aide à l'étude peut aussi être vu comme un « raccourci » de l'évolution historique du métier, décrite par Y. Chevallard (1997).

2.1.2 Une différence qualitative

Si E. Galois parlait de donner du temps pour méditer, H. Freudenthal (1973) évoque quant à lui la nécessité d'une période de digestion. C'est avec une citation de Schiller « *was sie gestern gelernt, das wollen sie heute schon lehren ; ach, was haben die Herrn doch für ein kurzes Gedärm!* [30]», qu'il évoque la situation des enseignants qui ont « une leçon d'avance sur leurs élèves », soit au sens propre, ceux qui ont un bagage insuffisant et, au sens figuré, ceux qui passent d'étudiant à professeur.

[30] « Ce qu'ils ont appris hier, ils veulent déjà l'enseigner aujourd'hui ; comme leur digestion doit être rapide ! »

S'il est en effet reconnu que celui qui va enseigner doit « savoir plus » que ce qu'il va enseigner, et qu'il doit le « savoir plus tôt » que le moment où il va l'enseigner, il n'y a pas d'accord sur ce que doivent être ce « savoir plus » et ce « savoir plus tôt », et c'est pour H. Freudenthal toute la problématique de la formation initiale puisque le « plus » revêt en mathématiques une dimension supplémentaire pour atteindre une véritable « différence qualitative » (*qualitative distinction*) entre les mathématiques que l'étudiant a étudiées à l'université et celles qu'il va enseigner. Nous avons déjà évoqué le rapprochement à faire entre la transition secondaire-université et une vision de la formation initiale comme une transition université-secondaire mais H. Freudenthal propose de considérer comme une difficulté supplémentaire de cette période le fait qu'il ne s'agit pas seulement de mouvement entre institutions, mais qu'il y a aussi retour à la première institution.

Poussé à l'extrême, le raisonnement de F. Klein et H. Freudenthal amènerait à penser que ce qui se passe entre le départ de l'école et le retour comme professeur n'est donc qu'une parenthèse entre les deux moments d'oubli. Il est généralement entendu que le professeur doit avoir fait quelque chose pendant cette parenthèse, mais on entend aussi que tout un chacun pourrait donner cours dans le secondaire puisqu'il a suivi ces cours et c'est finalement la logique cachée de l'étudiant reprenant ses cours du secondaire pour préparer ceux qu'il va donner. Pour dépasser cet état de fait, nous souhaitons donc voir comment la formation peut utiliser les connaissances acquises durant cette parenthèse pour éclairer les transpositions disponibles pour le niveau d'enseignement visé.

2.1.3 En mathématiques, le simple est proche du complexe

La période d'études doit-elle pourtant être seulement un moyen de remplir la parenthèse entre les deux oublis ? Son contenu et sa durée ne doivent-ils être déterminés que par la loi de l'offre et de la demande ? Toujours d'après H. Freudenthal, l'objectif de F. Klein et du programme d'Erlangen était de réduire cette fracture, en donnant au futur professeur les connaissances qui procureraient un

« fond » scientifique à l'activité quotidienne dans sa classe, et ce en rapprochant les mathématiques élémentaires des théories complexes qui leur sont sous-jacentes :

> *There are quite a few phenomena of elementary mathematics which can only be profoundly understood within the frame of theories which are not at all elementary.*[31]
> *[..]*
> *That the most fundamental is close to the most elementary is an insight that needed half a century to mature.*[32]
> *(Freudenthal, 1973)*

Cette proximité en mathématiques du niveau élémentaire et du niveau fondamental, semble donc en faire aussi bien l'attrait pour le chercheur qui développe le fondamental pour expliquer l'élémentaire que la difficulté d'enseignement pour le professeur qui doit expliquer l'élémentaire sans pouvoir utiliser le fondamental. Doit-il pour autant faire comme s'il ne le connaissait pas ? C'est ce que constate I. Bloch (2005) :

> *Quand ils deviennent professeurs, ils pensent que leurs études ont pris fin : ils croient souvent sans objet l'application au secondaire de connaissances mathématiques élaborées.*
> *(Bloch, 2005)*

Mais fait-il vraiment comme s'il ne connaissait pas ce niveau fondamental de justification, ou peut-on plutôt envisager qu'il ne sait pas comment l'utiliser ?

Après avoir brièvement décrit les obstacles culturels à l'organisation d'une période de formation et les difficultés inhérentes à ce mouvement entre cultures mathématiques, nous allons voir que ce changement dans le rapport au savoir est complexifié par le rôle des institutions et de leurs représentants dans la période de formation initiale.

[31] « Il existe un certain nombre de phénomènes relevant de mathématiques élémentaires mais qui ne peuvent être compris en profondeur que dans de cadre de théories qui ne sont justement pas du tout élémentaires »
[32] « Que le plus fondamental est très proche du plus élémentaire est une idée qui a mis plus d'un siècle à prendre forme »

2.2 La formation vue comme « initiation au métier d'enseignant33 »

Avant la demande institutionnelle d'une formation initiale, celle-ci se déroulait le plus souvent, et dans les deux pays, par exemple sous la forme évoquée ci-dessous :

> *… la formation était plus limitée, elle était assurée par les inspecteurs et certains enseignants, et se voulait un complément à la formation sur le terrain.*
> *(Robert, 1995)*

Sans forcément donner satisfaction à tous, cette organisation était « *suffisamment légère pour qu'il n'y ait pas de remous* » (Robert, 1995). Un consensus semble maintenant s'être installé sur une formule mixte articulant une formation pratique « en classe » avec une formation plus générale « hors classe ». Cette articulation vise à faire les allers-retours nécessaires entre théorie et pratique, mais présente aussi le risque de laisser la pratique empêcher toute prise de recul en proposant « *une vision réductrice du métier* » (Briand, 1998), ou en enfermant l'élève-professeur *« dans un métier qu'il n'a pas encore travaillé […] et l'adhésion à une norme de terrain* » (Briand, 1998). Il n'y aurait alors plus articulation mais interférence.

Cette liaison théorie/pratique est le point commun entre les organisations[34] choisies par la France et la Belgique. Nous reprenons par exemple ci-dessous la description du dispositif mis en place à l'académie de Versailles :

> *C'est la deuxième année d'IUFM pour la plupart des certifiés. [….]. Les stagiaires, puisque c'est ainsi qu'ils s'appellent aussi, ont tous une classe en responsabilité, en général classe de seconde ou classe de quatrième ou troisième. Ils sont assistés en cela par un conseiller tuteur, professeur plus ancien, du même établissement en général, qui les suit, peut aller dans leur classe, peut les inviter dans ses classes et leur donne en principe tous les conseils qu'ils veulent. Les stagiaires sont aussi envoyés pendant 8 semaines (durée variable selon les académies) en stage dans une autre classe, complémentaire de la leur (collège s'ils sont en lycée et réciproquement, ZEP ou zone sensible si possible). Ce sont les stages dits de pratique accompagnée. De plus les stagiaires ont à rédiger un mémoire professionnel, petit travail de réflexion à partir de leur expérience professionnelle (ce travail est aussi demandé aux agrégés et prend le nom de projet. Enfin, les stagiaires doivent participer à une formation à l'iufm, de deux jours par semaine, pendant une bonne moitié de l'année, cette formation comprend une partie de formation générale où toutes les disciplines peuvent être*

[33] A. Robert (1995).

[34] Ces organisations étant par ailleurs en cours de modification, avec le changement de statut des IUFM en France et l'application des accords de Bologne.

> *regroupées, et une partie de formation disciplinaire, mathématique en l'occurrence. Cette dernière est assurée par des enseignants de lycée et collège, déchargés d'un tiers temps à cet effet. L'évaluation de cette année se fait à partir d'un certain nombre de rapports, sanctionnant globalement tout à la fois les résultats dans la classe, l'assiduité à la formation en IUFM, les stages de pratique accompagnée et le mémoire.*
> *(Robert, 1995).*

Nous décrirons plus précisément au Chapitre 5 les modalités de la formation initiale en Belgique, et spécifiquement dans les deux universités au sein desquelles nous avons recueilli nos données, mais nous pouvons déjà remarquer quelques différences dont l'existence d'une institution dédiée à la formation ; le caractère dit « professionalisant » (les étudiants entrant dans cette institution se destinent uniquement à l'enseignement) ; la durée de la formation ; les modalités d'évaluation avec les concours en France mais aussi la rédaction d'un mémoire ou projet nécessitant une réflexion à long terme et une certaine distanciation ; la forme donnée à la formation pratique (stages ou prise en charge d'une classe[35]).

2.2.1 Objectifs de la formation ou « comment définir un enseignant formé ?[36] »

Si les objectifs de la formation sont définis par des textes légaux, leur concrétisation pose question à ceux qui vont y jouer un rôle, ceux qu'on va appeler « les formateurs ». Une première formulation des objectifs nous est proposée par M. Artigue (1991) :

> *Aider les futurs enseignants à construire un rapport au didactique qui soit axé non sur la production de savoirs didactiques, mais sur la capacité à exploiter ces savoirs pour mieux comprendre les phénomènes didactiques à l'œuvre dans l'enseignement et exploiter les ressources didactiques existantes.*
> *(Artigue, 1991)*

A. Robert pose plus directement la question « *qu'est-ce qu'un enseignant de mathématiques formé ?* » (Robert, 1991) et propose plusieurs points de vue dont nous citerons quelques-uns. Pour les élèves, le « bon prof » est « *quelqu'un qui doit à chaque moment mais aussi globalement prendre des décisions et optimiser ce faisant un*

[35] C'est ce que nous rencontrons dans le cas d'étudiants étant déjà en fonction.
[36] A. Robert (1991)

certain nombre de contraintes ». Dans cette optique, la formation pourrait consister à identifier les marges de manoeuvre et les contraintes au niveau du professeur. Sur le plan des représentations : « *un enseignant formé a à sa disposition des représentations variées et riches des mathématiques et de leur transmission* » (Robert, 1991). Dans cette optique, la formation consisterait à lui faire prendre conscience de ses représentations propres et à d'autres possibles qu'il aura à rencontrer. Ce qu'on appelle la « gestion de la classe » implique en effet deux types de compétences professionnelles :

> *Des connaissances en amont sur les mathématiques à enseigner (difficultés des élèves à chaque niveau, objectifs plausibles pour une classe donnée) et des connaissances sur le déroulement même d'une séance (diagnostics instantanés, interventions improvisées, etc).*
> *(Robert, 1995)*

Enfin il reste encore le point de vue consistant à

> *[..] privilégier l'expérience, et le bon sens qui en résulte, et estimer que rien ne peut les remplacer pour faire acquérir une formation de qualité, qu'aucune « accélération*[37] *» importante n'est possible.*
> *(Robert, 1995)*

En partant d'une enquête auprès des formateurs en IUFM, A. Robert nous propose précisément de poser la question de la formation dans les termes suivants :

> *Existe-t-il des compétences qui ne résultent pas des formations actuelles et qui auraient pu s'installer plus vite, plus solidement si on les avait introduites en formation ?*
> *(Robert, 1995)*

2.2.2 Une relation inconfortable

Nous avons parlé d'institutions, mais elles échangeront *via* leurs « représentants » : les formateurs, les étudiants, les tuteurs ou maîtres de stage, que cette demande place parfois dans une relation inconfortable. Les formateurs vont devoir assumer un rôle difficile à définir, et ce devant des stagiaires souvent peu motivés :

> *On constate en effet à ce niveau un refus latent et général (mais pas unanime tout de même) des stagiaires vis-à-vis de ce complément de formation à l'IUFM, hors du terrain, donc. On peut même dire qu'il se manifeste là une contradiction*

[37] Cette notion « d'accélération » consistant à installer plus tôt certaines prises de conscience nous paraît importante dans la mesure où des enquêtes sociologiques ont montré que les risques d'abandon de la profession sont les plus importants dans les cinq premières années d'enseignement.

> *flagrante entre le désir de formation des formateurs IUFM et les demandes des stagiaires. Cela génère des conflits, plus ou moins explicites et en tout cas inconfortables, voire désagréables pour les formateurs.*
> *(Robert, 1995)*

Curieusement le formateur et l'élève-professeur sont tous deux dans une position intermédiaire entre les deux institutions en jeu, mais « pas dans le même sens ». De plus, les élèves-professeurs sont en fait déjà ailleurs :

> *Les futurs enseignants en formation ne font que passer dans l'institution de formation. Consciemment ou non, ils adhèrent beaucoup moins à sa norme qu'à celle qu'ils projettent sur leur futur métier.*
> *(Briand, 1998)*

Quant aux formateurs, ils vont être exposés aussi bien à cette volonté des étudiants d'intégrer leur futur terrain qu'aux partisans de la seule formation par le terrain, alors qu'ils sont eux-mêmes « issus » de ce terrain.

2.2.2.1 Position du formateur

Les formateurs vont en effet devoir assumer le fait d'avoir été choisis parmi d'autres enseignants :

> *…il faut noter qu'il y a une part psychologique dans leurs interventions qui est improvisée, pragmatique, empirique. Or ils n'ont pas de qualification spéciale à ce sujet et peut-être du même coup sont-ils moins assurés, ce que les stagiaires peuvent percevoir sans bien l'interpréter.*
> *(Robert, 1995)*

Ils ont en général

> *….des objectifs généraux, des enjeux, des désirs réels de formation, mais se heurtent à des difficultés certaines et quelquefois décourageantes… notamment à un manque de motivation de la part des stagiaires, voire à un rejet [….] comme s'il fallait désaltérer qui n'a pas soif.*
> *(Robert, 1995)*

Les désirs réels évoqués ci-dessus se transforment donc souvent en un objectif plus consensuel :

> *Le formateur se donne donc pour tâche, comme le lui demande l'institution, de contribuer à faciliter l'entrée dans le métier d'enseignants de maths.*
> *(Robert, 1995)*

2.2.2.2 Position de l'élève-professeur

Nous avions signalé le contrat inconfortable dans lequel se trouve l'élève-professeur, par définition à la fois élève et professeur. Même si les choix institutionnels peuvent ensuite renforcer ou alléger cet inconfort, nous allons ici voir comment il est généralement évoqué par plusieurs auteurs. Pour A. Robert :

> *Le système de formation adopté cette année-là place des stagiaires alternativement dans deux logiques d'action qui nous semblent inconciliables que ce soit par rapport au savoir et socialement :*
> *-la logique de l'enseignant, de celui qui prend les décisions et assume devant l'institution les responsabilités, de celui qui détient le savoir, toutes positions que les stagiaires adoptent dans leur classe 6 heures par semaine ;*
> *-la logique de l'élève ou du formé, simple exécutant, qui est là pour apprendre un savoir dont l'enseignant est le détenteur.*
> *(Robert, 1995)*

On va alors constater un « état d'esprit étudiant [38]» en ce qui concerne la relation aux formateurs, mais aussi une relation contradictoire aux savoirs :

> *Ils représentent le détenteur du savoir, alors que l'année dernière ils séchaient encore sur leurs problèmes*
> *(Robert, 1995)*

Ils deviennent responsables d'une organisation, alors que :

> *A l'université, les étudiants ne sont pas responsables des maths enseignées : preuves, organisation globale.*
> *(Bloch, 2005)*

M. Artigue (1991) confirme la difficulté en ces termes :

> *Un rapport satisfaisant au didactique peut-il commencer à se construire chez un sujet qui occupe principalement la position d'enseigné au sein du système ?*
> *(Artigue, 1991)*

Cette première investigation nous montre que la formation initiale est caractérisée par des relations complexes entre les élèves-professeurs, les formateurs, et leurs rapports spécifiques aux savoirs, ce qui risque de « noyer » le questionnement individuel relatif au savoir. Ces relations vont encore se complexifier par les postures adoptées vis-à-vis « du terrain ».

[38] On peut à ce sujet lire l'anecdote du bus dans Robert (1995).

2.2.3 La formation sur le terrain

Nous avons mentionné au début de ce chapitre que la formation du type « observation d'un expert » ou « apprentissage des gestes du métier » semblait pour certains essentielle et elle est à juste titre une part importante des dispositifs mis en place[39]. Nous allons ici décrire en quoi elle contribue à la formation, notamment par la satisfaction qu'elle apporte, mais aussi en quoi elle pourrait empêcher la prise de recul sur les pratiques.

Certains comparent l'enseignement à un art et même si il n'y a pas réellement de production,

> *Il y a cependant des gestes professionnels […]*
> *Le bon usage du tableau, les déplacements dans la classe, l'endroit où poser le regard, le ton de la voix et la rapidité du débit, la tenue du cahier de textes, mais aussi la précision des consignes, le fait de répéter les choses, d'attendre à certains moments, sont souvent cités, par les enseignants qui assistent à leurs cours, comme défaillants chez les enseignants débutants, au moins au début de l'année.*
> *[…]*
> *L'imitation, qui est un des apanages de la formation sur le terrain, semble effectivement en partie bénéfique au niveau des actes techniques.*
> *(Robert, 1995)*

La formation sur le terrain possède aussi l'avantage d'apporter une satisfaction immédiate car « *grâce à cette formation, le stagiaire arrive à faire tourner sa classe* » (Robert, 1995).

Nous pouvons aussi évoquer la différence de nature dans la relation que l'élève-professeur pourra entretenir avec, d'une part, les formateurs liés à l'institution de formation qui proposent une prise de recul et, d'autre part, les formateurs de terrain avec qui cette relation pourrait être moins neutre et plus personnelle, c'est-à-dire aussi bien « *plus chaleureuse* » (Robert, 1995) que plus conflictuelle. D'autre part, si les premiers vont insister plus sur les savoirs (donc sur des connaissances que l'élève-professeur est censé avoir), les seconds interviennent en général sur des séances précises en proposant des éléments de réponse à des questions nouvelles et se posant de manière immédiate. Dans la formation par le terrain, il n'y aurait « *pas de règle, c'est-*

[39] Par rapport à une optique où elle serait suffisante, elle nous semble devoir être accompagnée d'un questionnement sur la notion d'expertise par rapport à celle d'expérience, et sur les possibilités de transmission de l'expérience.

à-dire pas l'application de quelque chose de général, mais (seulement la) reproduction de quelque chose de particulier[40] » (Robert, 1995).

Si la formation sur le terrain a l'avantage de répondre à des préoccupations immédiates, avec des suggestions qui peuvent être testées rapidement, elle ne laisse pas de place à d'autres questions :

> *Certaines questions :*
> *Toutes les notions sont-elles de la même nature épistémologique ?*
> *Peuvent-elles relever d'une présentation analogue aux élèves ?*
> *Pourquoi telles notions au programme ? Et pas telles autres ?*
> *Quels élèves forme-t-on avec les programmes actuels ?*
> *sont éventuellement laissées à la formation générale, où elles sont alors tellement généralisées que les stagiaires s'en désintéressent, ne les reconnaissant même pas.*
> *Robert (1995)*

C'est justement la place du questionnement du savoir mathématique et de ses transpositions lors de la formation initiale que nous souhaitons aborder, sous l'angle du changement vis-à-vis de la rationalité que ce questionnement devrait amener. Cette nécessité de proposer aussi une distanciation par rapport à une formation basée uniquement sur la pratique en classe, nous amène à poser la question du lien entre le didactique et la formation.

2.3 Didactique et formation

C'est peut-être en s'intéressant aux acteurs de la diffusion du savoir que le didactique va encore plus se distinguer de la pédagogie. Cette dernière discipline « *s'intéresse à la transmission d'un savoir supposé transparent et non questionné* » (Margolinas & Perrin, 1997) tandis que la didactique est

> *La science des conditions et des contraintes de la diffusion (ou de la non-diffusion) des connaissances et des savoirs dans un ensemble humain déterminé.*
> *(Chevallard, 2004)*

L'objectif plus général est alors « *d'étudier les conditions et les mécanismes de cette diffusion (ou même rétention)* » et de chercher à répondre aux questions :

40 Mentionnons pourtant le risque de « formation par réplication » dénoncé par J. Nimier (1976).

> *Pourquoi en tel groupe humain sait-on telle chose et ignore-t-on telle autre?*
> *Pourquoi sait-on y faire telle chose, et pas telle autre?*
> *Pourquoi de telle manière, et pas d'une autre?*
> *(Chevallard, 2004)*

Le didacticien ne cherche donc pas à dire « comment bien enseigner », mais se donne pour missions d'étudier « l'homme aux prises avec les mathématiques » et donc les différentes activités humaines liées au développement des mathématiques, à leur enseignement, leur apprentissage, leur étude et leur communication. Il ne s'agit donc pas de prescrire mais plutôt d'adopter une posture de chercheur et d'analyste en se plaçant dans une perspective systémique de manière à « briser l'illusion de naturalité ».

La didactique des mathématiques, ou du moins une certaine manière de la penser, née en France après la réforme des mathématiques modernes, s'est d'abord penchée sur les problèmes d'apprentissage et s'est ensuite orientée vers les enseignants eux-mêmes. Cette évolution dans la prise en compte de l'enseignant, et maintenant du rapport que l'enseignant entretient lui-même avec le savoir visé, est brièvement résumée ci-dessous, en s'inspirant d'un éditorial de C. Margolinas et M.-J. Perrin (1997).

1) «*avant 1980, l'enseignant est mis entre parenthèses (…) et les recherches sont développées autour des pôles savoir et élèves* »;

2) de 1980 à 1989, la méthodologie de l'ingénierie didactique cherche à prendre en compte la complexité du système didactique et de la classe, dont l'enseignant : « *Chez Douady et Brousseau, il s'agit surtout de caractériser le rôle du maître pour que puisse se dérouler au mieux le processus prévu par l'ingénierie [….]» ; «[Chez Chevallard], les positions différentes de l'enseignant et de l'élève par rapport au savoir (topogenèse) et par rapport à l'avancée du temps didactique (chronogenèse) sont dès le début un moyen d'étude, (mais) le rôle de l'enseignant comme acteur de la transposition didactique n'apparaît qu'en 1991* » ;

3) à partir de 1989, « *l'enseignant devient objet de recherche dans différents travaux, en même temps qu'augmente l'implication des didacticiens dans la formation des maîtres. Les chercheurs vont s'intéresser davantage aux raisons pour lesquelles l'enseignant résiste à la reproduction des ingénieries didactiques mises au point dans les recherches expérimentales* ». En parallèle,

la mise en place d'institutions de formation va poser la question à la didactique de « *comment former sans se cantonner à une reproduction* » (Robert,1991).

Les cadres théoriques se complexifient, dont celui de la transposition didactique qui se structure « *autour de la notion d'institution et de rapport institutionnel où l'enseignant et l'élève viennent prendre des places différentes relativement aux objets institutionnels qui, en didactique, sont des objets de savoir* ».

La question de la modélisation de l'enseignant apparaît depuis dans de nombreuses recherches en didactique, dont celles abordant la formation, et ce au niveau international comme en témoigne l'actuelle étude ICMI 15 (ICMI, 2004)qui souhaite prendre en compte « *le rôle fondamental que jouent les professeurs dans l'apprentissage mathématique des élèves, rôle néanmoins trop souvent négligé ou considéré comme allant de soi* » en rappelant que « *tout effort pour accroître les perspectives d'apprentissage des élèves passe par une attention aux situations durant lesquelles leurs professeurs apprennent* ».

Si la didactique a d'abord cherché en général à repérer des régularités dans les phénomènes d'apprentissage, les questions posées par la formation initiale amènent à rechercher à la fois des régularités chez un seul individu, mais aussi des régularités inter-individuelles qui seraient alors plutôt liées aux savoirs en jeu. Il est donc nécessaire de tenter de caractériser les pratiques enseignantes selon ces deux axes.

2.3.1 Décrire et analyser les pratiques enseignantes

Il importe tout d'abord d'inclure dans les « pratiques de l'enseignant » non seulement leur partie observable (l'activité en classe) mais aussi les choix et les décisions explicitables. Le problème du didacticien est alors de décrire ces pratiques et, dans le cas de la formation, de chercher comment les analyser de manière à développer les compétences attendues. Les travaux consultés mettent en évidence deux caractéristiques : la complexité, mais en même temps la stabilité des pratiques.

La complexité des pratiques vient du fait qu'elles résultent d'un ensemble de contraintes[41] :

> *« ….les pratiques sont toujours l'émergence, la petite partie visible d'un iceberg, elles résultent à la fois de connaissances, de représentations, et d'actions de l'enseignant, dont nous ne percevons finalement qu'une petite partie. Et cela ne simplifie pas la tâche du formateur ! […] Ainsi les pratiques en classe des enseignants dépendant de contraintes incontournables liées à l'institution (programmes) ou liées au métier (habitudes, établissement collectif des enseignants) : il y a des réponses régulières du métier d'enseignant à un moment donné qui ont du mal à changer même si les contraintes évoluent. Mais elles dépendent aussi des individus, de leurs expériences, de leurs connaissances et de leurs représentations.*
> *(Robert, 1995)*

Face à cette complexité, on peut observer une forme de stabilité. Pour A. Robert (2004), « *…assez rapidement, pour un enseignant donné, les pratiques sont stables (décisions analogues dans des situations analogues)* ». Cette stabilité est par exemple mise en évidence dans plusieurs thèses consacrées aux enseignants stagiaires ou débutants, et décrite sous le terme de « profil », ou de « système de fonctionnement » d'un enseignant, comme nous en présenterons dans la suite de ce chapitre.

On peut aussi rattacher cette stabilité aux concepts de genre et de style[42] professionnels traduisant *« le fait que se crée dans une profession des réponses communes aux acteurs (…) qui se transmettent presque implicitement »* (Robert, 2004). Alors, la formation initiale pourrait en conséquence se définir deux objectifs complémentaires :

1) Sur le plan « humain », cette formation pourrait se fixer pour objectif la prise de conscience par chaque enseignant de « son style », en lui donnant les moyens, soit de le développer, soit de l'enrichir.

2) Sur le plan du savoir, c'est donc précisément en formation initiale qu'un questionnement sur le savoir mathématique et ses transpositions doit être au moins initialisé.

---

[41] Nous verrons plus loin comment C. Margolinas propose un outil d'analyse de cet ensemble de contraintes et de leurs interactions.

42 *« L'activité (enseignante) relève d'une double mémoire : personnelle et impersonnelle et générique. Le genre est un ensemble de règles, de conventions d'actions pour agir, non écrites, à la fois contraintes et ressources qui définissent dans un milieu donné l'usage des objets et des échanges entre les personnes. Le style permet à l'individu, dans l'action quotidienne, de mettre en œuvre des règles inscrites dans le genre, de le recréer mais aussi de le renouveler »* (Clot, 1999).

2.3.2. Moyens et actions envisageables

Nous avons indiqué précédemment les objectifs généraux de la formation qui se sont présentés suite à la demande institutionnelle. Nous allons citer ici comment les recherches en didactique suggèrent quelques pistes d'action pour répondre à ces objectifs.

H. Freudenthal (1973) signalait qu'une des conditions de réussite de la formation initiale est que le futur enseignant soit « *capable d'enseigner en suivant un programme très différent de celui qu'il a connu pendant ses propres années d'école* ». Une des actions pourrait donc être de faire prendre conscience au futur enseignant du programme, en tant qu'organisation, qui a gouverné ses apprentissages mathématiques, et de lui proposer de préparer un cours selon une organisation « imposée [43]».

A. Robert (2004) souligne qu'elle propose non plus une formation à la didactique théorique mais une formation à l'enseignement dans laquelle *« la didactique nous fournissait essentiellement les outils (en grande partie épistémologique) pour donner aux étudiants des points de repère sur l'enseignement…. Analyse d'exercices, de programmes, de manuels, et de différentes situations à proposer. En fin d'année pouvaient être abordées des questions plus didactiques sur le traitement des erreurs, les choix d'organisation ».*

Une autre perspective pourrait être offerte par un élargissement de la problématique de la diffusion hors du contexte de l'enseignement, suite à la thèse de Sylvie Michaud comparant les situations didactiques proposées par l'institution scolaire et celles proposées par les « cafés mathématiques [44]», et montrant qu'elles peuvent remplir des fonctions complémentaires en termes d'aide à l'étude.

Une autre perspective serait la formation par la recherche, en visant non pas « *le métier de chercheur [….] mais l'attitude du chercheur : critique, analytique* » (Robert, 1995). C'est ce qui se fait par le mémoire professionnel en France. Pour A. Robert (1995), un autre atout serait également d'amener les enseignants à « *relativiser les résultats de recherches et donc de moins prendre comme imposées les recherches en didactique* ».

[43] Citons le cas d'une étudiante ayant eu d'abord une réaction assez violente lorsque le maître de stage lui a demandé de présenter la notion de probabilité selon l'approche fréquentiste, puis enchantée quand elle a réussi à accorder les contraintes avec ses convictions. Cet accord passait par une distinction entre le système (la fréquence) et le modèle (la probabilité).

[44] L'IUFM a demandé que l'expérience soit communiquée aux professeurs en formation.

J. Briand (1998) propose quant à lui de

> *Placer l'étudiant en position d'observateur, en retrait d'intention de transmettre spontanément le savoir.*
> *[..]*
> *Restaurer les rapports personnels à l'activité mathématique : vérité, argumentation, preuves, types de preuves, démonstration.*
> *(Briand, 1998)*

Ceci peut se faire par la mise en situation des professeurs :

> *Analyser la pertinence des réactions mathématiques des professeurs dans leurs classes […]*
> *Travailler cette pertinence en formation dans des situations à caractère adidactique.*
> *(Bloch, 2005)*

Ils pourraient alors

> *Arriver à questionner le savoir et le mettre en scène dans des situations ;*
> *Interagir avec les élèves sur des arguments mathématiques pertinents ;*
> *Mettre en œuvre des preuves pragmatiques et non plus seulement formelles ;*
> *Savoir comment traiter des formulations provisoires.*
> *(Bloch, 2005)*

Quels que soient les actions choisies et les efforts des formateurs, « *l'impact de ces formations peut être considérablement restreint, compte tenu de la contrainte du premier poste et de la réalité des classes* » (Robert, 1995). C'est pourquoi s'ouvrent aussi d'autres perspectives comme les dispositifs d'insertion ou une formule d'accompagnement, voire de consultance[45], à plus long terme.

Pour conclure, il nous paraît également important de souligner que la formation initiale constitue elle-même une situation d'enseignement mais est fort peu étudiée en tant que telle. En effet, quels que soient les moyens mis en place, le formateur n'est pas à l'abri d'effets de contrat ni de l'illusion de transfert.

Après avoir décrit pourquoi et comment le didactique s'intéresse à l'enseignant et à la formation initiale, nous allons dans ce qui suit présenter brièvement plusieurs recherches récentes sur les pratiques de professeurs-débutants.

---

[45] S. Gasquet (1997), par exemple, dit avoir apprécié le regard extérieur d'une didacticienne sur ses pratiques en dehors d'un contexte de formation.

Nous verrons d'abord deux thèses posant des problématiques rejoignant la notre, mais de manière plus générale, puis nous chercherons plus précisément comment analyser le rôle potentiel des savoirs mathématiques lors de la préparation de leçons.

2.4 Deux recherches sur des problématiques analogues

2.4.1 De la position d'étudiant à celle de professeur : évolution du rapport à l'algèbre

Agnès Lenfant (2002) étudie dans sa thèse le développement des compétences professionnelles d'enseignants stagiaires, son questionnement portant également sur le rôle du formateur. Si les visions du métier ont évolué, passant de l'enseignant-mage à l'enseignant-technicien, puis à l'enseignant-technologue et aujourd'hui à l'enseignant professionnel qui doit être un praticien-réfléchi, reste la question de savoir comment et à quel moment se construisent les compétences professionnelles attendues. Si on peut dire que ce développement relève « *d'une recomposition individuelle, intime* » (Robert, 1991), est-il possible de la faciliter, voire de l'accélérer ?

A. Lenfant suit plusieurs étudiants stagiaires auxquels elle pourra associer un profil, notion « *permettant de rendre visibles les différentes cohérences repérées dans les pratiques de ce stagiaire tout au long de l'année, les évolutions observées et les raisons de ces évolutions* » (Lenfant, 2002). Chez ces stagiaires, elle constate notamment des phénomènes concernant :

1) l'existence d'un délai dans la constitution d'un discours technologique adéquat :

> *les premières analyses d'organisations mathématiques mises en place ont fait apparaître des niveaux de discours très différents, allant du discours technologique exprimé en termes de règles d'action, à des discours qui font clairement apparaître les raisons d'être de la technique, voire discutent son champ de validité, en passant par des discours technologiques de type légaliste, en termes de droit et de non-droit.*
> *(Lenfant, 2002)*

2) le malaise de certains stagiaires face à ce qu'ils ressentent comme une impossibilité de « correctement » justifier des résultats ou corriger des déductions d'élèves[46] :

> *C'est sûr qu'on va pas leur dire que la dérivée est continue, je suis d'accord, mais… Moi, ça me pose un vrai problème… je suis obligé de leur dire « croyez-moi » [….] alors qu'en maths on doit tout justifier. Et nous on leur balance des trucs comme ça [….] C'est le décalage qui me tue. [….] Mais d'un autre côté, quand je pense à ce que je ressentais en tant qu'élève, cela ne me gênait pas. Mais en réfléchissant, c'est sûr qu'un jour il y en a un qui va me le dire, c'est pas possible.*
> *(Benjamin, dans Lenfant (2002))*

Cet exemple montre en particulier que le stagiaire n'envisage que deux niveaux d'utilisation des connaissances[47] : un niveau théorique, non utilisable ici d'après lui, et le niveau théorique supposé d'une classe de seconde, ce qui l'amène à un argument d'autorité qui ne le satisfait pas. A. Lenfant signale qu'il existe pourtant un moyen de tenir un discours intermédiaire qui serait ici de placer des points intermédiaires de manière à invalider la construction d'un segment de droite.

3) l'attention parfois excessive portée à la justification ou à la définition ;

4) l'utilisation des manuels mettant en évidence que, même quand tout y est justifié de manière théorique, le stagiaire procédera à des généralisations à partir d'exemples.

En conclusion l'auteur confirme que

> *Les stagiaires semblent insuffisamment armés pour penser l'interaction entre ce qui relève du bloc tâche/technique et ce qui relève du bloc technologico/théorique.*
> *(Lenfant, 2002)*

Cette difficulté a alors des conséquences sur leurs pratiques en classe avec le sentiment de « *prise de risque dès qu'on sort des sentiers balisés* ». Elle précise cependant que, sur la durée observée, « *on les voit passer de constats et d'explications répandues mais sommaires à la construction de systèmes explicatifs plus élaborés* ».

[46] Le texte suivant concerne des élèves qui tracent spontanément des segments pour rejoindre les points obtenus en calculant les valeurs d'une fonction.

[47] Ce stagiaire passe d'ailleurs assez vite d'une conception universitaire de l'algèbre, à une vision « calculs », sans vision intermédiaire.

2.4.2 Comment les nouveaux enseignants utilisent leurs connaissances mathématiques

Nous avons vu dans le travail d'A. Lenfant qu'un des stagiaires ne trouvait pas facilement un niveau de discours prenant en compte ses connaissances propres mais restant adapté aux connaissances de la classe, et utilisait alors un argument d'autorité (« croyez-moi ») dont il n'était pas satisfait.

Chedlia Ben Salah Breigeat (2001) s'intéresse plus précisément « *aux manifestations des connaissances mathématiques des professeurs lorsque ceux-ci enseignent les mathématiques* », et au fait (signalé par Freudenthal) que « *les enseignants ne peuvent pas exposer directement toutes leurs connaissances mathématiques, mais en même temps ils doivent les utiliser* ». La question serait, d'après l'auteur, plus difficile chez les enseignants débutants du fait que leurs connaissances universitaires viennent d'être « *stockées* » d'une certaine manière qui *a priori* ne permet pas leur utilisation directe dans l'enseignement.

A la suite de Comiti, Grenier, et Margolinas (1995) qui proposent la structuration d'une situation en différents niveaux grâce à la notion de milieu, C. Ben Salah Breigeat cite 5 niveaux d'intervention des connaissances : 1) les connaissances de type noosphérien[48] qui sous-tendent son projet d'enseignement ; 2) les connaissances relatives à la situation d'enseignement qu'il veut développer ; 3) les connaissances globales sur les connaissances et difficultés des élèves à propos de la notion ; 4) les connaissances associées à des interprétations et/ ou des représentations des difficultés rencontrées et de leurs causes ; 5) les connaissances qui lui permettent de distinguer dans le travail de l'élève ce qui relève du savoir à enseigner. Selon l'auteur, les trois premières

[48] Le mot « noosphère » désigne l'ensemble de tout ce (et ceux) qui gravite(ent) autour du système d'enseignement : *« Car à la périphérie du système d'enseignement, que l'on nommera alors système didactique stricto sensu, il faut faire sa place à une instance essentielle au fonctionnement didactique, sorte de coulisses du système d'enseignement, et véritable sas par où s'opère l'interaction entre ce système et l'environnement sociétal. Là se trouvent tous ceux qui, aux avant-postes du fonctionnement didactique, s'affrontent aux problèmes qui naissent de la rencontre avec la société et ses exigences; là se développent les conflits, là se mènent les négociations, là mûrissent les solutions. Toute une activité ordinaire s'y déploie, en dehors même des périodes de crise (où elle s'accentue), sous forme de doctrines proposées, défendues et discutées, de production et de débats d'idées – sur ce qui pourrait être changé et sur ce qu'il convient de faire. Bref, on est ici dans la sphère où l'on pense – selon des modalités parfois fort différentes – le fonctionnement didactique. Pour cela, j'ai avancé pour elle le nom parodique de noosphère. Dans la noosphère donc, les représentants du système d'enseignement, mandatés ou non (du président d'une association d'enseignants au simple professeur militant), rencontrent, directement ou non (par le libelle dénonciateur, la requête comminatoire, le projet transactionnel, ou les débats assourdis d'une commission ministérielle), les représentants de la société (les parents d'élèves, les spécialistes de la discipline qui militent autour de son enseignement, les émissaires de l'organe politique). » (Chevallard, 1991)*

interviendraient dans la préparation des cours et les deux autres dans la mise en pratique[49], à condition de rester disponibles. Une hypothèse de son travail est en effet que l'utilisation des connaissances étant ressentie comme problématique, elles en deviendraient moins disponibles[50].

C. Ben Salah Breigeat se propose de regarder « *les emprunts que l'enseignant effectue à ses connaissances mathématiques et en particulier à ses connaissances de niveau (n+p), (…) et de repérer les traces qu'elles produisent dans le discours de l'enseignant lors d'un cours de niveau (n)* ». Elle analyse pour cela les discours de trois enseignantes débutantes lors de plusieurs séquences d'enseignement en catégorisant systématiquement les interventions des enseignantes et identifie alors trois types de comportement :

> *Une enseignante semble vouloir partager ses connaissances mathématiques avec les élèves, une autre semble s'interdire d'utiliser des connaissances différentes de celles des élèves et une troisième instaure une frontière entre les deux types de connaissances.*
> *(Ben Salah Breigeat, 2001)*

Ses conclusions mettent de plus en évidence que « *aussi bien pour les préparations que pour la classe, il y a un intermédiaire qui semble déterminant, c'est le manuel* ». Même si le rôle du manuel est flou (il n'est plus obligatoire, on ne sait plus si il s'adresse à l'élève ou au professeur), et si il est vu comme un modèle plus ou moins discutable, il semble en effet bloquer[51], les références à des connaissances de niveau (n+p) qui se trouvent alors « *reléguées [….] ou montrées [….] ou intégrées* » selon la manière dont va réagir l'enseignant. Elle met en évidence que c'est justement si l'enseignant cherchait à « *combler le manque de relation* » entre les connaissances telles que présentées dans les manuels, qu'il aurait l'occasion d'utiliser ses connaissances de niveau (n+p)[52].

Ces deux recherches confirment le constat d'I Bloch : « *(les professeurs débutants) ont du mal à questionner la transposition didactique du secondaire* » et portent sur la difficulté des professeurs débutants à articuler des connaissances mathématiques relevant

[49] Mais toujours de manière implicite.

[50] Nous suggérerons de prendre en compte que le retour à l'institution-école joue aussi un rôle dans cette non-disponibilité.

[51] L'auteur parle de « connaissances concurrencées ».

[52] Elle souligne aussi que la rédaction des programmes laisse plus ou moins de place à l'intervention des connaissances universitaires dans l'interprétation des contenus.

d'organisation différentes. Toutefois, elle nous semblent porter plus sur la description de pratiques associées à des profils d'enseignants que sur l'analyse de pratiques à propos d'un thème donné qui constitue la problématique que nous souhaitons étudier. Cette question de l'élaboration d'un discours (ou d'explications) nous semble se manifester dans une part habituellement non observable du travail du professeur qui est la préparation de leçons, en particulier dans la manière dont cette préparation pourra interagir avec le déroulement effectif en classe. C'est pourquoi nous allons maintenant rechercher comment quelques travaux abordant ces sujets pourront guider notre étude.

2.5 La préparation de leçons

Si les recherches citées au paragraphe précédent nous intéressaient par les traces de difficultés à faire cohabiter les connaissances du niveau universitaire avec les connaissances du niveau secondaire, des éléments supplémentaires d'information, issus d'études portant plus précisément sur la préparation des leçons, vont éclairer d'une part, les possibilités et les limites associées à une généralisation de notre hypothèse et, d'autre part, la spécificité du professeur débutant par rapport au professeur déjà expert.

2.5.1 Des caractéristiques généralisables?

Dans le cadre d'une recherche portant sur la détermination des savoirs professionnels, Sylvie Coppé (2006) s'intéresse à la manière dont « *les enseignants préparent leurs séances de classe et quels types de connaissances ils mettent en oeuvre à ce moment* ».

Si cette préparation est reconnue comme faisant partie du métier, elle est moins directement observable que les pratiques en classe dans la mesure où elle se déroule souvent au domicile mais surtout parce qu'elle se fait vraisemblablement à plusieurs reprises avec un travail invisible supportant les heures effectivement consacrées à cette préparation. Sur le plan méthodologique, les observables disponibles ne peuvent donc être que des préparations écrites et des entretiens cherchant à préciser la démarche suivie ainsi que les raisons des choix effectués.

Cette étude met en évidence aussi bien des différences interindividuelles (rejoignant les tentatives de définition de profils comme chez A. Lenfant) que des caractéristiques potentiellement généralisables. A ce stade de l'étude, S. Coppé précise que les différences observées par exemple quant au questionnement sur les connaissances antérieures des élèves pourraient être « *une caractéristique des professeurs ou bien du chapitre traité* ». Cette distinction entre sujet, leçon, chapitre, cours, séquence etc., restant volontairement négligée dans son étude, il nous semble important de compléter son étude par une analyse portant justement sur l'élève-professeur face aux difficultés propres à un thème mathématique.

Les caractéristiques communes rejoignent par contre notre préoccupation sur plusieurs plans. Tout d'abord S. Coppé relève une absence de questionnement du savoir mathématique lors de la préparation de leçons :

> *Les professeurs ne partent pas du savoir, dans le sens où*
> *1) aucun ne se pose la question de savoir quels types de problèmes une notion mathématique permet de résoudre [..]*
> *2) les connaissances mathématiques sont utilisées pour faire des exercices, un peu comme les élèves, mais elles ne sont pas mobilisées pour questionner le savoir mathématique, pour aller chercher des idées de problèmes ou même pour bâtir des synthèses de cours.*
> *(Coppé, 2006)*

La préparation en elle-même tend à se rapprocher de la réalisation d'un puzzle, c'est-à-dire à l'assemblage de pièces existantes. L'essentiel du travail consisterait en effet à ré-agencer des pièces (plan, parties de synthèse, activités) issues d'ouvrages différents dont les programmes et les manuels et sélectionnées « *en fonction de critères portant majoritairement sur la forme ou la clarté* ». De nouveau, S. Coppé souligne le rôle prédominant des manuels à deux titres : 1) « *le statut du savoir écrit dans les manuels est assez élevé et les professeurs ne se donnent pas le droit de le modifier* », et 2) un plan de séance tend à se généraliser sous la forme de : « *activité préparatoire, synthèse, exercices d'application sans liens entre ces parties* », qui est la structure adoptée par de nombreux manuels. Si la notion « d'activité préparatoire » ou « activité d'introduction » semble intégrée par les professeurs, S. Coppé suggère que « *c'est l'idée de proposer des activités* *visant à introduire des savoirs nouveaux qui semble naturalisée et non sa réalisation concrète sur laquelle on pourrait discuter ».* En effet, l'analyse des activités choisies par les professeurs montre *« qu'elles sont souvent constituées de tâches peu problématiques avec de multiples questions très fermées ».* Deux questions peuvent alors être posées à la formation initiale : 1) *« faut-il travailler sans, avec, contre les manuels »* et 2) le peu de critiques envers les situations proposées par les manuels et les choix effectués amène à s'interroger sur la mobilisation « en pratiques » de notions pourtant enseignées en formation comme celle de variable didactique d'un problème.

Le travail de S. Coppé confirme donc nos constats personnels, à savoir que la préparation de leçons est surtout envisagée comme un travail d'organisation de textes existant sur le savoir visé et un travail de gestion des différentes contraintes anticipées (voire imaginées) par l'élève-professeur. Cependant la nouveauté et la multiplicité de ces contraintes risquent « d'étouffer » les contraintes relevant des niveaux liés aux savoirs mathématiques en jeu. Or ce sont justement ces dernières qui permettraient que l'organisation des différents éléments proposant une mise en texte ou en activités du savoir ne soit pas « le puzzle » constaté. C'est pourquoi nous allons présenter maintenant comment Claire Margolinas montre que l'absence d'une réflexion au niveau du thème mathématique amène un professeur stagiaire à d'abord associer des textes non compatibles entre eux, et ensuite à n'interpréter les phénomènes observés en classe que sous un angle strictement pédagogique.

2.5.2 La situation du professeur : le rôle du thème mathématique

Le travail de C. Ben Breigeat présenté ci-dessus faisait référence à la structuration du milieu proposée par C. Margolinas et que nous allons préciser ci-dessous. Deux exemples donneront ensuite des éléments d'analyse et d'explication des constats exposés dans les recherches décrites précédemment.

2.5.2.1 Structuration du milieu

C. Margolinas postule que *« le professeur a une situation »*, en précisant que *« l'idée d'avoir une situation*[53] *et non d'être dans une situation [...] permet de ne pas voir la situation comme extérieure au sujet »*. Ce n'est donc pas une situation unique dans laquelle serait plongé un professeur « quelconque », mais une situation dont les caractéristiques en termes de ressources et contraintes (c'est-à-dire le milieu) sont co-déterminées par le sujet et le contexte, qui lui est immuable. Cette situation peut alors être structurée en plusieurs « niveaux » selon le schéma ci-dessous, suivi par les explications correspondantes.

+3	**Valeurs et conceptions sur l'enseignement/apprentissage** Projet éducatif, valeurs éducatives, conceptions sur l'apprentissage et l'enseignement

+2	**Construction du thème** Construction didactique globale du thème dans lequel s'inscrit la séance : notions à étudier et apprentissages à réaliser
+1	**Projet de séance** Projet didactique spécifique pour la séance observée : objectifs, planification du travail
0	**Situation didactique** réalisation de la séance, interactions avec les élèves, prise de décision dans l'action

-1	**Observation de l'activité des élèves** perception de l'activité des élèves, régulation du travail délégué aux élèves

La situation du professeur (d'après Margolinas, 2005a et Margolinas, 2005b)

La construction est en fait progressive en partant de la situation « habituelle »à laquelle on donne le niveau 0 (S_0) avec un milieu M_0 constitué de l'activité de l'élève dans son milieu (ou situation S_{-1}). Cette situation est celle observée par les premières recherches en didactique basées sur des ingénieries dont l'interprétation en classe par le

[53] Empruntée à Dewey (1938).

professeur fournissait des observables. Un premier changement de point de vue amène à regarder ce qui est moins visible en définissant un autre niveau de la situation du professeur, qui englobe le précédent et qu'on appelle situation de projet. Selon un principe récursif caractéristique de la notion de milieu[54], dans cette situation S_1, le milieu M_1 est la situation S_0 dans la mesure où

> *Quand le professeur prépare une leçon, quel que soit son style pédagogique, il imagine ce que pourra être sa gestion de la classe pour cette leçon et quelles pourront être les réactions des élèves. [...] Il réalise donc hors classe un travail qui implique un équilibre avec la situation didactique.*
> *(Margolinas, 2005a)*

En quelque sorte, à ce moment de son travail le professeur interagit avec les futures interactions avec l'élève, du moins ce qu'il en imagine. Toujours selon le même principe, C. Margolinas suppose alors que cette situation S_1 est elle-même le milieu d'une autre situation S_2 correspondant à un niveau de construction dans lequel « *le professeur construit l'ensemble du thème mathématique qui comprend la leçon de niveau +1* » (Margolinas, 2005a). La notion de thème mathématique peut par exemple être confondue avec celle de chapitre, et pourrait relever d'une articulation purement interne mais nous verrons qu'elle fait aussi intervenir la manière dont les différentes notions sont regroupées au niveau des textes officiels. Cette notion est déjà apparue dans les travaux de S. Coppé qui précisait que les étudiants préparaient « un chapitre » dont ils faisaient ensuite un découpage en leçons, découpage guidé essentiellement semble-t-il par des contraintes d'organisation et de gestion du temps. Pour C. Margolinas (2005a) c'est à ce niveau que le professeur imagine les projets de leçons possibles, « *non seulement sur une articulation interne du thème mais aussi (surtout?) à partir des projets de leçons disponibles* ». Pour le professeur expérimenté, les projets disponibles sont ceux déjà réalisés, voire des productions de groupes de recherche, tandis que « *un professeur qui n'a jamais enseigné pourra considérer le manuel scolaire comme une source de projets possibles* ».

---

[54] Par rapport à la structuration du milieu de l'élève, il existe de plus ici une particularité liée à la non-synchronisation des différents niveaux de la situation du professeur.

Un troisième niveau surdidactique peut être ajouté correspondant à une « situation noosphérienne ». C. Margolinas propose aussi un regroupement des niveaux $S_{0,} S_{+1}, S_{+2}$ comme étant « *l'environnement immédiat du projet de séance* » (Margolinas, 2005b).

Les doubles flèches figurant sur le schéma indiquent qu'à chaque niveau

> *Le professeur est en quelque sorte tiraillé par les interactions éventuellement contradictoires issues des niveaux inférieur et supérieur. [..] Par exemple quand il planifie sa leçon, le professeur interagit en même temps avec ce qu'il croit possible comme réalisation en classe, en fonction de ses capacités à gérer une situation avec ses élèves, et ce qu'il serait cohérent de planifier en fonction de sa construction plus globale du thème. [...] L'action du professeur se réalise ainsi toujours sous une double contrainte.*
> *(Margolinas, 2005a)*

Si la construction s'est faite selon « une analyse ascendante » de S_0 à S_3, une inversion de ce mouvement fait comprendre que

> *Quand on va examiner la façon dont (le professeur) construit un thème mathématique, par exemple quand il choisit les documents sur lesquels il va s'appuyer, son interaction avec le milieu noosphérien conduit à considérer que certaines constructions sont plus légitimes que d'autres, voire simplement à les privilégier sans pouvoir s'exprimer à ce sujet.*
> *(Margolinas, 2005a)*

Cette analyse descendante de S_3 à S_0 nous semble expliquer pourquoi les manuels, légitimés par la noosphère, jouent un rôle concurrent des connaissances universitaires de l'étudiant qui ne pourraient intervenir qu'au niveau S_{+2} comme le montrera un exemple décrit dans le paragraphe suivant.

2.5.2.2 Exemples d'utilisation pour analyser des difficultés en formation

La structuration du milieu proposée par C. Margolinas lui permet d'analyser deux exemples de difficultés vécues en formation, mettant ainsi l'accent, d'une part, sur le rôle que la formation peut faire jouer au niveau S_{-1} (activité de l'élève dans son milieu), habituellement non inclus dans l'environnement immédiat de la préparation de séance, et, d'autre part, sur la manière dont les connaissances universitaires pourraient intervenir au niveau S_{+2} (thème mathématique) mais en sont empêchées notamment par le niveau S_{+3} (valeurs et conception). Le premier exemple propose de comparer les choix effectués sur un même thème par un professeur débutant et par un professeur expert. Le deuxième analysera « l'échec » d'un projet de leçon sur l'inégalité triangulaire.

2.5.2.2.1 *Comparaison professeur débutant / professeur expert*

Dans (2005a) C. Margolinas utilise la structuration du milieu pour comparer les réactions de deux professeurs à un même texte officiel concernant ici l'enseignement des transformations de figures par translation et rotation. Ce programme contient une phrase problématique : *« la translation et la rotation n'ont à aucun moment à être présentées comme des applications du plan dans lui-même »*. Marie-Paule est une enseignante expérimentée et va lire le programme en l'interprétant par rapport aux programmes précédents et donc dans la perspective d'une continuité, tandis que Béatrice va en faire une lecture uniquement guidée par ses connaissances universitaires. Le schéma ci-dessous synthétise les différences de connaissances entre les deux enseignantes.

« la translation et la rotation n'ont à aucun moment
à être présentées comme des applications du plan dans lui-même »

Béatrice	**Marie-Paule**
Etudes universitaires de mathématiques	Programmes officiels depuis 1945
Application du plan dans lui-même = transformation	Application du plan dans lui-même = référence à l'introduction ponctuelle et formelle des transformations
⇩	⇩
Il ne faut pas prononcer le mot « transformation »	Il faut introduire les transformations dans des situations de constructions géométriques

Différences de connaissances au niveau S_{+2} (Margolinas, 2005a)

Marie-Paule sait que cette phrase veut en fait souligner une rupture par rapport aux programmes précédents dans lesquels l'introduction des transformations passait par la définition formelle de l'image d'un point (géométrie des transformations) par opposition à une géométrie des figures incluant une approche expérimentale basée par exemple sur des constructions. Béatrice va par contre s'interdire de prononcer le mot « transformation » sans comprendre pourquoi, ce qui se traduira par des difficultés d'expression en classe, mais aussi par des difficultés à prendre en charge les réactions des élèves qui vont finalement désigner par « symétrie » toutes les transformations rencontrées[55].

La structuration du milieu permet alors l'analyse suivante :

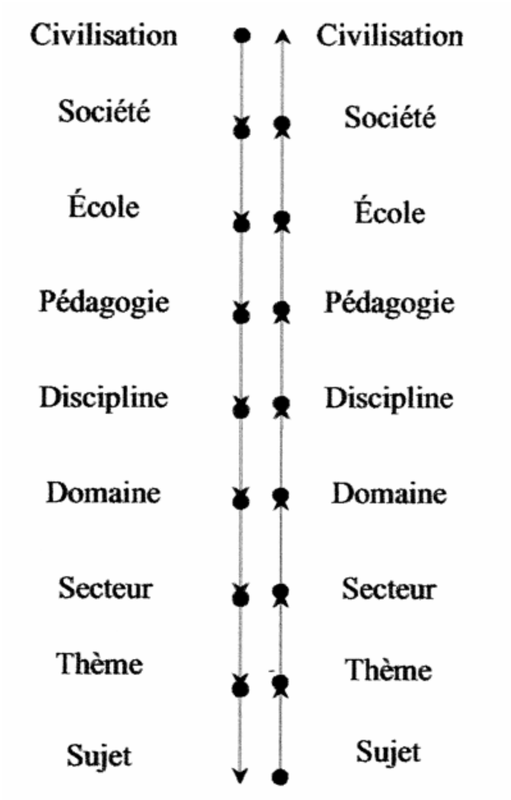
> *Quand elle a construit le thème et la séance (S_{+2}) Béatrice a accordé une grande importance au mot transformation et au fait de ne pas le prononcer (analyse descendante du niveau +2 au niveau 0). Elle n'a pas anticipé les difficultés des élèves devant l'absence d'un terme pour décrire les situations. Pendant la séance de classe, elle observe les élèves et constate l'utilisation du mot symétrie (niveaux -1 et 0) ce qui remet en cause son projet de leçon (niveau +1) [...] Elle n'envisage à aucun moment de s'interroger sur les programmes pour comprendre ce qui peut conduire les concepteurs à demander de ne pas prononcer le mot transformation. Il n'y a donc pas de rétroaction qui lui permette de modifier sa connaissance du milieu +2.*
> *(Margolinas, 2005a)*

Margolinas souligne donc comment l'insuffisance d'une réflexion au niveau S_{+2} se répercute aux niveaux inférieurs, empêchant en particulier de pouvoir répondre aux élèves. Tout semble se passer comme si Béatrice avait pris une organisation existante en en enlevant certaines parties contenant le terme interdit sans créer une autre organisation.

En fait, on peut aussi prendre en compte dans cette analyse le fait que le niveau S_{+2} soit parfois trop « étroit » pour inclure des questions plus fondamentales portant dans ce cas sur « à quoi servent les transformations en géométrie, en mathématiques ? »

[55] Margolinas évoque ici une conception proche du nominalisme en soulignant l'importance que Béatrice accorde au « mot » pour désigner les objets mathématiques, celui que s'interdit l'enseignante mais aussi celui que les élèves vont utiliser et qu'elle ne parvient pas à détacher de l'objet.

obligeant à prendre encore plus de recul sur la place et la fonction du savoir. Cette recherche de distanciation est représentée dans un schéma formel dont les niveaux *« encadrent ce qu'il est possible de faire en matière de diffusion des connaissances et des savoirs »* (Chevallard, 2004). Les niveaux discipline, domaine, secteur ; thème et sujet concernent les savoirs mathématiques et leur(s) organisation(s).



Echelle des niveaux de co-détermination didactique (Chevallard, 2004)

En ce qui concerne les transformations, on peut lire dans Schneider (2007) comment cette mise à distance grâce à un travail de type épistémologique permet une analyse de leur fonctionnalité en mathématiques, de manière à proposer des réponses concernant l'enseignement de la géométrie au collège.

Dans cette même étude, Margolinas évoque aussi le fait que l'observation des stratégies des élèves (S_{-1}) est porteuse de connaissances susceptibles d'enrichir les niveaux supérieurs, mais à condition de les observer en quelque sorte indépendamment de ses propres connaissances et de son projet initial. Ici Béatrice sait que le tracé de segments entre les points homologues est porteur d'informations dans le cas de translations et des symétries mais que, pour les rotations, seuls les arcs de cercle sont pertinents. Elle n'a donc pas prévu que les élèves traceraient des segments dans le cas de la rotation et va même chercher à les en empêcher. Or l'observation de leurs productions montre qu'ils ont ensuite tracé les arcs de cercle et obtenu les conclusions cherchées.

Margolinas situe alors dans les différents niveaux les connaissances qui auraient pu être créées à partir de cette observation:

- les stratégies des élèves peuvent être plus cohérentes que ce que je crois au départ : connaissance à intégrer dans le niveau S_{+3} ;
- dans l'organisation du chapitre sur les transformations, la rotation pose un problème spécifique : connaissance à intégrer dans le niveau S_{+2} ;
- il faut avoir le temps de traiter spécifiquement le cas de la rotation dans le problème « des poissons » : connaissance à intégrer dans le niveau S_{+1} ;
- on peut reprendre l'idée des élèves de relier les points homologues et les orienter vers la production d'arcs de cercle pour la rotation : connaissance à intégrer dans le niveau S_0.

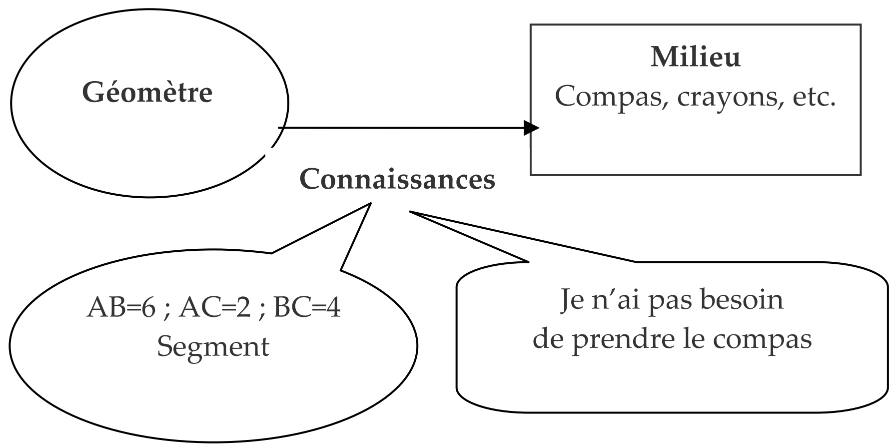
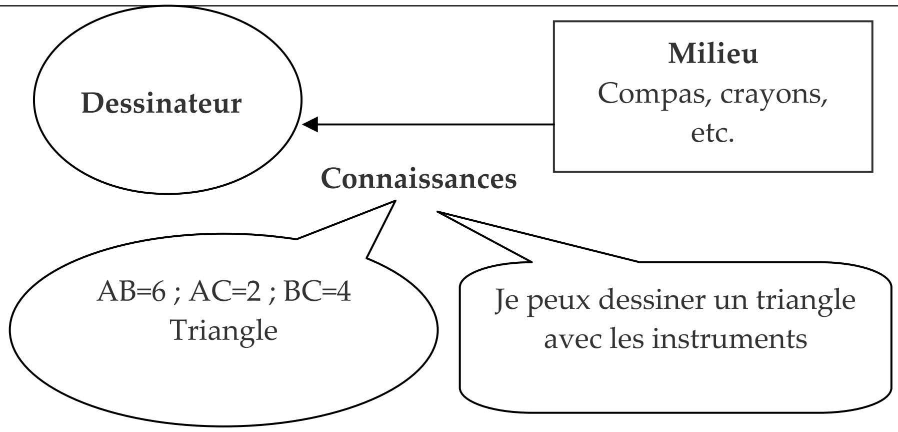
Une autre étude ci-dessous va confirmer comment la formation peut « forcer » l'articulation entre les niveaux S_{+2} du thème mathématique avec le niveau S_{-1} constitué par l'activité de l'élève dans son milieu.

2.5.2.2.2 *Etude de cas et intervention en formation*

L'étude décrite dans 2005b concerne un professeur stagiaire (Rémy) amené à donner une leçon sur l'inégalité triangulaire et qui a pour cela utilisé des activités portant sur la constructibilité de triangles, incluant un triangle aplati qui posera problème. Il a l'intuition que le travail demandé à la maison n'a en fait pas constitué un environnement favorable au cours qu'il souhaitait faire mais il ne peut en faire l'analyse, ne formulant que les difficultés liées à la gestion de la classe, du temps, etc.

Analysant la séance, C. Margolinas remarque d'abord une « superficialité » de l'observation au niveau -1 : « *il croit faire ce que les élèves ont eu à faire* »; « *il dessine la* *figure qui est le produit de ses connaissances géométriques* » sans vraiment observer les constructions des élèves qui réagissent eux en dessinateurs.

Rémy a cru anticiper les réactions des élèves, mais il l'a fait à partir de ses propres connaissances en géométrie théorique alors que les élèves seront dans une problématique de modélisation. Les figures ci-dessous résument les deux postures possibles par rapport au problème du triangle aplati :

<table>
<tr><td>Le triangle aplati
Problématique de la géométrie théorique</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Le triangle aplati
Problématique de modélisation</td><td>
</td></tr>
</table>

Deux postures par rapport au triangle aplati (d'après Margolinas (2005b))

Il semble donc que les connaissances spécifiques du professeur empêchent une interaction correcte entre les niveaux S_{-1} (observation de l'élève dans son milieu) et S_{+1} (situation de projet) dans laquelle le professeur pense anticiper les difficultés des élèves. Afin de faciliter cette interaction, un dispositif de jeu de rôle est proposé dans le cadre de la formation. Dans ce jeu, certains stagiaires feront les professeurs et d'autres feront les élèves, avec pour consigne de ne pas jouer sur les aspects pédagogiques de la situation. Ici on demande en particulier au stagiaire jouant l'élève de *« faire ce que le professeur lui demande au pied de la lettre. Il est donc obligé de prendre en compte le milieu matériel qui lui est imposé : compas, crayon, etc. Etant donné l'ordre de l'activité (constructible, aplati, non constructible) il n'a pas de raison de disqualifier a priori les intruments ».*

Selon C. Margolinas, le professeur en position d'élève rentre alors dans une problématique de modélisation ce qui leur permet *« de mieux comprendre les raisons de certaines réactions des élèves »*. Un tel dispositif amène alors à confronter les justifications des stratégies des élèves avec les prévisions des professeurs, d'une part, lors de la séance elle-même et, d'autre part, quand le jeu s'arrête. En termes de niveaux de la situation, C. Margolinas interprète cet effet comme le fait de placer alors le stagiaire dans *« la position de réalisation du projet (S_{-1}) et non pas dans la position didactique qui comporte de nombreux autres paramètres (S_0) ».*

L'étude de S. Coppé comparait la préparation de leçons à la réalisation d'un puzzle. En analysant plus profondément l'exemple de Rémy, C. Margolinas va mettre en évidence comment les différentes pièces du puzzle ne parviennent pas toujours à correctement s'emboîter et propose une explication liée à la non-intégration au niveau S_{+2} (thème mathématique) des différentes connaissances disponibles. Elle constate tout d'abord un conflit entre l'activité que Rémy a extraite d'un manuel et le cours qu'il veut faire[56], lui-même proche du contenu d'un autre manuel : l'activité demandée aux élèves consiste à s'interroger sur l'existence de points dont les distances correspondent à des nombres donnés et sur la nature de la figure obtenue, tandis que le cours projeté par Rémy va donner trois points et s'interroger sur les relations métriques dans la figure obtenue. Les deux parties ne s'intéressent donc pas aux mêmes tâches, mais Rémy utilise les deux pour deux raisons. Tout d'abord il se sent fortement incité par le niveau S_{+3} (valeurs) à « mettre les élèves en activité ». De plus, en étudiant l'environnement

[56] Margolinas souligne à ce propos la double interprétation possible de l'expression « les activités introduisent le cours ». La première implique la structure temporelle (elle sont avant), tandis que la deuxième amène à rechercher un référent commun aux différentes parties de la leçon.

disponible au niveau S_{+2} de la construction du thème, elle montre que c'est le même sous-titre « inégalité triangulaire » qui a incité Rémy à croire que les deux parties traitaient bien la même question, et que ses connaissances universitaires ne font apparaître l'inégalité triangulaire qu'avec le statut d'axiome dans la définition d'une distance[57]. Ce contexte ne lui fournit donc pas de ressource directe pour interpréter l'activité qu'il va utiliser et l'empêche vraisemblablement de détecter l'incompatibilité potentielle entre l'activité et la leçon qu'il veut faire cohabiter dans son projet. Comme « *la construction du thème qui devrait permettre un contrôle épistémologique du projet de séance est délégué aux auteurs des documents sur lesquels il s'appuie* », Rémy n'a pas de raison de « *remonter à la construction du thème des différents auteurs* », par exemple en se demandant pourquoi l'inégalité a ce statut. Par rapport à la structuration de la situation du professeur, seuls les niveaux S_{+1} et S_0 sont ici en interaction, d'autant que Rémy attribuera directement à son projet les difficultés ressenties en classe sans mettre en doute le niveau S_{+2}.

Enfin C. Margolinas précise que les difficultés illustrées par cette étude de cas lui semblent relever d'une problématique plus générale. Si cette remarque, ajoutée aux recherches décrites précédemment peut nous conforter dans l'existence de la problématique que nous supposions, les éléments d'analyse proposés par C. Margolinas montrent que les difficultés en question sont liées à l'insuffisance d'interactions entre, d'une part, les niveaux S_0, S_1 (projet et situation) et, d'autre part, les niveaux S_2, S_{-1} du thème mathématique et de l'activité de l'élève sur ce thème.

Ceci nous amènera à plusieurs choix pour notre étude. Comme ces interactions mettent en jeu les connaissances mathématiques spécifiques du thème traité, il ne paraît donc possible de les analyser que dans le cas d'un thème mathématique donné. D'autre part, ces différentes études montrent la nécessité en formation d'empêcher l'activité du professeur d'être trop vite absorbée par des contraintes strictement pédagogiques. Enfin, la faiblesse de l'interaction entre les niveaux S_{+1} et S_{-1}, interaction qui devrait refléter la capacité de l'élève-professeur à intégrer le milieu effectif de l'élève dans son

[57] Margolinas suppose que l'étudiant a rencontré la forme axiomatique actuellement la plus courante.

propre milieu, semble donc bien un élément d'explication des difficultés que nous souhaitons étudier.

2.6 Formation initiale : un problème de mathématiques

Nous terminerons cette investigation des études et recherches traitant de la formation initiale et des difficultés spécifiques aux professeurs débutants avec le travail de Gisèle Cirade, dont la thèse (2006) pose d'emblée le problème : *« Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel »*

En effet, les études de C. Margolinas que nous venons de résumer nous ont invitée à dépasser les constats sur les difficultés de la formation initiale qui ne pourraient s'exprimer qu'en termes généraux afin de rechercher un outil d'analyse plus fin notamment à l'aide de la notion de milieu propre à la situation du professeur. Mais, il nous semble nécessaire de poursuivre cette démarche pour mieux répondre à notre question initiale, et ce pour deux raisons.

Premièrement, si C. Margolinas montre que la difficulté pour le professeur débutant (ou en formation initiale) se situe bien dans le peu de place laissée à la réflexion sur le thème mathématique proprement dit, les exemples fournis sur les transformations du plan concernent un thème pour lequel il existe pourtant (du moins dans les manuels belges) une assez grande variété dans les transpositions. Cette variété reflète surtout les différents points de vue possibles sur le sujet ainsi que les changements successifs dans les programmes : géométrie des figures ou géométrie des transformations ?; par laquelle commencer ? ; Comment alors passer de l'une à l'autre ? Même si cette variété est susceptible de poser des difficultés, ce qui devrait amener à se poser la question de manière plus fondamentale, elle a au moins l'avantage d'exister, tandis que dans le cas de l'association dérivée/tangente, le consensus « tangente comme limite de sécantes puis théorème illustré par figure »[58] semble maintenant majoritaire dans les manuels et

[58] Que nous appellerons par la suite « praxéologie à trous ».

non questionné, comme nous l'avons signalé dans nos premières observations et comme nous le verrons plus précisément dans le Chapitre 4.

Deuxièmement, si il nous semble en effet que la complexité de l'articulation entre les différents niveaux de la situation du professeur est au cœur de cette question, il nous paraît nécessaire de ne pas situer la difficulté uniquement dans la structure mais de prendre en compte la complexité du contenu, à savoir les connaissances mathématiques elles-mêmes. Si les différents niveaux de la situation interfèrent si facilement, c'est peut-être aussi parce que le niveau S_{+2} du thème mathématique contient déjà des connaissances mathématiques scolaires et des connaissances mathématiques universitaires dont l'imbrication est loin d'aller de soi. Il y a dans cette imbrication des obstacles et des choix qui restent peut-être à questionner, à condition d'admettre que les mathématiques restent problématiques par nature.

C'est dans cette optique que G. Cirade a étudié les élèves-professeurs pendant les deux années de la formation en IUFM, sous 4 angles que nous reprenons ci-après.

2.6.1 Les élèves-professeurs face aux normes et à la normativité

Nous avons évoqué précédemment la possibilité pour l'élève-profeseur de « basculer » d'une norme à l'autre en changeant d'institution, et J. Briand (1998) soulignait que certains dispositifs de formation pouvaient amener à *« adhérer rapidement à la norme de terrain »*.

Afin de mieux connaître « cette norme de terrain », G. Cirade propose de l'étudier au travers des rapports des maîtres de stage, son objectif étant d'identifier *« les exigences de la profession »* telles qu'elles se présentent aux élèves-professeurs. Parlant à ce sujet de *« maquis normatif »*, elle souligne l'existence d'attentes clairement exprimées comme *« respecter le programme, rédiger ses préparations, prévoir des devoirs à la maison nombreux, bien calibrés et diversifiés, […] annoter les devoirs et contrôles de façon constructive »*, qui correspondent à peu près aux qualités dites pédagogiques du bon enseignant.

Mais il existe aussi des normes qui se manifestent moins explicitement, étant fortement intériorisées par beaucoup de professeurs. En « creusant » certaines phrases, on peut

identifier entre autres le fait que « *chacun doit trouver en lui-même les ressources qui lui permettront d'affronter les difficultés* », ce qui rappelle nos élèves-professeurs n'osant pas poser de question, mais aussi que « *le professeur doit effectuer une réorganisation permanente de son enseignement en fonction de la réaction des élèves* ». Il n'est bien sûr pas question de nier la nécessité de l'implication des élèves dans leur apprentissage mais G. Cirade en constate le caractère normatif : « *faute de critères théoriques reconnus, le seul repère [..] est celui de l'engagement des élèves dans le travail proposé* » et il peut y avoir alors un risque que ce soit ce critère qui mesure « le sens » du travail du professeur.
Parmi ces normes existe aussi le fameux programme. Nous ne signalerons ici que la convergence des observations : dans les deux pays, il est parfois surprenant de voir de si jeunes élèves-professeurs utiliser « le respect du programme » comme argument.

Ces « normes » sont rarement présentées de manière opérationnelle (par exemple que signifie un « devoir bien calibré » en mathématiques ? est-ce la même chose en algèbre et en géométrie ?), ce qui d'ailleurs contribue à leur conférer un caractère indiscutable. De plus, celle qui concerne « *l'engagement du professeur au service de l'engagement didactique de ses élèves* » révèlera ce que G. Cirade appelle « *un bruissement constant du souci mathématique* », mais demeurant « *exprimé à travers des principes didactiques plutôt qu'illustré sur un matériel mathématique déterminé* ». Même lorsque les rapports évoquent le contenu mathématique, c'est sous forme de description de l'activité proposée et non sur ses enjeux épistémologiques. G. Cirade conclut « *rien, ici ne semble problématique. La description est celle d'un univers évident, transparent, qui va de soi* [59]».

Nous avions déjà remarqué que parmi les étudiants, rares sont ceux qui viennent poser des questions. Nous avions alors supposé qu'il existait une forme de préjugé consistant à penser « si j'ai fait des maths, je n'ai pas de question». Cela peut signifier que les études terminées procurent une connaissance suffisante, mais peut-être aussi « si j'ai fait des maths, je ne n'ai pas le droit de me poser de question», au sens d'une auto-

[59] Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, c'est cette même illusion de transparence que nous risquons alors d'imposer aux élèves.

interdiction de questionner le savoir acquis. Ce préjugé semble, d'après l'étude de G. Cirade, prendre la forme d'une règle du métier :

> *C'est un refoulement de la mise en débat des mathématiques : on n'en parle guère entre gens de métier, pour cette raison que chacun est censé bien les connaître. (Cirade, 2006)*

Et pourtant ces questions existent. Nous avons cité en introduction quelques observations concernant l'argumentation, mais nous avons aussi été interpellée sur des questions comme « peut-on parler de la croissance en un point ?», question qui se révèlera proche de notre étude sur la dérivée. Partant en fait d'une fonction définie sur un intervalle du type [a,b[, l'étudiante[60] se demandait si elle pouvait dire qu'elle était croissante « sur [a,b[» ou si elle devait dire « sur]a, b[». Lors de la discussion, il s'avéra que l'obstacle était lié au fait que la définition de la croissance, de même que le critère de croissance, fait toujours référence à la croissance sur un intervalle mais elle ne savait comment donner à ses élèves une raison valable pour « enlever le point a ». De là, la question : pourquoi ne peut-on dire « la fonction est croissante en a » ? Comme nous le voyons, les élèves-professeurs rencontrent donc en fait très vite le problème du métier : les mathématiques.

2.6.2 Les élèves-professeurs face aux mathématiques du Capes

Si nos propres observations évoquaient cette rencontre sous forme de « questions de rigueur », G. Cirade propose une étude clinique des questions posées lors d'un séminaire hebdomadaire, ainsi que des éléments de réponses apportés par les autres élèves-professeurs. On y trouve des questions très diverses portant sur des techniques didactiques : « comment montrer de manière élémentaire que la dérivée de sinus est cosinus » ; comment définir de manière intuitive un angle orienté » ; mais aussi sur les objets mathématiques eux-mêmes : « quelle est la définition exacte d'un polygone

[60] En fait une étudiante ayant déjà 2 ou 3 ans d'enseignement et revenant préparer son AESS, ce qui incite à penser que la manière dont la distance est prise avec les institutions peut favoriser la mise en débat.

régulier »[61]) ; « quelles sont les diverses géométries et leur axiomes fondamentaux. Et quand utiliser quoi ?».

Si ces questions révèlent un manque d'assurance par rapport au savoir, G. Cirade souligne le fait que les étudiants adoptent une posture qu'elle qualifie de « *décentrée* » dans la mesure où les étudiants pensent qu'il existe une bonne réponse quelque part :

> *Ces mystères [des mathématiques] semblent en effet n'exister pour eux que parce qu'une information adéquate leur manquerait.*
> *Les mathématiques ne seraient pas en elles-mêmes problématiques ; c'est une diffusion inappropriée des bonnes solutions aux problèmes rencontrés (solutions censées exister quelque part) qui serait la cause principale du mal.*
> *(Cirade, 2006)*

Encore une fois, nos observations se rejoignent sur cette demande « d'un bon manuel » ou « du livre qui expliquerait …. », révélant selon G. Cirade la tendance à se référer à un point de vue extérieur[62] qui constituerait alors « *l'unique milieu auquel on puisse confronter ses interrogations et ses incertitudes* », de même que dans son cursus l'élève-professeur « *a eu pour milieu essentiel le point de vue de ses professeurs* ».

Notre question initiale relève bien d'une problématique plus générale et qui pourrait se formuler en reprenant la notion de milieu : avec quel milieu travaille l'élève-professeur et comment l'explore-t-il? ». La question suivante portera donc sur les possibilités de rencontre entre le milieu du professeur et le milieu dans lequel travaille l'élève.

2.6.3 Les élèves-professeurs face aux mathématiques à enseigner

Toujours par l'exploitation des questions d'étudiants, non plus lors de la préparation au Capes mais lors de leur stage en responsabilité, G. Cirade souligne ici encore un « *évitement de la problématicité des mathématiques* » qui se manifeste dans la tendance des élèves-professeurs à attribuer les difficultés rencontrées, soit aux programmes, soit aux élèves. De plus, ces mêmes élèves se voient également prêter des attentes ou des

[61] Notons que cette dernière question peut paraître naïve même si elle a déjà donné lieu devant nous à des affrontements lorsque certains étudiants essayaient d'en piéger d'autres avec par exemple un pentagone étoilé, tout simplement parce qu'ils n'utilisaient pas la même définition. M.-J. Perrin rappelait à ce sujet au colloque FPU 2007 que la simple définition du trapèze est parfois un choix difficile à faire.
[62] Dans son étude, les étudiants cherchent surtout à savoir ce que les membres du jury du Capes attendent.

obstacles qui, pour G. Cirade, révèlent surtout « *le dénuement mathématique* » dans lequel se trouve l'élève-professeur.

Elle analyse en particulier le cas des angles alternes-internes et des systèmes de nombres, en mettant en évidence que les questions associées « *ne sont pas des difficultés personnelles* », mais bien des questions sur les mathématiques que l'on peut faire faire.

Son étude des systèmes de nombres et des problèmes récurrents des fractions [63] et du calcul avec unités souligne en particulier que « *dans la culture mathématique scolaire, la notion même de grandeur est passée sous silence* », amenant les élèves-professeurs à des questions qui pourraient être traumatisantes [64]:

> *Pour définir la fraction* $\frac{b}{a}$ *on dit que c'est l'unique solution de l'équation a.x=b.*
> *Donc, sous-entendu la multiplication est bien définie !*
> *Mais quelle est cette multiplication ?*
> *On définit un objet b/a sur lequel on sait déjà opérer !…*
> *Question d'étudiant dans (Cirade, 2006)*

Pour G. Cirade, l'étudiant raisonne d'abord dans un paradigme moderniste, faisant donc partie de son milieu, mais il devra intégrer dans ce milieu un point de vue dans lequel « *les nombres sont supposés exister dès lors qu'ils apparaissent comme la mesure de grandeurs à l'existence indubitable* ».

Mais la distanciation par rapport aux mathématiques savantes ne doit pas signifier l'adhésion à « *une évolution démathématisante* » (Cirade, 2006). Le problème étant donc « quelles mathématiques faire dans l'enseignement secondaire ? », G. Cirade souligne que :

> *La résolution de ces problèmes appelle, au plan mathématique, des élaborations transpositives intermédiaires[65] [..] et qui constituent un monde mathématique toujours en chantier, le monde des mathématiques pour l'enseignement.*
> *(Cirade, 2006)*

[63] Remarquons à ce sujet la question d'une étudiante demandant en se punissant de son audace si « un rapport et une fraction c'était bien la même chose ». Encore une fois il s'agissait en fait d'une institutrice reprenant des études après quelques années d'enseignement.

[64] Pensons à notre « mais finalement qu'est-ce qui dépend de quoi ?

[65] Le mot intermédiaire nous paraît ici utilisé dans le sens de « médiateur ».

2.6.4 Les élèves-professeurs au chevet de la classe

Nous avons déjà évoqué avec les travaux de S. Coppé que la notion « d'activité préparatoire », amenée par *« la modernité didactique »*(Cirade, 2007), était bien intégrée par les élèves-professeurs, mais plutôt comme une première étape d'un plan de cours, une sorte d'échauffement après lequel on peut passer à la théorie. L'exemple de Rémy, analysé par C. Margolinas, montrait que lorsqu'elle n'est pas questionnée au niveau S_{+2} du thème mathématique, cette activité pouvait même se révéler contradictoire avec le développement théorique qui la suit.

La recherche des « élaborations transpositives intermédiaires » dont parle G. Cirade se traduit par exemple par le développement de ce qu'on appelle les AER (Activités d'Etude et de Recherche), qui cherchent à problématiser le savoir à enseigner, ou encore à en retrouver les raisons d'être.

Selon G. Cirade, il y a donc alors deux problèmes :

1) connaître effectivement ces raisons d'être, ou du moins celles qui sont d'actualité (pensons par exemple à l'activité d'encadrement d'une fraction à partir de la valeur donnée par la calculatrice) ;

2) concevoir les AER.

Nous en rajouterons un troisième correspondant à notre étude, qui est l'intégration de tels projets d'enseignement dans le milieu des élèves-professeurs : Comment y réagissent-ils ? Comment la formation peut-elle favoriser cette intégration tout en évitant que ces projets ne vivent le même sort que les manuels, à savoir être vus comme des procédures à suivre sans les questionner.

Si G. Cirade donne un exemple de « *conduite adaptative et transformatrice* » observée chez une étudiante, elle situe effectivement comme un enjeu de formation *« la manière dont les élèves-professeurs s'emparent des apports de la formation pour les intégrer dans leurs praxéologies professionnelles »*, et c'est donc dans cette continuité que nous situerons notre étude.

2.7 Conclusions quant aux référents et à la méthodologie à adopter

Cette recherche de travaux portant sur les difficultés et les pratiques de professeurs débutants ou en formation nous a permis dans un premier temps de préciser en quoi la période de formation initiale peut être vue comme une transition entre deux institutions ayant un rapport différent au savoir mathématique. Nous avons vu qu'il reste difficile de caractériser les objectifs de cette formation même si les suggestions quant aux types d'action à mener sont nombreuses. De plus les modalités d'organisation de cette formation confèrent aux acteurs un statut complexe d'autant que l'utilité de cette formation reste contestée culturellement. Ceci nous permet de mieux connaître les enjeux et les obstacles auxquels sont confrontés les étudiants dont nous souhaitons étudier les difficultés, et donc la part que ces facteurs pourraient prendre dans les difficultés observées, et enfin la façon dont nous aurons à les prendre en compte.

Ensuite, la lecture de recherches portant plus spécifiquement sur le rapport au savoir des professeurs débutants nous a confortée dans l'existence d'une problématique liée à l'élaboration d'un discours technologique approprié, à la contribution des connaissances universitaires à cette élaboration et au rôle des manuels. Toutefois, les premières recherches citées se donnaient un objectif de description de profils professionnels qui n'est pas celui que nous visons directement. Les étudiants en formation initiale réagissent effectivement aux actions de formation selon des parcours que l'on pourrait classifier et qui seront utiles pour une adaptation plus individuelle de certaines actions ou pour un accompagnement dans l'insertion professionnelle. Mais les études de cas proposées par les derniers travaux cités nous montrent que la situation du professeur inclut d'abord les savoirs mathématiques qu'il doit traiter. En conséquence, seule une analyse « orientée par le savoir » permettra d'expliquer les pratiques observées. C'est aussi relativement à ces savoirs que des actions spécifiques devront être conçues au sein du dispositif de formation.

C'est pourquoi, tout en exploitant les informations génériques sur la formation initiale, nous choisissons de coupler la réflexion sur les élèves-professeurs avec celle sur l'origine de la transposition didactique. En effet le thème mathématique choisi présente d'une part une double visibilité institutionnelle, et donc une possibilité de rupture dont il nous faudra comprendre les mécanismes et, d'autre part, une forme de stabilité dans la transposition didactique du secondaire, donnant cette illusion qu'il n'y a rien à questionner et que le savoir « va de soi ». De plus l'analyse est un domaine dans lequel l'efficacité du calcul supporté par un discours hybride a vécu longtemps avant que ne s'y pose la question des fondements.

Les chapitres suivants viseront à préciser les éléments d'analyse de notre question initiale (Chapitre 3), puis à analyser les difficultés épistémologiques et didactiques propres au thème de la dérivée (Chapitre 4).

Chapitre 3

Référents théoriques

3.1 Objectifs

Comme nous l'avons dit dans les chapitres précédents, nous supposons chez les élèves-professeurs une difficulté à adopter une posture de rationalité traduite par un discours technologique adéquat à l'institution et à son enseignement, ainsi qu'un rapport à la rigueur mathématique s'exprimant surtout en termes de conformité sans pouvoir en montrer la fonctionnalité.

Après avoir motivé notre sujet d'étude par l'observation de pratiques relevant plutôt d'une forme d'empirisme, les notions mathématiques de dérivée et de tangente y étant supposées se développer d'après l'observation d'illustrations ou de tableaux de valeurs, notre première investigation de travaux existants sur des questions proches nous a aussi fait rencontrer l'évocation d'une « *conception formaliste des mathématiques* » (Bloch, 2005) chez les professeurs débutants. Nous allons donc dans ce chapitre chercher à préciser ces notions déjà évoquées afin de mettre en place un cadre nous permettant d'analyser sur le plan de la rationalité les pratiques et les discours des élèves professeurs sur le thème de la dérivée

Une première partie (3.2) s'attachera à étudier les notions de rigueur, rationalité et formalisme. Cela nous amènera à identifier deux fonctions de la rigueur que nous ferons correspondre aux deux parties du bloc technologico-théorique, à savoir le discours technologique et la théorie.

La deuxième partie (3.3) exposera comment le contrat dit « d'ostension déguisée » relève effectivement de l'empirisme et nous proposerons de considérer le recours à l'ostension comme un moyen de pallier l'absence de discours technologique.

La dernière partie (3.4) proposera enfin un cadre d'analyse consistant à caractériser les pratiques et les discours par le niveau de rationalité auquel ils appartiennent. Ces niveaux de rationalité seront eux-mêmes définis en adoptant une classification des organisations mathématiques en deux types de praxéologie.

3.2 Deux fonctions de la rigueur : rationalité et formalisme

Pour décrire et expliquer quelles sont les manifestations de notre hypothèse, nous devons donc clarifier ce que peuvent recouvrir les concepts de rigueur, formalisme, rationalité afin de « …*mieux comprendre ce que nous désignons par rigueur et la fonctionnalité de celle-ci dans notre discipline* », comme le suggère l'équipe de l'Irem de Clermont-Ferrand (Noirfalise et al., 1996).

3.2.1 Une définition en trois dimensions

Si l'on commence par la définition du dictionnaire (Robert, édition 1970), le mot « rigueur » fait peur. En effet, s'il prend des sens différents, le premier semble maintenant être celui de « sévérité, dureté extrême » ou « acte de sévérité et de cruauté »[66]. Ensuite seulement viennent « exactitude » et « précision, logique inflexible ». C'est cette dernière définition que nous choisirons, car elle met en évidence trois caractéristiques qui sont invoquées spontanément de manière plus ou moins sélective : précision – logique – inflexible.

Nous retiendrons également deux expressions contenant le mot rigueur, car elles nous donnent des indications sur les formes de mise en œuvre de la rigueur :1) *être de rigueur*, signifiant être exigé, imposé par les usages ou le règlement ; 2) *à la rigueur*, dont le sens premier était « avec la plus grande exactitude » et qui est devenu « en allant à la limite du possible ou de l'acceptable ».

Ces différentes acceptions placent donc le mot au carrefour de trois dimensions :1) l'aspect codifié, obligatoire, contraint ; qu'on pourrait faire aller jusqu'à la sévérité ;

[66] Cette conception apparaît par exemple dans le travail de J. Nimier (1976) où la rigueur est directement associée à la sévérité du maître mais aussi à la nécessité pour certains élèves de s'imposer une discipline morale qu'ils trouvent dans les mathématiques.

2) l'aspect exactitude, précision, netteté ; 3) l'aspect inflexible que nous associons à la notion de « limite du possible et de l'acceptable ».

Précisons que les antonymes indiqués sont : douceur, approximation, incertitude. Or le mathématicien travaille aussi avec l'approximation et l'incertitude…

3.2.2 Les raisons de la rigueur

C'est la dimension de codification contrainte qui est perçue comme principalement associée aux mathématiques et en particulier à leur enseignement : apprendre les mathématiques ce serait se plier à des normes de notation, « *se conformer à un rituel en usage* », comme le dit l'équipe de l'Irem de Clermont-Ferrand (Noirfalise et al., 1996), même si on en ignore le sens. Le professeur de mathématiques serait alors simplement un « *professeur de bonnes manières mathématiques* » (Noirfalise et al., 1996) qui nous apprend « *l'usage policé des signes désignant les objets mathématiques et les raisonnements qu'on peut faire sur ceux-ci* ».

On peut noter que ces usages ne sont d'ailleurs pas bons pour toutes les périodes : l'utilisation des symboles ⇒ et ⇔ est alternativement imposée, autorisée ou interdite[67], et le symbole f(x) continue de désigner alternativement la fonction et "sa valeur prise en x", souvent dans le discours d'un même individu[68]. En soi, cela montre déjà comment la rigueur peut subir un déplacement d'objectif : l'utilisation d'un signe, lorsqu'elle peut être ressentie comme obéissant à des règles arbitraires, risque de devenir la facette visible et « insensée » d'une rigueur dont le sens relève d'un souci d'adéquation entre un signe et ce qu'il veut signifier. En effet, cette adéquation entre le signifié et le signifiant n'a pas qu'une valeur sémiotique, elle a aussi une valeur instrumentale, donnant ainsi à la rigueur une « *dimension fonctionnelle* » en mathématiques, comme nous l'avons remarqué dans les travaux de l'Irem de Clermont-Ferrand.

---

[67] Il semble même que leur utilisation soit plus une question d'habitude de l'enseignant.

[68] On peut supposer qu'il s'agit alors du problème de l'expert pour qui le signe f(x) prend sa signification en fonction du contexte, le degré d'association signifiant-signifié devenant alors complètement flexible.

3.2.2.1 La rigueur vue comme l'adéquation de la technique à la tâche

Pour concevoir la rigueur non plus comme une exigence mais comme un moyen, on peut préciser ce qui est généralement contenu dans le « manque de rigueur » attribué aux élèves. Des professeurs vous citeront sans doute : des erreurs de raisonnement, une confusion entre condition nécessaire et condition suffisante, l'usage impropre de termes, aussi bien dans l'expression en langue naturelle (confondre « vérifier » et « prouver » ou « termes » et « facteurs ») que dans l'utilisation des symboles mathématiques.

Et pourtant si une question revient souvent dans la bouche de ces mêmes élèves, c'est *« est-ce que j'ai le droit de faire (ou dire) ça ? »* (Legrand, 2002) ; ou encore *« est-ce que je peux faire (ou dire) ça »* (Legrand, 2002).
Ce phénomène peut s'expliquer par un effet de contrat : l'élève demande l'assentiment du professeur, de manière à faire correspondre ce qu'il est en train de faire avec ce que le professeur attend de lui.
Mais ces questions peuvent aussi nous montrer que les élèves sont conscients que les « règles [69]» ont une fonction en mathématiques et ne sont pas que des conventions arbitraires. En faisant des mathématiques, ces élèves sont face à des signes (ou plus généralement des ostensifs) avec lesquels ils aimeraient « faire quelque chose », ce qui leur demande de savoir si cette action sur les ostensifs est possible dans le domaine des non-ostensifs avec lesquels ils sont en train de travailler. Ils sont donc en demande de « quelque chose » leur donnant l'autorisation de mettre en œuvre certaines procédures ou d'utiliser certains résultats dans les conditions où ils se sentent placés.

Si c'est un argument d'autorité du professeur, il s'agit d'un effet de contrat. Si par contre il y a *« intention rationnelle »*, selon les termes de B. Rey (1996), alors ces élèves sont à la recherche de « quelque chose » qui leur permette de contrôler leur activité, et il s'agira d'un contrôle sémantique, car il sera associé au sens.

[69] La perception de certains résultats mathématiques comme des « règles » est en fait très présente aussi chez les élèves-professeurs.

Et si ce « quelque chose » était précisément « la rigueur » que nous cherchons à définir ? En effet, au delà de simples conventions d'écriture, « *l'usage précis des termes, des signes et des correspondances entre ceux-ci a un aspect fonctionnel en mathématiques* » (Noirfalise et al., 1996) parce qu'il va diriger l'activité mathématique, ici celle de l'élève.

Pour R. Noirfalise et ses collègues, le manque de rigueur se manifeste en effet à deux niveaux différents. Cela peut commencer par le mélange dans une même phrase des termes correspondant à plusieurs registres : « *la fonction est impaire donc elle passe par (0,0)* ». Et c'est aussi visible lorsque l'élève ne sait pas (ou plus) contrôler l'adéquation d'une technique à la tâche à effectuer. Nous reprenons ci-dessous deux exemples de leur article portant sur ce sujet.

Premier exemple

Pour résoudre l'équation $6 \cdot x = 5$, l'élève écrit $x = \frac{5}{-6}$[70]. Dans le cas général, $a \cdot x = b$, c'est ce qu'il appelle « *transposer le terme a du premier membre dans le second en changeant de signe* ». Il applique ici une technique dont il a "perdu la raison". On peut aussi imaginer qu'il n'a pas associé de raisons à cette technique, qui permettraient de la sélectionner parmi d'autres, de même qu'il n'a vraisemblablement pas associé à la technique qui était ici adéquate (« on a le droit de diviser les deux membres d'une égalité par un même nombre non nul ») les raisons qui lui auraient permis de la sélectionner. Il y a donc « *un lien entre le manque de précision dans l'énoncé des raisons justifiant une technique et le choix inadéquat de techniques* » (Noirfalise et al., 1996).

Deuxième exemple

P un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit C_1 l'ensemble des points de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ (E). Vérifier que C_1 est non vide (càd qu'il existe des points appartenant à C_1).

L'élève écrit d'abord :

$x^2 - 2x - 3 = -y^2$

$x^2 - 2x + 1 - 4 = -y^2$

[70] Les auteurs rappellent que cette erreur se produit avec une forte occurrence en classe de seconde (4ème).

$(x-1)^2 - 4 = -y^2$

$(x-3)(x+1) = -y^2$

pfff....

L'élève a reconnu dans le premier membre de l'équation (E) un trinôme en x. Il le fait clairement apparaître en faisant passer le terme en y^2 à droite, et applique alors une technique qu'il connaît bien (mise sous forme canonique d'un trinôme et mise en facteur), mais qui, en l'occurrence, ne sert pas à grand-chose. Une fois questionné sur « ce qu'il cherche à faire », et sur *« ce que veut dire la question »,* il répond *« c'est équivalent à donner l'ensemble de définition »*.

L'interviewer répète l'énoncé de la question, ce qui amène l'élève à produire, d'abord en termes peu orthodoxes, une technique permettant effectivement d'accomplir la tâche : *« je vais remplacer x par quelque chose et je vais vérifier que ce quelque chose peut s'appliquer et je vais trouver la valeur de y »*. Il trouve effectivement que pour x égal à 2, *«y est égal à racine de 3, donc C_1 n'est pas vide »*. En résumé, n'ayant pas clairement identifié la tâche à accomplir, l'élève a d'abord mis en oeuvre une technique connue mais non adéquate, puis il a évoqué une autre tâche, et enfin produit une technique permettant effectivement d'obtenir un résultat sans être d'emblée capable d'expliquer pourquoi cette technique permet de réaliser la tâche.

Après l'analyse de cette interview, les auteurs concluent :

> *A ce niveau de la classe, la tâche demandée n'est pas simplement l'application d'une technique, mais aussi de produire un petit discours justifiant l'adéquation de la technique à la réalisation de la tâche [..].. Il convient de montrer des raisons qui font que la technique permet de réaliser la tâche. Montrer les raisons : pour cela on a besoin d'un dispositif formé d'énoncés, de symboles, de représentations graphiques etc. [..] (Cette exigence) est fonctionnelle. Les énoncés utilisés vont non seulement avoir une fonction sémiotique, mais aussi (une fonction) instrumentale : ils vont montrer des raisons (fonction sémiotique) mais aussi permettre à la pensée de s'instrumenter, de se contrôler.*
> *(Noirfalise et al., 1996)*

Ce premier article nous suggère donc de voir la rigueur comme une « mobilisation de raisons » donnant la possibilité de *« contrôler, en raison, l'adéquation de la technique à la tâche »*.

3.2.2.2 La rigueur vue comme l'équilibre entre la technique et le discours sur la technique

Les exemples évoqués par R. Noirfalise et ses collègues peuvent être interprétés en termes de « mauvaise » lecture de l'énoncé et de non-compréhension de la question posée. On peut aussi supposer que les tâtonnements de l'élève sont nécessaires et lui permettent de s'approprier la question. Peut-être même que l'élève aurait, sur base de ses premières hésitations, construit ensuite une solution sans assistance. Il y a sans doute de cela aussi. Mais tout se passe dans ces deux exemples comme si la technique était dissociée du discours sur la technique (selon les termes permettant à Y. Chevallard de définir la notion de praxéologie (2002)). Ce discours contient les conditions d'utilisation, les résultats attendus, et toutes les informations pouvant être associées à la technique.

Par exemple

« La factorisation » est une technique ; et *« On peut parfois transformer une expression sous forme de somme en une expression sous forme de produit de facteurs. Ceci permet par exemple d'étudier dans quels cas cette expression peut être égale à 0, ou encore comment le signe de cette expression est susceptible de varier »* est un discours sur cette technique.

Mais il semble que, pour beaucoup d'élèves, le discours sur la factorisation :1) n'existe pas, dans le sens où il n'a pas pu se constituer ; 2) n'existe plus ; 3) est devenu « dès que je vois (une expression avec) des x^2, je factorise ». Dans la plupart des cas, en effet, il n'y a même pas de référence à la notion d'expression.

L'approche anthropologique rappelle à ce sujet que toute pratique est associée à un ensemble de connaissances sur cette pratique. Il y a donc un couple (Technique, Discours), ou (Pratique, Connaissances) ou (Savoir-faire, Savoir), qui pour la majeure partie des tâches humaines subit des évolutions au fil des activités. Il peut rester dans son équilibre initial ou voir se modifier l'équilibre entre les deux composantes : le discours peut changer sur une même technique, ou encore la technique reste et le discours a disparu. Pour certaines tâches, cela ne pose pas de problème, mais les exemples cités par R. Noirfalise(1996) montrent que dans l'activité mathématique, l'existence d'une technique sans discours peut empêcher d'en faire bon usage.

Nous proposons alors d'envisager la rigueur comme ce qui permet de conserver des couples (Technique, Discours) équilibrés. Ce discours raisonné sur la technique a pour fonction de « garder les raisons », ou encore de « raison garder ».

3.2.2.3 Deux acceptions du mot « raisons »

Toujours par référence à l'approche anthropologique, le discours raisonné que nous avons évoqué ci-dessus contient d'une part la tâche (le pour quoi) et peut contenir le début de technologie (le pourquoi). Donner des raisons, montrer des raisons, connaître les raisons, mobiliser des raisons : la rigueur telle que nous sommes en train de la définir demande donc de prendre en compte les deux acceptions du mot « raison » : 1) en tant que motivation ; 2) en tant que justification.

On retrouve ce « jeu de raisons » dans une citation de H. Poincaré (1900), avec laquelle H. Freudenthal (1973) commence son chapitre *« Mathematical rigour »:*

> *When mathematical science becomes rigorous, it assumes an artificial character which cannot be overlooked. It forgets about its historic origin : it shows how problems can be solved, but not how and why they are posed. This shows that logic does not suffice; the science of proofs is not the whole science, intuition is assigned a complementary part, I would say, as counterpart or antidote of logic. (Poincaré, 1900, In Freudenthal, 1973).*

H. Poincaré nous invite donc à dépasser le caractère dit artificiel de la rigueur pour mieux distinguer :

1) le « *how problems can be solved* », que l'on peut rapprocher de l'articulation technique/technologie, et donc de la raison en tant que justification ;

2) le « *how and why problems are posed* », que l'on peut rapprocher de l'articulation tâche/technique et donc de la raison en tant que motivation ;

Nous pourrions aussi poursuivre l'analyse de cette citation en faisant plutôt correspondre le *« how problems can be solved »* à la théorie, c'est-à-dire à la seule justification mathématique. Ceci expliquerait sans doute l'utilisation du terme « artificiel » dans la citation En effet, la référence à l'évolution historique des mathématiques nous rappelle que les théories mathématiques se construisent de manière à toujours mieux légitimer les techniques utilisées, mais en « renonçant » aux problèmes originaux. Si c'est essentiel pour l'évolution de la discipline, et donc dans le monde du savoir savant, la transposition dans le monde de l'école posera le problème de la disponibilité d'un discours technologique dont la fonction pourrait être de valider et rendre intelligible plus que de justifier théoriquement.

3.2.2.4 La rigueur vue comme la recherche de rationalité

En cherchant à définir ce que recouvrait le mot rigueur nous l'avons progressivement associé à la disponibilité et à l'explicitation de raisons permettant la compréhension du rapport entre les tâches et les techniques mathématiques. Nous allons donc dans la suite rapprocher la rigueur de la rationalité, autre attribut usuel des sciences mathématiques.

Nous allons voir que cela va rapidement nous confronter de nouveau à deux dimensions puisque le mot « rationnel » désigne ce qui caractérise la qualité d'un raisonnement, mais aussi ce qui distingue la connaissance déduite de l'expérience vécue. Cela nous donnera les premiers éléments pour la mise en évidence d'une relation particulière entre les mathématiques et le monde réel ou sensible, ou tout autre système à modéliser, relation qui nécessite un travail par « îlots » de rationalité locale.

Nous verrons alors que le passage de la rationalité quotidienne à la rationalité scientifique constitue un obstacle d'apprentissage connu et que l'enseignement est confronté au risque de croire en un *continuum* entre ces deux formes de rationalité.

La notion de « cadres » de rationalité nous permettra ensuite de considérer l'existence et l'interaction de plusieurs niveaux de rationalité possédant leur structure propre dans laquelle figurent des objets et des formes de validation qui leur sont spécifiques.

3.2.2.4.1 Rationalité

De même que le mot rigueur, le mot rationalité est finalement utilisé avec différentes significations. Le dictionnaire (Robert, 1970) nous renvoie à « caractère de ce qui est rationnel », c'est-à-dire : 1) Qui appartient à la raison, qui relève de la raison (activité, pensée rationnelle). La connaissance rationnelle provient de la raison, par opposition à la connaissance révélée provenant de l'expérience. 2) Conforme à la raison, au bon sens. Qui raisonne avec justesse. En relation avec la première définition, le dictionnaire nous souligne aussi l'existence du nom « rationnel » dont le propre est de s'opposer au réel.

Enfin, Edgard Morin (1986) propose une définition qui nous permet de relier les deux dimensions :

> *La rationalité est l'établissement d'une adéquation entre une cohérence logique (descriptive, explicative) et une réalité empirique.*
> *(Morin, 1986)*

3.2.2.4.2 Construction de la rationalité et débat scientifique

Pour « garder des raisons » à une technique mathématique ou aux règles de manipulation des ostensifs et non-ostensifs, il faut qu'elles aient été identifiées. Avec son concept de « débat scientifique dans la classe », Marc Legrand (1988, 2002) propose aux élèves de mettre en place eux-mêmes ces raisons. Le débat scientifique dans la classe consiste à « *jouer en vraie grandeur le jeu scientifique* » dans une formule permettant aux élèves de s'exprimer avec leurs mots dans un premier temps ; puis de devenir eux-mêmes producteur d'énoncés et « fabricants de théorèmes ». L'objectif n'est pas de se nourrir d'illusions sur la possibilité d'une complète auto-construction des savoirs, mais de cerner la portée et la signification des énoncés mathématiques.

M. Legrand souligne que l'enseignant doit prendre un risque et assumer sa part de responsabilité dans un échec éventuel, et que cette formule nécessite une remise en question de l'enseignant lui-même pour être prêt à jouer le jeu du doute et à garder la neutralité suffisante. Dans le contexte de notre travail, soulignons que l'enseignant doit également affronter sa propre rationalité, ce qui d'après notre hypothèse est encore plus problématique pour les jeunes enseignants.

Pour ce faire, M. Legrand préconise de transformer les questions des élèves en énoncés devenant ainsi des conjectures à critiquer ou valider. Un premier pas peut être de « dépersonnaliser » les questions du type «est-ce que j'ai le droit de », ou « est-ce que je peux faire », questions que nous avons évoquées ci-dessus. Ainsi, quelle qu'ait été la démarche initiale de l'élève (demande d'un argument d'autorité, effet de contrat, ou réelle recherche de sens), cette dépersonnalisation est un moyen de faire évoluer la question vers son exploitation mathématique.

Exemple :

« est-ce que j'ai le droit.....d'écrire $\sqrt{3+2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$?» peut alors être transformée en

« peut-on écrire $\sqrt{3+2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$?» ; ou « peut-on écrire $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?»

Il s'agit alors de traiter rationnellement la question sous-jacente à l'erreur qui allait être commise, en revenant sur l'articulation tâche/technique afin d'obtenir un discours de la forme : « je peux faire… parce que….. » ou « je ne peux pas faire …..parce que…. ». Le « parce que [71]» peut alors consister soit en la donnée d'un contre-exemple numérique pour éviter à l'élève une généralisation abusive, soit à une justification de nature théorique[72].

Une deuxième étape pourra ensuite être de demander d'énoncer des conjectures s'insérant dans le développement d'une leçon.

Le débat scientifique propose donc aux élèves de poser en classe les questions qu'ils n'oseraient peut-être plus se poser, mais aussi de les résoudre en classe, ce qui implique alors le jeu de l'argumentation, de pouvoir dire qu'on est d'accord ou qu'on n'est pas d'accord, mais surtout pourquoi[73]. Nous voyons donc ici encore apparaître l'importance du « pourquoi », aussi bien sous l'angle « pourquoi c'est comme ça » que « pourquoi c'est pas comme ça » :

> *Le professeur se porte garant de la scientificité globale du débat, mais pas de la vérité ou pertinence des arguments évoqués au fur et à mesure.*
> *A la fin, il institutionnalise les résultats vrais et conformes, identifie les résultats faux bien que séduisants (erreurs récurrentes contre lesquelles il faudra se battre), met en exergue les procédures productrices d'idées ou qui ont permis de séparer le vrai du faux.*
> *(Legrand, 2002)*

Pour passer de la pratique au discours, il est souvent nécessaire de dissocier le réel, ou plus généralement le système sur lequel on travaille, de sa modélisation mathématique

[71] On retrouve ainsi plusieurs mots qui donnent une nature différente à l'argument : parce que, puisque, en effet, car, dont l'utilisation n'est pourtant pas toujours bien contrôlée.

[72] Dans le cas de l'exemple, nous pouvons seulement constater que la donnée de contre-exemples ne suffit pas toujours à éviter des erreurs ultérieures, et que les élèves-professeurs savent rarement revenir au fait que le symbole « radical » est associé à la définition d'un objet mathématique.

[73] Notons qu'il est aussi possible à l'élève de se ranger à l'avis collectif tout en acceptant qu'il subsiste un doute qu'il cherchera alors à résoudre une fois le moment et les moyens venus.

et d'identifier les types de raisonnement qui sont alors possibles et dans quelles limites ils le sont. Lorsque la théorie mathématique n'est pas disponible, ceci se fait par construction de rationalités locales qui peuvent être plus ou moins dépendantes du système étudié. Nous allons décrire dans les sections suivantes comment différents auteurs identifient un tel niveau de rationalité.

3.2.2.4.3 Îlot déductif

La notion d'îlot déductif (Choquet, 1964) exprime cette idée de rationalité locale comme *« unité de base de toute organisation déductive »*. On peut en trouver plusieurs formes.

Dans un document d'initiation au raisonnement de l'université de Bordeaux, les auteurs précisent que chaque îlot déductif est formé par : 1) des énoncés donnés ou antérieurement démontrés ; 2) une règle de substitution (théorème, définition...) ; 3) un nouvel énoncé (ou conclusion). La notion d'îlot déductif cherche alors à mettre en place une dynamique de causalité faisant intervenir différents énoncés : le nouvel énoncé est vrai parce que les énoncés donnés le sont et parce que « la règle » l'est. Les auteurs précisent également que cette dynamique ternaire repose sur l'attribution de statuts spécifiques aux différents énoncés, ce qui n'apparaît pas toujours dans la rédaction des démonstrations. Cette notion d'îlot déductif reste cependant ici associée à une sorte de « décomposition » en morceaux de la théorie existant déjà sous une forme déductive.

Une autre interprétation est proposée par le CREM[74] en parlant d'axiomatisation locale : *« un petit nombre de propositions s'organisent déductivement, de manière locale, sans être incluses dans une théorie axiomatique ample. »* Citant le cas des propriétés « élémentaires » des angles conduisant à la possibilité de calculer n'importe quel angle d'un polygone régulier, les auteurs insistent sur le fait que l'îlot déductif fait intervenir des objets mentaux et non des concepts, en l'occurrence les angles géométriques et non le concept de mesure des angles.

[74] Le GEM utilise par exemple cette interprétation en procédant à une élaboration théorique à partir de sections de polyèdres, les propriétés observées donnant lieu à un jeu d'axiomes et de théorèmes, qui seront réorganisés ensuite.

3.2.2.4.4 Îlot de rationalité

Dans le cadre d'une réflexion sur l'approche interdisciplinaire Gérard Fourez (1997) met l'accent sur la nécessité de disposer d'un référent commun sur lequel il est possible de travailler ensemble et qu'il désigne sous le nom « d'îlot de rationalité », défini comme suit :

> *Invention d'un modèle, d'une représentation ou d'une théorisation permettant de rendre possible des discussions et des débats organisés autour de ce projet, de cette situation, de cette notion, en vue éventuellement d'agir à leur propos.*
> *(Fourez, 1997)*

Cette notion suggère donc d'envisager une sorte de « rationalité locale » qui permet de se donner les moyens d'agir et de raisonner en fixant des limites de modélisation. Il s'agit en effet de procéder à une « *sélection d'informations pour permettre une discussion de la situation qui ne soit pas un dialogue de sourds, discussion qui peut (in petto*[75] *ou avec d'autres) éclairer des processus décisionnels* » (Fourez, 1997). Cela nécessite souvent d'accepter l'existence de ce que Fourez appelle « boîte noire », c'est-à-dire de « *représentation d'une partie du monde qu'on accepte dans sa globalité sans trouver utile d'examiner les mécanismes de son fonctionnement* » (Fourez, 1997). C'est alors au(x) sujet(s) de savoir (et de décider) quand et comment il est intéressant ou non d'ouvrir une boîte noire, par exemple quand «*.[..] faut-il connaître des propriétés mathématiques d'une fonction pour l'utiliser dans l'étude d'un phénomène physique ?*» (Fourez, 1997). La fonction de l'îlot est de favoriser l'adéquation entre les tâches à réaliser et le droit (ou la possibilité) de prendre certaines décisions ou d'avoir certaines actions pour les réaliser :

> *….construire des modèles simples mais pertinents pour un certain contexte, sans s'embarrasser de théorisations inutiles dans ce cadre, sans cependant hésiter à approfondir ce qui précisément mérite de l'être.*
> *(Fourez, 1997)*

G. Fourez situe bien l'îlot de rationalité comme un intermédiaire entre le niveau de la théorie et le niveau de la technique :

[75] Ce *in petto* nous permet de dépasser la problématique de l'interdisciplinarité pour envisager la création d'ilôts de rationalité par un même individu.

> *Un ilôt est une construction théorique parfois aussi élaborée que des concepts scientifiques disciplinaires, mais il relève des sciences de terrain ou de la théorisation technologique.*
> *(Fourez, 1997)*

En tant que début de théorisation, la notion d'îlot de rationalité nous parait donc proche de ce que vise un discours technologique et propose bien un niveau de rationalité qui soit consistant dans certaines limites identifiées et qui puisse, par ailleurs, être d'une autre nature que la théorie. Mais ce que peut être un îlot de rationalité reste encore vague et son articulation avec une théorie structurée ne nous paraît pas être un objectif de G. Fourez, peut-être de par la contrainte de rester dans une perspective d'interdisciplinarité. Nous allons donc poursuivre cette investigation avec la notion de cadre de rationalité cherchant le rapprochement entre une rationalité structurée localement et une rationalité structurée globalement.

3.2.2.4.5 *Cadre de rationalité*

La notion de cadre de rationalité, développée par A. Lerouge (2000) s'inscrit dans une approche cognitive[76] et vise « *à analyser le jeu de diverses fenêtres de rationalité culturelle ou personnelle dans la conceptualisation scientifique* ». Issu de travaux en didactique des mathématiques et développé dans un contexte d'interdisciplinarité mathématiques/physique, « *le cadre de rationalité apparaît comme une fenêtre personnelle ou culturelle d'appréhension de « l'espace de réalité »* ».

La définition d'A. Lerouge évoque aussi « la conceptualisation scientifique », que L.S. Vygotsky (1934) distingue de la conceptualisation spontanée en les analysant comme deux processus très différents de traitement de l'information. L'enseignement des mathématiques met précisément face à face les deux formes de rationalité.

3.2.2.4.5.1 Rationalité quotidienne et rationalité scientifique

La distinction entre ces deux formes de rationalité est traitée par différents auteurs dont R. Douady (1992) et M. Legrand (1989) qui envisagent cette différence comme une

[76] La rationalité est alors envisagée comme une instance de traitement de l'information dans un réseau de représentations.

des causes de l'échec en mathématiques. Pour M. Legrand, les différences sont de telle nature que le travail pour passer de l'une à l'autre constitue un enjeu d'apprentissage :

> *les rationalités quotidienne et scientifique sont tellement différentes dans leurs fondements épistémologiques qu'il faut au niveau didactique considérer comme une variable déterminante des apprentissages scientifiques le fait d'atténuer leurs différences ou au contraire de les mettre en exergue.[…] L'adoption de cette thèse permettrait de sortir de l'illusion naturaliste de la transparence entre réel et modèle, et d'abandonner la croyance en une sorte de genèse spontanée de la seconde rationalité par simple amélioration et sophistication de la première.*
> *(Legrand, 1989)*

R. Douady (1992) situe la confrontation entre une rationalité du quotidien et « la » rationalité scientifique comme une des causes « cognitives » d'échec en mathématiques, venant s'ajouter à celles qui sont liées à l'organisation de l'enseignement[77], et à celles qui relèvent de l'épistémologie. Cette confrontation se manifeste par la difficulté à s'écarter d'une situation d'action qui donne du sens pour aller vers la production d'un énoncé plus général, où on ne contrôle *a priori* plus le sens. R. Douady remarque que ce passage d'une rationalité à l'autre est fait sans transition particulière par les professeurs parce qu'ils savent où ils en sont, alors que c'est une perte de repères pour les élèves. Le phénomène serait accru dans l'utilisation de situations dites « en action », utilisant le vocabulaire et les gestes du quotidien.

Parmi les différences entre ces deux types de rationalité, elle évoque la question du rapport à la vérité. D'après R. Douady, dans le quotidien un faisceau d'arguments en faveur d'une situation la rend crédible et l'on admet facilement « l'exception qui confirme la règle », alors qu'en mathématiques, un énoncé doit être vrai dans tous les cas entrant dans les conditions de l'hypothèse et un seul contre-exemple peut l'invalider.
Si le but de la théorie mathématique est d'établir des énoncés proposant un rapport à la vérité qui soit du deuxième type, le discours technologique nous paraît plutôt se situer justement comme un discours médiateur entre les deux. Il faudrait pour cela trouver le moyen de passer d'un énoncé « valide mais avec exception connue» à un énoncé « vrai

[77] Dans l'organisation définie par les programmes, les connaissances dépendant d'un maillon non maîtrisé vont devenir inaccessibles.

dans les conditions de l'hypothèse ». Cette transition se trouve souvent dans le développement historique. Par exemple, le « théorème faux » de Cauchy sera vite invalidé par un contre-exemple portant sur des séries trigonométriques (Saelens, 1995). Les premières réactions vont consister à considérer que « *le théorème reste correct mais qu'il faut limiter son domaine d'application, ce qui revient à incorporer les exceptions dans l'énoncé.* » (Saelens, 1995). Le fait d'appliquer la méthode que Imre Lakatos (1984) appelle « *exception barring method* » permet à ce résultat de conserver une certaine validité dont les limites sont connues[78], et la recherche d'autres limites aboutira à l'élaboration du concept de convergence uniforme.

Rechercher un discours technologique rationnel et explicatif nous semble donc se situer aussi dans cette transition entre les deux formes de rationalité, à savoir rationalité quotidienne et rationalité scientifique, qui est bien un enjeu d'apprentissage.

3.2.2.4.5.2 Cadres de rationalité individuelle et culturelle

Le modèle du cadre de rationalité propose quatre entrées systémiques : les objets, les démarches de conceptualisation, les démarches de validation et le statut des registres sémiotiques supportant ces deux démarches. Cette modélisation prend donc en compte les différents points abordés dans notre étude en cherchant également 1) à expliciter le lien entre les noyaux conceptuels et les processus d'inférence ayant permis de les construire ; 2) à mettre en évidence l'interaction de la rationalité individuelle et de la rationalité culturelle.

Travaillant sur des représentations en réseaux constitués de nœuds et de relations, Lerouge adopte l'épistémologie de Mario Bunge (1983) en distinguant trois catégories d'objets :

> *les objets matériels qui ont une existence propre, les objets mentaux qui ont une existence psychique et les objets conceptuels [...] qui n'existent que dans la mesure où ils appartiennent à certains contextes culturels.*
> *Par exemple une ficelle tendue, une règle droite sont des objets matériels,*
> *la conception de la droite chez un élève particulier est un objet mental,*
> *le concept de droite en mathématique, l'axiomatique d'Euclide, la démonstration sont des objets conceptuels.*
> *(Lerouge, 2000)*

---

[78] D'après Volkert (2006), Abel parlait aussi *« d'exceptions qui marquent les bornes de la validité d'un théorème dont la vérité n'est pas mise en doute »*. Volkert qualifie cette attitude de *« naturaliste, qui ne modifie pas son énoncé général s'il rencontre quelques exceptions »*.

La notion d'objet conceptuel est précisée comme suit par Bunge :

> *les objets conceptuels ne sont ni matériels ni mentaux : ce ne sont ni des signes, ni des processus cérébraux, ni des événements qui se produisent dans un esprit immatériel. Par contre, ce sont des objets qui possèdent une nature particulière et irréductible. [...] (les objets conceptuels) existent dans la mesure où ils appartiennent à certains contextes, les théories par exemple*
> *(Bunge, 1983)*

Le fait de distinguer différents statuts pour un même objet nous paraît intéressant dans la mesure où l'enseignement vise justement à faire partager un objet qui n'a pas le même statut pour les personnes impliquées[79]. A. Lerouge cite l'exemple de la droite qui existe comme 1) la droite « matérielle » ; 2) la droite vue par un individu et 3) la droite vue par une culture. Sur ce dernier point, nous savons qu'il nous faudra distinguer l'institution « enseignement secondaire » de l'institution « mathématiques » [80].

Cette différenciation au niveau des objets manipulés amène alors à distinguer la rationalité personnelle et la rationalité culturelle. A. Lerouge définit ainsi ce qu'il appelle la rationalité personnelle :

> *[..] un réseau d'objets mentaux dont le noeuds sont les conceptions, et les relations, les processus d'inférence stabilisés par le sujet.*
> *Ces conceptions et ces processus sont construits et communiqués en utilisant divers registres symboliques greffés sur le registre fondamental de la langue naturelle. Dans ces registres, la signification dépend des connotations personnelles du sujet ancrées dans les situations familières qu'il mobilise. [Ces processus sont] les processus de construction des conceptions et les processus de validation de ces constructions*
> *La rationalité personnelle apparaît donc comme le système global de structuration des connaissances d'un sujet particulier à un moment de son histoire. C'est une notion dynamique qui ne peut être définie qu'en référence à un sujet particulier et à la chronologie de son développement et de ses apprentissages*
> *Dans cette perspective, la conceptualisation vise à construire des objets mentaux à partir d'objets matériels, d'objets mentaux déjà construits, et d'objets conceptuels.*
> *(Lerouge, 2000)*

[79] Par contre, on peut supposer que le mathématicien expert travaille avec les différents statuts sans avoir besoin d'expliciter les changements. Voir par exemple Rogalski (1997).

[80] Pour la tangente, nous devrons également distinguer entre la tangente définie par la géométrie et la tangente définie par l'analyse.

Cette notion de rationalité personnelle nous paraît pouvoir être étendue à la rationalité d'un groupe d'individus, en l'occurrence une classe, dans lequel seraient travaillées les validations de techniques utilisant certaines conceptions, mais restant différente de la rationalité plus englobante qui caractérise la discipline constituée, et que A. Lerouge définit comme la rationalité culturelle :

> *La rationalité culturelle d'une discipline scientifique [est] un réseau d'objets conceptuels dont les nœuds sont les concepts de la discipline et les relations, les processus d'inférence culturellement stabilisés dans cette discipline. Ces concepts et ces procédures sont portés par divers registres sémiotiques institués, dont la signification est culturellement arrêtée en lien avec des situations de référence. [...] (Ces procédures) sont les procédures de construction des concepts et les procédures de validation propres à la discipline.*
> *La rationalité culturelle apparaît ainsi comme le système global de structuration des savoirs dans cette discipline, stabilisé par la culture humaine en un lieu et à une époque donnés.*
> *(Lerouge, 2000)*

Nous rappelons ci-dessous les différences entre un niveau de rationalité personnel et un niveau de rationalité culturel :

Rationalité culturelle	Rationalité personnelle
Concept *« a nécessairement une valeur de vérité socialement partagée par une communauté »*	Conception *« un triptyque signifiant/signifié/référent stabilisé par le sujet à un moment de son histoire (qui) a une valeur de vérité personnelle »*
Savoir *« ce qui est de l'ordre des constructions culturelles »*	Connaissances *« ce qui est de l'ordre des acquisitions du sujet ….. et (qui) apparaît alors comme un réseau local de conceptions associées à ce savoir culturel et à la chronogenèse du sujet*
Situation de référence *« une situation culturellement identifiée sur laquelle est construit tout ou partie d'un concept »*	Situation familière *« est disponible comme objet mental produit par l'expérience du sujet et sur laquelle il fonde tout ou partie de la signification d'une conception »*
Le registre sémiotique désigne *« l'objet culturel , c'est-à-dire un ensemble structuré de signes, dénotés culturellement, qui remplit une fonction de désignation, de traitement et de communication dans l'élaboration culturelle des savoirs »*	le registre symbolique désigne *« l'objet mental, repéré par le sujet comme un ensemble structuré de symboles connotés subjectivement, qui remplit une fonction de désignation, de traitement et de communication dans l'élaboration personnelle de la connaissance ».*
la procédure *« une suite de prescriptions que l'on peut parfaitement expliciter »*	le processus *« une activité mentale impossible à appréhender »*

Rationalité personnelle et rationalité culturelle

Concernant la dernière ligne, A. Lerouge précise que la différence entre procédure et processus réside dans une « *dualité de l'implicite et de l'explicite dans la description des phénomènes* ». Par exemple, *« un raisonnement est un processus de validation, tandis qu'une preuve ou une démonstration sont des procédures par leur caractère de validation sociale. »*

A. Lerouge semble donc ne considérer ici que des raisonnements en partie non explicités[81]. C'est pourquoi nous choisirons d'étendre la notion de cadre de rationalité en y incluant la capacité d'explicitation par le discours de ces processus individuels de validation.

De plus, A. Lerouge considère deux formes de rationalité culturelle en distinguant deux niveaux de procédure :

> *Par exemple, prouver le théorème de Pythagore par découpage de carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle est une procédure de preuve pour la classe (cadre culturel familier) ; prouver le même théorème en le déduisant de l'axiome de symétrie du rapport de projection orthogonale est une procédure de démonstrations dans la communauté des mathématiciens (cadre culturel mathématique).*
> *(Lerouge, 2000)*

Nous avions suggéré plus haut d'étendre la rationalité individuelle à une classe tandis que A. Lerouge propose en quelque sorte le contraire avec l'expression « cadre culturel familier »[82]: le discours en classe serait une forme particulière du discours mathématique. Mais quelle peut être cette forme ? Doit-elle être une adaptation du discours théorique (et dans ce cas, laquelle) ou peut-elle être une construction rationnelle spécifique ? Déjà identifié comme médiateur entre la rationalité quotidienne et la rationalité scientifique, le discours technologique apparaît aussi comme médiateur entre une rationalité de niveau personnel et une rationalité de niveau culturel.

3.2.2.4.5.3 Construction de la rationalité par jeu de cadres

Selon A. Lerouge, la notion de cadre de rationalité repose en fait sur deux notions proposées comme modèles en didactique des mathématiques : les jeux de cadres de

[81] C'est aussi ce qu'on trouve dans la définition de N. Balacheff (1987) parlant de *« l'activité intellectuelle, la plupart du temps non explicite, de manipulation d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations ».*

[82] Lerouge proposait aussi de distinguer la culture de la discipline et la culture de l'institution, le situant donc toutes deux au même niveau.

R. Douady (1984, 1986) et le champ conceptuel de G. Vergnaud (1995). Nous reprenons ici brièvement les rapprochements que l'auteur opère entre ces modèles dans la mesure où ils permettraient d'expliquer que la construction de la rationalité implique les savoirs mathématiques mais aussi une dimension cognitive de manipulation et d'organisation de ces savoirs en faisant jouer plusieurs cadres ou plusieurs champs.

Proposé par G. Vergnaud, un champ conceptuel

> *…peut se définir de deux manières complémentaires : un ensemble de situations dont la maîtrise progressive appelle une variété de concepts, de procédures et de représentations en étroite connexion ; comme l'ensemble des concepts qui contribuent à la maîtrise de ces situations.*
> *(Vergnaud, 1995)*

D'après Lerouge, la construction de rationalité par un sujet nécessite un jeu entre plusieurs cadres de rationalité à coordonner avec plusieurs champs conceptuels :

> *Un cadre culturel de rationalité s'inscrit dans la logique d'une discipline de référence, alors qu'un champ conceptuel s'inscrit dans une logique transdisciplinaire. Par exemple, on peut regrouper le théorème de Pythagore et de Thalès dans le cadre culturel de la géométrie, alors que ces théorèmes ne relèvent pas d'un même champ conceptuel. A l'inverse, on regroupera le théorème de Thalès et la loi d'Ohm dans le champ conceptuel de la proportionnalité alors que ces notions ne relèvent pas du même cadre culturel de rationalité.*
> *(Lerouge, 2000)*

La notion de « cadre » existe déjà en didactique des mathématiques et est associée aux travaux de R. Douady sur les jeux de cadres :

> *Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuelles diverses et des images mentales associées à ces objets et à ces relations.*
> *(Douady, 1986)*

C'est sur cette définition qu'elle fonde le « jeu de cadres » stipulant que

> *Dans l'apprentissage d'une notion mathématique ou dans la recherche de la solution d'un problème, le fait de croiser les cadres d'approche permet de débloquer les processus de compréhension.*
> *(Douady, 1986)*

Douady précisera ultérieurement que la notion de cadre doit de plus être envisagée selon au moins trois dimensions : « *une dimension mathématique, une dimension socioculturelle, une dimension individuelle, chacune indexée par le temps* » (Douady, 1996). Les notions de cadre mathématique et cadre de rationalité se rapprochent aussi dans la mesure où A. Lerouge parlera de « jeu de cadres de rationalité », mais en insistant plus sur une dualité entre le sujet et la culture.

Cette vision de la rigueur comme recherche de rationalité nous a amenée à considérer la rigueur d'un point de vue didactique comme l'adéquation de la technique à la tâche, puis comme la capacité à exprimer le discours permettant cette adéquation. En ce sens, une des fonctions de la rigueur est donc liée à l'élaboration d'un discours technologique.

La notion de cadre de rationalité nous invite à prendre en compte l'existence de différents niveaux de rationalité, dont l'articulation est un enjeu de l'apprentissage et de l'enseignement. Par exemple, le discours technologique se présente comme un discours explicitant les validations dans un cadre de type « personnel », de manière à préparer les validations dans le cadre de type « culturel », qui feront appel à une autre fonction de la rigueur, à savoir le formalisme.

3.2.3 Rigueur et formalisme

Nous avons parlé dans nos hypothèses de « conception formaliste ». Nous allons donc chercher à comprendre comment rigueur et formalisme sont liés, et parfois même confondus.

La nécessité de les distinguer a été notamment soulignée par Gilbert Arsac :

> *Un système entièrement formalisé représenterait le sommet de la rigueur, mais devrait encore recourir à des notions intuitives comme la notion de nombre entier.*
> *(Arsac, 1996)*

Il définit implicitement la rigueur comme une forme de connaissance ne passant plus par l'intuition, et présente le formalisme comme un moyen de la rigueur, précisant que

> *Plus une rédaction est formalisée, plus elle devra être accompagnée par un discours en langue naturelle, …(ce qui marque)… la limite de la recherche de rigueur par la formalisation.*
> *(Arsac, 1996)*

3.2.3.1 La confusion entre rigueur et formalisme

Sans adopter l'entièreté de ses propos, B. Beauzamy[83] (2001), nous amène à penser que l'enseignement supérieur[84] « *crée une « confusion […] .entre formalisme et rigueur, au détriment de l'efficacité.* ». En effet, même sans qu'il y ait intention[85] de confondre rigueur et formalisme, l'hypothèse d'une confusion inconsciente entre les deux parait intéressante dans le cadre de notre travail.

Toujours selon B. Beauzamy, la rigueur signifie « *connaître le domaine d'application des outils que l'on utilise, (par exemple) savoir qu'on ne peut pas dériver ou intégrer n'importe quelle fonction* », tandis que « *le formalisme […] consiste à développer pour une théorie, et donc pour un outil, un cadre le plus conceptuel, le plus dépouillé possible. Par exemple, on peut intégrer une fonction continue sur un segment, puis on passe aux fonctions intégrables au sens de Lebesgue, et on continue avec les distributions* ». L'enseignement supérieur développe effectivement les théories mathématiques (théorie de l'intégration, théorie des groupes,…), c'est-à-dire « *un cadre conceptuel dans lequel un outil trouve sa place : ce cadre est bien fait, bien élaboré, avec juste les bons axiomes et les bonnes démonstrations* », mais on arriverait alors à une incompréhension récurrente dans l'enseignement : « *les enseignants ne connaissant que la théorie […] et les élèves ne comprenant pas parce qu'ils n'ont pas connaissance de l'outil* ».

3.2.3.2 Usages du formalisme comme moyen de la rigueur

Dans une étude sur « *l'enseignement des mathématiques d'hier à demain* », N. Rouche (1995) précise les fonctions du formalisme et en quoi c'est un instrument de la rigueur. Cette fonction est également évoquée par les conférences (Arsac, 1997 ; Chevallard, 1997 ; Perrin, 1997 ; Rogalski, 1997) ayant eu lieu dans le cadre d'une « Table Ronde : Formalisme et Rigueur ».

---

[83] Société de calcul mathématique.
[84] Il s'agit en France de l'Université et des classes préparatoires.
[85] C'est dans l'existence d'une intention délibérée de confondre rigueur et formalisme que nous ne suivons pas Beauzamy.

3.2.3.2.1 Le formalisme comme méthode

Pour N. Rouche (1995), faire des mathématiques formelles consiste *à « larguer le fonds pour ne conserver que la pure forme déductive »*, de manière à faciliter *« la vérification que chaque démonstration est indépendante des images qu'on lui associe ».* Le formalisme est en fait *« une méthode pour se prémunir contre tout recours à l'intuition dans les preuves »*, et se traduit par *« un rejet méthodologique du sens »* sans pourtant que ce rejet soit un objectif en soi. En effet, Hilbert (1899) a reconstruit la géométrie d'Euclide en en éliminant les recours à l'intuition et aurait dit que dans les énoncés de géométrie on pourrait remplacer les mots point, droite et plan par chaise, table et verre sans que la théorie en soit affectée. Ce faisant, Hilbert dote la géométrie d'une structure purement formelle mais affirme lui-même la coexistence de deux tendances en mathématiques :

> *D'une part, la tendance à l'abstraction cherche à cristalliser les relations logiques inhérentes à la masse des matériaux étudiés et organiser ces matériaux en un système ordonné. D'autre part, la tendance à la compréhension intuitive pousse à saisir plus immédiatement les objets d'étude, à établir avec eux un rapport pour ainsi dire vivant qui exhibe le caractère concret de leurs relations*
> *(Hilbert, 1952)*

3.2.3.2.2 Les usages du formalisme

Le formalisme aboutit à l'élaboration d'un système formel, c'est-à-dire un ensemble d'axiomes, de règles d'inférence et de règles d'écriture des formules constituant une théorie. Des symboles sont créés et utilisés pour décrire ce système formel[86]. C'est en fait un des usages du formalisme[87].

Cela permettra par exemple de reprendre une démonstration qui paraissait rigoureuse mais dans laquelle on avait « oublié » un cas parce qu'en fait on ne savait pas le décrire (Perrin, 1997). Dans certains cas, comme dans les familles de courbes, c'est l'absence de formalisme qui a empêché un certain temps de comprendre la situation, c'est-à-dire de la formuler en conjecture (Perrin, 1997). C'est aussi le moyen de donner une définition plus précise des objets manipulés.

[86] Dans le même ouvrage, N. Rouche précise *« il ne faut pas confondre formalisme avec symbolisation mathématique, même s'ils vont souvent de pair ».*
[87] Chevallard (1997) le définira comme *« au plus large, les instruments ostensifs de l'activité mathématique ».*

L'usage de nouveaux registres symboliques permet aussi *« des calculs et des raisonnements plus faciles et adaptés à tous les cas particuliers, comme $x|y$, via la création de représentations mentales plus efficaces »* (Rogalski, 1997).

Un deuxième usage est « l'économie de pensée », qui consiste à ne démontrer qu'une fois dans un cadre abstrait un lot de propriétés que l'on pourra ensuite appliquer telles quelles dans chaque théorie.

Un troisième usage a trait à ce que N. Rouche appelle les « *transferts d'intuition* ». En travaillant sur les relations au-delà des objets, une même structure logique permet de rendre manifeste une « parenté de forme » entre différents domaines des mathématiques. On arrive alors au paradoxe :

> *Parce qu'elles sont abstraites, les structures se trouvent à l'abri des intuitions, mais parce qu'elles sont communes à divers domaines « concrets », elles induisent des transferts d'intuition entre ces domaines.*
> *(Rouche, 1995)*

Le quatrième usage du formalisme est de « *mettre de l'ordre dans la matière mathématique considérée globalement* ». Par la reconnaissance de structures communes à des domaines parfois très éloignés, se tissent des liens entre les théories du type « *liens de parenté, de filiation* » contribuant à en faire voir l'architecture d'ensemble. Cette mise en ordre conduit tout droit au thème du fondement des mathématiques. Rogalski (1997) parle alors *« d'unification formelle de domaines différents [..pour..] rassembler sous un même concept ou une même théorie des problèmes ou des démarches qui « se ressemblent », ont quelque chose en commun, du moins a posteriori ».*

C'est bien ce « a posteriori » qui distingue la rigueur associée au formalisme de la rigueur associée à la rationalité. Cette distinction est par ailleurs évoquée par les auteurs cités ci-dessus lorsqu'ils se posent la question de la transposition à l'enseignement. Nous y reviendrons à la section 3.4.

3.2.4 A la fois une conviction individuelle et un accord entre l'individu et une culture

Nous résumerons cette réflexion sur la notion de rigueur mathématique avec la contradiction signalée par A. Bouvier (1981) dans « *la mystification mathématique* », qui propose d'abord de voir la rigueur comme

> *Une question de conviction intime. […] Elle dépend du sujet, de sa culture, de ses connaissances.*
> *(Bouvier, 1981)*

L'idée que la rigueur soit une conviction individuelle[88] à acquérir est un des moteurs du débat scientifique, y compris si un élève se range à l'avis commun en sachant pourquoi il n'y adhère pas, et est prise en compte dans la notion de cadre de rationalité.

Cependant si Bouvier souligne que la rigueur est une question de conviction individuelle, il nous suggère dans le même temps que c'est aussi une question d'accord entre l'individu et la (ou les) culture(s) dont il fait partie :

> *La notion même de rigueur recouvre des réalités différentes qui sont liées à la fois aux philosophies dominantes et aux moyens théoriques existants.*
> *(Bouvier, 1981)*

Bouvier nous propose donc d'associer la rigueur, non seulement aux connaissances d'un individu, mais aussi à la manière dont ces connaissances sont organisées et justifiées les unes par rapport aux autres, aussi bien pour l'individu, en fonction de sa philosophie et des théories dont il dispose, que pour le milieu environnant, ici aussi en fonction de sa philosophie et des théories disponibles. Le rôle des institutions reste donc essentiel pour que la rigueur remplisse deux fonctions paradoxales, convaincre et douter :

> *It is the task of rigour to convince, and ready-made mathematics never convinces. To progress in rigour, the first step is to doubt the rigour one believes in at this moment[89].*
> *(Freudenthal, 1973)*

[88] R. Guitard (1999) parle aussi de *« expression du tombé pile sur une intuition »*.
[89] « La mission de la rigueur est de convaincre, et les mathématiques toutes faites ne convainquent jamais. Pour avancer en rigueur, la première étape est de questionner la rigueur à laquelle on se fie maintenant ».

C’est particulièrement vrai dans le cas du futur professeur, qui est précisément entre deux mondes. Cette différence entre deux mondes, que nous avons déjà pu envisager sous l’angle de deux niveaux de rationalité différents, peut aussi s’exprimer en termes de praxéologie comme nous le verrons dans la dernière section (3.4).
Auparavant, nous allons préciser comment l’absence d’identification d’un niveau de rationalité spécifique peut se traduire par des pratiques relevant de l’empirisme.

3.3 L’ostension déguisée : une forme d’empirisme qui remplace le discours

Cette section a pour objectif de préciser un point de vue exprimé dans l’introduction lorsque, en évoquant la manière dont la dérivée et le critère de croissance sont majoritairement présentés dans le secondaire, nous l’avons associée à une forme d’empirisme.
Nous décrirons dans cette section plusieurs conceptions et représentations des mathématiques, ainsi que les interactions possibles de ces représentations, souvent inconscientes, avec les choix d’enseignement. En particulier nous détaillerons comment le contrat, dit « d’ostension déguisée », peut être interprété comme une position empiriste dans laquelle les concepts mathématiques devraient être abstraits à partir de la présentation de leur représentation graphique ou d’ostensifs leur correspondant.
Enfin, nous étudierons la notion même de « représentation » dans l’objectif de cerner si il est possible de faire évoluer les représentations, et comment il est conseillé de le faire.

3.3.1 Deux points de vue en didactique sur l’ostension

Il est facile et efficace dans la vie courante de montrer un objet ou un animal en disant « voilà (vois là) une chaise » ou « voilà un chat » pour faire identifier un type d’objet, une espèce d’animal ou même une personne, en tant qu’élément générique d’une classe et en s’appuyant sur un répertoire de connaissance « universel » avec un jeu de variables laissées implicites. Dans ce cas, Brousseau (1995) parle de *« communication de* *connaissance, ou plutôt de reconnaissance, [qui] ne passe pas par l'explicitation sous forme d'un savoir ».*

Pour décrire cette forme de communication, il utilise le mot « ostension » dérivant de *ostendere* – montrer, qui nous a par ailleurs donné les mots ostensible et ostentation, ainsi que l'ostensoir. A l'origine, le terme « ostension » appartient plutôt au vocabulaire liturgique (en anglais comme en français) et désigne le geste liturgique par lequel le célébrant *présente aux fidèles* un objet du culte (croix, cierge, icône) ou une sainte espèce (reliques dans un reliquaire, Saint Sacrement). L'expression anglaise « ostensive action » semble avoir ensuite été traduite en « ostension » pour signifier par exemple que des légendes pouvaient être jouées et mises en actes, autant que racontées et mises en paroles. Les phénomènes d'ostension vont donc intéresser les spécialistes de la communication, …..ainsi que les didacticiens des mathématiques.

En précisant les différents contrats didactiques[90], Brousseau (1995) parle de « contrat d'ostension » lorsque *« le professeur montre un objet ou une propriété »* et que *« l'élève accepte de le voir comme représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances ».* Si la stratégie est intéressante lorsqu'une définition proprement mathématique serait trop lourde à établir, voire inutile, ce contrat est en général insuffisant pour définir de manière fonctionnelle un objet mathématique. Par exemple :

> *…définir un polynôme comme une somme de monômes, ou présenter le dessin d'un carré, ou « décrire » un décimal comme un nombre comportant une virgule ne permet pas de déduire les propriétés caractéristiques de ces objets (Brousseau, 1995).*

En particulier, il n' y a aucune raison pour que l'élève dispose ensuite de la connaissance des situations dans lesquelles cet objet intervient, ni même des moyens d'action sur l'objet mathématique concerné et encore moins des liens qu'il pourrait établir avec d'autres notions.

Le contrat d'ostension repose donc sur un implicite majeur qui risque d'isoler le professeur de l'élève : le professeur pense sincèrement que l'élève verra la même chose que lui dans l'objet ainsi montré, et l'élève va effectivement voir ce qu'on lui montre,

[90] Le contrat didactique est constitué de l'ensemble des attentes, le plus souvent implicites, existant entre le professeur et les élèves à propos du savoir. Son caractère implicite génère alors des « effets de contrat ».

mais ….. seulement ce qu'on lui montre. Si cette présentation ostensive peut permettre une familiarisation avec un objet avant son étude effective, ou encore donner à voir une propriété avant de la démontrer, il existe un risque consistant à lui faire remplacer la fréquentation effective de la notion et alors attendre de l'élève une volonté spontanée de généraliser et une capacité spontanée à transférer.

L'ostension est aussi présente dans une dialectique spécifique aux mathématiques, à savoir la dialectique entre ostensifs et non ostensifs. Bosch et Chevallard (1999) montrent en effet que l'activité mathématique elle-même suppose une articulation entre ce qu'ils appellent les ostensifs et les non-ostensifs. Par « ostensifs » ils entendent tout ce qui peut être appréhendé par les sens :

> *… pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible.*
> *(Bosch & Chevallard, 1999)*

Les « non-ostensifs » sont

> *Tous ces objets, […] qui existent institutionnellement –au sens où on leur attribue une existence- sans pouvoir être vus, dits, entendus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains ostensifs.*
> *(Bosch & Chevallard, 1999)*

L'association entre ostensifs et non ostensifs est questionnée par les chercheurs en didactique et pour plusieurs raisons. La psychologie de la forme a montré que la perception visuelle n'est pas réductible à la sensation enregistrée par la rétine, d'où par exemple les difficultés dans l'apprentissage des représentations planes de solides. D'autre part, cette correspondance peut souffrir d'une « illusion de naturalité » et un même ostensif évoquera des non-ostensifs très différents selon le cadre institutionnel[91]. C'est pourquoi

> *La méprise qui consiste à supposer que la perception des ostensifs serait naturelle –c'est-à-dire non construite- explique dans une large mesure ce que la théorie des situations a mis en évidence sous le nom de stratégies didactiques d'ostension. On désigne par ce terme la pratique d'enseignement où le professeur se limite à*

[91] Une des spécificités de la TAD est d'apporter un éclairage institutionnel en postulant que le savoir et les pratiques associées sont différents d'une institution à l'autre.

> *montrer aux élèves un objet ostensif en croyant qu'il se créera spontanément un rapport adéquat à cet ostensif et surtout aux non-ostensifs auxquels il est censé renvoyer.*
> *(Bosch et Chevallard, 1999)*

Nous avons vu comment deux cadres théoriques de didactique des mathématiques prennent en compte le phénomène d'ostension. Nous allons maintenant tenter de comprendre pourquoi l'enseignement des mathématiques est particulièrement sujet aux pratiques ostensives, ce qui nous amènera à identifier une deuxième forme d'ostension dite « déguisée ».

3.3.2 Pourquoi l'enseignement des mathématiques se prête à l'ostension

La dialectique évoquée ci-dessus montrait déjà comment la nature de l'activité mathématique passe par l'association plus ou moins institutionnalisée d'objets sensibles avec les notions mathématiques. Nous allons proposer maintenant comment différentes conceptions des mathématiques prennent en compte la complexité du rapport des mathématiques au monde sensible.

3.3.2.1 Conceptions des mathématiques et de leur enseignement

Cherchant à expliquer l'efficacité des méthodes mathématiques en physique, Dominique Lambert (1996) recense plusieurs positions sur les rapports entre les deux sciences, positions qui diffèrent entre elles essentiellement de par la philosophie mathématique sous-jacente et impliquant une certaine conception de la nature de la connaissance mathématique. Nous décrivons ici la classification proposée par D. Lambert dans la mesure où nous supposons

1) qu'il existe chez les élèves professeurs une difficulté à prendre conscience de la représentation des mathématiques à l'œuvre dans leur enseignement.

2) que cette difficulté se manifeste notamment par une impossibilité d'utiliser des problématiques comme le mouvement et les grandeurs associées afin d'introduire les

concepts mathématiques, ces problématiques étant considérées comme relevant de la physique et donc comme des « applications [92]» des mêmes mathématiques.

Nous verrons également comment différentes conceptions évoquent le lien des mathématiques avec le monde sensible, soit lorsque ces conceptions choisissent de voir les mathématiques comme élaborées à partir du sensible, soit lorsqu'elles mentionnent la nécessité de rendre sensibles des concepts mathématiques. Nous serons cependant amenée à ne pas toujours adopter le choix fait par Lambert, dans la mesure où son questionnement est différent du nôtre.

3.3.2.1.1 Le « platonisme naïf »

Le platonisme naïf soutient l'existence d'un monde d'entités mathématiques « indépendantes ». L'activité des mathématiciens consisterait alors à les « découvrir » en recherchant les systèmes d'axiomes les mettant en évidence.

D. Lambert qualifie ce platonisme de « naïf » dans la mesure où il est en fait assez éloigné des propos de Platon, pour qui *« les mathématiques ont un statut de discours intermédiaire, médiateur qui permet de réarticuler le sensible et l'intelligible »* (Lambert, 1996). Nous ajouterons que ce platonisme naïf est de plus une position dont il est curieusement difficile de se défaire. Par exemple dans l'ouvrage constitué des dialogues entre A. Connes, mathématicien, et J.-P. Changeux, biologiste, le mathématicien semble souvent lui-même contraint par les propos du biologiste à affirmer son platonisme naïf :

> *Il existe indépendamment de l'homme une réalité mathématique brute et immuable. […] je dissocie donc la réalité mathématique de l'outil que nous avons pour l'explorer et j'admets que le cerveau est un outil d'investigation matériel qui n'a rien de divin, qui ne doit rien à une transcendance quelconque. Mieux on comprendra son fonctionnement, mieux on pourra l'utiliser.Mais la réalité mathématique n'en sera pas pour autant changée.*
> *(Changeux, J.-P. & Connes, A. (1989)*

Le platonisme ne peut selon Lambert expliquer la nature et l'efficacité des rapports entre les mathématiques et la physique, puisqu'il est fondé sur une séparation entre deux mondes. Il faudrait alors supposer, soit une *« harmonie préétablie qui aurait adapté*

[92] De nouveau, on peut parler plutôt d'illustrations.

miraculeusement les formes mathématiques », soit que la structure profonde du monde est précisément mathématique, et on retrouve ici le pythagorisme affirmant que l'essence de toutes choses est mathématique. Cette dernière position reste acceptable tout en soulevant deux questions. La première est liée au fait qu'un même concept mathématique peut décrire des phénomènes dont la nature reste cependant intrinsèquement différente, et la deuxième au fait que des concepts et théories mathématiques ne sont pas liés (actuellement) à une application dans le monde physique.

3.3.2.1.2 *Aristotélisme : un principe d'homogénéité*

Aristote témoigne dans le même temps d'une volonté de marquer une séparation entre les mathématiques et le sensible et d'un refus de leur donner un statut d'existence séparée ou même de discours médiateur.
Aristote propose de considérer les mathématiques comme *« le fruit d'un processus d'abstraction opéré sur le sensible »* (Lambert, 1996). N'ayant d'autre source que l'observation du monde sensible, elles le dominent tout en lui restant homogènes.
Si les mathématiques vues par Platon permettent de retrouver des réalités immuables « sous le sensible », les mathématiques d'Aristote sont une manière de caractériser les objets sensibles par les notions de grandeur et de continuité.

> *Nous voyons le mathématicien faire porter son étude sur des abstractions ; il considère en effet son objet en faisant abstraction de tous ses caractères sensibles, tels que la pesanteur et la légèreté, la dureté et son contraire, ainsi que la chaleur et le froid et tous autres couples contraires d'ordre sensible ; il conserve seulement la quantité et le continu à une, à deux ou à trois dimensions, avec les attributs de ces objets en tant qu'ils sont affectés de quantité et de continu, et il ne les étudie point sous d'autres rapports ; de certains de ces objets, il considère les positions relatives et les déterminations de celles-ci ; pour d'autres, il examine leurs rapports de commensurabilité et d'incommensurabilité ; pour d'autres encore ce sont les proportions.*
> *(Aristote, Métaphysique)*

Selon Lambert, cette position présente l'avantage de garder trace de l'origine empirique de certains concepts mathématiques, mais oublie que nombre de formalismes efficaces en physique n'ont pas été abstraits du sensible. On pourrait cependant continuer à y adhérer dans la mesure où ces nouveaux formalismes restent des développements et prolongements de théories initialement basées sur des considérations empiriques. Dans le cadre de notre étude, c'est peut-être aussi une des difficultés pour l'élève-professeur de (re)découvrir les bases parfois purement empiriques de théories jugées pourtant parfaitement formelles.

3.3.2.1.3 Philosophie kantienne

Kant définit les mathématiques par opposition à la philosophie :

> *La connaissance philosophique est la connaissance rationnelle par concepts et la connaissance mathématique est une connaissance par construction des concepts. Mais construire un concept, c'est représenter a priori l'intuition qui lui correspond. La construction d'un concept exige donc une intuition non empirique, qui par conséquent en tant qu'intuition soit un objet singulier, mais qui néanmoins, comme construction d'un concept doit exprimer dans la représentation quelque chose d'universel qui s'applique à toutes les intuitions possibles appartenant à ce concept.*
> *(Kant, 1781)*

Vues par Kant, les mathématiques trouvent de nouveau un statut de discours intermédiaire mettant ici en relation les concepts avec des représentations singulières constituées au moyen de l'espace et du temps, et dont on étudie les propriétés formelles qui se manifestent par une image (mentale ou empirique) ou par un groupe de symboles.

La médiation entre le sensible et les catégories *a priori* de l'entendement est réalisée par des « schèmes » ou « *représentation d'un procédé général de l'imagination pour procurer à un concept son image* ». Par exemple, la définition d'un concept mathématique constitue son schème conceptuel.

Dans cette vision kantienne des mathématiques le rapport des mathématiques au sensible, ou plus exactement aux objets phénoménaux, reste primordial :

> *… quoique tous ces principes et la représentation de l'objet dont s'occupe cette science, soient produits tout à fait dans l'esprit, ils ne signifieraient pourtant absolument rien, si nous ne pouvions pas toujours en montrer la signification dans les phénomènes (dans les objets empiriques) ;*
> *Aussi est-il indispensable de rendre sensible un concept abstrait, c'est-à-dire de montrer dans l'intuition un objet qui lui corresponde, parce que sans cela le concept n'aurait comme on dit aucun sens, c'est-à-dire aucune signification.*
> *La Mathématique remplit cette condition par la construction de la figure qui est un phénomène présent aux sens (bien que produit a priori). Le concept de la quantité dans cette même science cherche son soutien et son sens dans le nombre,*

> *et celui-ci dans les doigts ou dans les grains des tables à calculer, ou dans les traits et les points mis sous les yeux*
> *(Kant, 1781)*

Cette vision insiste de plus sur le lien des mathématiques avec l'espace et le temps, ce qui constitue à la fois leur potentialité à l'application en physique et leur limite de par une dépendance à la conception classique de ces notions.

3.3.2.1.4 Formalisme

Dans un premier temps c'est presque par définition que la philosophie formaliste (qui identifie les mathématiques à un langage formel composé d'énoncés et de règles de manipulation) ne peut convenir pour expliquer l'efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature.

Lambert souligne que le pouvoir prédictif des mathématiques en physique ne serait alors explicable qu'en faisant de nouveau l'hypothèse d'une harmonie préétablie et rappelle que la philosophie formaliste comporte un problème interne de complétude connu depuis Gödel. De plus l'observation de mathématiciens montrerait que ceux-ci « ont souvent recours à des représentations images riches de contenus empiriques », ce que Hilbert (1952) reconnaissait aussi comme nous l'avons vu précédemment

3.3.2.1.5 Constructivisme

Tel qu'il est défini par R Apéry (1982), le constructivisme rétablit le rôle des mathématiciens d'une part dans le développement des mathématiques, et, d'autre part dans l'acte de les partager

> *Selon la conception constructive, il n'y a pas de mathématique sans mathématicien. En tant qu'êtres de raison, les êtres mathématiques n'existent que dans la pensée du mathématicien et non dans un monde platonicien indépendant de l'esprit humain ; quant aux textes mathématiques, ils ne prennent un sens que par une interprétation qui exige un lecteur connaissant le langage utilisé par l'auteur du texte.*
> *(Apéry, 1982)*

En associant à cette position une nécessaire calculabilité des résultats potentiellement développables par les mathématiciens, Lambert la considère insuffisante pour aborder la question des liens entre les disciplines. Nous la conserverons cependant pour éclairer la problématique nous intéressant. En effet, le contexte de l'enseignement vise à faire construire une idée mathématique dans une situation impliquant deux êtres humains : l'un connaissant les mathématiques et l'un ne les connaissant pas.

3.3.2.1.6 Relationnisme

La position que D. Lambert nomme « relationnisme » voit dans les mathématiques une sorte de langage universel des relations. Elles permettent de décrire toutes les relations possibles entre différents concepts, ainsi qu'entre différentes mesures empiriques. C'est en cela qu'elles sont efficaces en physique, même si il reste mystérieux qu'elles rendent visibles certaines relations au moment précis où la physique en a besoin. Lambert objecte également que cette position réduirait les mathématiques à un outil de description alors qu'il existe de nombreux cas où elles sont aussi une explication de ce qui constitue le phénomène. Il parle de *« pensée du phénomène »* et dans le cadre de cette étude nous pourrions dire « les raisons du phénomène ». C'est la distinction que l'on retrouve chez Arsac (1996) entre une démonstration « rigoureuse » mais faisant perdre de vue le sens du théorème tandis qu'une explication donne les raisons du résultat en construction.

3.3.2.1.7 Naturalisme

Si le rôle de la pensée humaine est négligé dans la vision purement relationniste, le naturalisme part au contraire de l'hypothèse d'une interaction permanente entre le développement de l'homme dans son environnement et le développement des mathématiques. Celles-ci seraient alors le résultat d'une adaptation de l'être humain à l'univers, adaptation qui est permise par ses facultés cognitives. Il est aussi possible d'envisager que cette adaptation soit elle-même dirigée par une volonté humaine d'avoir prise sur l'univers, le rendre calculable pour le contrôler.

Comme le souligne Lambert, cette conception se retrouve dans des écrits « récents » liés à « l'épistémologie naturaliste » mais aussi chez Galilée[93] lorsqu'il affirme

[93] G. Galilei, « Dialogo II, Le opere di Galileo Galilei. Vol III, Firenze, Edizione Nazionale, 1890-1909, p. 298, traduit et cité par Lambert (1996).

« Au départ la Nature arrangea les choses à sa manière et, pas la suite, elle construisit l'intelligence humaine de telle manière qu'elle soit en mesure de la comprendre »

La perspective naturaliste rend donc une place active au mathématicien, contrairement au platonisme naïf et au formalisme, sans pour autant se limiter au constructivisme. En ce qui concerne le lien au sensible, elle ne définit pas les mathématiques comme une « extraction de formes à partir d'objets sensibles particuliers » selon l'empirisme aristotélicien, ni « à partir de formes rigides et a priori de la sensibilité » comme chez Kant, mais, en les regardant comme le résultat de la coordination d'actions élémentaires, cette vision naturaliste redonne aux mathématiques le contenu sensible qui serait perdu dans une perspective relationniste.

Si cette philosophie naturaliste a l'avantage de résoudre en partie la question des liens entre les disciplines, elle pose alors une autre question : les mêmes humains plongés dans un environnement différent auraient-ils vraiment développé des mathématiques différentes ? Rescher affirme que les concepts fondamentaux utilisés en mathématiques sont largement dépendants de notre environnement physique, et Lambert rappelle qu'il existe aussi une créativité interne aux mathématiques qui génèrent des concepts indépendants des domaines empiriques.

De nouveau, nous pourrions ici poser la question de la manière dont les élèves-professeurs admettent cette indépendance.

3.3.2.1.8 Représentations et styles d'enseignement

Dans le cadre de notre étude, nous devrons surtout prendre en compte la manière dont les représentations des mathématiques interagissent avec les représentations sur l'enseignement, pour aboutir à des pratiques qui peuvent être associées à une forme d'empirisme. On retrouve par exemple dans une étude du CREM publiée en 1995 une taxonomie des styles d'enseignement faisant intervenir des représentations des mathématiques. Treffers(1986) propose en effet de classer les manières d'enseigner les mathématiques en utilisant une double dichotomie. La première dichotomie décrit un point de vue horizontal ou vertical :

> *Le point de vue horizontal est celui qui s'occupe du contexte, des sources familières des maths, qui pousse aux observations, aux manipulations.*
> *Le point de vue vertical est celui de l'architecture déductive des mathématiques, des enchaînements d'axiomes, définitions, lemmes, théorèmes et corollaires, celui qui privilégie le sens interne aux mathématiques.*
> *(Crem, 1995)*

La deuxième va distinguer 4 styles selon la manière dont interviennent les deux points de vue définis précédemment.

> *L'enseignement est dit mécaniste s'il ne se soucie ni du point de vue horizontal ni du point de vue vertical. C'est le cas lorsque les élèves ont surtout à exécuter des calculs de routine selon les règles imposées, sans trop comprendre d'où ces règles sortent (pas de perspective verticale) ni quels phénomènes réels elles sont susceptibles de représenter ou d'expliquer (pas de perspective horizontale). […]*
> *Un enseignement est dit empiriste lorsque les élèves sont invités à beaucoup bricoler et observer mais pas souvent à organiser leurs observations ni à démontrer les propriétés étonnantes. L'enseignement court le risque de l'empirisme lorsque l'enseignant soit pense que les élèves sont capables de découvrir tout seuls les maths cachées dans les choses, soit au contraire sous-estime leur capacité à s'attaquer à la théorie, et les confine par conséquent dans des activités pratiques supposées plus accessibles.*
> *L'enseignement des maths modernes tendait plutôt vers le point de vue structuraliste : les enchaînements théoriques limpides et élégants étaient alors le souci principal.*
> *(Crem, 1995)*

L'enseignement dit « réaliste » est alors défini comme une sorte d'enseignement idéal qui permettrait d'articuler harmonieusement les deux points de vue.

Le plus important nous paraît ici l'identification de deux formes d'empirisme, à savoir 1) l'enseignant pense que les élèves sont capables de découvrir les mathématiques cachées dans les choses, et nous rajouterons que ces « choses » peuvent être des situations concrètes ou encore des ostensifs ; 2) l'enseignant sous-estime leur capacité à s'attaquer à la théorie, qui se traduit par exemple par un refus de chercher à leur expliquer « ce qu'ils verront plus tard », en fait une forme de refus d'élaborer un discours technologique puisque la théorie viendra après. C'est vraisemblablement la conjonction de ces deux formes d'empirisme qui aboutit à l'absence d'un discours technologique dans le secondaire.

3.3.2.1.9 Empirisme et rationalisme : deux visions de l'apprentissage

Dans un cours de pédagogie, M. Crahay (1999) décrit les positions empiriste et rationaliste dans leurs conséquences sur les conceptions de l'apprentissage et donc de l'enseignement.

Le rationalisme suppose que l'homme peut apprendre parce qu'il est doué de raison. Des perspectives rationalistes dans l'enseignement et l'apprentissage exploiteraient le fait que les perceptions peuvent nous duper et que « *seul le raisonnement pur conduit de façon sûre à des connaissances valides* (Descartes, 1637) ». Leur mise en œuvre consisterait à « *remplacer les réponses de convenance par des convictions profondes* » (Crahay, 1999).

Mais nous sommes revenue à la question de savoir comment développer ces convictions profondes et sur quoi les fonder.

Est-ce par l'intuition ? Aebli (1966) montre déjà comment les méthodes, dites intuitives[94], reposent en fait sur des postulats empiristes en prenant l'exemple de l'enseignement des fractions ordinaires. Cet enseignement consiste souvent en la présentation de représentations diverses (gâteau coupé en plusieurs tranches, cadran d'une montre divisé en plusieurs secteurs, fenêtre se composant de plusieurs vitres) qui sont supposées s'imprimer dans l'esprit qui passerait alors à la notion générale de fraction par un processus d'abstraction.

L'empirisme souligne l'importance de l'expérience sensible. Dans ce cas, l'homme peut apprendre parce que l'esprit reçoit des informations (sensations) venant de l'extérieur. C'est une vision empiriste de l'apprentissage qui donnera les théories dites sensualistes. Not (1988) résume la psychologie sensualiste-associationniste par quatre idées principales :

* les perceptions se prolongent purement et simplement en représentations ;
* la pensée correspond essentiellement à l'accumulation d'images ou d'informations verbales ; celles-ci sont le produit direct de la réception d'informations venant de l'extérieur ou de la copie d'objets ou d'événement perçus de l'extérieur ;

[94] Les entretiens montrent effectivement une volonté de faire appel à l'intuition, de « faire sentir intuitivement », alors qu'il s'agit de « montrer ».

* la perception de l'enfant est identique à celle de l'adulte ;

* la structure synthétique ou finale des processus mentaux est conforme à l'ordre naturel de présentation de ces composantes : on va du simple au complexe.

3.3.2.2 Une conséquence : l'ostension déguisée

Même si les premiers apprentissages en mathématiques partent de l'étude du monde sensible[95] (les solides et les grandeurs par exemple), nous ne pouvons pas toujours faire l'expérience, au sens d'intuition sensible, d'un objet mathématique : ainsi peut-on présenter la représentation graphique d'une fonction mais jamais la fonction elle-même. Pourtant, nous disons souvent « je prends une fonction » en traçant une courbe. La relation entre l'objet et une représentation est donc plus complexe qu'une simple correspondance.

Au niveau de la géométrie, la perception des rapports entre les mathématiques et le sensible, n'est pas toujours facile et en particulier pour les élèves : il n'est pas rare de rencontrer quelques confusions entre les objets de la géométrie (point, droite, plan) et la représentation (sensible) qui peut en être faite. Le point mathématique est « ce qui n'a pas de partie » tandis que toute représentation sensible ressemblera à « une toute petite tache, vraiment très petite » ou « un rond à peine visible », pour reprendre des propos d'élèves. En conséquence, la représentation sensible possède à la fois un caractère nécessaire[96] et un caractère erroné. En particulier, le fait de représenter graphiquement les résultats d'analyse aide certainement à leur compréhension mais alors « pourquoi démontrer ce qui se voit sur la figure ? ».

---

[95] Par exemple, pour R. Douady (1992) : *«le début de l'enseignement des mathématiques correspond à une modélisation du réel : l'espace ambiant et les objets déplaçables.L'enfant peut agir sue le monde réel et le modifier, sans être capable d'en avoir une vision globale instantanée. Un des rôles des représentations est de rendre compte de cette globalité en ne prenant qu'une partie bien choisie de l'information de façon à en avoir une disponibilité permanente. Ce faisant on attache aux signifiés primitifs ('objets réels) des signifiants (représentations, relations,…) Aux traces écrites de ces signifiants sont attachés de nouveaux signifiés d'un nouvel espace, celui des représentations. »*

[96] C'est la seule représentation sensible qui nous incite à accepter le cinquième postulat d'Euclide comme vrai parce que nécessaire. Mais l'introduction aux géométries non euclidiennes passe aussi souvent par « une tentation du sensible » en représentant une sphère, de même que les nombres complexes ne seront acceptés qu'à partir de la possibilité de leur associer une signification géométrique.

3.3.2.2.1 L'ostension assumée comme forme d'empirisme

D'après Salin et Berthelot (1992), la présentation ostensive, ou ostension, est une conséquence logique de la conception empiriste de la formation des connaissances. Elle peut être « assumée », par exemple dans les instructions officielles et les manuels des années 1970 en France préconisant le développement des savoirs spatio-géométriques par l'observation, ce qui amène à trouver des leçons comme celle qui suit portant sur le rectangle :

> *En haut de la page, un rectangle ABCD est dessiné. Le texte suivant l'accompagne : j'observe cette figure. Elle a 4 côtés et 4 angles. Les côtés AB et CD mesurent 4 cm. Les côtés AD et BC mesurent 3 cm. Les angles sont droits. La figure ABCD est un rectangle. Les grands côtés AB et CD s'appellent les longueurs. Les petits côtés AD et BC s'appellent les largeurs. Le rectangle a 2 longueurs égales, 2 largeurs égales et 4 angles droit.*

Dans une telle approche, « l'ostension » d'un cas particulier résolu, où l'enseignant donne *« tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée »* (Ratsimba-Rajohn, 1977), est donc censée suffire pour que les élèves reconnaissent ensuite la procédure dans d'autres exercices, sur des critères qui dépendraient donc essentiellement de la forme. D'après Berthelot et Salin, la présentation ostensive des savoirs spatio-géométriques ne permet pas de présenter ces savoirs comme des outils pour résoudre un problème, ce qui empêche d'identifier l'apport du savoir à la maîtrise du réel : quelle est l'utilité de ce savoir à propos du rectangle ? De plus, le milieu est toujours remplacé par un milieu symbolique sans garantie que le concept visé fonctionne de la même manière dans les deux milieux.

3.3.2.2.2 L'ostension déguisée comme combinaison d'empirisme et constructivisme

Dans leur thèse, Berthelot et Salin décrivent ensuite une autre forme d'ostension, apparue d'après eux sous l'influence du constructivisme. Dans leur analyse, cette influence n'aurait pu avoir que des conséquences « de surface », générant alors une *« forme déguisée d'ostension».* Dans l'ostension assumée, c'est le maître qui montre à l'élève ce qui est à voir, tandis que dans l'ostension déguisée, le maître fait croire à l'élève qu'il découvre le savoir sur les figures soumises à son observation. L'analyse de textes officiels montre en général une juxtaposition des mots « observer » et « construire », vue par Berthelot et Salin comme reste de la conception empiriste et platonicienne de la formation des concepts géométriques. C'est ce qu'on observe de plus en plus dans la suggestion d'activités diverses accompagnées des objectifs *« on dégagera, on fera constater, on mettra en évidence,… »*

L'analyse de plusieurs manuels et leçons met aussi en évidence quelques changements qui sont autant de manifestations de l'ostension déguisée, dont

1) déléguer l'ostension à un bon élève après une phase de recherche ;

2) la transformation des exercices passés de « regarde cette figure » à une recherche suivie de « que peux-tu dire de… » ou « que constates-tu ? ». Nous pourrions en décrire une forme presque caricaturale dans le cas de la leçon sur le rectangle vue plus haut : on donne toujours le dessin du rectangle, on demande de le décrire et …….on en déduit les même phrases.

Cette ostension déguisée comporte plusieurs pièges. Tout d'abord l'obligation pour le maître de « fabriquer »[97] le milieu pour rendre visibles les propriétés cherchées. En fait on rend sensible ce qui ne l'est pas[98], souvent au détriment du caractère fondamental du savoir visé. Un deuxième piège consiste dans la nécessité d'avoir de multiples interventions, nécessité due à ce que cette situation génère finalement une plus grande distance entre le maître pour qui c'est évident et l'élève « qui ne voit rien ». Cette distance et ces interventions multiples génèrent alors un paradoxe appelé « effet Dienes » par Brousseau :

> *Plus l'enseignant désire que ce soit l'élève qui découvre les connaissances, plus celui-ci est incité à s'appuyer sur la convention didactique et plus il est abandonné à lui-même quant à l'établissement de ces connaissances.*
> *(Brousseau, 1995)*

Toujours d'après Salin, l'ostension déguisée est de plus porteuse d'un effet Topaze dans la mesure où

---

[97] F. Jaulin-Mannoni (1975) mentionne que cette fabrication aboutit presque toujours à un milieu « préstructuré » par , et pour, les connaissances du professeur .

[98] Par exemple, la tangente rend visible le nombre dérivé.

> *Le professeur obtient la réponse attendue par une manipulation des questions pouvant aboutir à l'évacuation complète du savoir.*
> *(Salin, 1999)*

C'est par exemple ce qui se passe lorsque la notion de limite est « déduite » après avoir complété et observé des tableaux comme :

x	-1	-0,1	-0,01	-0,001	…	0	…	0,001	0,01	0,1	1
$\frac{1}{x}$	-1	-10	-100	-1000	…	/	…	1000	100	10	1

L'observation est alors accompagnée, après la question d'usage, de « On voit que f(x) prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque x s'approche de 0, ce qui s'écrit $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$. » Et si l'élève ne voyait rien dans les « … » ?

En conclusion l'ostension déguisée repose sur trois illusions :

> *Illusion de l'évidence, illusion d'un répertoire commun au professeur et à l'élève, illusion d'un continuum entre connaissance quotidienne et savoir scientifique.*
> *(Fregona, 1995)*

En particulier, elle se présente bien comme prenant la place d'un discours technologique dont nous avons vu qu'il est susceptible d'expliciter la médiation entre connaissance quotidienne et connaissance scientifique.

3.3.2.2.3 La persistance et les fonctions des pratiques ostensives

Alors que les risques de l'ostension en mathématiques ont été identifiés assez vite, de nombreux auteurs constatent la persistance des pratiques ostensives, comme Salin (2002) et Matheron et Salin (2002). On dit même que « l'ostension capture les autres procédés didactiques ». Rappelons que l'ostension est presque une forme spontanée de communication, ce qui implique pour l'enseignant (mais aussi pour les élèves !) une volonté réelle de rechercher un autre type d'interaction de connaissances. Nous allons résumer ici d'autres motivations de l'ostension déguisée, à savoir le compromis entre différentes contraintes mais aussi la possibilité de construire une mémoire pratique. Enfin, nous proposerons une troisième motivation en suggérant que l'ostension déguisée peut aussi être une réponse à la difficulté d'élaborer un discours technologique dans le cas de l'analyse, plus spécifiquement la dérivée et le critère de croissance.

Salin (2002), propose d'envisager l'ostension déguisée comme un compromis entre une vision empiriste, des politiques « constructivistes » et l'absence de remise en question d'autres problématiques caractérisant la relation didactique :

> *Ceci conduit le système d'enseignement à rejeter l'ostension assumée sans toutefois remettre en question les trois contraintes de base de toute situation didactique relatives au contrôle du savoir, à celui des erreurs et celui du temps didactique. L'ostension déguisée apparaît alors comme une situation de compromis entre des exigences dont la compatibilité n'a pas été étudiée. Elle laisse l'enseignant maître du jeu, tout en prenant en compte une partie de l'activité de certains élèves.*
> *(Salin, 2002)*

Fregona (1995) propose de considérer que « *tout enseignement est caractérisé par la recherche d'un équilibre entre deux types de contrat didactique à propos du milieu : le contrat d'ostension opposé à l'implication effective* ». Fregona analyse également en quoi l'ostension est une réponse économique dans la gestion de l'enseignement. En effet, le contrat d'implication effective nécessite des connaissances didactiques extrêmement précises en l'absence desquelles l'enseignant n'arrive pas à gérer jusqu'au bout le contrat d'implication effective qui se transforme peu à peu en contrat d'ostension. C'est en ce sens que l'ostension se révèle être un compromis soit délibérément choisi, soit généré comme transformation inévitable d'autres contrats.

Matheron et Salin (2002) se demandent si il faut « *réhabiliter les pratiques ostensives dans l'enseignement des mathématiques* » en montrant le jeu entre ostension et mémoire, ainsi que les fonctions que ce jeu permet d'assurer au sein du processus d'enseignement. Si la mémoire du savoir est externe et déposée dans des oeuvres mathématiques, donc accessible, « *la mémoire pratique doit pour son objectivation être « donnée à voir » par l'intermédiaire d'une production perceptible de la personne* ». L'ostension vise ici à produire une mémoire institutionnelle en permettant à l'objet montré d'être versé officiellement au compte de la mémoire commune.

Nos observations auprès d'élèves-professeurs, ainsi que les paragraphes précédents, nous amènent à envisager une autre fonction de l'ostension : remplacer le discours, plus précisément le discours technologique[99]. Ayant observé la préférence des élèves-professeurs pour une stratégie relevant de l'ostension déguisée lorsqu'ils doivent enseigner la dérivée ou le critère de croissance[100], il nous semble en effet que ce n'est pas seulement un problème d'épistémologie personnelle des professeurs, ou un compromis avec la gestion de classe (à laquelle ils n'ont pas encore été confrontés) mais aussi le fait qu'ils soient « aussi démunis » que leurs élèves en termes de discours et d'argumentation non théoriques.

Toutefois, ce dénuement nous paraît aussi associé à une impossibilité d'identifier les différents niveaux de rationalité, impossibilité peut-être due à une combinaison des représentations sur les mathématiques et sur l'enseignement en général, comme nous allons le voir dans la section suivante.

3.3.2.3. Représentations des enseignants de mathématiques

Constatant une sorte de « dénaturation » systématique par les enseignants des projets proposés par des chercheurs en didactique des mathématiques, A. Robert (1989) en déduit l'existence de fortes représentations, même implicites, chez les enseignants. Devant rester stables pour l'équilibre individuel, ces conceptions pourraient aussi expliquer à un niveau plus collectif l'échec d'expériences de formation comme la résistance aux changements.

Portant sur « la bonne manière d'apprendre les mathématiques» et sur des réponses aux questions « qu'est-ce que les mathématiques, à quoi elles servent, comment les faire apprendre, que veut dire apprendre des mathématiques ? » ces conceptions « passeraient à l'acte » dès que l'enseignant est dans une position correspondant aux marges de manoeuvre qui lui sont laissées par les institutions, soit 1) l'organisation des contenus et activité ; 2) le discours tenu pendant la classe.

Pour la notion de « représentation » nous reprendrons la définition qu'A. Robert emprunte à J.C. Abric :

---

[99] C'est en fait proche de l'impossibilité de s'engager dans une implication effective.

[100] Par exemple par l'utilisation du schéma « à sécante mobile » et par une accumulation de tableaux à remplir censés induire la vision d'une convergence par l'intermédiaire de questions répetées.

> *La représentation est le produit et le processus d'une activité mentale par laquelle un individu ou un groupe reconstitue le réel auquel il est confronté, et lui attribue une signification spécifique. [..] Cette signification résulte directement des attitudes et des opinions, conscientes ou non-conscientes, développées par l'individu ou le groupe. La représentation est donc un reflet non pas de l'objet lui-même mais des relations complexes que le sujet entretient avec cet objet. Ces relations font de la représentation un système symbolique organisé et structuré dont la fonction essentielle est l'appréhension et le contrôle du monde par le sujet, en lui permettant de le comprendre et de l'interpréter. Par là, la représentation permet l'adaptation du sujet et elle sera un élément essentiel pour guider ses comportements.*
> *(Abric, 1987)*

Abric propose de considérer les représentations comme constituées de trois éléments :

1. un noyau central, dépendant « *des caractéristiques individuelles du sujet et en particulier de la nature de son implication avec l'objet de la représentation et de ses attentes ; des caractéristiques plus proprement sociales de l'objet, c'est-à-dire sa relation avec les normes et valeurs du système social dans lequel il baigne ; de la finalité de la situation dans laquelle s'inscrivent le sujet et l'objet, et des objectifs explicites ou implicites du sujet qui élabore la représentation* » ;
2. un ensemble d'informations, d'attitudes et de croyances organisé autour de ce noyau ;
3. et un système de catégorisation, qui « *permet la cohérence interne de la représentation et surtout le maintien dans le temps de cette cohérence* ».

Abric laisse d'abord peu de possibilités à une évolution des représentations :

> *Dans la mesure où ces représentations sont des états organisés, stables et relativement équilibrés, toute transformation de l'un des éléments de la relation, sujet ou environnement, entraîne une transformation de la représentation dans le sens du rétablissement de l'équilibre ainsi compromis. C'est pourquoi toute transformation de la représentation portera prioritairement sur la transformation des éléments périphériques, sans que le noyau central soit remis en cause. Car la remise en cause du noyau central entraînerait une transformation complète de tout le système, un bouleversement complet de l'univers d'opinions du sujet. L'évitement de cette remise en cause, comme le principe d'économie qui régit la plupart des phénomènes cognitifs, interdisent donc une transformation du noyau central tant que les éléments nouveaux peuvent être intégrés au prix d'une transformation mineure des éléments périphériques.*
> *(Abric, 1987)*

C'est sans doute ce qui explique que des formations basées sur des cours théoriques restent insuffisantes. Un accord « mental » sur les idées développées ne se traduit pas forcément par un changement dans les pratiques effectives et c'est même ce que l'on constate depuis le début des recherches menées en didactique des mathématiques dont la diffusion ne semble pas modifier ce qui se passe sur le terrain.
A. Robert en déduit donc que :

> *si on admet que c'est sur le noyau central qu'il faut agir, et en particulier au moment de sa formation, donc de la décontextualisation du réel, et si on admet que ce noyau a une composante personnelle et une composante sociale inaccessibles pour nous, il ne reste qu'à intervenir sur les composantes épistémologiques et pédagogiques.*
> *(Robert, 1989)*

Sa conclusion nous paraît donc rejoindre celles déjà exprimée dans le Chapitre 2 par J. Briand et I. Bloch sur la nécessité de replacer les élèves-professeurs dans des situations qui soient a-didactiques pour eux. Elle conclut en effet :

> *Il nous semble que s'il y a un accès privilégié aux représentations des futurs enseignants c'est par l'activité mathématique elle-même [les interventions de type discours n'étant pas suffisantes] restent donc les interventions de type mise en situation et action.*
> *(Robert, 1989)*

Toutefois, il nous faudra alors tenter de savoir si la pratique d'une activité a-didactique permet l'élaboration effective d'un discours technologique et comment le niveau de rationalité de ce discours est reconnu.

3.4 Niveaux de rationalité et praxéologies

3.4.1 Sur le discours technologique

Nous pourrions tenter de résumer le parcours des sections précédentes en disant que le discours technologique, tel que défini par Chevallard, est aussi difficile à élaborer qu'il est essentiel, et ce à cause de sa nature qui nous paraît intrinsèquement relever d'une fonction de médiation.
On en trouve d'ailleurs peu d'exemples. Citons ceux destinés à illustrer la notion dans un cours sur la TAD.

> *Ce discours vise à justifier rationnellement la technique en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T, c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu. Dans une institution, la technique est toujours accompagnée au moins d'un embryon ou plus souvent encore d'un vestige de technologie. En nombre de cas, certains éléments technologiques sont intégrés dans la technique. Par exemple dans le petit discours suivant en arithmétique élémentaire : si 8 sucettes coûtent 2 euros, 24 sucettes, soit 3 fois 8 sucettes, coûteront 3 fois plus, c'est-à-dire 3 fois 2 euros.*
> *Une deuxième fonction est d'expliquer, de rendre intelligible, d'éclairer la technique, c'est-à-dire d'exposer pourquoi la technique permet de réaliser ce qui est attendu.*
> *Une troisième fonction consiste en la production de techniques. Par exemple, la technologie des nombres fractionnaires permet d'engendrer une technique qui surclasse celle vue précédemment pour les sucettes : si a choses valent b francs, alors x choses, c'est-à-dire x/a fois a choses vaudront x/a fois b francs.*
> *À son tour, le discours technologique contient des assertions, plus ou moins explicites dont on peut demander raison et ce sera le rôle de la théorie qui prend alors souvent dans le secondaire une forme « évanouissante », traitée par simple renvoi à une autre institution, réelle ou supposée, censée détenir une telle justification : « on démontre que…. ».*
> *(Pressiat, 2002)*

Citons aussi l'exemple d'un discours géométrique (Matheron & Noirfalise, 2005) pour les identités remarquables, discours allant au-delà de habituelle illustration. On peut aussi lire dans (Matheron, 2000) comment l'analyse des différentes organisations possibles de contenus géométriques amène à conférer le statut de discours à certains des résultats concernés.

Il semble donc que la présence et la nature du discours technologique dépendent de l'institution. En particulier, le fait qu'une technique canonique soit seule reconnue et employée dans une institution lui confère une vertu auto-technologique, comme c'est le cas pour le calcul algébrique. Mais en l'absence de discours technologique, les élèves peuvent alors parvenir à une certaine maîtrise des techniques fournies, sans pour autant savoir pourquoi ces techniques fonctionnent. Comment alors leur demander d'utiliser de manière autonome ces techniques dans un autre contexte ? Puis de les enseigner ?
Dans le cas de l'algèbre, l'absence de discours va se manifester par exemple lorsque les préparations de leçons sur les systèmes sont majoritairement consacrées à tenter de

justifier le « principe d'équivalence ». Mentionnons aussi le cas du professeur à qui ses nouveaux élèves demandent si il utilise la même règle que le professeur précédent :

> *When one of my former students gave his first lesson to a school class, they asked him whether it was his rule, too, that expressions moved from one side of the equal-sign to the other should change their sign, as it had been with the former teacher.*
> *(Freudenthal, 1973)*

Si la règle ne suffit pas à donner les raisons d'une technique, notre question porte donc sur l'élaboration d'un discours qui puisse remplir les fonctions attendues du discours technologique, et dont nous avons montré qu'il devrait se situer comme médiateur entre la rationalité quotidienne et la rationalité scientifique, entre la rationalité personnelle et la (ou une) rationalité culturelle.

Quelle forme peut en effet prendre un discours qui ne soit plus une preuve *« par l'empirisme naïf ou par l'expérience cruciale »* (Balacheff, 1988), et qui soit déjà *« une preuve intellectuelle [qui] établit le caractère nécessaire de la validité [d'une proposition] en dégageant des raisons »* (Balacheff, 1988) ?

Une des questions que nous avons soulevées en présentant la notion de cadre de rationalité consistait dans le statut d'un cadre spécifique : le cadre correspondant au travail en classe. A. Lerouge le classait au même niveau que le cadre culturel de la discipline, tandis que nous l'envisagions comme un cadre de type personnel, mais étendu à la classe et dont on explicite les processus de validation. Cela nous semble en effet plus propice à prendre en compte le type de questionnement qui peut être observé, par exemple, dans le cadre du débat scientifique ou dans la thèse de M. Schneider (1988).

Le niveau de rationalité du travail en classe peut donc être une adaptation du niveau correspondant à la théorie, ou une construction intellectuelle basée sur le niveau personnel. Est-ce la même chose ?

Pourtant ce discours médiateur en tant qu'organisation «temporaire » de conceptions et de processus, est reconnu par les mathématiciens. En effet, la réflexion sur la notion de rigueur nous montrait que la formalisation est reconnue comme un processus aboutissant à la théorie (Arsac, 1997), elle-même précédée par une phase dans laquelle co-existent des raisonnements de différents niveaux de rigueur et enfin suivie par une phase où la théorie n'est plus remise en question, cette dernière phase étant même décrite comme un changement de génération. (Dieudonné, 1984). L'existence de raisonnements « imparfaits » ou « incomplets » est donc en général admise, soit sur le plan du développement historique, soit sur le plan des pratiques expertes de mathématiciens (Rogalski, 1997). C'est donc plutôt sa transposition dans l'institution « enseignement » qui est beaucoup plus difficile à définir. Les positions oscillent entre *« accepter d'enseigner aux élèves des résultats que l'on en peut pas leur prouver »* (Perrin, 1997) ou chercher à *« faire passer auprès des élèves cette méthode de formalisation simplificatrice »* (Rogalski, 1997). Mais l'absence d'identification plus précise des modalités et des mécanismes de cette transposition risque, selon Chevallard (1997), de conduire à confondre la volonté de *« ne pas leur demander de prouver des propriétés perçues comme évidentes »* avec

> *La confusion largement répandue entre le système mathématique ou extra-mathématique à modéliser et le système mathématique par lequel on prétend le modéliser.*
> *(Chevallard, 1997)*

3.4.2 Deux types de praxéologies

C'est à partir de cette dialectique entre le système à modéliser et le modèle qui en est proposé, précisée par exemple dans Chevallard (1989), que M. Schneider (2007) propose de distinguer entre deux types de praxéologies, à savoir celles de type 1 et celle de type 2. Et cette distinction nous permettra d'identifier plus précisément deux niveaux de rationalité comme éléments d'analyse pour la suite de notre étude.

Un premier type de praxéologie décrit le travail allant du système au modèle. Il peut correspondre à la notion d'îlot de rationalité, ou plutôt du cadre de rationalité « de type personnel étendu à la classe avec explicitation des processus de validation ». Pour réaliser certaines tâches portant sur des objets mentaux, des techniques sont développées ainsi que des argumentations dont la nature reste proche des objets (on utilisera par exemple une argumentation de type cinématique pour une tâche relative à un problème de vitesse variable), et dont la fonction sera de convaincre que l'objet mathématique en construction correspond bien à l'objet mental. Dans une praxéologie de type 1, il faudra par exemple valider le fait que le calcul particulier effectué produit bien un résultat conforme à la conception que l'on a de la vitesse instantanée. Lisons la description qu'en fait plus généralement M. Schneider :

> *Le premier type de praxéologies concerne la modélisation mathématique de systèmes constitués d'objets que l'on peut considérer comme des objets préconstruits au sens d'Y. Chevallard (1991).*
> *[..]*
> *De fait, et mes travaux en analyse l'ont largement montré, il ne faut pas négliger une phase d'apprentissage au cours de laquelle, les objets préconstruits, existant d'abord par le truchement d'une désignation, se mettent à exister par le truchement d'une définition au sein d'une théorie, cette définition donnant prise à une organisation véritablement déductive. Et ce serait là le rôle des praxéologies de type 1.*
> *Précisons les ingrédients de telles praxéologies au moyen de quelques exemples. En analyse, il s'agira de déterminer des objets préconstruits tels que des aires, des volumes, des vitesses variables, des tangentes en un point d'une courbe. En géométrie analytique à 3 dimensions, ces objets seront des points, des droites, des plans qui sont, à un certain stade du cursus, des objets tantôt préconstruits, tantôt définis par des axiomes au sein de la géométrie synthétique déjà constituée comme théorie axiomatique. Les techniques sont les modes de détermination ou de modélisation « standard » de tels objets : dans le cas de l'analyse, le calcul des limites dans un état embryonnaire comme techniques consistant à supprimer des éléments de calcul, au moment opportun et sans jeu de compensations comme en algèbre, ou encore, le calcul plus performant des dérivées et des primitives. En ce qui concerne la géométrie analytique, je pense aux caractérisations paramétriques, cartésiennes et vectorielles des droites et des plans. Comme ces objets n'existent pas encore comme objets d'une théorie et que le but est précisément de les constituer comme tels, le discours qui justifie ces techniques et les rend intelligibles eu égard à la tâche visée ne peut être théorique, au sens où l'entendraient des mathématiciens. Et, c'est ce qui rend nécessaire, me semble-t-il, l'existence d'un niveau de discours qu'Y. Chevallard appelle discours technologique. Dans nos exemples, il s'agira de justifier qu'un calcul de limite fournit bien la valeur exacte d'une aire curviligne ou d'une vitesse instantanée, contrairement à l'intuition « commune » qui se constitue en obstacle épistémologique ainsi que je l'ai montré. Il s'agira aussi de « justifier » telle ou telle caractéristique algébrique de la droite ou du plan dans l'espace à partir de caractéristiques proprement géométriques, par exemple, le fait qu'un plan est déterminé par deux droites sécantes, et/ou de savoirs propres à la géométrie analytique du plan.*
> *[..]*
> *Au terme de telles praxéologies, les préconstruits se constituent en concepts mathématiques par le truchement d'une définition pour se prêter à une théorie déductive : les aires sont définies comme intégrales définies, les vitesses comme des dérivées et les plans comme lieu de points dont les coordonnées vérifient une équation cartésienne ou un système particulier d'équations paramétriques.*
> *(Schneider, 2007)*

Dans le cas de l'analyse, une telle praxéologie pourra être appelée « praxéologie des grandeurs » (Job & Schneider, 2007). Nous l'utiliserons par la suite comme une rationalité de niveau I.

Les praxéologies de type 2 ont quant à elles pour tâche la constitution d'une organisation déductive et autonome en termes d'outils de preuve :

> *Entrent en jeu alors les praxéologies de type 2 dont les tâches diffèrent considérablement de celles des praxéologies de type 1. Elles sont en effet propres à la constitution d'une organisation déductive. Il s'agit de reformuler certains concepts pour en faire des proof-generated concepts au sens d'I. Lakatos, l'exemple typique étant celui du concept de limite, formulé en termes de quantificateurs et d'inégalités et inspirant un modèle de preuve faisant abstraction de toute considération géométrique ou cinématique. Il peut s'agir aussi de déduire tel résultat théorique d'axiomes et/ou de théorèmes antérieurement démontrés, d'établir un système d'axiomes « simple » et non redondant, de conjecturer un ordre d'agencement des théorèmes, etc. Les techniques sont à la fois des règles d'inférence du calcul propositionnel et de celui des prédicats telles que le modus ponens et le modus tollens mais aussi des techniques de réfutation comme celle qui consiste à chercher le « lemme coupable », au sens d'I. Lakatos, dans une inférence invalide. Quant à la théorie, il s'agit en quelque sorte d'une théorie des théories ou ce que K. Popper appelle « la logique de la connaissance scientifique » qui soulève des questions épistémologiques concernant la nature des concepts scientifiques, la falsifiabilité des théories, le problème méthodologique de la simplicité, la hiérarchie des disciplines scientifiques, le refus du mélange des genres dans l'établissement de la causalité, … On peut aussi y trouver la théorie des preuves et réfutations d'I. Lakatos.*
> *(Schneider, 2007)*

Une praxéologie de type 2 sera pour nous l'analyse réelle formalisée, correspondant à un niveau de rationalité culturelle. Nous l'utiliserons par la suite comme rationalité de niveau II.

Le jeu entre les cadres de rationalité de niveaux différents peut alors être décrit comme suit :

> *[.] s'il peut y avoir interpénétration entre les deux, c'est au niveau des tâches ou des techniques mais pas à celui des discours qui valident les secondes en regard des premières. En général, les tâches des praxéologies de type 1 deviennent des applications des théories résultant des praxéologies de type 2.*
> *[..]*
> *Et ce sont les techniques des premières praxéologies qui définissent les objets premiers de ces mêmes théories. Par contre, les praxéologies de type 1 autorisent*

> *des modes de validation plus pragmatiques qui seront récusés dans les secondes, tel celui qui consiste à tester la pertinence d'une technique nouvelle pour résoudre un problème dont la solution est déjà connue par ailleurs.*
> *(Schneider, 2007)*

C'est effectivement la dialectique outil-objet qui permet l'articulation. Dans notre cas, les grandeurs sont outil dans une praxéologie de type 1 et objet dans une praxéologie de type 2 :

> *Les grandeurs sont définies, d'entrée de jeu, par le biais du concept de limite. On assiste donc là à une sorte de renversement que nous considérons comme un des aspects majeurs de la dialectique « outil/objet » de R. Douady (1984) : des techniques permettant de déterminer des objets « préconstruits » deviennent, par le biais du concept formalisé de limite, des procédés de définition de ces mêmes objets qui n'existent plus que par le truchement des définitions ainsi produites.*
> *(Job & Schneider, 2007)*

Alors, comme l'a montré M. Schneider (1988), le travail dans le cadre de niveau 1 peut

> *…constituer, pour les élèves, une première césure entre une appréhension exclusivement empirique des grandeurs et une prise de conscience que des concepts sont des constructions intellectuelles, à la fois en rupture par rapport à cette empirie et permettant de la transcender.*
> *(Job & Schneider, 2007)*

Nous pouvons donc préciser les objectifs de notre question d'étude en cherchant comment se manifestent les niveaux de rationalité I et II et quels sont les discours qui peuvent leur être associés dans l'histoire de la dérivée et dans les transpositions qui sont proposées (Chapitre 4), puis dans les pratiques et discours des élèves-professeurs (Chapitre 5 et 6).

Chapitre 4

Le thème de la dérivée

et ses transpositions

Ayant d'abord exploré comment la spécificité de la formation initiale pouvait expliquer les difficultés constatées, cette investigation nous a confortée dans le sentiment que ce changement de posture d'étudiant à professeur était d'abord un changement de posture par rapport au savoir mathématique, changement que nous avons choisi d'étudier plus profondément sur un thème *a priori* significatif, à savoir le concept de dérivée et son association avec la notion de tangente. Dans le Chapitre 1 nous avons indiqué comment nous avons été conduite à choisir ce thème dans le domaine de l'analyse, d'une part pour expliquer les difficultés constatées dans les préparations de leçons correspondantes et, d'autre part, pour la particularité du thème sur le plan mathématique. L'association des concepts de dérivée et tangente constitue en effet presque un objet en soi, objet appartenant à différents domaines des mathématiques et à plusieurs cadres de rationalité dans lesquels la dérivée et la tangente jouent des rôles différents mais interchangeables. Ayant donné un aperçu de ce curieux échange des rôles dans les travaux des élèves-professeurs, nous allons dans ce chapitre chercher à en comprendre les origines dans l'histoire et à en analyser les manifestations dans les transpositions proposées dans les différentes institutions.

Dans une première partie (4.1), nous rappellerons la nécessité d'inclure dans notre étude un questionnement du savoir et de sa transposition, et appuierons notre choix en exposant le problème du statut particulier de la tangente comme « objet mental » et en faisant référence à des difficultés d'apprentissage identifiées dans d'autres recherches.

La deuxième partie (4.2) développera une analyse des problématiques associées à la co-construction dans l'histoire des notions de tangente et dérivée. L'objectif sera d'identifier à la fois les contributions d'autres domaines comme la géométrie et la cinématique[101], et les changements de statut des objets tangente et dérivée.

La troisième partie (4.3) donnera des exemples volontairement contrastés de transpositions didactiques du thème « dérivée, tangente et variations». Selon la dialectique système/modèle présentée dans le chapitre précédent, nous chercherons à identifier quelle part du travail est consacrée à l'articulation du couple système/modèle, et quelle part concerne plutôt le modèle travaillé « en autonomie ». Pour cela nous analyserons les activités proposées ainsi que les discours qui les accompagnent. Ceci nous amènera en particulier à l'identification d'une transposition devenant majoritaire et que nous appellerons « une praxéologie à trous », c'est-à-dire une version édulcorée du discours proprement théorique proposée en lieu et place d'un discours réellement technologique.

En replaçant cette analyse dans une perspective institutionnelle, nous montrerons comment ce « trou » dans l'organisation s'explique par une sorte de cloisonnement entre, d'un côté, la dimension de légitimation par le cadre théorique de l'analyse réelle et, de l'autre côté, les composantes tâche, technique et le discours technologique attendu. Nous pourrons alors identifier différentes praxéologies relatives à la dérivée que nous associerons à des cadres de rationalité du type I et II tels que nous les avons définis au Chapitre 3, et pour lesquelles nous caractériserons des formes de discours spécifiques.

4.1 Choix d'un thème mathématique

4.1.1 Rappel de la nécessité d'inclure le savoir

Même si nous pensons probable que notre hypothèse relève d'une problématique plus globale, nous proposons de continuer à l'étudier sur un sujet mathématique *a priori* susceptible de mettre en évidence les difficultés supposées.

[101] En voyant comment l'aspect géométrique a laissé place au développement de l'analyse moyennant un passage par la cinématique, cela nous permettra de faire un parallèle avec les transpositions actuellement proposées et les choix exprimés par les élèves-professeurs. En effet, les choix actuels reflètent précisément une difficulté à articuler et à (r)établir un rapport entre des disciplines et domaines mathématiques qui sont maintenant formalisés de manière indépendante.

En effet, les travaux de C. Margolinas (2005a, 2005b) présentés au Chapitre 2 montrent comment l'analyse de la situation du professeur débutant doit prendre en compte les savoirs en jeu dans la leçon concernée, aussi bien sous l'angle des techniques « inattendues » qui pourraient être mises en oeuvre par les élèves que par une réflexion de type « noosphérien » au niveau du thème mathématique englobant cette leçon. C'est en effet grâce à cette prise en compte que peuvent être détectées des interactions intempestives ou au contraire absentes entre les niveaux de la situation. Cette localisation plus précise des difficultés permet alors de définir des actions ciblées dépassant la seule recommandation pédagogique. De plus le travail de G. Cirade (2006) sur l'absence de prise en compte par les élèves-professeurs de la problématicité intrinsèque des mathématiques nous a amenée à vouloir étudier plus précisément leur posture lorsqu'ils sont confrontés à des projets d'enseignement nécessitant le travail dans un cadre de rationalité de niveau I.

C'est pourquoi nous avons choisi le thème de l'association des concepts de tangente et de dérivée, et leur rôle dans l'établissement du lien entre le signe de la fonction dérivée et la croissance/décroissance de la fonction. Tout d'abord, ce thème présente une double visibilité institutionnelle dans la mesure où « le critère de croissance » est abondamment utilisé dans le secondaire sous une forme procédurale notamment pour l'exercice appelé « étude de fonction », mais n'est finalement étudié théoriquement qu'à l'université dans le cadre de l'analyse réelle. Nous pourrons alors observer les différences entre cette organisation globale et l'organisation locale résultant de la transposition la plus fréquemment rencontrée. De plus, la démarche pour établir la relation entre le signe de la dérivée et la croissance de la fonction comporte des enjeux en termes de rigueur et de rationalité qui sont relatifs aux propriétés des nombres réels et à un changement de cadre géométrie/analyse, plus précisément la constitution de l'analyse comme domaine mathématique à part entière. Or nos constats antérieurs sur la manière dont les élèves-professeurs font face à cette question montraient un renforcement de l'ambiguïté du statut de la tangente dans la connexion géométrie/analyse en travaillant dans une rationalité se voulant de type II, ainsi qu'une tendance à exclure un discours reposant sur la cinématique, qui pourrait relever d'une rationalité de type I.
Nous allons préciser dans les paragraphes suivants chacune des motivations de notre choix, à savoir les observations préliminaires déjà évoquées au Chapitre 1, le problème spécifique

du statut de la tangente comme objet mental, puis les difficultés d'apprentissage déjà connues.

4.1.2. Pourquoi l'association dérivée-tangente ?

4.1.2.1 Ce qu'on observe dans les préparations de leçons

La partie du programme de l'enseignement secondaire qui est appelée « analyse » recouvre essentiellement 1) l'étude de fonctions, appelées selon les textes et manuels « fonctions réelles » ou « fonctions d'une variable numérique réelle » ou même seulement « fonctions » (il s'agit des fonctions du premier puis du second degré, polynomiales, rationnelles, irrationnelles, trigonométriques, et enfin logarithmiques et exponentielles) ; 2) leur utilisation pour la « modélisation » de certains problèmes ; et 3) le calcul intégral. Dans ces 3 thèmes principaux intervient le lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée. Inscrits depuis (presque) toujours dans l'avant-dernière année du secondaire supérieur (1ère en France et 5ème en Belgique), la définition de la fonction dérivée102, et l'établissement de ce lien sont donc deux éléments charnières de ce programme d'analyse, souvent traités en une leçon chacun. Dans chacune de ces leçons, les approches proposées par un certain nombre de manuels, et donc aussi dans les préparations d'étudiants, utilisent le registre graphique et le cadre géométrique pour appuyer un résultat qui est finalement de nature numérique et de l'ordre de l'analyse, notamment en faisant intervenir les notions de courbe et de tangente à une courbe, qui n'ont pourtant pas de statut mathématique à ce stade du curriculum.

L'approche la plus fréquemment adoptée par les étudiants pour introduire « la dérivée » est en effet :

1) soit une courbe, donnée comme la représentation graphique d'une fonction dont on donne rarement l'expression analytique ;

[102] Remarquons que dans le discours des futurs professeurs, et même dans certains textes officiels, l'expression « la dérivée » est plutôt associée à la fonction dérivée, l'expression « nombre dérivé » n'étant parfois pas comprise.

2) souvent sans motivation, la tangente à cette courbe en un point est vue, voire définie, comme limite de sécantes, en un sens non mathématiquement défini en l'absence de définition d'une topologie sur l'ensemble des droites[103] ;
3) le nombre dérivé est ensuite défini effectivement comme la limite du quotient différentiel (lorsque cette limite existe) ; et cette définition se fait plus en moins en liaison avec l'aspect géométrique des sécantes et de leurs pentes;
4) il y a alors, ou de manière simultanée, un retour sur la tangente au moyen d'énoncés mentionnant « la droite dont le coefficient angulaire vaut ce nombre dérivé », mais rarement avec un statut de définition. C'est effectivement lors de cette dernière étape que l'on constate assez fréquemment un recouvrement des discours, dans la mesure où la seule phrase «le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente » définit souvent à la fois la tangente et le nombre dérivé.

Selon nos premières impressions à la lecture des préparations, on constate donc un déplacement fréquent de foyer, amenant la tangente comme objet premier de la leçon dans le sens où elle reçoit souvent plusieurs définitions dans une leçon qui est en principe consacrée à un autre objet[104]. Ce déplacement est sans doute du au fait qu'il y a création d'un « cercle vicieux » dans la mesure où la tangente est d'abord supposée connue[105] puisqu'on s'appuie dessus pour définir le nombre dérivé, puis cette même tangente est définie à l'aide de la notion qu'elle a permis de définir[106].

Mais est-ce vraiment la même tangente ? Il y a en fait la tangente « objet mental », la tangente « objet mathématique » dans le cadre de la géométrie, la tangente « objet mathématique » dans le cadre de l'analyse et même la tangente comme nombre trigonométrique.

Malgré ce recouvrement des conceptions qui finalement empêche l'explicitation des concepts, cette transposition est adoptée de manière quasi uniforme par les étudiants et ceci tous les ans et nous avons constaté peu de réactions des étudiants lorsqu'on leur mentionne

---

[103] Précisons qu'une telle topologie pourrait toutefois être définie en considérant l'angle formé par deux droites dans un même faisceau (Winkin, 2004). Ce qui nous préoccupe est précisément qu'il y ait tentative de définir un objet mathématique précis en s'appuyant sur un certain nombre de notions totalement implicites.
[104] Remarquons que la tangente n'apparaît finalement jamais comme contenu spécifique à enseigner. Une possibilité serait également de demander une leçon sur ce sujet, de manière à provoquer l'élaboration d'un discours spécifique.
[105] En particulier, elle n'est jamais présentée comme une droite n'ayant qu'un point d'intersection avec la courbe et dont on chercherait le coefficient directeur.
[106] Selon nous, ce type de cercle vicieux est différent d'une dialectique outil-objet sur la tangente dans la mesure où la tangente a deux statuts différents dans la même leçon et elle n'est pas l'objet en cours d'apprentissage

ce problème. Il semble pourtant qu'il y ait une certaine gêne si l'on observe justement le statut donné dans les leçons à l'énoncé sur la tangente (voir en 6.2).

En ce qui concerne le lien entre signe de la dérivée et le sens de variation, il y a sur ce sujet plus de variantes dans les préparations, mais la tangente y joue encore un rôle majeur alors que, le plus souvent, elle n'est toujours pas définie. La constante est en effet, d'une part, l'insistance sur « *l'objectif final de pouvoir tracer la fonction avec certitude grâce aux tangentes*»[107] et, d'autre part, le tracé de certaines tangentes pour « montrer » que la fonction est bien croissante. Même dans le cas où la tangente aurait été définie comme limite de sécantes, cette conception semble de plus difficilement associable avec le rôle que l'on veut alors lui faire jouer : quel est le rapport entre ce faisceau de sécantes et le fait de « coller à la courbe » ? Comment se convaincre que la droite obtenue correspond à l'objet mental ? Sans doute plus ou moins influencée par les programmes et les indications associées, cette tendance amène à énoncer des théorèmes portant sur les accroissements finis et sur les valeurs intermédiaires, mais sous forme géométrique et sans en travailler la dimension numérique, masquant en fait les propriétés des nombres réels qui sont un véritable enjeu théorique[108].

4.1.2.2 Statuts de la tangente et démarche rationnelle

Comme nous l'avons présenté ci-dessus, la dérivée, objet de la leçon, est souvent définie sur base de la tangente, pourtant elle-même non définie ou parfois même définie ultérieurement sur base de la même dérivée. Ce « cercle vicieux » porteur de difficultés est dû au fait que les notions de dérivée et tangente sont effectivement intimement liées dans l'histoire (Voir le 4.2), mais aussi que la tangente est un objet hybride : objet géométrique comme tangente aux coniques, objet analytique comme droite de coefficient directeur égal au nombre dérivé, mais surtout « objet mental ».

[107] Tâche évoquée mais jamais proposée de manière effective.
[108] Arrivant à l'université, les élèves n'ont alors aucune raison de comprendre la nécessité du développement d'une théorie telle que l'analyse réelle.

4.1.2.2.1 *Objet mental et rationalité*

La construction des concepts et des théories mathématiques implique ce que H. Freudenthal 1973) appelle les « objets mentaux », c'est-à-dire :

> *des notions de type mathématique et qui soit appartiennent à la pensée commune, soit sont intermédiaires entre celle-ci et les mathématiques constituées. On compte parmi eux les nombres naïfs, complétés par ces mêmes nombres complétés d'un signe moins, les fractions, les aires de polygones exprimées en nombres naïfs, l'aire avec π= 3,14 et r un nombre naïf, les volumes d'objets simples, les angles mesurés au rapporteur, les vitesses de mouvement uniforme, certaines formes élémentaires de raisonnement. Les objets mentaux sont les instruments de la pensée mathématique en formation. Ils servent à comprendre et organiser la masse des phénomènes qui surgissent dès qu'on se pose dans des contextes familiers, des questions qui vont vers les mathématiques.*
> *(Crem, 1995)*

La notion d'objet mental[109] est à opposer à celle de concept qui est « *un objet techniquement défini dans une théorie axiomatisée.* »(CREM, 1995). M. Schneider (1988) parle aussi de « *substituts de concepts* » qui peuvent donc faciliter ou au contraire empêcher le développement des concepts en question.

Par exemple, l'aire et le volume existent d'abord en tant qu'objets mentaux et permettent ensuite le développement d'autres résultats sans jamais être autrement définis comme concepts[110]. Mais il existe un renversement lorsque l'aire et le volume seront définis comme des intégrales. Ce renversement permet, d'une part, d'assurer que « l'objet » calculé par la technique « intégrale » est bien une aire (ou un volume), et, d'autre part, de disposer alors d'une définition opératoire de ces objets mentaux devenus concepts mathématiques.

La tangente, par contre, pose d'autres problèmes puisque dans le même temps elle reste un objet mental : « une tangente, tout le monde sait ce que c'est[111] », mais elle existe aussi déjà comme objet mathématique dans le cadre géométrique sous la forme de la tangente au cercle et elle recevra une autre définition comme objet mathématique dans le cadre analytique. Peut-on être sûr qu'il s'agit bien du même objet ?

---

[109] Notion qui est sans doute à rapprocher de celle de « préconstruit » proposée par Chevallard (1991). Voir Schneider (2007).

[110] Toutes les formules de calcul d'aires de polygones dérivent en effet du calcul de l'aire du rectangle, lui-même étant un retour d'expérience sur l'objet mental dont les mesures restent des nombres naïfs ou des rapports de ces nombres. L'aire se retrouve implicitement définie comme étant le résultat du calcul proposé.

[111] Il est vrai que le mot vient assez vite, du moins dès que la représentation graphique y invite. Là se trouvent les expressions « une droite qui frôle la courbe », « une droite qui colle à la courbe », etc. Nous verrons que ces expressions sont en général rejetées alors que des expressions analogues pour l'aire (étendue) et le volume (espace occupé par un solide) ne le sont pas.

Pourtant peut-on se passer de faire référence à un objet mental lorsque celui-ci existe ? Commencer par les concepts serait l'approche purement formaliste, mais une autre forme de négation de ces objets mentaux existe et, toujours d'après les auteurs de CREM (1995), elle est à la fois plus fréquente et plus difficile à discerner de nos jours. Elle consiste à introduire à la fois des objets mentaux et des concepts à forte connotation technique dans des contextes dits « trop pauvres » dans la mesure où ils ne permettent pas aux élèves de comprendre pourquoi (et pour quoi) cette technicité a été développée[112]. C'est par exemple ce qui est observé dans l'analyse des préparations des élèves-professeurs lorsque la tangente (objet mental) sert à donner une définition de la dérivée qui sera, quant à elle, surtout utilisée dans des applications techniques.

Travailler avec les objets mentaux permettrait

> *[…] le passage des constats d'évidence intuitive aux inférences simples (si je fais ceci, j'obtiens cela parce que…), [puis] aux enchaînements d'inférences simples formant une preuve, puis aux enchaînements de preuves dans des ilôts déductifs de taille croissante, pour aboutir enfin aux théories.*
> *(CREM, 1995)*

C'est pourquoi, pour faire suite à notre étude de la notion de rationalité au Chapitre 3, nous proposerons alors de qualifier de rationnelle la démarche permettant d'étudier les conditions de transformation de l'objet mental en concept[113]. Elle constitue le discours technologique d'une praxéologie de type 1, et est associée à un cadre de rationalité de niveau 1.

4.1.2.2.2 *Le cas de la tangente et de la dérivée*

Dans le cas de la tangente et de la dérivée, la question se pose donc du statut de « la tangente ». Est-ce un concept mathématique ? Dans ce cas quelle est sa définition ?

Les théories ne fournissent que 1) la définition géométrique de la tangente au cercle ; 2) la définition « analytique » de la tangente comme représentation graphique de la fonction

112 Exemple : le calcul avec les nombres négatifs et la règle des signes ; calcul de limite en ε, η, quelques semaines avant celui de dérivée et en ne l'appliquant qu'à des fonctions continues ou banalement discontinues, c'est un discours inutilement compliqué pour une chose simple. Ceci se fonde sur les écrits de M. Kline () affirmant que pour apprécier une formulation précise d'un concept ou d'un théorème, on doit avoir quelles exceptions et quels pièges les termes utilisés tentent d'éviter. Sur le même sujet, on peut aussi se référer à I. Lakatos (1984).

113 Dans la taxonomie proposée au Chapitre 3, cela correspond à la démarche d'enseignement dite « réaliste ».

affine tangente[114] ou comme droite dont le coefficient angulaire est le nombre dérivé, ces deux définitions n'étant valables que dans un cadre fonctionnel.
Au moment de la définition du nombre dérivé, seule la première est disponible[115], en même temps que l'objet mental parlant « d'une droite qui frôle la courbe » ou « d'une droite qui approche le mieux la courbe ».

Or la transposition maintenant généralisée présente la tangente à la fois comme une illustration géométrique de la dérivée (dans les programmes et les manuels) et comme « un moyen » d'introduire la dérivée ainsi qu'on le constate dans les activités dites introductives de la plupart des manuels. Cela a pour conséquence de ne plus faire exister la tangente en tant que question mathématique spécifique et d'installer comme une « double dialectique outil-objet » entre la tangente et le nombre dérivé, chacun des deux servant à définir l'autre. Comme nous l'avons déjà dit, la leçon d'introduction de la dérivée, puis celle sur l'établissement du résultat sur le lien entre variation et signe de la dérivée, font en effet beaucoup intervenir la notion de tangente qui, n'ayant alors pas de statut mathématique particulier, n'est en quelque sorte ni concept, ni objet mental, mais aussi ni outil, ni objet. La « double dialectique » ne peut donc fonctionner puisque les élèves doivent en fait « travailler » sur deux concepts mathématiques en construction sans pouvoir identifier plus clairement la démarche rationnelle de construction des concepts.

On verra que cette caractéristique donne par exemple lieu à un désir des élèves-professeurs de ne pas « garder un objet mental » et donc de donner rapidement une définition de la tangente, en utilisant cette notion de « position limite », voire de « limite », qui ne peut en fait pas plus renforcer le statut mathématique de la tangente car elle reste dépendante d'une topologie non précisée sur l'ensemble des droites du plan. De plus le lien potentiel entre cette conception comme « limite de sécantes » et la conception « droite qui frôle la courbe » reste également implicite, ce qui nous paraît rendre difficile son utilisation ultérieure. On

[114] Cette définition semble spécifique aux manuels français, aussi bien dans les années 1970 (Queyzanne-Revuz) que dans les manuels récents (Terracher, 1ère S, 2001 ; Déclic, 1ère E/S, 2001), la difficulté étant d'associer un concept mathématique à la notion de « meilleure approximation ».
[115] Dans la majorité des programmes actuels, les propriétés de tangentes aux coniques ne seront définies que plus tard, et le plus souvent sous une forme algébrique (deux points d'intersection confondus) voire fonctionnelle en étudiant les coniques comme représentation de fonctions.

verra également que, dans certaines productions, la dérivée est explicitement définie sur base de la tangente qui est ensuite définie sur base de la dérivée. Dans l'ensemble, la démarche rationnelle consistant à transformer en concept ce qui était un objet mental, n'est que très rarement observée.

4.1.2.2.3 Toutes ces tangentes…..

Pour finir ce rappel de nos motivations, reprenons dans l'entretien déjà évoqué au Chapitre 1 ce qui concernait plus précisément la relation entre « la rigueur mathématique » et notre (ou nos) tangente (s).

> *[..] l'honnêteté scientifique [consistant à] ne pas se servir d'un élément hors du système sans prévenir [et à] ne pas changer de sémantique d'un même concept dans une même théorie. […]*
> *Dans le cas de la dérivée, c'est la tangente de l'angle géométrique que fait la tangente – physique –à la courbe avec l'axe des x… il y a plusieurs tangentes, la tangente comme nombre trigonométrique, la tangente à la courbe et on mêle les deux, mais c'est pas les mêmes… c'est comme la probabilité….l'honnêteté doit permettre de faire une distinction entre les deux.*
> *(E.R-5)*

4.1.2.3 Obstacles inhérents à la transposition habituelle

Pour aller au-delà de ces premiers constats, nous allons reprendre les résultats de travaux antérieurs afin de montrer que le concept de tangente comporte des difficultés épistémologiques avérées. Les difficultés d'apprentissage du concept de tangente ont notamment été étudiées par M. Schneider (1991) et C. Castela (1995). Si ces études concernent les difficultés des élèves, elles nous apprennent également comment ces difficultés sont en relation avec le discours des professeurs. Par ailleurs, une de nos hypothèses est que l'étudiant devenant enseignant se retrouve face à ces difficultés initiales, qu'il avait oubliées au profit du discours théorique appris ensuite.

4.1.2.3.1 Obstacle géométrique de la limite

M. Schneider (1991) inscrit ces difficultés dans un obstacle épistémologique plus global, une vision empiriste des concepts mathématiques susceptible d'apparaître dans les cas d'utilisation « *d'objets mentaux au sens de Freudenthal, ou sorte de substituts primitifs des concepts proprement mathématiques et qui peuvent à terme opposer des difficultés à la formation de ceux-ci* ».

Parmi ces objets mentaux, l'aire et le volume pour lesquels on arrive souvent à une confusion entre la grandeur et le nombre qui la mesure[116]. Une confusion se manifeste également pour la tangente. En effet, ses expérimentations témoignent d'une « *réelle difficulté des élèves du secondaire à associer la pente d'une tangente à la limite d'une suite de quotients différentiels* ». Ceci confirme les études de A. Sierpinska (1985) qui avait également souligné que

> *L'idée de calculer quelques valeurs du quotient différentiel (au voisinage de zéro) n'est pas venue des élèves ; elle leur a été soufflée par l'expérimentateur ; la prise de conscience de la dépendance numérique de la position de la tangente à partir des positions de la sécante était très faible*
> *(Sierpinska, 1985)*

L'interprétation que font ces auteurs de ces difficultés s'exprime par l'obstacle géométrique de la limite que nous expliquons ci-dessous, et dont M. Schneider analyse le lien avec l'obstacle historique de définition de la limite. Nous verrons que, dans les préparations (comme dans les manuels), ce calcul de valeurs (de même d'ailleurs que la visualisation de la tangente) est en effet plus que dirigé.

Reprenons ici les propos de M. Schneider analysant comment le discours du professeur demande un transfert du géométrique au numérique selon une certaine progression et comment les élèves empruntent un autre circuit pour faire ce transfert.

> *La tangente est, dans une certaine présentation de l'analyse au cycle secondaire, un objet second par rapport à sa pente puisqu'elle est définie par le biais de celle-ci. Le circuit effectué dans la théorie est schématisé par la figure ci dessous : le point de départ est la sécante, droite définie par deux points. Celle-ci détermine une pente exprimée par la fonction-taux d'accroissement et la limite de cette fonction est un nouveau nombre grâce auquel on définit le point d'arrivée, à savoir la tangente. Ce qui fait qu'on ne peut aller de cet objet géométrique qu'est la sécante à cet autre objet géométrique qu'est la tangente sans passer par un domaine autre que la géométrie et que nous qualifierons de « numérique symbolisé ». Numérique, car la tangente est définie par le biais d'un nombre : sa pente. Symbolisé, parce que cette pente est la limite d'une suite de pentes de sécantes et que l'acte de passage à la limite ne peut être identifié et accompli que si l'on dispose de l'expression littérale de ces pentes.*
> *(Schneider, 1991)*

116 Remarquons que les préparations sur le sujet de l'intégrale sont également très peu claires sur le sujet, notamment dans le langage utilisé : la distinction entre aire et mesure d'aire est probablement une manifestation d'un écrasement des deux notions chez l'étudiant, masquant ainsi la démarche mathématique motivant la théorie.

domaine géométrique → **domaine numérique symbolisé**

$$\begin{tikzcd} \text{sécantes} & \text{pentes} \arrow[d, "\textit{limite}"] \\ \text{tangente} & \text{pente} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

d'après (Schneider, 1991)

> *[or] les élèves pensent plus volontiers à déterminer d'abord la tangente, ensuite sa pente plutôt que le contraire.*
> *Cette prégnance de la tangente par rapport à sa pente peut s'expliquer par le fait que la pente est un rapport et donc n'est susceptible que d'une expression symbolisée tandis que la tangente est un objet.*
> *La tentation est grande, dès lors de concevoir la tangente comme un objet géométrique défini au moyen d'autres objets géométriques, à savoir les sécantes, pour ensuite seulement revenir à sa pente.*
> *Le circuit emprunté par les élèves aurait dans ces conditions plutôt la structure suivante :*
> *Schneider (1991)*

domaine géométrique **domaine numérique symbolisé**

$$\begin{tikzcd} \text{sécantes} \arrow[d, "\textit{« limite »}"] & \text{pentes} \\ \text{tangente} \arrow[r] & \text{pente} \end{tikzcd}$$

d'après (Schneider, 1991)

On voit donc que c'est le mot « limite » qui semble légitimer les définitions :

> *le mot limite du langage savant étant compris comme « position limite » de droites, au sens d'une topologie -implicite et confuse bien entendu- sur l'ensemble des droites..*
> *(Schneider, 1991)*

Citant la définition donnée dans un manuel, M. Schneider met en évidence que le mot *limite* et l'expression *tendre vers* sont utilisés à la fois :

- pour la limite du quotient
- pour x tendant vers x_0
- pour une « position limite » de droites, ou une tangente comme « limite de sécantes »
- pour le point M (mobile) qui tend vers le point A (fixe).

Or M. Schneider suggère que si l'utilisation du mot dans les manuels se fait parfois avec des précautions, dont l'utilisation de guillemets, pour être en même temps rigoureux et respectueux de l'intuition des élèves, ces précautions ne suffisent en général pas et peuvent même être à l'origine d'autres difficultés[117].

4.1.2.3.2 *Passer d'une tangente à l'autre ?*

Les difficultés décrites par M. Schneider sont expliquées par les conceptions de la limite[118], mais font aussi intervenir le fait que la tangente « existe déjà » pour les élèves :

> *l'idée même d'une définition de la tangente est peu évoquée dans les classes : les élèves se posent la question du comment déterminer la pente d'une tangente, jamais celle de définir la tangente elle-même, comme s'ils savaient depuis longtemps de quoi il s'agit. (Schneider, 1991)*

C. Castela (1995) s'interroge justement à propos de la tangente sur « *les modalités de la prise en compte de connaissances nouvelles*[119]*, partiellement en rupture avec celles qui sont en place*[120] ». Dans ce contexte, elle met en évidence que, jusqu'à l'introduction du nombre dérivé[121], l'objet « tangente » est défini sur base de la tangente au cercle, et donc en relation avec des problématiques de position relative ou de nombre de points d'intersection, ou encore de normalité au rayon. Ce dernier point de vue est finalement celui qui « disparaît » le plus facilement au profit des deux autres qui sont éventuellement renforcés par l'étude de la tangente à la parabole lors de l'étude des fonctions du deuxième degré. En effet, c'est alors l'occasion de manipuler les techniques algébriques nouvellement acquises pour déterminer l'équation de la tangente à une parabole en un point donné en recherchant la racine double d'une équation (insistant alors sur la problématique du nombre de points d'intersection). Même si c'est en association avec des techniques algébriques, l'objet « tangente » reste donc inscrit dans une problématique géométrique d'études de courbes.

---

[117] Nous verrons également dans l'analyse des préparations cet emploi du mot limite pour donner un caractère mathématique à une définition, alors que les notions de « pente d'une courbe », « droite qui frôle (AHA) » sont soigneusement évitées, voire rejetées par les étudiants.

[118] En particulier, elle explique que la filiation entre les sécantes et leurs pentes se fait par l'intermédiaire d'un triangle, mais que ce rôle de médiation ne se transfère pas au point où l'on cherche à définir la tangente.

[119] Ici la tangente selon un point de vue « analyse ».

[120] ici la tangente au cercle

[121] Une des difficultés est précisément cette introduction conjointe du nombre dérivé et de la tangente.

Nous pouvons remarquer à ce propos que, dans le cas de la tangente au cercle, puis dans le cas de la construction de tangentes à la parabole associée à la résolution d'une équation du second degré, la tangente est définie « par opposition » aux sécantes comme une des trois configurations possibles. Ces apprentissages antérieurs ont donc plutôt tendance à créer une discrimination entre tangente et sécante.

Ensuite, lors de l'introduction du nombre dérivé d'une fonction f en a, la tangente intervient pour une interprétation géométrique de ce nombre. Elle reçoit alors trois « définitions » [122]possibles :

- position limite de sécantes[123] ;
- droite passant par (a,f(a)), dont le coefficient directeur est le nombre dérivé de la fonction f en a ;
- représentation graphique de la fonction affine tangente en A.

C. Castela souligne la prédominance dans les manuels des deux premières définitions, malgré les travaux de M. Schneider (1988, 1991) cités précédemment. Comme vu ci-dessus, cette définition favorise en effet la confusion entre la tangente utilisée comme objet mental et la tangente que l'on cherche au même moment à définir comme objet mathématique. Elle supprime donc toute possibilité de passage par une rationalité de niveau I.

C. Castela montre de plus que la seule généralisation à partir de la tangente au cercle est insuffisante et qu'une progression est nécessaire au développement de conceptions intermédiaires associant de manière plus flexible les problématiques d'intersection (globale puis locale) avec un point de vue reprenant les notions d'analyse (fonction affine et nombre dérivé). Dans cette perspective, elle insiste sur *« la non-prise en charge par les enseignants de la confrontation avec les caractéristiques non généralisables de la tangente au cercle ».* La généralisation serait supposée évidente et le mot « tangente » est utilisé naturellement sans en distinguer les différentes conceptions[124].

---

[122] C'est nous qui mettons le mot entre guillemets.

[123] Cette définition est pourtant assez rare dans les manuels français. Nous l'avons surtout constaté dans des manuels récents (2000).

[124] Précisons que le but ne serait pas d'ergoter sur le mot utilisé mais de prendre en charge le travail épistémologique susceptible d'assurer la maîtrise du concept mathématique et donc l'articulation entre ses propriétés lors de ses utilisations ultérieures.

Enfin, la troisième définition parlant de fonction affine est très peu utilisée, la notion même ayant disparu entre les programmes des années 70 et ceux de 1985[125], ainsi que la notion de développement limité[126], reflétant le faible enjeu institutionnel associé à la dimension d'approximation[127].

En conclusion, C. Castela rappelle que la tangente est un « *objet ambivalent* » qui peut être décrit[128] à la fois comme « *la droite qui affleure aussi peu que possible* » et « *la droite qui longe au mieux* », ce qui explique les difficultés posées lorsqu'on la manipule comme objet mental dans un développement théorique sur le nombre dérivé.

Ces deux recherches nous permettent de décrire à quelles difficultés seront confrontés les élèves-professeurs, en même temps qu'elle montrent comment la dimension d'approximation passant par des formulations descriptives (« droite qui frôle » « droite qui affleure aussi peu que possible », « droite qui longe au mieux ») disparaît au profit de définitions utilisant un mot savant comme *limite* qui sont couramment acceptées.

Comme cela était évoqué par l'entretien relaté précédemment, ce sujet est donc susceptible de nous révéler les rapports qu'entretiennent les étudiants à la rigueur en ce qui concerne la formalisation d'une intuition, le lien à la réalité (*via* la modélisation), la gestion des analogies implicites au travers de la présence de plusieurs niveaux d'appréhension d'un même objet et le recours à l'évidence visuelle.

4.2 L'association dérivée-tangente dans l'histoire

Rappelons-le : la question étudiée ici est la difficulté éprouvée par les élèves-professeurs à passer d'une forme de rationalité propre à l'enseignement universitaire (identifiable à un cadre de rationalité de niveau II) à une forme de rationalité adaptée au niveau où ils enseignent. Nous chercherons donc à savoir quelle forme de rationalité ils adoptent. Leur

---

125 Elle est toutefois de nouveau présente dans les manuels Terracher 1ère S (2001) et Déclic 1ère E/S (2001).
126 Ajoutons aussi les ordres de grandeur.
127 Si la tangente est liée à l'approximation d'une courbe par une droite, on retrouve un phénomène analogue pour la notion d'asymptote.
128 La distinction entre description et définition pourrait être un point à faire approfondir.

est-il possible de prendre en charge un discours correspondant à un cadre de rationalité de niveau I ? Dans le cas contraire, quel discours adoptent-ils et avec quelles motivations ?

A première vue, cette difficulté se traduit par l'impossibilité de concevoir une praxéologie mathématique complète susceptible d'articuler, d'une part, des types de problèmes et des techniques permettant de les résoudre et, d'autre part, les discours technologiques qui justifient la technique choisie et la rendent intelligible par rapport à la tâche proposée. Le malaise proviendrait déjà d'une absence d'identification des tâches elles-mêmes qui, pour une même discipline, ne sont pas forcément les mêmes à l'université et dans le secondaire. Comme nous l'avons développé plus haut, ce malaise s'observera d'autant plus facilement que les objets de cette discipline sont censés changer radicalement de statut d'une institution à l'autre : outils au cycle secondaire et objets dans l'enseignement universitaire. C'est particulièrement vrai pour les concepts d'analyse et c'est ce que nous voulons montrer dans les sections qui suivent.

Pour ce faire, nous interpréterons en termes de praxéologies mathématiques quelques moments clés de l'histoire de l'analyse. L'objectif n'est pas ici de procéder à une reconstitution[129] mais de voir les mécanismes et les manifestations de ces changements de statut des deux objets en relation avec les organisations mathématiques et les organisations didactiques connues. Nous proposons d'effectuer une lecture selon trois niveaux de profondeur :

1. le premier vise à montrer le renversement outil-objet, c'est-à-dire comment la dérivée fut d'abord outil implicite, puis outil explicite, puis objet d'étude ;
2. le deuxième soulignera le rôle de la tangente qui, du statut de tâche mathématique, passera au statut de technique didactique, constituant ainsi un phénomène de « détournement » d'un objet ;
3. le troisième s'intéresse plus précisément à une comparaison entre les rôles de la tangente et de la vitesse dans cette évolution. Si leurs destins sont plus ou moins comparables dans les organisations mathématiques, seule la tangente se verra accorder le statut de technique didactique.

[129] C'est pourquoi nous nous référerons à des ouvrages de synthèse sur le sujet ou à des recherches proposant l'un ou l'autre texte original.

4.2.1 Quelques jalons de l'histoire de l'analyse

L'analyse mathématique est aujourd'hui une discipline à part entière, autonome avec ses propres objets et règles de validation que l'on pourrait résumer ici en disant que c'est un jeu de quantificateurs et d'inégalités. C'est là l'aboutissement d'un long processus, le calcul infinitésimal s'étant d'abord constitué comme un ensemble de techniques propres à résoudre des problèmes de géométrie et de cinématique avant de devenir l'analyse que l'on connaît. Voici plusieurs étapes de cette évolution.

4.2.1.1 Des solutions *ad hoc* aux premières méthodes algébrisées

4.2.1.1.1 Tâches[130] « génétiques »

Plusieurs historiens, dont C. Boyer (1949), identifient quatre principaux types de problèmes à l'origine de l'analyse :

- les calculs d'aires et volumes ;
- la détermination de tangentes ;
- la recherche de maxima et minima ;
- les problèmes de vitesses variables.

Le calcul d'aires de surfaces curvilignes et de volumes de solides existe dès l'Antiquité. On peut citer le volume de la pyramide et l'aire du disque chez Euclide, la quadrature de la parabole chez Archimède. Le thème sera repris plus tard et alimentera le débat à propos du concept d'infinitésimal.

La détermination des tangentes à certaines courbes est également traitée dans l'Antiquité. Par exemple, Euclide détermine la tangente au cercle, Archimède construit une tangente à une spirale et Appollonius la tangente aux coniques. L'étude des tangentes est reprise avec un objectif de généralisation à d'autres courbes au XVIIème siècle, entre autres par Galilée (1564-1642), Fermat (1601-1665), Torricelli (1608-1647) et Roberval (1602-1675).

---

[130]Nous utilisons l'appellation « tâche » dans l'acception que lui donne Y. Chevallard, à savoir des problèmes ou classes de problèmes relevant d'un savoir mathématique précis. Il ne s'agit donc pas vraiment ici du terme « tâche » opposé au terme « activité » dans le domaine de l'ergonomie et de la psychologie du travail. Même si un travail d'analyse de la tâche peut y être fait, le mot tâche » désigne plus souvent ce qu'il y a à faire (les objectifs), tandis que « activité » désigne ce qui est effectivement fait (les moyens).
Par contre, nous devrons utiliser le mot de « tâche » pour décrire les activités proposées dans les manuels, alors qu'elles ne sont pas toujours problématiques.

Le problème de la recherche des valeurs minimale et maximale d'une grandeur sera l'une des grandes questions motivant les travaux mathématiques du XVIIème. Kepler (1571-1630) sera amené à traiter cette question notamment pour déterminer les meilleures proportions entre les mesures d'un tonneau de vin, de même que Galilée pour déterminer la distance maximale parcourue par un boulet de canon selon l'angle d'inclinaison du canon. Moins terre à terre, l'étude du mouvement des planètes comprend aussi des problèmes d'extremum concernant des distances.

Quant aux vitesses, le problème consiste à déterminer à tout instant la vitesse et l'accélération d'un corps lorsqu'on connaît la formule donnant la distance parcourue en fonction du temps, et inversement de déterminer la vitesse et la distance parcourue lorsque l'accélération est donnée (Saelens, 1995). Jusqu'au XVIIème siècle ce problème soulève des difficultés liées au fait que la vitesse et l'accélération peuvent varier à tout instant et que les mathématiques disponibles ne permettent pas de les calculer, puisqu'à un instant donné la distance parcourue et le temps valent zéro tous les deux et que 0/0 est dépourvu de sens, tandis que sur le plan de la physique il est « évident » que cette vitesse instantanée existe bien.

Les problèmes viennent donc 1) de l'astronomie avec par exemple les tangentes aux trajectoires coniques ; 2) de la géométrie avec les quadratures de courbes, les tangentes et les problèmes d'optimisation dont on trouve déjà un exemple chez Euclide ; 3) de la physique avec des problèmes de vitesses et 4) de la vie pratique avec par exemple le problème d'optimisation d'un tonneau chez Képler. Même si maintenant ces quatre classes de problèmes sont regroupées au sein de la théorie de l'analyse réelle, nous pouvons cependant constater que les questions initiales étaient de natures très différentes[131] et vont d'ailleurs connaître des statuts différents dans les transpositions qui seront faites. Nous détaillerons la problématisation actuelle des tâches au 4.3, mais nous pouvons déjà en tracer les grandes lignes. Par exemple, le calcul intégral peut encore actuellement être introduit comme réponse à une question de calculs d'aires. Toutefois, lorsque l'intégrale est directement définie comme variation de primitive, la question pourrait disparaître et devenir une application, voire une

[131] Nous avons à ce sujet mentionné en introduction que pour les élèves le transfert d'un contexte à l'autre est loin d'être aussi immédiat que voulu.

illustration[132], de la notion de primitive. La détermination d'extremum est devenue essentiellement une illustration de la notion de dérivée, et n'est, à notre connaissance, que très rarement reprise comme question d'introduction. La détermination de tangente ne semble apparaître comme un objet d'enseignement que dans un contexte géométrique, avec la tangente au cercle, ou algébrique, avec la recherche de tangente à une parabole pour l'étude du second degré. La question de l'approximation passe le plus souvent par la connaissance préalable du nombre dérivé et est liée à un statut ambigu d'interprétation géométrique de la dérivée. Les problèmes de vitesse sont devenus essentiellement des illustrations de la théorie des dérivées, avec de plus une délégation respective de responsabilité entre les mathématiques et la physique quant à la définition et à l'existence de la vitesse instantanée.

4.2.1.1.2 *Premières techniques et premières définitions*

La résolution de ces tâches va se faire d'abord grâce à des techniques qui restent proches de la nature de la tâche en question. Dans les problèmes d'aires par exemple, la méthode d'exhaustion est une méthode de preuve qui s'appuie sur un découpage des figures, le découpage étant différent pour chaque figure. Quant à la détermination de tangentes, les procédures restent de nature géométrique et ne relèvent pas du calcul infinitésimal. Cette approche caractérise les travaux de l'Antiquité qui resteront dans le domaine géométrique, mais certains auteurs (Irem, 1999) y rattachent aussi la première partie du XVIIème en parlant d'une période pré-infinitésimale.

Nous avons évoqué en particulier dans la section 4.1 le problème d'une définition de la tangente. C'est pourquoi nous reprenons ci-dessous tout d'abord la définition proposée par Euclide pour la tangente au cercle, puis la procédure proposée par Appollonius pour construire la tangente à une parabole. En effet cette procédure permet en quelque sorte de remplacer la définition précédente, qui restait descriptive, par le critère de la sous-tangente. Devenant une sorte de définition opératoire[133], c'est ce critère qui permettra la validation des travaux ultérieurs.

[132] Rappelons que nous référons à Hilton (1987) pour distinguer entre une « application », comme se référant au caractère fondamental du savoir, et une « illustration » qui a plutôt valeur d'exemplification du savoir.
[133] Remarquons qu'Archimède se donnera également une définition de la tangente, mais sous forme cinématique, pour déterminer la tangente à une spirale.

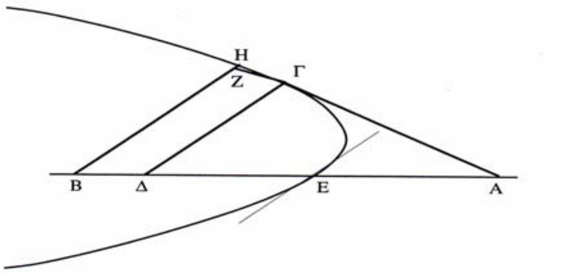
Tout d'abord on trouve chez Euclide les études sur la tangente au cercle, qu'il définit comme

> *une droite qui touchant un cercle et étant prolongée ne le coupe point*
> *Eléments, livre III, définition 2*
> *In(Irem, 1999)*

Dans le même ouvrage, Euclide énonce l'existence et l'unicité de la tangente en tout point du cercle en utilisant l'expression

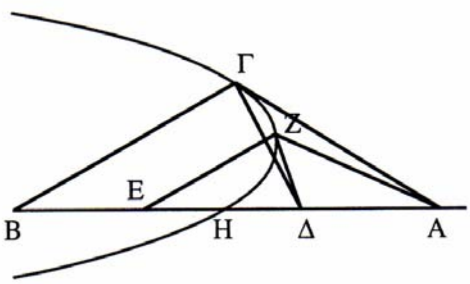
> *la droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle*
> *Eléments, livre III, proposition 16*
> *In (Irem, 1999)*

La notion de tangente est ensuite étendue à d'autres courbes de la famille des coniques avec en particulier Apollonius de Perge et Archimède. Apollonius va s'intéresser aux propriétés de la parabole en tant que conique[134]. Il établit d'abord la propriété liant les carrés des abscisses et les ordonnées qui est valable dans un système d'axes ayant des directions conjuguées. Puis il décrit un procédé de construction de tangente dans lequel il établit que la tangente doit vérifier la propriété « de la sous-tangente » (proposition 33), et il établit également la réciproque (proposition 35). Avec cette équivalence, Appolonius va « remplacer » la définition par un critère de construction.

> *Appolonius : Les coniques (extraits du premier Livre)*
>
> 
>
>
> *Proposition 33*
> *Si l'on prend un point sur une parabole ; si de ce point, l'on abaisse une droite d'une manière ordonnée sur le diamètre, et si l'on pose une droite égale à celle que cette dernière découpe sur le diamètre, dans la direction de celui-ci, et à partir du sommet, la*

134 Apollonius définit les notions de surface conique, cône, sommet du cône, axe du cône en distinguant les cônes droits des cônes obliques. Il définit enfin les « diamètres de toute ligne courbe »: étant donnés une courbe et une direction dans le plan de la courbe, un diamètre de la courbe (appelé maintenant diamètre conjugué à cette direction) est la droite coupant en deux parties égales toutes les cordes à la courbe menées parallèlement à la direction donnée. Toutes les droites parallèles à la direction donnée sont appelées par Apollonius les « droites menées d'une manière ordonnée ». (Saelens, 1995) La parabole est donc connue, pas encore comme lieu géométrique, mais comme courbe dont ordonnées et abscisses vérifient une relation spécifique exprimée en termes de grandeurs.

droite de jonction, menée du point ainsi obtenu au point que l'on a pris, sera tangente à la section.
(ici, la propriété de la sous-tangente se traduit par AΔ= 2AE)
Proposition 35
Lorsqu'une droite rencontrant un diamètre à l'extérieur de la section est tangente à une parabole, la droite, amenée de manière ordonnée du point de contact sur le diamètre, découpera sur le diamètre, à partir du sommet de la section, une droite qui est égale à celle qui est située entre le sommet et la tangente ; et nulle droite ne tombera dans l'espace compris entre la tangente et la section.



In (Irem, 1987)

Les démonstrations utilisent des inégalités de rapports entre grandeurs associées aux propriétés géométriques des figures identifiées, mais il nous semble surtout important de noter ici qu'Apollonius semble considérer la tangente au sens d'Euclide, c'est-à-dire comme « *droite qui touche la parabole en un seul point et qui ne tombe pas à l'intérieur* ». Le fait que la droite ne tombe pas à l'intérieur est la propriété qu'il va montrer et il écrit en conclusion « *la droite [..] ne tombe pas à l'intérieur de la section, donc elle lui est tangente* ». Ces notions d'intérieur et d'extérieur reposent vraisemblablement sur la convexité de la courbe, ce qui ne pourra donc être étendu à des courbes changeant de concavité. Nous pouvons aussi remarquer qu'il n'est ici fait aucune référence à une proximité de points sur la courbe. Cette procédure reste donc strictement géométrique et n'est pas du type infinitésimal. C'est à partir du XVIIème, que l'on voit un foisonnement de techniques d'exploration des propriétés des courbes qui feront progressivement intervenir la notion d'infini de manière de plus en plus apparente. Ces techniques continuent dans un premier temps à rester attachées à des courbes spécifiques, mais montrent aussi un souci de mieux cerner les concepts « non géométriques » en jeu et c'est avec Fermat que l'on peut voir l'idée d'une méthode. C'est ainsi que des problèmes qui étaient jusque là indépendants lorsque on les regarde sous l'angle géométrique vont se trouver regroupés sous une même technique relevant du numérique.

4.2.1.1.3 *La méthode d'adégalité de Fermat*

Fermat va reprendre en 1637 un problème classique de recherche de maximum : « *trouver le point E d'un segment AC tel que le produit AE.EC soit maximal* ». Euclide avait déjà résolu ce problème en le posant sous une forme géométrique « *tout rectangle construit sur deux segments inégaux, dont la somme est constante, a une aire inférieure à celle du carré construit sur un segment qui vaut la moitié de cette constante »*[135] (Saelens,1995) et en le résolvant alors par une technique de puzzle géométrique. Fermat va par contre considérer des « infiniment petits » numériques et non plus géométriques (indivisibles) comme ses prédécesseurs[136], et introduire l'idée de variation pour résoudre ce problème, sa technique préfigurant donc le calcul différentiel, mais sans parler de limite. Il va ensuite reprendre cette technique consistant à représenter aussi la variation par une lettre et l'utiliser dans d'autres problèmes, y compris celui de construction de la tangente. On a donc la première méthode, au sens où l'on dispose d'une technique ne dépendant plus ni de la nature ni des données du problème, ce que Fermat annonce d'ailleurs lui-même.

Regardons comment il résout le problème d'extrema en utilisant le procédé dit « d'adégalisation[137] » qui consiste en fait à traduire l'idée de proximité en considérant une variation qui va d'abord être petite mais non nulle pour pouvoir diviser par cette quantité, puis qui sera égale à zéro une fois effectuées certaines simplifications.[138]. Nous verrons ensuite que le travail de Fermat permet de plus de faire le lien entre les problèmes d'extrema et les problèmes de tangente.

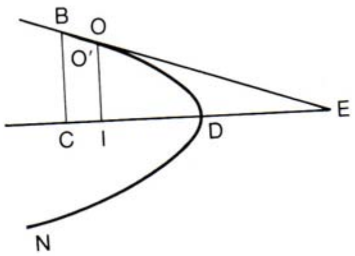
4.2.1.1.3.1 Le texte de Fermat

> *Soit à partager la droite AC en E de telle sorte que AExEC soit maximum ;*
> *Posons AC = b ; soit a un des segments l'autre sera b-a, et le produit dont on doit trouver le maximum est* $ba-a^2$ *;*
> *Soit maintenant a+e le premier segment de b, le second sera b-a-e et le produit des segments* $ba-a^2+be-2ae-e^2$ *;*
> *Il doit être adégalé au précédent* $ba-a^2$ *:* $(ba-a^2 = ba-a^2+be-2ae-e^2)$

[135] Parfois énoncé maintenant sous la forme « de tous les rectangles qui ont même périmètre, c'est le carré qui a l'aire la plus grande ».
[136] Dont Cavalieri (1598-1647).
137 Fermat faisait ici une référence à Diophante qui aurait utilisé ce terme.
138 C'est ce qui sera dénoncé par Berkeley (1734) à propos du travail de Newton en parlant du *« [..] double statut de l'infinitésimal tantôt assignable, tantôt nul »*. Cf Saelens (1995).

> *Supprimant les termes communs : be~2ae+e² ;*
> *Divisant tous les termes (par e) : b~2a+e ;*
> *Supprimez e : b~2a ;*
> *Pour résoudre le problème, il faut donc prendre la moitié de b. il est impossible de donner une méthode plus générale.*139
> *In (Tannery, 1912)*

Fermat propose ensuite de « *ramener à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques » :*

> *Soit donnée par exemple la parabole BDN, de sommet D, de diamètre DC ; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.*
> *Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B,*
>
> 
>
>
> *Le rapport de CD à DI sera plus grand que celui du carré de BC au carré de OI puisque le point O est extérieur à la parabole ;*
> *Mais à cause de la similitude des triangles, le carré de BC est au carré de OI comme le carré de CE est au carré de IE.*
> *Donc le rapport de CD à DI sera plus grand que celui du carré de CE au carré de IE.*
> *Or, le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C. Soit donc CD =d, donnée.*
> *Posons CE=a et CI=e ;*
> *Donc le rapport de d à d-e sera plus grand que celui de a² à a² + e²-2ae*
>
> *Faisant le produit des moyens et des extrêmes :*
> *da²+de²-2dae sera plus grand que da²-a²e*
> *Adégalons donc, d'après la méthode précédente ; on aura, en retranchant les termes communs*
> *de²-2dae~-a²e*
> *ou, ce qui revient au même*
> *de² + a²e ~2dae*
> *divisez tous les termes par e*
> *de + a² ~2da*
> *supprimez de ; il reste a² ~2da ; donc a=2d*
> *Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité(*)*
> *In (Tannery, 1912)*

139 On peut remarquer que la méthode de Fermat ne s'applique en fait qu'aux cas où la division de f(a+e)-f(a) par e se traduit par une simplification comme, par exemple, pour les polynômes.

4.2.1.1.3.2 Plusieurs conceptions et plusieurs rôles pour la tangente

Cette démonstration met toutefois déjà en évidence la coexistence de deux conceptions (sinon définitions) de la tangente, ainsi que la possibilité de lui faire jouer plusieurs rôles.

Fermat valide en effet sa technique numérique en utilisant un critère géométrique sur la tangente, à savoir « une droite[140] est tangente à une courbe si elle possède la propriété de la sous-tangente », conception qui ne sera plus valable pour des fonctions de degré supérieur à 2. De plus la technique numérique ainsi validée consiste à rechercher la tangente en utilisant le procédé d'adégalisation sur l'écart entre l'abscisse du point C et l'abscisse du point I, donc *« c'est comme si Fermat considérait la tangente comme une sécante ayant en commun avec la courbe deux points infiniment proches » (Saelens, 1995*) ».

Les auteurs de *« Mathématiques au fil des âges »* (Irem, 1987) considèrent par contre que lorsque Fermat procède à la *« recherche d'une tangente en rendant petite la différence entre les ordonnées de deux points d'intersection »*, cela reviendrait alors à chercher la position limite d'une sécante lorsque les points d'intersection tendent à se rapprocher. Cependant Fermat ne parle pas d'autres droites qui « tendraient » vers la tangente. Il y a donc en fait déjà ici un glissement dans les discours entre 1) considérer une quantité petite puis nulle, ce que fait Fermat et 2) rendre petite cette quantité, soit l'interprétation donnée par ces auteurs. Ce glissement existe aussi dans le domaine géométrique entre « sécante avec deux points infiniment proches [141]» et la fameuse « position limite de sécantes ». Nous verrons en 4.2.2.4.2 comment ce dernier aspect a finalement repris le dessus avec d'Alembert.

4.2.1.1.3.3 Généralisation de la méthode d'adégalité pour la recherche d'extrema

Dans le commentaire repris ci-dessous, Montucla (1758) exprime comment la méthode de Fermat permet aussi d'identifier les extrema d'une courbe.

> *[…] la méthode de maximis et minimis de Fermat est fondée sur le principe déjà aperçu par Kepler, à savoir que lorsqu'une grandeur, par exemple l'ordonnée d'une courbe, est parvenue à son maximum ou son minimum, dans une situation infiniment voisine, son accroissement ou sa diminution est nulle. En faisant usage de ce principe dont il est facile d'apercevoir la vérité nous allons voir naître la règle de Fermat. Car supposons qu'une ordonnée y, exprimée par une équation en x, soit parvenue à son maximum, il s'ensuivra qu'en supposant dans cette équation l'abscisse x augmentée ou diminuée*

140 Remarquons qu'elle doit ici aussi être extérieure à la courbe.

141Ce qu'on retrouve également dans la recherche algébrique de droites ayant une position particulière par rapport à une parabole lors de l'étude du second degré : on pose l'équation des points d'intersection et la tangente correspond à la « racine double » par opposition à la sécante correspondant au cas de deux racines distinctes.

> *d'une quantité infiniment petite comme e, ces deux valeurs de y seront égales. Par conséquent, si on les égale, qu'on en retranche les termes communs, qu'on divise par e autant qu'il est possible, et qu'enfin on supprime les termes où e se trouve (car ils sont nuls à l'égard des autres à cause de la petitesse infinie de e) on aura enfin la valeur de x, à laquelle répond la plus grande ordonnée.*
> *[…] De même que la règle de Descartes pour les questions de maximis et minimis, est sujette à quelques limitations particulières, celle de Fermat a aussi les siennes. Sa nature étant de donner les points d'une courbe où deux ordonnées infiniment proches sont égales, elle donne tous ceux où la tangente est parallèle à l'axe. [..] il faudra donc après avoir déterminé ces points, les examiner chacun en particulier et voir si au-delà l'ordonnée continue à croître ou à diminuer.*
> *(Montucla, 1758)*

Cet exemple nous montre comment la recherche « numérique » d'extrema est première par rapport au constat d'une tangente horizontale, tandis que les transpositions actuelles procèdent selon une démarche inverse. De manière générale nous pouvons aussi remarquer que la méthode de Fermat repose sur l'idée de proximité amenant à parler d'un accroissement infinitésimal, mais pas à proprement parler d'un taux d'accroissement. Enfin, soulignons que l'étude d'un sens de variation sur un intervalle n'est pas une préoccupation fondamentale. Il semble suffisant de déterminer un extremum et de *« voir si au-delà l'ordonnée continue à croître ou à diminuer »*.

4.2.1.2 Le théorème fondamental

A partir de Fermat, vont se développer d'autres méthodes (voir 4.2.2) dans lesquelles la tangente est déjà alternativement la tâche mathématique, une technique ou encore le discours. Le théorème fondamental, établi à peu près conjointement par I. Newton (1643-1727) et G.-W. Leibniz (1646-1716) au XVIIIème siècle, réunit ensuite les deux versants du calcul infinitésimal : dérivation et intégration. Il est à la fois l'occasion de fédérer les divers problèmes et discours justifiant le nouveau calcul basé sur la notion ambiguë d'infinitésimal, et de créer deux branches parmi les tâches génériques : d'une part, les problèmes de tangente, d'optimisation et dans une moindre mesure de vitesses, et, d'autre part, les problèmes d'aires dont la résolution est annoncée comme étant « l'inverse des précédentes ».
Quant aux discours appuyant les travaux qui ont conduit à la formulation de ce théorème, nous pouvons également distinguer deux formes. Les discours proposés jusque-là, par exemple par Fermat ou Barrow, faisaient appel à des indivisibles géométriques ou à des

infinitésimaux numériques, dont le double statut posait problème. Galilée, puis Roberval et Torricelli vont suggérer un discours basé sur des considérations cinématiques. Les deux types de discours utilisent en fait un argument de continuité, soit géométrique, soit cinématique. En effet, la continuité numérique ne sera « théoriquement » disponible qu'avec G. Cantor (1845-1918) et R. Dedekind (1831-1916). Le « divorce » entre ces deux types de continuité va devenir plus flagrant avec Newton et Leibniz qui formulent le même théorème, mais avec un discours cinématique pour l'un et un discours géométrique pour l'autre.

En effet, Newton propose une argumentation de nature cinématique, grâce à laquelle il évite l'usage d'infinitésimaux, qu'ils soient numériques ou géométriques. C'est alors la « continuité naturelle» du temps qui lui permet de valider l'existence de la dérivée comme un « rapport ultime » par analogie[142] avec l'existence d'une vitesse instantanée. Par contre, Leibniz cherche à s'appuyer sur un discours géométrique mais devra alors utiliser la tangente sans la définir. Nous allons ici développer le discours proposé par Newton, dans la mesure où c'est précisément une argumentation de nature cinématique qui sera proposée aux élèves-professeurs dans les expérimentations (voir au Chapitre 5). Le discours de Leibniz sera décrit plus brièvement, en insistant surtout sur le fait qu'il préfigure en quelque sorte le « cercle vicieux » entre tangente et dérivée.

4.2.1.2.1 Newton : un discours cinématique

Face au problème du double statut de l'infinitésimal, Barrow (voir en 4.2.1.1.1) avait précédemment ouvert une autre perspective en considérant le rapport de ces infinitésimaux. Par ailleurs, Galilée[143], puis Roberval et Torricelli (voir en 4.2.1.3) avaient déjà proposé un point de vue cinématique en considérant la courbe étudiée comme une trajectoire. Alors, le remplacement du point géométrique (ou du nombre) par la notion d'instant semblait faciliter l'acceptation du discours sans doute du fait que le temps est socialement admis comme variable continue universelle. Newton, élève de Barrow, va reprendre cette notion de « rapport » et utiliser également l'analogie[144] avec le mouvement, mais sous une autre forme, pour développer une théorie permettant de ne plus « affronter » les infinitésimaux.

---

[142] Le terme « analogie » fait ici plutôt référence à une expérience de pensée du type « c'est comme si » plutôt qu'à une reconnaissance de formes ce qui est le cas lorsque les élèves-professeurs parlent d'analogie entre les écritures.
[143] Galilée avait aussi mis en relation les problèmes de cinématique avec des problèmes de calculs d'aires.
[144] Voir notre remarque précédente sur le mot « analogie ».

Dans un premier stade de ses travaux sur les aires, Newton utilise des infinitésimaux « à la Fermat » c'est-à-dire sans faire clairement apparaître de taux d'accroissement (une idée de rapport étant cependant déjà présente du fait de la division par l'infinitésimal). Dans un deuxième stade où il travaille sur des problèmes de vitesses[145], Newton construit une théorie à partir des concepts de fluente et fluxion, la fluente étant une quantité qui évolue dans le temps tandis que la fluxion représente *« son taux d'écoulement dans le temps »* comme le dit Newton, ou sa vitesse.

Le texte ci-dessous amène le théorème fondamental mais nous pouvons surtout y voir comment Newton propose une méthode qui consiste en fait à procéder à une analogie (au sens d'expérience de pensée) de manière à traiter les problèmes en les ramenant à deux questions exprimables en termes de mouvement[146] :

> *Mais tout d'abord je voudrais observer que les difficultés de cette sorte peuvent toutes être ramenées à celles de deux problèmes seulement, qu'on me permettra de mettre en relation avec l'espace parcouru par un mouvement local accéléré ou retardé de manière quelconque.*
> *-la longueur de l'espace étant donnée continûment (c'est-à-dire à tout instant) trouver la vitesse du mouvement à n'importe quel instant donné;*
> *- la vitesse du mouvement étant donnée continûment, trouver la longueur de l'espace parcouru à un instant donné quelconque.*
> *Ainsi, dans l'équation* $x^2 = y$ *, si y désigne la longueur de l'espace parcouru en un temps quelconque mesuré et représenté par un second espace x croissant à vitesse uniforme, alors* $2 \cdot x \cdot \dot{x}$ *désignera la vitesse avec laquelle l'espace y se trouve parcouru au même moment du temps. Et donc en fait dans ce qui suit je considère les quantités comme si elles étaient engendrées par un accroissement continu à la manière de l'espace qu'un objet mobile décrit dans sa course.*
> *Newton, 1671, extrait de De methodis serierum et fluxionum*
> *In (Tannery, 1912)*

Remarquons que le temps n'apparaît donc pas comme une variable, mais plutôt *« comme un chronomètre invisible »* (Mankiewicz, 2001). La cinématique joue donc ici un rôle d'argumentation, le temps devant en fait être considéré comme une variable possédant une nature qui autorise certaines actions et certains raisonnements, comme le dit Newton :

145 D'après R. Mankiewicz (2001), l'idée lui en serait venue en considérant une ligne comme le lieu d'un point se déplaçant dans l'espace, c'est-à-dire en considérant la courbe comme une trajectoire.

146 Remarquons le mot « mouvement » signifie essentiellement maintenant « changement de lieu » mais peut également signifier changement (de n'importe quoi).

> *...dans ce qui suit, je ne considérerai pas le temps en lui-même formellement, mais parmi les quantités envisagées et qui sont de la même sorte, je supposerai que l'une croît d'un mouvement uniforme : toutes les autres pourront être repérées à celle-là comme si elle était le temps; et ainsi par analogie le nom de « temps » peut lui être conféré sans qu'il s'agisse d'une unipropriété. Ainsi chaque fois dans la suite que vous rencontrerez le mot « temps » que j'ai à l'occasion glissé dans mon texte par raison de clarté et de distinction) vous devriez par ce nom entendre non le temps considéré formellement, mais cette autre quantité qui exhibe et mesure le temps par son accroissement uniforme ».*
> *Newton, 1671*
> *In (Tannery, 1912)*

Cette utilisation du mouvement comme « fondement mathématique » se retrouve également dans le texte suivant :

> *je considère les quantités mathématiques décrites non par des parties constantes toutes petites mais par un mouvement continu. Les lignes sont décrites et sont engendrées, par la description, non de parties juxtaposées, mais par le mouvement continu de points, les surfaces par le mouvement de lignes, les solides par le mouvement de surfaces, les angles par la rotation de côtés, le temps par un flux continu, et ainsi des autres. »*
> *Newton, 1676, Tractatus de quadratura curvarum – introduction*
> *In (Tannery, 1912)*

Dans le dernier stade de son travail, Newton va éliminer le facteur temps pour ne plus s'intéresser qu'au rapport entre une variable quelconque et une autre, ici entre l'aire et l'abscisse puisqu'il travaille sur le théorème fondamental. En fait il va considérer non plus les fluxions, mais le rapport de ces fluxions ou « ultima ratio ». Dans nos notations les fluxions sont $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ et il va en faire le rapport $\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}$ en disant que $\frac{dy}{dt}$ est à $\frac{dx}{dt}$ comme dy est à dx[147]. Voyons un exemple de calcul où Newton utilise ce concept de taux d'accroissement d'une variable en fonction d'une autre.

On veut calculer $\frac{dx^n}{dx}$

> *que la quantité x s'écoule uniformément et soit à trouver la fluxion de la quantité x^n. Au moment où la quantité x en s'écoulant arrive à être x+o, la quantité x^n arrive à être $(x+o)^n$, c'est-à-dire par la méthode des séries infinies*
> $x + nox^{n-1} + n(n-1)/2o^2x^{n-2} + etc$
> *et les augmentations o et* $nox^{n-1} + n(n-1)/2o^2x^{n-2} + etc$

147 Comme si on simplifiait par dt dans l'écriture du rapport .

> *sont entre elles comme 1 et $nx^{n-1} + n(n-1)/2o \cdot x^{n-2}$ + etc*
> *que ces accroissement s'évanouissent alors et leur rapport ultime sera celui d 1 à nx^{n-1}.*
> *Par conséquent la fluxion de la quantité x est à la fluxion de la quantité x^n comme 1 est à nx^{n-1}*
> *Newton*
> *In (Tannery, 1912)*

On peut l'écrire comme suit. On veut calculer $\frac{dx^n}{dx}$.

$$\frac{dx^n}{dx} = \frac{(x+o)^n - x^n}{o} = \frac{nox^{n-1} + n(n-1)o^2x^{n-2} + ... + o^n}{o} = \frac{n \cdot x^{n-1} + n \cdot (n-1) \cdot o \cdot x^{n-2} + ... + o^{n-1}}{1}$$

(en divisant par o).

Le rapport ultime consiste à rendre o nul. En remplaçant la lettre o par le nombre 0, on obtient alors $\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}$.

Pour justifier un tel calcul, Newton met effectivement en évidence le rapport de fluxions $\frac{dx^n}{dt} \Big/ \frac{dy^n}{dt}$, égal au rapport d'accroissements ultimes $\frac{(x+o)^n - x^n}{o}$ quand o est nul.

> *les fluxions sont à très peu de choses près comme les accroissements des fluentes engendrés en des éléments de temps égaux très petits, et pour le dire précisément, elles sont dans le rapport initial des accroissements naissants*
> *Newton*
> *In (Tannery, 1912)*

Nous pouvons remarquer que la référence au temps est toujours là (« au moment où »). De plus, pour justifier ce calcul Newton parle du « rapport ultime » qui est $\frac{(x+o)^n - x^n}{o}$ quand o vaut zéro en précisant que le problème est dans la détermination d'un « instant » caractérisé par « la limite d'un rapport », et matérialisé jusque là par un point sur une courbe. Newton fait donc clairement apparaître notre notion de dérivée comme la limite du rapport de deux quantités tendant vers 0 en même temps[148] et avec sa « *méthode des première et dernière raisons* », il va d'abord se situer par rapport au raisonnement géométrique en introduisant l'idée de limite :

148 Encore une référence au temps !

> *J'ai préféré conduire les démonstrations des choses qui suivent au moyen des dernières sommes et raisons de quantités évanouissantes et aux premières sommes et raisons de quantités naissantes; c'est-à-dire jusqu'aux limites de ces sommes et raisons; et c'est pour cela que j'ai placé en premier lieu et aussi brièvement que possible les démonstrations de ces limites. Bien sûr ces démonstrations font prouver la même chose que la méthode des indivisibles, mais [...] lorsque dans la suite je considérerai des quantités comme formées de particules ou que je me servirai de petites lignes courbes comme de droites, je veux que l'on comprenne toujours par là non pas des quantités indivisibles mais des quantités divisibles évanouissantes; non les sommes de raisons de parties déterminées mais les limites des raisons extrêmes..*
> *Newton, Principia mathematica, Scholium, Livre I section 1, 1726*
> *trad. M.-F. Biarnais, Paris, Christian Bourgois, 1985*
> *In (Mankiewicz, 2001)*

Il continue ensuite à définir la notion de limite par la notion de vitesse instantanée en ayant recours à une analogie mécanique[149], et nous pouvons souligner dans son argumentation les nombreuses références temporelles (avant, après, au moment où):

> *On peut objecter qu'il n'y a aucune proportion derrière des quantités évanouissantes; puisqu'avant qu'elles s'évanouissent, leur proportion n'est pas la dernière et que, lorsqu'elles sont évanouies, leur proportion n'est plus. Mais on peut également soutenir par le même raisonnement qu'un corps qui parvient en un lieu déterminé n'a pas de dernière vitesse, quand son mouvement s'achève : en effet, avant qu'il atteigne ce lieu, il n'a pas de dernière vitesse et, quand il l'a atteint, il n'en a plus aucune. Mais la réponse est facile: par « dernière vitesse », il faut entendre la vitesse à laquelle le corps se meut, non pas avant qu'il atteigne son dernier lieu et que le mouvement cesse ni après, mais au moment même où il l'atteint; c'est-à-dire la vitesse même à laquelle le corps atteint le dernier lieu et cesse de se mouvoir. De même par « dernière raison »des quantités évanouissantes, il faut comprendre la raison qu'ont des quantités non pas avant de s'évanouir ni après, mais celles avec laquelle elles s'évanouissent. De même, la première raison des quantités naissantes est la raison avec laquelle [ces quantités] naissent.*
> *Newton, Principia mathematica, Scholium, Livre I section 1, 1726*
> *trad. M.-F. Biarnais, Paris, Christian Bourgois, 1985*
> *In (Mankiewicz, 2001)*

Ce court résumé[150] du travail de Newton nous montre donc que pour ne pas manipuler ces infinitésimaux, celui-ci propose de les regarder sous l'angle de quantités qui évoluent dans le temps et donc de s'appuyer sur des arguments de nature cinématique. C'est encore une analogie avec le mouvement d'un mobile dans le temps qui lui permet le passage à la limite. En fait c'est presque la vitesse instantanée qui définit la limite. Or, comme nous le verrons au

149 Cette analogie sera critiquée par Berkeley dans *l'Analyste* en 1734, parlant de *« fantômes de quantités défuntes »*. Il posait en fait le problème de la nature même de la vitesse instantanée : elle existe mais comment la mesurer puisqu'il faudrait au minimum un intervalle de temps?

150 Parmi tous les travaux de Newton, nous n'avons repris ici que les extraits portant sur l'utilisation de la continuité cinématique.

4.3, les transpositions actuellement disponibles supposent toujours acquise la notion de limite. En effet, elles proposent en général une démarche extraite de la théorie de l'analyse formalisée grâce aux travaux d'Euler et Cauchy ayant abouti à un renversement permettant de tout déduire à partir de la notion de limite. Les problèmes de cinématique devenant des illustrations[151] de la théorie, nous verrons que la tangente va devenir en quelque sorte l'alibi pour rendre nécessaire le passage à la limite du taux d'accroissement et c'est vraisemblablement ce rôle d'alibi qui amène à en chercher une définition, comme celle de « position limite de sécantes ». Toutefois, l'exemple de Leibniz va nous montrer que l'utilisation de la tangente comme instrument de conceptualisation était déjà présente.

4.2.1.2.2 *Leibniz : un discours géométrique*

Comme nous l'avons déjà annoncé précédemment, le discours de Leibniz va utiliser la notion de tangente en particulier lorsqu'il définit le théorème fondamental comme étant « le problème inverse des tangentes [152]».

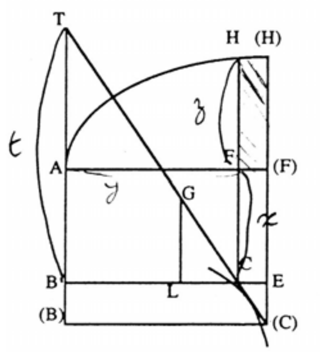
Le texte de Leibniz présenté ci-dessous nous indique comment celui-ci tente lui aussi d'éviter l'utilisation d'infinitésimaux, en recherchant à développer un discours géométrique.

Leibniz cherche à définir un rapport d'infinitésimaux directement par le biais de la similitude de deux triangles :

> *Je voudrais montrer à présent que le problème général des quadratures revient à construire une courbe dont les pentes obéissent à une loi donnée, c'est-à-dire sur laquelle les côtés du triangle caractéristique assignable aient entre eux telle relation donnée ; après quoi je montrerai qu'on peut construire cette courbe par le mouvement que j'ai imaginé. En effet pour toute courbe C(C), je considère un double triangle caractéristique, l'un assignable TBC, l'autre inassignable GLC, semblables entre eux.*

[151] Nous utilisons volontairement le mot illustration dans la mesure où le caractère fondamental n'est justement pas exploité dans cette démarche : Une fois définie la dérivée, la vitesse est définie comme dérivée de la position, sans autre questionnement.

[152] En comparant le théorème fondamental vu par Newton et vu par Leibniz, M. Schneider (1988) distingue le fait de « dériver la fonction intégrale » comme Newton ou d' « intégrer les différentielles » comme le fait Leibniz. La procédure de Leibniz est en effet directement liée aux tangentes, puisque l'intégrale mesure chez lui une dénivellation et que chaque dénivellation $f(x + \Delta x) - f(x)$ est approximée par $dy=f'(x)\,dx$ car la tangente trigonométrique de l'angle vaut la pente de la tangente géométrique.



Le triangle inassignable est délimité par les éléments GL et LC des coordonnées CF et CB qui en forment les côtés, et par l'arc élémentaire GC, constituant sa base ou hypoténuse. Mais le triangle assignable TBC est délimité par l'axe, l'ordonnée et la tangente, et exprime par conséquent l'angle que fait la direction de la courbe (c'est-à-dire aussi la direction de sa tangente) avec l'axe ou la base, autrement dit la pente de la courbe en un point donné C. Soit à quarrer la surface F(H) comprise entre la courbe H(H), les deux droites parallèles FH et (F)(H), et l'axe F(F) ; prenons sur celui-ci un point fixe A, prenons comme axe conjugué la droite AB perpendiculaire à AF passant par A, puis prenons sur chaque droite HF (qu'on aura au besoin prolongée) un point C, c'est-à-dire construisons une nouvelle courbe C(C) telle que, une fois tracées entre C et l'axe conjugué AB (prolongé au besoin), l'ordonnée conjuguée CB (égale à AF), mais aussi la tangente CT, la portion d'axe TB qu'elles délimitent soit avec BC dans le rapport de HF à la constante a, c'est-à-dire que le produit de a par BT soit égal au rectangle AFH (circonscrit au triligne AFHA). Dans ces conditions, je dis que le produit de a par E(C) (différence entre les ordonnées FC et (F)(C) de la courbe) est égal à la surface F(H) ; de ce fait, si on prolonge la courbe H(H) jusqu'à A, le triligne AFHA de la figure à quarrer est égal au produit de la constante a par l'ordonnée FC de la figure quadratrice. Mon calcul le montre immédiatement. Soit en effet AF=y, FH=z, BT=t, FC=x, nous aurons par hypothèse $t = \dfrac{z \cdot y}{a}$*, mais également* $t = \dfrac{y \cdot dx}{dy}$*, expression des Tangentes selon les formules de mon calcul, donc :* $a \cdot dx = z \cdot dy$ *et par conséquent* $a \cdot x = \int z \cdot dy = AFHA$*. La courbe C(C) est donc une quadratrice pour la courbe H(H), puisque le produit de son ordonnée FC par la constante a est égal à l'aire, c'est-à-dire à la somme des ordonnées de H(H) appliquées à leurs abscisses respectives AF. Partant, comme BT est avec AF dans le même rapport que FH avec a (par hypothèse) et que la relation de FH à AF (relation qui définit la figure à quarrer) est donnée, nous connaîtrons donc également la relation de BT à FH, c'est-à-dire la relation de BT à BC et donc celle de BT à TC, autrement dit la relation entre les côtés du triangle TBC. C'est pourquoi, il suffit, pour réaliser toutes les quadratures et toutes les mesures, d'être capable, à partir d'une relation donnée entre les côtés du triangle caractéristique assignable TBC, autrement dit, à partir de la loi des pentes, de tracer la courbe C(C), puisque nous avons montré qu'elle est une quadratrice.*
Leibniz
In (Tannery, 1912)

Or l'un de ces triangles est associé à la tangente. Comme Leibniz utilise ici une courbe qui n'est pas une parabole, mais à laquelle il applique la propriété de la sous-tangente[153], la tangente ne se retrouve alors plus définie que par « les côtés dx et dy », donc comme la droite joignant deux points infiniment proches, et le « cercle vicieux » est déjà là :

> *[..] la distinction des ordres de l'infinitésimal est offerte sans justification conceptuelle, mais sur le double modèle des procédures géométriques utilisées et rejetées à la fois par Roberval et Pascal, d'une part, de la doctrine des monades infiniment différenciées les unes des autres, d'autre part. De même, en indiquant que le rapport des différences* dy/dx *est égale à* $y/sous-tangente$*, Leibniz reste pris dans un cercle, car il définit la tangente en fonction des différences, ce qui révèle la difficulté à définir le vocabulaire de ce calcul tant que les concepts que les progrès du calcul permettront ne sont pas encore acquis, en particulier celui de limite.*
> *(Houzel, Ovaert, Raymond, Sansuc, 1976)*

Cette deuxième phase dans l'association des notions de tangente et de dérivée montre donc comment la tangente sort du cadre géométrique et rentre petit à petit dans le cadre numérique mais en devenant un objet ambigu. En élargissant le champ des courbes à étudier, la définition de la tangente doit changer mais une nouvelle définition est impossible car elle se heurte à un « cercle vicieux » entre les deux cadres et leurs objets respectifs, et à l'insuffisance du cadre numérique à exprimer la notion de continuité, ce qui contraint à l'aborder soit par la continuité géométrique, soit par la continuité cinématique.

4.2.1.3 Reformulation du calcul infinitésimal

La phase suivante va faire du calcul infinitésimal *« une discipline autonome qui se détache des problèmes qui en sont à l'origine (vitesses, tangentes,..) et qui par la même occasion s'affranchit de la physique et de la géométrie ». (Saelens,1995).* Euler (1701-1783) provoque un premier renversement en introduisant la notion de fonction au premier plan. Lagrange (1736-1813) amplifie ce renversement et reformule le calcul infinitésimal en termes de fonction dérivée et fonction primitive. Enfin, Cauchy (1789-1857) définit l'intégrale définie et la dérivée comme étant des « sous-produits » de la limite.

[153] Voir l'analyse de M. Schneider dans Saelens (1995).

C'est dans cette phase que l'on voit apparaître le mot « dérivée [154]» chez Lagrange qui propose une construction algébrique des « dérivées successives d'une fonction » à partir du taux d'accroissement (f(x+i) – f(i))/i ou taux de variation dont l'expression devient plus explicite du fait des notations utilisées

Voyons la construction de Lagrange :

> *Lagrange définit pour commencer la fonction P = (f(x+i) – f(x))/i*
> *P est une fonction de x et de i*
> *Lagrange va ensuite séparer ce qui est indépendant de i et qui par conséquent ne s'évanouit pas lorsque i devient nul.*
> *Soit p ce que devient P lorsque i= 0. L'expression p est une fonction de x uniquement, donc on peut écrire p(x).*
> *Dès lors on peut réécrire P comme p + iQ avec iQ étant la partie de P qui devient nulle lorsque i=0. Q est à son tour une fonction de x et de i, que l'on peut écrire Q(x,i) = P-p/i*
> *Soit q ce que devient Q lorsque i=0. L'expression q est à nouveau une fonction de x uniquement.*
> *On peut alors écrire Q = q iR avec iR étant la partie de Q qui devient nulle lorsque i=0.*
> *En continuant ainsi de suite, on peut écrire*
> $f(x+i)= \quad f(x) + iP$
> $\quad f(x) + i(p+iQ)$
> $\quad f(x) + ip + i^2Q$
> $\quad f(x) + ip + i^2(q+iR)$
> $\quad f(x) + ip + i2q + i3R$
> *…*
> *Les coefficients de i, $i^{2,}$ i^3.. c'est-à-dire p, q, r sont appelées par Lagrange dérivées successives de f.*
> *Lagrange, …..*
> *In (Tannery, 1912)*

Lagrange conserve comme objectif de ne plus utiliser d'infinitésimaux et va commencer à travailler par développements en série, encadrements des restes et majorations.

A la suite d'Euler, Lagrange considère donc la fonction comme l'objet fondamental par rapport auquel on définit la dérivée. Et c'est au même Lagrange que l'on devra le théorème des accroissements finis dans lequel, pour reprendre les termes de Berlinski (2001) :

> *...c'est la dérivée qui en vient à commander la fonction, ce qui fait naître l'idée extraordinaire que les mathématiciens ont trouvé dans la dérivée un outil susceptible d'illuminer dans toute une gamme de tons la nature globale d'une fonction grâce à la lumière intense qu'il jette sur son caractère local.*
> *(Berlinski, 2001)*

154 Voir aussi Matheron (2000a).

C'est un peu comme si, alors que le développement théorique avait nécessité de mettre la dérivée au second plan, celle-ci récupérait son rôle premier historique au travers du théorème des accroissements finis, qui est d'ailleurs également utilisé pour montrer que la primitive d'une fonction nulle est une fonction constante, et par là le théorème fondamental.

Maintenant, la dérivée, qui va devenir un objet de l'analyse, recevra avec Cauchy sa définition comme limite du taux d'accroissement d'une fonction et n'a, semble-t-il, plus rien à voir avec la tangente jusqu'à ce que la tangente soit regardée sous l'angle strictement analytique comme représentation graphique d'une fonction d'approximation.
On pourrait dire que l'on rentre dans le cadre de rationalité II, la notion de limite fournissant un outil de preuve. Pourtant, lorsque Cauchy définit la limite dans son cours d'Analyse, nous remarquons qu'il utilise encore un verbe de mouvement (s'approcher) pour définir une notion se voulant purement numérique :

> *lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres*
> *(Cauchy, 1821)*

De plus il ne se débarrasse pas tout à fait

1) ni des infinitésimaux : « une quantité infiniment petite » ;

2) ni de la référence au temps : des valeurs numériques successives » ;

> *lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent infiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite...*
> *(Cauchy, 1821)*

Et il a encore recours à la géométrie puisque pour démontrer le théorème des valeurs intermédiaires, il dira « il suffit de faire voir... »

> *Théorème. Si la fonction (x) est continue par rapport à la variable x entre les limites* $x = x_0$ *et* $x = X$ *, et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre* $f(x_0)$ *et* $f(X)$ *on pourra toujours satisfaire à l'équation* $f(x) = b$
> *Démonstration. Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation* $y = f(x)$ *rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation* $y = b$
> *[..]*
> *et c'est évidemment ce qui a lieu*

> *[..] la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x = x_0$ et $x = X$,*
> *la courbe qui a pour équation $y = f(x)$ et qui passe par les points correspondant aux coordonnées $x_0, f(x_0)$ et $X, f(X)$ sera continue entre ces deux points.*
> *[..]*
> *Cauchy*
> *In (Tannery, 1912)*

Nous allons donc voir dans la section suivante comment le texte de Bolzano à ce sujet permet sur le plan mathématique de constituer l'analyse comme champ complètement autonome et de rentrer définitivement dans ce cadre II. Nous verrons d'ailleurs aussi comment ce même texte demandant des fondements numériques à l'analyse fournit aussi une distinction claire entre deux fonctions différentes : justifier mathématiquement (rationalité II) ou « éclairer » (Rationalité I).

4.2.1.4 Un mode de validation sans référence géométrique ou cinématique

4.2.1.4.1 Bolzano : 3 types de discours

C'est un texte de Bolzano (1741-1848) en 1817 qui marque en quelque sorte la fin de l'autosuffisance de la géométrie en termes de preuves. Intervenant après Euler et à l'époque de Cauchy et de la « nouvelle rigueur en analyse », Bolzano cherche à préciser la notion de continuité pour démontrer le théorème des valeurs intermédiaires portant sur une fonction.
Si Cauchy proposait encore d'utiliser comme démonstration la continuité de la courbe[155], Bolzano va récuser les preuves géométriques et installer de plus une hiérarchie dans les mathématiques en distinguant, d'une part, des mathématiques pures (ou générales) qui seraient arithmétique, algèbre, analyse, et, d'autre part, des mathématiques appliquées (ou spéciales) dans lesquelles il place la géométrie.
Dans ce même texte, Bolzano refuse également que les preuves fassent intervenir des concepts de temps et de mouvement, qui sont pour lui aussi étrangers aux mathématiques que celui d'espace, tout en précisant qu'on peut les mentionner « *en tant qu'éclaircissement* ». Il demande en conséquence une « *démonstration purement analytique* ».

[155] Le théorème peut alors être « illustré » par une figure qui « montre » bien que la fonction « passe forcément » par une valeur intermédiaire, « parce que » la courbe traverse la droite associée à cette valeur.

Nous reproduisons ci-dessous le texte de Bolzano dans intégralité. En effet, même si il est long, ce texte nous intéresse pour notre étude, et ce à plusieurs titres.

S'il propose de refuser une pseudo-preuve géométrique et de lui préférer une preuve purement analytique, il autorise l'utilisation de références au temps et au mouvement comme « éclaircissement ». Il distingue donc déjà trois discours dont les deux premiers ont leur place dans le bloc technologico-théorique à savoir :

- la preuve analytique qui va être la théorie, et qui correspondra à une rationalité de type II ; nous parlerons alors de discours de niveau 2 ;
- un « éclaircissement » qui peut être notre discours technologique, et qui correspondra à une rationalité de type I ; nous parlerons alors de discours de niveau 1 ;
- la pseudo-preuve géométrique qui doit selon lui être écartée, et qui ne correspond à aucun des deux cadres de rationalité que nous avons identifiés ; nous parlerons alors de discours de niveau 0[156].

Ce texte de Bolzano nous a de plus paru intéressant dans la mesure où il contient en quelque sorte les contradictions manifestées par les élèves-professeurs dans leur présentation des sujets liés aux concepts de dérivée et de variation d'une fonction. En effet la classification des discours par Bolzano peut aussi s'appliquer aux discours rencontrés pour la validation du critère de croissance. L'aspect géométrique, et l'aspect cinématique le cas échéant, interviennent effectivement avec un statut peu clair par rapport à la théorie, ce qui se retrouve dans les termes utilisés : « interprétation géométrique », « illustration géométrique », « application ». Mais, au contraire de Bolzano qui souhaite un raisonnement analytique et le développe effectivement (rationalité II), les élèves-professeurs ne parviennent pas à motiver la nécessité de construire les concepts d'analyse. Le rôle respectif du cadre géométrique, du cadre analytique et des concepts leur appartenant n'est donc pas exploité[157.]

Bolzano récusait le discours de niveau 0 pour admettre les discours de niveaux 1 et 2, tandis que les élèves-professeurs ne pouvant pas développer le discours théorique appris, ni utiliser

[156] Bien sûr l'illustration par la figure reste un éclaircissement et pourrait rentrer dans le discours 1. Elle ne correspond au discours de niveau 0 que lorsqu'elle est présentée comme seul accompagnement d'un énoncé, prenant alors un autre statut.

[157] C'est le même phénomène que l'on retrouve lorsqu'on illustre les identités remarquables en algèbre par des constructions géométriques sans expliciter lequel explique l'autre.

le mouvement comme concept fondateur[158], sont donc coincés et ne pouvant rentrer ni dans le 1 ni dans le 2 vont en quelque sorte « se réfugier » dans le 0 mais en l'appuyant par les résultats maintenant connus du niveau de rationalité II. C'est pourquoi nous le qualifierons désormais de discours de niveau 2bis. Si le détachement du mouvement avait pour but de construire « la nouvelle rigueur en analyse », il semble que, chez les élèves-professeurs, ce soit « la rigueur en analyse » apprise dans les théories qui empêche de l'expliquer par le mouvement dans un discours qui serait alors « non rigoureux ».

4.2.1.4.2 *Texte de Bolzano*

> *Lorsqu'on examine de plus près leurs méthodes de démonstration, il apparaît très vite qu'aucune ne peut être considérée comme suffisante.*
> *I)Dans la méthode de démonstration la plus courante, on s'appuie sur une vérité empruntée à la géométrie : à savoir que toute ligne continue à courbure simple sont les ordonnées sont d'abord positives puis négatives (ou inversement) doit nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées. Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la justesse ni contre l'évidence de ce théorème géométrique. Mai s'il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques pures (ou générales), c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse, des considérations qui appartiennent à une partie appliquée (ou spéciale) seule, à savoir la géométrie.*
> *Si l'on insiste pour être conséquent ailleurs, ne doit-on pas s'efforcer de l'être ici aussi ? En effet dans la science, les démonstrations de doivent nullement être de simples procédés de « fabrication d'évidences », mais doivent être bien plutôt des fondements ; il faut exposer le fondement objectif que possède la vérité à démontrer : celui qui se rend compte de lui-même de cela saura qu'une démonstration véritablement scientifique, c'est-à-dire le fondement objectif d'une vérité valable pour toutes les grandeurs, qu'elles soient ou non dans l'espace, ne peut pas se trouver dans une vérité valable seulement pour des grandeurs qui appartiennent à l'espace. Conformément à cette opinion, une telle démonstration géométrique est un vrai cercle vicieux dans la plupart des cas et en particulier dans le cas présent, comme on comprend facilement.*
> *II) Il faut rejeter de même la démonstration que certains ont établie à partir du concept de continuité d'une fonction en y faisant intervenir les concepts de temps et de mouvement. « Si deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$, disent-ils, varient suivant la loi de continuité, et si pour $x=\alpha$, $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$, mais pour $x=\beta$, $f(\beta)<\varphi(\beta)$; alors il doit y avoir une valeur intermédiaire u entre α et β pour laquelle $f(u)= \varphi(u)$. Car si l'on imagine que la grandeur variable x dans ces deux fonctions prend successivement toutes les valeurs intermédiaires entre α et β et prend au même instant toujours la même valeur à gauche et à droite : alors au début de cette variation continue de la valeur de x, on a $f(x)<\varphi(x)$ et à la fin $f(x)>\varphi(x)$,. Mais comme les deux fonctions doivent d'abord grâce à leur continuité parcourir toutes les valeurs intermédiaires avant de pouvoir atteindre une valeur supérieure x, de même il faut qu'il y ait un certain instant intermédiaire pour lequel les deux valeurs sont égales ». On rend sensible ceci encore par l'exemple du*

[158] Les entretiens et productions montrent en effet qu'ils « se justifient » en faisant appel à une sorte de hiérarchie des domaines, dans laquelle un discours basé sur le mouvement ne serait pas « mathématique ».

> *mouvement de deux corps dont l'un était au début derrière l'autre, l'a devancé à la fin, et doit donc nécessairement avoir une fois passé à côté de lui.*
> *Les concepts de temps et de mouvement, et celui-ci plus encore, sont tout aussi étrangers aux mathématiques générales que le concept d'espace, cela ne peut être mis en doute par personne. Toutefois, nous n'aurions rien à objecter si ces deux concepts n'y étaient introduits qu'en tant qu'éclaircissement. Car nous ne sommes en aucune façon partisan d'un purisme tel qu'il exige, pour maintenir la science pure de tout élément étranger, de refuser dans l'exposé de la science toute expression empruntée à un domaine étranger, ne serait-ce qu'avec une signification figurée et dans l'intention de désigner ainsi une chose d'une façon plus brève et plus claire que ce n'est possible par une description conçue uniquement dans des termes particuliers, ne serait-ce même que pour éviter la cacophonie de la répétition continuelle des mêmes mots ou pour rappeler un exemple qui peut servir à confirmer la thèse simplement par un nom donné à la chose. Comme on peut le voir en même temps, nous sommes loin de tenir les exemples et les applications pour des choses qui nuiraient à la perfection d'un exposé scientifique. Nous n'exigeons fermement que ceci : on ne proposera jamais des exemples en place des démonstrations, on ne fondera jamais l'essentiel de la déduction sur des expressions du langage employées improprement et sur les représentations secondaires qu'elles portent avec elles : la déduction ne serait pas valable dès qu'on change l'expression.*
> *(Preuve purement analytique du théorème qui dit qu'entre deux valeurs qui donnent des résultats de signe opposé, il y a au moins une solution réelle de l'équation, 225-48, 1817)*
> *In (Tannery, 1912)*

4.2.1.4.3 La construction des réels

La démonstration par Bolzano du théorème des valeurs intermédiaires va utiliser celui de la borne supérieure qu'il démontre avec une construction d'intervalles emboîtés, mettant donc en évidence la question de la nature de la variable, l'aboutissement de cette construction n'étant plus valable pour des rationnels.

Même si c'est après avoir défini la continuité d'une fonction, il va falloir préciser la continuité de l'ensemble des nombres avec lesquels on travaille. Ce sera l'oeuvre de Cantor et Dedekind, qui même s'ils procèdent différemment auraient tout de suite reconnu l'équivalence de leurs constructions[159]. Les coupures de Dedekind en particulier manifestent la volonté de réaliser une symbiose entre les nombres et le continu géométrique:

> *if now, as is our desire, we try to follow up arithmetically all phenomena in the straight line, the domain of rational numbers is insufficient and it becomes absolutely necessary that the instrument R constructed by the creation of the rational numbers be essentially improved by the creation of new numbers such that the domain of numbers shall again*

[159] Irem (1999)

> *the same completeness, or as we may say at once, the same continuity, as the straight line.*
> *In (Tannery, 1912)*

Alors cette construction des nombres fournira la possibilité de prouver les propriétés jusque-là simplement admises car visuellement évidentes :

> *une propriété limite, essentielle, des nombres réels : si l'on prend une infinité de segments non vides, emboîtés les uns dans les autres, leur intersection contient au moins un point. C'est une propriété nécessaire pour la bonne marche de la méthode de dichotomie à l'œuvre dès les mathématiques grecques, mais elle a été passée sous silence tant elle paraissait évidente sous cette forme géométrique.*
> *(Irem, 1987)*

C'est peut-être aussi à cause de cette évidence visuelle que l'ensemble des réels est utilisé de manière assez « naturelle » dans le secondaire, généralement après l'introduction de la notion de racine carrée donnant accès aux irrationnels, sous la forme de « on prend les rationnels et les irrationnels et ça s'appelle $\mathbb{R}$ ».

Les relations entre la construction des réels, la définition axiomatique, les écritures décimales, les conceptions, et les fonctions[160] de ces nombres sont encore fort peu abordées. On peut en trouver une analyse plus complète dans Gilbert & Rouche (2001).

4.2.1.5 Conclusion

Cette lecture de quelques extraits choisis de l'évolution historique des notions de tangente et dérivée montre une capacité particulière de l'objet tangente à apparaître dans tous les cadres mathématiques et tous les registres d'expression associés, devenant définitivement un objet complexe et multiforme, ce qui inciterait à le manier avec précautions. La détermination de tangente est une des questions à l'origine du calcul infinitésimal mais elle possède par rapport aux autres l'atout d'être un problème géométrique, ce qui lui confère un double avantage sur le plan de la légitimité et sur le plan visuel, amenant même à faire oublier son problématique statut d'objet mental.

[160] Faut-il par exemple les considérer comme « un bon modèle du temps » ou en douter ? (Lombardi, 1999).

Si c'est la dérivée qui émergera comme technique commune aux différentes tâches, l'objet tangente conserve une prédisposition à y être lié, sans doute de par sa propre association avec les différentes tâches, toujours grâce à cet avantage : à la question des extrema est associée une position particulière de la tangente, le lien entre quadrature et tangente sera explicité par Leibniz et les concepts de tangente et de vitesse sont effectivement associés chez Roberval.

4.2.2 La tangente : de la tâche mathématique à la technique didactique

Par contre, l'association du concept de tangente à la question des variations sur un intervalle paraît ne pas relever du développement historique des notions. C'est pourtant une caractéristique des transpositions les plus fréquemment rencontrées dans les manuels pour illustrer le Théorème des Accroissements Finis. Une fois choisie par les élèves-professeurs, cette transposition aboutit même à utiliser la tangente comme explication : « la fonction est croissante car la tangente monte », au risque de créer un obstacle lié au passage entre le caractère ponctuel et le caractère local du comportement d'une fonction[161].

C'est pourquoi nous adopterons dans cette section un point de vue consistant à analyser les glissements possibles dans les conceptions de l'objet mais aussi dans ses fonctions au sein d'organisations mathématiques puis didactiques. Nous montrerons ainsi les prolongements de l'évolution historique, la tangente passant de la tâche mathématique, lorsque le problème est de la construire, à la technique mathématique, lorsque c'est la tangente qui permet de construire le graphique d'une fonction vérifiant certaines conditions.

Cette même lecture nous amènera également à comparer le destin mathématique et didactique de la tangente avec celui de la vitesse, elle aussi tâche « génétique » pour la dérivée mais dont l'utilisation comme technique didactique se révélera être un enjeu de notre étude.

[161] En effet, la tangente est associée à un point tandis qu'on demande d'en déduire une propriété sur un intervalle.

4.2.2.1 La tangente comme tâche : méthodes et conceptions diverses

Lorsque la tangente est l'objet à construire, il est possible de distinguer plusieurs conceptions.

La conception première est celle donnée par Euclide parlant d'une droite restant du même côté de la courbe avec laquelle elle a un seul point d'intersection. Appolonius utilise la même définition qu'il étend à d'autres courbes, dont la parabole. Il remplace alors la définition d'Euclide par un critère, celui de la sous-tangente.

4.2.2.1.1 Conception infinitésimale : Fermat et Barrow

La conception infinitésimale se trouve dans les travaux de Fermat et Barrow, dont les procédures infinitésimales sont validées par la propriété géométrique.

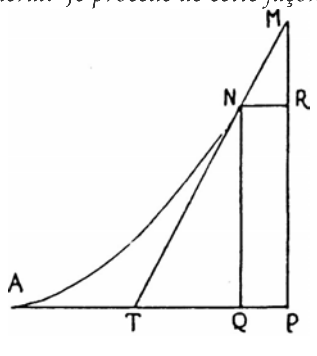
Nous avons décrit précédemment la méthode de Fermat pour tracer la tangente à une courbe, généralisant la méthode d'adégalité, et faisant intervenir un accroissement infinitésimal que l'on pouvait utiliser dans le calcul, y compris pour diviser, puis considérer comme nul après simplification.

La procédure utilisée ensuite par Barrow (1630-1677) pour construire une tangente va par contre recourir à deux nombres infinitésimaux et surtout à leur rapport, préfigurant ainsi la dérivée.

4.2.2.1.1.1 Construction de la tangente avec deux infinitésimaux par Barrow

Voyons ci-dessous son introduction.

> *Ainsi nous nous sommes acquittés de la première partie de notre exposé. En complément, sous forme d'un appendice, nous ajouterons une méthode que nous utilisons du calcul des tangentes. Toutefois je ne sais pas, après tant de méthodes déjà connues et rejetées, si on peut faire quelque chose de l'emploi de celle-ci. Encore fais-je ceci sur les conseils d'un ami; d'autant plus volontiers que ce que j'ai traité devant les autres parait fructueux et général. Je procède de cette façon.*



> *Soient AP, PM deux lignes droites données en position telles que PM coupe la courbe proposée en M et MT supposée toucher la courbe en M, et couper la droite AP en T, comme je cherche maintenant la quantité PT de la même droite, je pose l'arc de courbe MN indéfiniment petit; alors je trace les droites, NQ parallèle à MP, et NR à AP; je nomme MP=m ; PT=t; PR=a; NR=e ; quant aux restes des droites, déterminée par la nature particulière de la courbe et utiles à la proposition,je les désigne par leur nom; je compare par le calcul au moyen de l'équation considérée MR, NR elles-mêmes (et par le moyen de celles-ci MP, PT); en observant simultanément ces règles.*
> *Parmi ce qui est calculé je jette tous es termes dans lesquels a ou bien e sont des puissances d'eux-mêmes, ou bien dans lesquels ils sont multipliés entre eux (en effet, ces termes ne valent rien).*
> *Après avoir établi légalité, je jette tous les termes dont les lettres désignent des quantités constantes ou bien fixées; ou bien dans lesquels on n'a pas a ou e (en effet ces termes amenés dans une des parties de l'égalité seront toujours rendus égaux à rien.*
> *Je substitue à la place de a m lui-même; (ou bien MP) à la place de e t lui-même (ou bien PT). Delà on trouvera précisément les valeurs de PT elles-mêmes.*
> *Parce que si une partie indéfiniment petite d'une courbe quelconque entre dans le calcul; on pourra substituer à cet endroit une partie de tangente; ou bien (à cause de l'infinie ténuité de l'arc de courbe) n'importe quelle droite équipollente à celle-ci.*
> *Barrow*
> *In (Tannery, 1912)*

4.2.2.1.1.2 Commentaires

La méthode de Barrow appliquée à la parabole pourrait sembler l'équivalent des activités actuellement proposées pour introduire la dérivée, puisqu'elle présente la dérivée comme rapport de deux infinitésimaux avec la tangente géométrique et même la tangente comme approximation de la courbe. Mais les différences sont importantes au sens où les activités que nous verrons cumulent les difficultés, tandis qu'ici chaque problématique explique une autre. Rappelons à ce sujet que notre préoccupation concerne l'introduction de la dérivée et non celle de la tangente, mais que précisément la tangente intervient toujours de manière non pertinente dans cette introduction de la dérivée. La différence essentielle nous semble être dans le fait que Barrow utilise les cadres géométrique et numérique d'une manière très claire si nous tentons une interprétation sous l'angle outil/objet. Dans le cadre géométrique, la tangente à la parabole est un objet mathématiquement connu comme tangente à une conique caractérisée par la propriété de la sous-tangente. En prenant deux points sur la courbe et en traduisant leur infinie proximité par la possibilité de négliger certains termes dans le calcul, Barrow travaille dans le cadre numérique avec une dérivée apparaissant comme outil implicite. Ensuite il revient dans le cadre géométrique pour valider sa procédure puisqu'il retrouve bien la droite vérifiant la propriété de sous-tangente.

Cette clarté dans l'articulation des cadres est renforcée par le fait que, même si le rapport a/e est déjà une dérivée en tant que rapport de deux infinitésimaux, Barrow ne va pas chercher à calculer le taux d'accroissement a/e par approximations successives en passant par d'autres taux, et donc d'autres droites. Il s'agit de points géométriques infiniment proches dont la proximité est directement traduite numériquement par les deux infinitésimaux, même si le problème que pose le rapport de ces infinitésimaux est « évacué » par assimilation du triangle de dimensions infinitésimales à un triangle aux dimensions « normales ». Les transpositions actuelles vont par contre moins clairement distinguer les cadres en faisant référence à des points « qui tendent l'un vers l'autre [162]» puis à des droites « qui tendent vers la tangente ». Une interprétation pourrait être que l'expression « infiniment proches », pourtant assez naturelle, va obliger à se heurter au double statut de l'infinitésimal qui semble anti-naturel. Une échappatoire à cette difficulté serait alors le fait d'évoquer une convergence de nature géométrique dont on n'ose pas contester l'évidence parce qu'elle est visuelle.

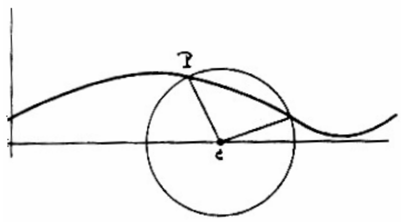
4.2.2.1.2 *Conception algébrisée : Descartes*

Une autre conception, plus algébrisée, est celle proposée par Descartes. En effet, si Fermat avait commencé à algébriser la géométrie en utilisant la propriété spécifique[163], c'est-à-dire l'expression analytique de la courbe, ainsi que des variables et les accroissements de ces variables désignés par des lettres, Descartes poursuivra cette algébrisation en proposant une méthode qui « joue » sur un trio courbe/cercle/droite et leurs intersections. On retrouve finalement ici le fait qu'Euclide avait proposé des définitions 1) pour la tangente à un cercle et 2) pour deux cercles tangents, sans parler de tangente à une courbe.

Pour déterminer la tangente en un point P d'une courbe, Descartes suggère en effet de considérer un cercle passant par P et centré en un point (c,0) quelconque de l'axe des x. On calcule les intersections du cercle et de la courbe, puis on détermine la valeur de c pour

162 Notre lecture de plusieurs ouvrages sur l'histoire des mathématiques montre que la notion de points infiniment proches semble précisément avoir été systématiquement traduite en « points dont l'un s'approche de l'autre » qui n'est pourtant pas ce qu'on retrouve dans les textes originaux. Il est vrai que parmi les deux points, l'un joue un rôle de repère puisque le deuxième est « à+e » du premier ou bien « à +dx et +dy » du premier mais cela nous paraît plutôt exprimer l'idée : « un point dont on fait semblant qu'il soit deux ».
163 Déjà présente chez Apollonius.

laquelle les points d'intersection sont confondus. Le cercle centré en cette valeur est alors tangent à la courbe en P et le calcul de la tangente à la courbe est ramené à celui de la tangente à un cercle. C'est une méthode algébrique (recherche de la condition sur c) dont les limitations sont liées à la complexité de l'équation de la courbe.



La tangente chez Descartes, In (Krysinska & Hauchart, 1993)

4.2.2.1.3 *Conception cinématique : Roberval*

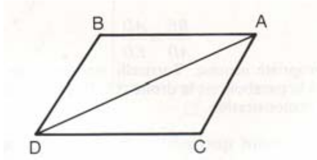
L'approche cinématique trouve sa source[164] dans la loi du mouvement des projectiles énoncée par Galilée :

> *un projectile qu'entraîne un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement naturellement accéléré vers le bas décrit au cours de son déplacement une trajectoire semi-parabolique.*
> *Discours sur les deux sciences nouvelles*
> *In (Irem, 1987)*

Tandis que Galilée va relier les questions de vitesse à celle de calcul d'aires en cherchant à comparer les espaces parcourus par des mobiles dont il connaît les vitesses, Torricelli et Roberval vont relier la notion de vitesse et celle de tangente. Torricelli pose

> *« si un mobile est transporté à partir de l'angle d'un parallélogramme ou à partir de n'importe quel point du diamètre, d'un double mouvement uniforme, c'est-à-dire simultanément d'un mouvement vers l'avant selon la ligne AC et d'un mouvement sur le côté selon la ligne AB, inclinée d'une manière quelconque et que la proportion des deux vitesses soit la même que celle des deux côtés AC et AB pris de manière homologue. Je dis que le mobile se déplacera selon le diamètre AB, c'est-à-dire le long de ce diamètre »*
> *Du mouvement, 1644*
> *In (Irem, 1987)*

[164] Il semble toutefois qu'une approche cinématique ait déjà été présente dans la construction de la tangente à une spirale par Archimède, *qui « définit la spirale comme le lieu d'un point qui parcourt avec une vitesse constante une demi-droite qui tourne elle-même autour d'une de ses extrémités avec une vitesse angulaire constante* » (Dahan-DAlmedico et Peiffer, 1986)

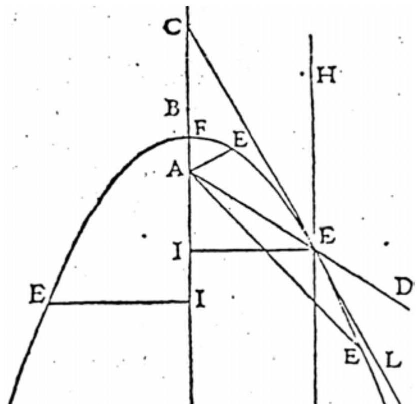


De même Roberval[165] pose un « principe » qui, pour nous, revient à dire que le vecteur-vitesse est tangent à la trajectoire.

> *axiome ou principe d'invention :*
> *la direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là*
> *proposition cinquième du problème I ; observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes ; extraits, vers 1636*
> *In (Irem, 1999)*

Roberval construira ainsi les tangentes à différentes courbes, dans la limite de celles qui peuvent être décrites comme résultant d'un mouvement, ce qui n'était déjà pas le cas de toutes les courbes connues à l'époque. Nous reproduisons ci-dessous une démonstration de Roberval traitant le cas de la parabole.

> *Soit que l'on nous ait donné la parabole EFE et le moyen de la décrire par la cinquième méthode générale de Monsieur Mydorge livre second, proposition 25 qui est telle.*
> *Le sommet et le foyer de la parabole étant donnés de position, trouver dans le même plan autant de points qu'on voudra par lesquels la parabole est décrite.*



> *Soit A le foyer et F le sommet: soit tirée la ligne AF et prolongée de F vers B, et soit FB égale à AF la même ligne BFA fera l'axe de la parabole. Prenez dans FA autant de points I qu'il vous plaira, tirez par ces points des perpendiculaires à FA; du centre A et de l'intervalle d'entre chaque perpendiculaire et le point B comme BI, décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en E, la parabole*

165 Selon Kline (1972) Roberval généralise la méthode qu'Archimède utilise pour trouver la tangente en tout point d'une spirale.

> *passera par les points E. Cela posé, si l'on demande la touchante de la parabole au point e, soit tirée la ligne AE prolongée comme en D, et la ligne EI perpendiculaire à AB et encore la ligne HE parallèle à l'axe FAI, alors il est clair par la description ci-dessus que le mouvement du point E décrivant la parabole, est composé de deux mouvements droits égaux, dont l'un est la ligne AE et l'autre est la ligne HE sur laquelle il se meut de même vitesse que le point I dans la ligne BA, laquelle vitesse est pareille à celle de la ligne AE par la construction, puisque AE est toujours égal à BI. Partant puisque la direction de ces mouvements égaux est connue, à savoir suivant les lignes droites AED, HE données de position, si vous divisez l'angle AEH en deux également par la ligne LEC qui est le diamètre d'un rhombe [166]autour de l'angle AEH (et par conséquent la direction du mouvement composé des deux HE, AE) la ligne LEC est la touchante.*
> *In (Tannery, 1912)*

Remarquons que cette démonstration, reposant toujours sur la propriété géométrique de la tangente, ne comporte pas directement d'argumentation liée au caractère local en termes de proximité des points. Elle est finalement moins proche de la notion de dérivée que la méthode de Fermat. Cependant le fait de considérer la courbe étudiée comme trajectoire d'un mobile amène finalement à associer le point géométrique à la notion d'instant. Le mobile est soumis à deux vitesses constantes en norme mais dont l'une a une direction fixe tandis que l'autre varie en direction et « *tout se passe comme si on figeait cette direction, l'espace d'un instant* » (Saelens, 1995). La notion d'infinitésimal, problématique quant au statut numérique à lui accorder, est donc en quelque sorte remplacée par la notion d'instant.

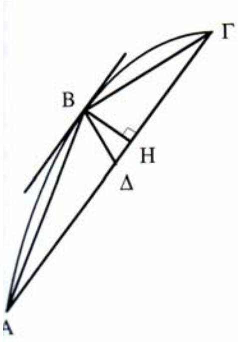
4.2.2.2 La tangente comme technique

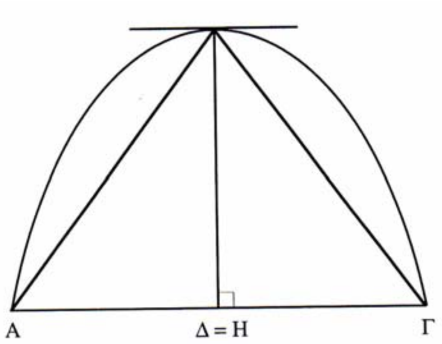
La tangente apparaît également assez vite comme technique d'une organisation mathématique, lorsqu'elle est utilisée comme outil pour la réalisation d'une autre tâche. Nous citerons ici deux cas. Tout d'abord l'utilisation de la tangente par Archimède pour quarrer une parabole, puis l'utilisation de la tangente pour une tâche d'approximation.

4.2.2.2.1 Utilisation de la tangente chez Archimède

Archimède va utiliser une tangente, par exemple pour « quarrer » un arc de parabole en le comparant à un triangle dit maximal.

166 Diagonale d'un losange.





La proposition 1 énonce que le segment de parabole ΑΒΓ vaut en aire les 4/3 de celle de son triangle « maximal ». Le triangle dit ici « maximal » dans un segment de parabole ΑΒΓ, est le triangle ΑΒΓ ayant même base ΑΓ et même « hauteur » BH que le segment, B étant le point de la parabole en lequel la tangente est parallèle à la corde ΑΓ (c'est-à-dire ordonnée avec elle) et H étant la projection de B sur ΑΓ, confondue avec Δ, lieu de ΑΓ, lorsque le segment a pour diamètre une ligne perpendiculaire à ses données (c'est le cas de la figure qui illustre le texte d'Archimède). La « méthode » fait intervenir une décomposition du segment en lignes et des comparaisons utilisant les notions de centre de gravité et d'équilibrage par bras de levier. Ce qui nous intéresse ici est le fait que la tangente n'apparaît déjà plus comme tâche mais est utilisée pour la réalisation d'une autre tâche même si certaines propriétés n'en sont qu'affirmées, comme l'existence et l'unicité du point B.

4.2.2.2.2 *La tangente comme technique pour la tâche d'approximation*

Dès les constructions de Fermat et Barrow on trouve l'idée de « remplacer la courbe par un morceau de sa tangente » ce qui va associer la tangente à la tâche d'approximation affine.

La tangente, ou sa construction, devient alors une tâche au service d'une autre : l'approximation comme chez Chilov, le tracé de courbes comme dans la méthode des « champs de tangentes ».

4.2.2.2.2.1 Construire une tangente comme « bonne approximation [167]»

Parmi les travaux associés à cette première organisation mathématiques, nous avons vu apparaître, l'idée de « remplacer un arc de courbe par sa tangente ». En particulier, Barrow disait explicitement

> *Parce que si une partie indéfiniment petite d'une courbe quelconque entre dans le calcul; on pourra substituer à cet endroit une partie de tangente.*

Mais la tâche d'approximation affine, ou approximation locale d'une courbe par un segment de droite, n'est à notre connaissance pas identifiée comme tâche « génétique » de la dérivée. C'est plus vraisemblablement l'objet mental « droite qui frôle », *a priori* seule manière de décrire la tangente à une courbe n'étant pas une conique, qui permettra ensuite de proposer une autre définition de la tangente.

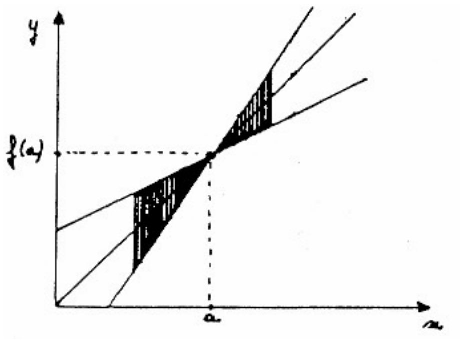
Notons qu'on ne trouve pas de trace historique de définition de la tangente comme la droite passant par un point donné et de coefficient directeur le nombre dérivé en ce point mais qu'une définition aurait aussi pu être « la droite dont le coefficient directeur est la limite du quotient différentiel [168]». Un moyen d'arriver à une telle définition peut être atteint en reprenant par exemple le point de vue proposé par Chilov (1973), pour lequel une droite d est tangente[169] en un point d'abscisse a à une courbe d'équation y=f(x) si

> *au voisinage de a, la courbe y=f(x) est « bien approximée » par la droite d,*
> *[c'est-à-dire si]*
> *quelle que soit l'ouverture de l'étau que l'on se donne, il existe un voisinage de a sur lequel le graphe de f est entièrement dans l'étau*

[167] La notion de « meilleure approximation » ou d'une fonction affine étant une « meilleure approximation » qu'une autre peut faire l'objet d'une définition précise, mais qui est généralement éludée dans les transpositions. Voir aussi la note 71.

[168] Il apparaît bien sûr très vraisemblable qu'il y a ici un recouvrement possible entre le fait de définir ainsi la tangente et le fait de définir la tangente comme limite de sécantes. D'ailleurs, selon M. Schneider (1988), le texte de Chilov peut lui-même aussi être vu comme une caractérisation géométrique concernant l'angle entre la courbe et la droite, et, d'après les auteurs de(Irem, 1987), l'étude de l'angle de contingence peut amener le point de vue « position limite de sécantes ».

[169] Une autre possibilité serait aussi de dire que la construction de la tangente ainsi définie est une nouvelle tâche.



(Chilov, 1973)

Moyennant une explicitation de ce qui est ici entendu par « bonne approximation [170]» et « voisinage », la conception donnée par Chilov permet alors par une argumentation relevant de l'analyse, c'est-à-dire sans devoir faire une incursion dans le cadre géométrique, de montrer que la pente de la droite ainsi définie vaut la limite du quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

> *Pour tout ε positif, il existe un voisinage de a sur lequel les inégalités suivantes sont vérifiées*
> $f(a) + p.(x-a) - \varepsilon.(x-a) \leq f(x) \leq f(a) + p.(x-a) + \varepsilon.(x-a)$
> *ou encore, en posant x-a égal à h*
> *Pour tout ε positif, il existe un voisinage de a sur lequel les inégalités suivantes sont vérifiées*
> $f(a) + p.h - \varepsilon.h \leq f(x) \leq f(a) + p.h + \varepsilon.h$
> *ce qui s'écrit encore*
> *Pour tout ε positif, il existe un voisinage de a sur lequel les inégalités suivantes sont vérifiées*
> $-\varepsilon. \leq \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - p \leq \varepsilon.$
> *Soit* $\lim_{h\to 0} \frac{\text{f(a+h)-f(a)}}{h} - p = 0$
> *C'est-à-dire* $\lim_{h\to 0} \frac{\text{f(a+h)-f(a)}}{h} = p$
> *(Krysinska, 1993)*

170 Il existe à ce sujet une étude de M.-J. Perrin (1999) relativisant cette conception de la tangente comme « meilleure approximation » ; En travaillant avec un logiciel de géométrie dynamique, et en augmentant la précision, la tangente cessait d'être « la meilleure approximation ». Une réflexion sur ce que veut dire « meilleure approximation » et l'utilisation de la norme uniforme, la mènent à la conclusion : *« la tangente est vraiment une notion locale ! il s'agit de la meilleure approximation affine de la courbe au voisinage d'un point, à condition de ne fixer à l'avance ni la longueur de l'intervalle contenant le point ni l'erreur admise dans l'approximation. Le langage imagé et intuitif qu'on tient souvent dans les explications sur la tangente peut véhiculer un certain nombre de conceptions erronées. »*

Remarquons, qu'en plus d'une définition de la tangente par son coefficient, le fait « de coller à la courbe » au voisinage d'un point fait ici l'objet d'une formulation qui pourra ensuite être théorisée[171]. Dans une formalisation plus poussée, et dans un contexte numérique, il aboutira à la définition d'une fonction affine tangente que l'on trouve plutôt dans les manuels français.

Ce point de vue correspond en fait à un changement dans la tâche portant sur la tangente. Il n'est plus demandé de construire une tangente possédant certaines caractéristiques géométriques en termes d'intersection, mais de construire une tangente possédant des propriétés géométriques en termes de proximité des objets, traduite par l'approximation numérique. Excepté dans l'ouvrage A.H.A (voir l'analyse des transpositions en 4.3), une telle tâche n'est à notre connaissance jamais proposée comme introduction au nombre dérivé[172]. Elle met pourtant en oeuvre une démarche que nous avons qualifiée de rationnelle puisqu'elle vise à transformer l'objet mental « tangente » en concept mathématique « tangente ».

En effet,

> *pour en arriver là, il a fallu affiner ce que l'on entendait par frôler, atterrir en douceur ou encore « bien approximer »*
> *(Krysinska, 1993).*

Ce dernier développement peut nous poser plusieurs questions, d'une part, sur l'absence de cette conception d'approximation numérique paradoxalement plus récente mais de moins en moins présente dans les transpositions[173] et, d'autre part, sur la préférence accordée à la conception « position limite de sécantes » pour amener le calcul de la limite du quotient différentiel malgré les difficultés avérées (voir au début de ce même chapitre). Nous constaterons à ce sujet le refus par les élèves-professeurs d'utiliser les expressions comme « frôler la courbe » jugées peu rigoureuses, tandis que la définition « position limite de sécantes » bénéficie d'un caractère légitime.

---

[171] Moyennant les précautions sur la définition de l'approximation.
[172] Ce point de vue est toutefois de nouveau plus présent dans le Terracher (2001).
[173] Et le plus souvent avec un statut d'application, cette dimension étant même parfois inconnue des élèves-professeurs.

4.2.2.2.2.2 La tangente comme technique : les champs de tangentes

Après avoir reçu une deuxième définition comme objet mathématique, à savoir la droite passant par un point donné et de coefficient directeur égal au nombre dérivé en ce point[174], la tangente peut alors aussi devenir une technique, notamment dans le domaine de l'analyse numérique, avec par exemple l'utilisation de « champ de tangentes » pour la résolution graphique d'équations différentielles.

Si on cherche par exemple la représentation graphique d'une fonction y vérifiant $y' = \frac{1}{y}$, on peut calculer les coefficients directeurs des tangentes à la courbe en certains points, tracer les tangentes en ces points et tracer la courbe « collant » à ces tangentes.

Ici, s'il est nécessaire d'avoir dans le bloc technologie/théorie une définition de la tangente par le biais de son coefficient directeur, celle-ci doit aussi être associée à la notion de « meilleure approximation » pour pouvoir utiliser cette propriété de « frôler la courbe » ou « atterrir en douceur » ou « longer au mieux ».

De plus, nous avons précédemment mentionné la petite phrase des élèves-professeurs qui justifient l'utilisation didactique de la tangente en disant « c'est parce que les tangentes aident à bien tracer la courbe ». Cette phrase est en fait prononcée dans un contexte où la tangente est envisagée géométriquement et sans jamais être problématisée sous cet angle numérique qui cherche à comprendre pourquoi la droite ayant pour coefficient le nombre dérivé est aussi la droite qui fournit la « meilleure approximation ».

4.2.2.3 La tangente comme discours technologique

Excepté pour Newton, du moins dans les travaux que nous avons cités, la tangente fait finalement toujours partie du discours technologique. Nous allons cependant distinguer les modalités avec lesquelles elle est utilisée. Pour Fermat et Barrow, les propriétés géométriques de la tangente à la parabole permettent une validation pragmatique de leurs procédures numériques. Roberval en propose presque une autre définition permettant sa

[174]Remarquons déjà que cette définition n'est jamais donnée telle quelle dans les manuels, ni dans les dictionnaires de mathématiques que nous avons consultés.Pensons aussi à la distinction parfois faite entre demi-tangente et tangente, notamment dans le cas où le quotient différentiel n'admet pas la même limite à gauche et à droit, de même qu'aux précautions sur le fait que la droite ne doit pas être parallèle à Oy.

construction. Jusque-là nous sommes dans une configuration où la tâche consiste à construire un objet pour lequel on a déjà des connaissances utilisables, pouvant être soit une définition soit un critère.

Reprenons en effet brièvement ici les différentes approches dans lesquelles la tangente a le statut de tâche, approches dont la succession permet l'émergence historique du concept de dérivée. Comme nous l'avons vu, c'est le critère établi comme technique géométrique par Appolonius qui va ensuite servir de validation pour les techniques numériques.

Enfin, Leibniz s'en sert comme outil de conceptualisation. En effet, pour la tâche de quadrature, il propose une technique basée sur l'utilisation d'ostensifs dx et dy. C'est d'ailleurs peut-être le fait que ces ostensifs disposent d'une valence instrumentale plus forte que les fluentes de Newton qui donnera finalement la primauté au cadre théorique proposé par Leibniz pour le calcul différentiel et intégral. Rappelons que le discours technologique justifiant le fait que le calcul fait avec ces dx et dy fournit bien l'aire cherchée est basé sur la similitude de deux triangles dont un « infinitésimal » défini par la tangente qui devient alors un fondement du discours.

<table>
<tr><td></td><td>Appolonius</td><td>Fermat</td><td>Roberval</td><td>Barrow</td></tr>
<tr><td>Tâche</td><td colspan="4">Construction de tangente</td></tr>
<tr><td>Technique</td><td>Établir le critère de la sous-tangente</td><td>Adégalisation numérique</td><td>Voir la courbe comme une trajectoire et la tangente comme une direction du mouvement</td><td>Considérer deux accroissements infiniment petits</td></tr>
<tr><td>Discours
théorie</td><td>Définition de la tangente par Euclide</td><td colspan="3">Validation pragmatique :
Mise à l'épreuve sur des cas particuliers permettant une validation par les propriétés géométriques de la tangente à la parabole</td></tr>
</table>

La tangente qui était jusque là soit l'objet à construire, soit un outil de validation de la technique en tant qu'objet géométrique, devient donc un outil de conceptualisation à partir de Leibniz. On pourrait donc presque dire que le cercle vicieux s'installe avec Leibniz. La situation va devenir plus complexe lorsque la tangente va changer de statut et que l'organisation didactique va contrôler l'organisation mathématique.

4.2.2.4 La tangente comme technique didactique

4.2.2.4.1 La tangente dans les organisations didactiques

Nous avons mentionné dans notre question initiale, ainsi que dans la section 4.1, les difficultés soulevées par la définition de la tangente comme « limite de sécantes ». Pourtant cette définition n'apparaît pas dans les travaux cités précédemment. Nous allons donc poursuivre l'analyse des fonctions de la tangente dans les praxéologies en regardant comment elle est passée d'objet mathématique à outil didactique.

Dans les organisations didactiques, la tangente n'existe pas comme tâche, dans la mesure où elle n'apparaît jamais comme objet d'enseignement, et est utilisée actuellement comme technique pour introduire la dérivée comme limite de quotients.

Nous pouvons en effet proposer de décrire comme suit l'organisation didactique questionnée. La tâche est « enseigner la dérivée » (en y ajoutant vraisemblablement la contrainte implicite « sans passer par les vitesses [175]») et la technique est « utiliser la tangente pour voir que le quotient a une limite ». Quant à la technologie supportant cette technique, nous pouvons supposer qu'elle consiste dans une croyance proche de « voir c'est comprendre », elle-même s'inscrivant dans une théorie empiriste de la connaissance.

Pourtant cette description serait par trop réductrice. Les élèves-professeurs n'ont sans doute tous pas une même conception empiriste des mathématiques et de leur enseignement. Ce choix didactique est donc sans doute aussi le résultat des difficultés proprement mathématiques du thème « tangente et dérivée », et en particulier ces nombres « invisibles » liés à la continuité, à propos desquels il leur est difficile d'élaborer un discours. En effet, nous pouvons remarquer que l'absence de la tangente comme tâche d'une organisation didactique est liée à l'absence de la tangente comme tâche mathématique : malgré les deux possibilités de la faire apparaître comme tâche d'une organisation mathématique, la tangente n'est en fait pas enseignée, c'est-à-dire pas problématisée. Non problématisée, cette tangente devient

---

[175] Nous avons rajouté ci-dessus la contrainte « sans passer par les vitesses » pour expliquer que la tangente soit choisie comme technique didactique pour enseigner la dérivée. En effet, dans le travail de Newton présenté précédemment, la tâche est de calculer la vitesse, la technique est d'utiliser les notions de fluente et fluxion avec les ostensifs $\dot{x}$ et $\dot{y}$, et le discours technologique consiste à admettre l'existence d'un ultima ratio. Par son approche évitant non seulement les infinitésimaux, mais surtout la géométrie, Newton proposait en quelque sorte une organisation didactique permettant de travailler de manière rationnelle sans interférence avec une organisation mathématique encore en construction, à condition d'accepter le discours associé, auquel cas c'est la notion de vitesse qui est une technique didactique.

donc « naturellement disponible [176]» pour enseigner la dérivée, au risque que la dérivée ne soit en conséquence pas problématisée non plus.

On observe donc pour la tangente un transfert du statut d'objet mathématique à un statut d'outil didactique. Toutefois ce transfert ne peut se faire qu'en modifiant son statut mathématique : ni la définition géométrique (limitée au cercle et aux coniques) ni la définition analytique (droite définie par un point et son coefficient directeur) ne permettent de l'utiliser telle quelle pour enseigner la dérivée. Elle recevra donc cette « définition » de « limite de sécantes » qui, au prix d'une certaine modification du statut mathématique, permet ce transfert de l'organisation mathématique à l'organisation didactique.

Nous avons déjà signalé par exemple l'interprétation des auteurs de « mathématiques au fil des âges » (Irem, 1987), qui associaient le travail de Fermat à la conception « limite de sécantes ». Selon d'autres auteurs, Euclide aurait aussi pu utiliser cette conception, notamment dans la définition suivante :

> *la droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle à partir d'une extrémité tombera à l'extérieur du cercle et dans le lieu compris entre la droite et la circonférence, une autre droite ne sera pas intercalée ; en outre d'une part l'angle du demi-cercle est plus grand, d'autre part l'angle restant plus petit que tout angle rectiligne aigu*
> *In (Irem, 1999).*

De plus, la consultation de dictionnaires de mathématiques va également nous proposer cette définition de la tangente, par exemple sous les formes

> *Soit N un point quelconque de la courbe. Si la droite (MN) a une position limite T, lorsque les coordonnées de N tendent vers celles de M, on dit que T est la tangente en M à la courbe.*
> *Bouvier, George & Le Lionnais, Dictionnaire des mathématiques (1979)*
>
> *Pour obtenir la tangente en un point A d'une courbe y=f(x), on prend sur cette courbe un point B distinct de A, on trace la droite dr(A,B) appelée sécante, puis on déplace le point B sur la courbe en direction de A. S'il existe une position limite qui ne dépend pas du côté par lequel on s'approche du point A, on définit la tangente par cette position limite.*
> *Reinhardt& Soeder, Atlas des mathématiques (1974)*

Malgré d'autres définitions possibles, il semble donc que celle-ci possède un avantage du fait de son caractère géométrique.

[176] Il y a ici encore un glissement potentiel entre la tangente dans une organisation mathématique et la tangente comme technique d'une organisation didactique.

4.2.2.4.2 Définir la tangente comme « limite de sécantes » : d'Alembert

Les travaux cités précédemment montraient une interaction entre la tangente et ce qui n'était pas encore la dérivée, interaction que l'on pourrait maintenant décrire comme un changement de cadre entre géométrie et analyse. Fermat et Barrow proposent une construction de la tangente à la parabole (géométrie) par les infiniment petits (analyse) en vérifiant que la droite ainsi obtenue possède bien la propriété caractéristique de la tangente (géométrie). Fermat ne considère la courbe que par son expression analytique et Barrow introduit le « triangle caractéristique », deux objets qui pourraient permettre la généralisation à d'autres courbes. Dans les deux cas, un cadre sert de validation à l'autre mais déjà l'objet géométrique « tangente » n'est plus exactement le même et seul le procédé de construction pourrait être un embryon de définition analytique de la tangente.

Remarquons toutefois qu'aucune de ces procédures ne fait intervenir de sécante, et *a fortiori* de « limite de sécantes ». De même, les deux points choisis sur la courbe sont caractérisés par leur position, elle-même définie par des accroissements infinitésimaux, mais aucun de ces auteurs ne mentionne le fait de déplacer un point vers l'autre, même si chez Barrow un des deux points joue plus un rôle de point de repère par rapport à l'autre.

La définition actuelle de « position limite de sécantes » ne trouve donc apparemment pas son origine dans ces procédures infinitésimales. Cette définition de « position limite de sécantes » semble plutôt manifester une volonté de se rapprocher de la méthode du point double de Descartes (Irem, 1999) qui reprend des arguments géométriques et algébriques, sans doute plus admissibles car ne faisant plus référence à ces fameux infinitésimaux.

On en trouve la formulation actuelle dans un texte de d'Alembert

> *Je veux par exemple trouver la tangente d'une courbe CAB au point A. Je prends d'abord deux points à volonté A, B sur cette ligne courbe, et par ces deux points, je tire une ligne droite A indéfiniment prolongée vers Z et vers X, laquelle coupe la courbe, comme cela est évident ; j'appelle cette ligne une « sécante » ; j'imagine ensuite une ligne fixe CE, placée à volonté dans le plan sur lequel est tracée la courbe, et par les deux points A, B, que j'ai pris sur la courbe, je mène des ordonnées AD, BE, perpendiculaires à cette ligne fixe CE, que pour abréger j'appelle l'« axe » de la courbe. Il est d'abord évident que la position de la sécante est déterminée par la distance D des deux ordonnées et par leur différence BO ; en sorte que si on connaissait cette distance et cette différence, ou même le rapport des ordonnées à leur différence on auroit la position de la sécante.*
>
> *Imaginons à présent que des deux points A, B, que nous avons supposés sur la courbe, il y en ait un, par exemple B, qui se rapproche continuellement de l'autre point A ; et que, par cet autre point A qu'on suppose fixe, on ait tiré une tangente AP à la courbe ; il est*

> *aisé de voir que la sécante AB, tirée par ces deux points A, B, dont l'un est supposé se rapprocher de plus en plus de l'autre, approchera continuellement de la tangente, et enfin deviendra la tangente même, lorsque les deux points se seront confondus en un seul. La tangente est donc la limite des sécantes, le terme dont elles approchent de plus en plus sans pour autant y arriver tant qu'elles sont sécantes, mais dont elles peuvent approcher aussi près qu'on voudra. Or nous venons de voir que la position de la sécante se détermine par le rapport de la différence BO des ordonnées, à leur distance DE. Donc si on cherche la « limite » de ce rapport, c'est-à-dire la valeur dont ce rapport approche de plus en plus à mesure que l'une des ordonnées se rapproche de l'autre, cette limite donnera la position de la tangente, puisque la tangente est la limite des sécantes.*
> *Sur les principes métaphysiques du calcul infinitésimal, Jean d'Alembert (1759)*
> *In (Gaud, Guichard, Sicre, Chrétien, 1998)*

Cette « définition » est beaucoup plus proche de celle reprise majoritairement par les manuels et les élèves-professeurs que nous avons observés dans ce travail.

Notons tout d'abord que d'Alembert recourt à des expressions comme « il est aisé de voir», « nous venons de voir » ; « il est évident », alors que Fermat et Barrow n'en avaient pas besoin puisque leur méthode utilise des calculs. Il se situe donc dans une rationalité plus proche du discours de niveau 0 récusé par Bolzano.

Son utilisation du mot « limite » peut aussi poser question. Il parle de « *terme dont on se rapproche de plus en plus, sans pour autant y arriver, mais dont on se rapproche autant qu'on le voudra* », et transfère cette notion de « limite de droite » à « limite de rapport ». Or une des difficultés de cette approche est précisément liée au fait que la limite est d'abord définie dans le domaine numérique.

Enfin, notons que le fait de ramener le problème dans le domaine géométrique a pour avantage d'éliminer les infinitésimaux mais à condition d'utiliser un argument de continuité[177] sous forme géométrique puisque le point doit « approcher continuellement » de l'autre, ce qui amènera la sécante à « approcher continuellement » de la tangente.

La démarche de ce texte de d'Alembert pourrait s'expliquer par une volonté de diffusion du savoir auprès d'un public plus large (par exemple dans le contexte de l'Encyclopédie) tandis que les autres textes sont des descriptions de travaux que s'échangent entre eux les « mathématiciens ». Si tout exposé de mathématiques relève à la fois d'une organisation

[177] On retrouve dans un texte de F. Borceux (1985) un principe de continuité qui permettait à Pascal de construire la tangente à partir de son théorème de l'hexagone inscrit à une conique.

mathématique et d'une organisation didactique[178], la part de chacune dans la mise en texte apparaît donc comme un élément à prendre en compte. On peut trouver des textes où l'une prévaut sur l'autre mais aussi des textes où elles coexistent comme nous le verrons dans notre analyse des transpositions au 4.3.

4.2.2.2 Tangente et vitesse

Nous avons déjà souligné que les deux notions de vitesse et de tangente correspondent à des tâches « génétiques » de la notion de dérivée mais qu'elles vont avoir des destins différents dans le bloc technologico-théorique des organisations mathématiques et didactiques.

Nous avons analysé comment la tangente fait l'objet de glissements successifs et plus ou moins déclarés dans les différentes organisations mathématiques et organisations didactiques liées à la dérivée. Nous proposions alors d'envisager le discours de Newton comme une possibilité de rupture entre une organisation mathématique en construction, correspondant à une rationalité II qui ne serait pas encore disponible, et une organisation didactique permettant de « travailler », à condition toutefois d'admettre le discours cinématique comme fondement et donc d'assumer une rationalité de type I. Pourtant, une telle organisation n'a pas survécu[179] et tout ce qui concerne la notion de vitesse est actuellement uniquement perçu comme une illustration de la théorie des dérivées. Nous allons donc tenter de mieux comprendre en quoi la tangente et la vitesse diffèrent de manière à cerner les enjeux et motivations des pratiques et discours que nous observerons.

Regardons tout d'abord comment la tangente et la vitesse vont en quelque sorte échanger leurs rôles. Au début, la tangente et la vitesse sont deux tâches séparées. Pour Roberval, la vitesse devient une technique pour tracer la tangente. Plus tard, la tangente deviendra une technique, entre autres pour la vitesse, avec les champs de tangentes. Entre les deux, on retrouve bien la séparation des discours lorsque la vitesse est un discours pour Newton tandis que la tangente est un discours pour Leibniz. Enfin, la tangente est devenue une technique didactique mais nous ne connaissons pas d'utilisation effective de la vitesse

[178] par exemple le texte de Cauchy considéré comme fondateur de l'analyse s'intitule « traité à l'usage de…. »

[179] Rappelons tout de même que le cours d'analyse était accompagné d'un cours de cinématique du point au moment des mathématiques modernes, ce qui pouvait permettre de donner un statut mathématique (mais dans une rationalité II) aux notions comme la vitesse.

comme technique didactique, excepté dans l'ingénierie qui sera proposée aux élèves-professeurs, comme nous le développerons au Chapitre 5.

Bien sûr, la tangente a un caractère visuel qui permet une utilisation proche de celle d'un idéogramme : quelle que soit sa précision, un schéma avec une tangente parle tout seul. Mais c'est sans doute aussi le fait d'être déjà un objet mathématique, même dans un autre cadre, qui lui confère une supériorité. Rappelons que Leibniz utilisait l'expression *« courbe dont les pentes obéissent à une loi donnée »*, alors que la notion de « pente de courbe » n'a pas trouvé de place dans la construction théorique ultérieure. Or la tangente et la vitesse instantanée proposent en fait toutes les deux une image (mentale en ce qui concerne la vitesse) de cette notion de « pente de courbe ». Mais, même en se situant dans un contexte où le point est associé à l'instant, la vitesse en un instant n'a pas encore de définition, tandis que la tangente en un point est déjà définie et qui plus est dans un cadre géométrique. De plus, elle possède l'avantage (psychologique ?) d'associer un objet à pente constante à tout point de la courbe dont la pente est variable[180].

Le fait de posséder déjà une définition permet donc *a priori* d'utiliser la tangente comme discours. En effet, tangente et vitesse sont deux objets mentaux et ne peuvent donc « rentrer » dans la théorie qu'en recevant une définition et cela ne peut se faire que de deux façons. Soit dans le cadre de rationalité II de l'analyse, une fois définies la limite et la dérivée, la vitesse devient alors une application de la théorie et la tangente devient l'objet analytique ou la technique d'approximation. Soit dans un cadre de rationalité I dans lequel les objets pourraient exister au moyen d'une définition opératoire. Alors la vitesse instantanée pourrait être définie d'après la technique de calcul développée pour répondre à certaines questions et avec des procédures de validation destinées à convaincre que ces techniques produisent bien un concept mathématique propre à « traduire » l'objet mental. De même, la tangente pourrait alors être simplement définie comme la droite dont la pente est la limite du quotient différentiel, ou même comme la droite dont le coefficient est la vitesse.

Or la tangente a déjà une définition mathématique dans le cadre de rationalité de type II de la géométrie et c'est cette définition qui sera tant bien que mal adaptée au cadre de rationalité

[180] On peut se demander si cet avantage est conservé en la faisant apparaître comme limite d'un faisceau de droites associé à un point fixe.

de type II de l'analyse, tandis que la vitesse est une grandeur physique, de plus intensive et dépendante de deux autres par l'intermédiaire d'un rapport, ce qui la fait appartenir d'emblée à un cadre de type I ou à un cadre extra-mathématique.

Pourtant l'ingénierie que nous utiliserons pour confronter les élèves-professeurs à une rationalité de type I sera basée sur la notion de vitesse instantanée, requérant donc une argumentation cinématique. Même si cette argumentation montrera ses limites, notamment pour la question de l'approximation affine et parce qu'elle implique des hypothèses de continuité, le choix d'un milieu cinématique et non géométrique pour la rationalité I se justifie pour les deux raisons suivantes. Tout d'abord, elle proposera une rupture plus nette par rapport aux pratiques les plus courantes dans lesquelles la vitesse est une illustration de la dérivée (voir à la fin de ce chapitre le phénomène de « déconnexion » évoqué par Chevallard (1999). De plus, la contrainte de gestion d'une vitesse variable nécessitera la mise en évidence de la fonction dérivée qui à chaque instant fait correspondre la vitesse à cet instant, donnant alors accès d'une manière raisonnée au critère de croissance. En effet, la recherche d'une fonction qui à tout point ferait correspondre la pente de la tangente en ce point serait plus difficile à motiver, même si elle correspondrait à la remarque de Leibniz sur « la loi à laquelle obéissent les pentes de la courbe ».

4.2.3 Conclusions

L'ensemble des paragraphes précédents visait donc à mettre en évidence la complexité de l'association entre les concepts de dérivée et de tangente, ainsi que la nature essentiellement hybride de l'objet tangente, et d'en dégager des éléments pour l'expérimentation à suivre.

La dérivée va être utilisée (outil) avant d'être définie (objet). Son utilisation prend d'abord la forme d'un accroissement infinitésimal (accroissement de une variable chez Fermat et accroissement de deux variables chez Barrow) que l'on peut utiliser dans un calcul puis annuler, et ensuite la forme d'un rapport d'infinitésimaux avec Newton et Leibniz. Sa définition se fait une fois que Cauchy définit la limite, qui nécessitera la construction des nombres réels. Elle suit donc l'évolution « naturelle » de la construction des objets mathématiques mis à part le fait qu'elle relève du domaine numérique par l'intermédiaire d'un rapport 0/0 restant difficile non seulement à accepter mais aussi à visualiser[181].

La tangente est au départ un objet possédant une définition dans le domaine géométrique et la recherche de détermination de tangentes à des courbes sortant des courbes classiques va amener la mise en place de processus nécessitant l'utilisation d'infinitésimaux sans pour autant que la définition soit explicitement remise en question. Ces processus associent cependant progressivement à l'objet « tangente » une série de conceptions qui en font un objet mental hybride et ambigu. Elle pourra recevoir une « nouvelle définition » dans le domaine de l'analyse comme la droite dont la pente vaut la limite du taux d'accroissement, ce qui permet par ailleurs de valider son utilisation. Pourtant c'est toujours une définition de type géométrique qui lui est attachée, en particulier lorsqu'elle sert de technique didactique pour introduire la dérivée.

Nous allons ici reprendre la synthèse ci-dessus en l'interprétant en termes de statut des concepts en jeu et des cadres dans lesquels ils interviennent. Cette analyse sous l'angle de la dialectique outil/objet nous permettra ainsi d'identifier les différentes rationalités ayant abouti au développement du cadre théorique actuel, et de les classifier en cadres de rationalité de type I et II.

	Dialectique outil/objet **Cadre mathématique**	**Cadre** **de rationalité**
Tangente au cercle et aux coniques	Tangente : objet géométrique	II
Détermination de tangentes (et extrema) par des procédures « infinitésimales » validées dans le cadre géométrique et utilisation de la propriété spécifique de la courbe	Tangente : objet géométrique	II
	Dérivée : outil implicite numérique	I
« Médiation » par la cinématique 1) courbe vue comme trajectoire 2)rapport d'infinitésimaux accepté par analogie avec la vitesse instantanée (ultima ratio)	Tangente : outil géométrique	
	Dérivée : objet numérique»	I
Leibniz : se passer des infinitésimaux en utilisant la tangente comme fondement	Tangente : outil géométrique	

[181] Ce n'est en effet pas seulement le côté irrationnel qui est nouveau puisque Eudoxe par exemple manipulait déjà des rapports de grandeurs incommensurables préfigurant les coupures que Dedekind utilisera pour définir les irrationnels.

	Dialectique outil/objet Cadre mathématique	**Cadre de rationalité**
Définition de D'Alembert comme « limite de sécantes »	Tangente : objet mental	0
Notion de dérivée d'une fonction (Lagrange) Développement et formalisation de l'analyse réelle		
	Dérivée : objet numérique	II
La dimension d'approximation numérique donne une autre définition à la tangente	Tangente : objet numérique	II
	Dérivée : outil explicite numérique	II

La tangente appartient en fait à deux cadres de rationalité de type II, l'un en géométrie et l'autre en analyse, correspondant à deux cadres mathématiques différents. Dans les quelques étapes décrites, nous avons en effet vu apparaître une des difficultés de l'association dérivée/tangente qui est l'articulation entre cadres et domaines différents. Celle-ci est typique des mathématiques. Si l'arithmétique des Grecs ne reconnaissait que les entiers naturels, la géométrie amenait à manipuler des raisons, c'est-à-dire des rapports de grandeurs, ce qui posait le problème des opérations autorisées sur ces rapports ainsi que la manière de gérer le cas de grandeurs incommensurables[182]. Aristote mentionnait déjà la question d'une éventuelle hiérarchie des cadres mathématiques :

> *On ne peut donc pas dans la démonstration passer d'un genre à un autre : on ne peut pas, pas exemple, prouver une proposition géométrique par l'arithmétique.*
> *Il y a en effet trois éléments dans la démonstration : en premier lieu, ce que l'on prouve, à savoir la conclusion, c'est-à-dire un attribut appartenant par soi à un certain genre ; en deuxième lieu, les axiomes, et les axiomes d'après lesquels s'enchaîne la démonstration ; en troisième lieu, le genre, le sujet dont la démonstration fait apparaître les propriétés et les attributs essentiels.*
> *Les axiomes, à l'aide desquels a lieu la démonstration, peuvent être les mêmes. Mais dans le cas de genres différents, comme pour l'arithmétique et la géométrie, on ne peut pas appliquer la démonstration arithmétique aux propriétés des grandeurs, à moins de supposer que les grandeurs ne soient des nombres. […] on ne peut pas non plus démontrer un théorème d'existence d'une science quelconque par le moyen d'une autre science, à moins que ces théorèmes ne soient l'un par rapport à l'autre comme l'inférieur*

[182] La pensée grecque obligeait aussi à un traitement séparé des (rapports de) grandeurs et des rapports d'entiers. Les développements de l'algèbre vont essentiellement se heurter à l'obstacle de ces rapports de grandeurs, amenant alors progressivement à une « numérisation des raisons », d'autant que d'autres questions, dont les logarithmes, posent aussi la question du statut de « nombres » n'étant pas directement issus de grandeurs, ou du moins de mesures classiques de grandeurs associées à la perception.

> *au supérieur, par exemple les théorèmes de l'optique par rapport à la géométrie et ceux de l'harmonique par rapport à l'arithmétique.*
> *Aristote, Seconds analytiques, IV ème siècle av. J.-C.*
> *In (Irem, 1987)*

Or, la prise en compte d'autres cadres peut justement mettre en évidence, ou pallier selon le point de vue, une « incomplétude » du cadre de référence. A la même époque, l'utilisation de l'infini était « masquée » par les raisonnements tandis que les paradoxes de Zénon attiraient l'attention sur la question, sans doute parce qu'ils portaient précisément sur la notion de mouvement et de continu.

4.3 Analyse des transpositions : la dérivée vue par les institutions

Ayant précédemment analysé la manière dont les deux objets dérivée et tangente, auxquels nous ajouterons maintenant la notion de vitesse, échangent leurs rôles au cours de leur histoire, nous allons ici examiner les formes que prend cette association dans les transpositions proposées. En effet, le cadre II relève maintenant du « savoir savant » et sa transposition en « savoir à enseigner » va se faire par la médiation de discours particuliers. Après avoir pris connaissance des textes légaux, nous étudierons donc les contenus d'un certain nombre de manuels, en recherchant de quelle(s) rationalité(s) peut relever le discours qu'on y trouve.

Rappelons que nous avons précédemment proposé l'existence de 2 cadres principaux de rationalité correspondant à un travail soit dans un système soit dans un modèle, mais aussi que, en regardant les pratiques des élèves-professeurs à la lumière du texte de Bolzano, nous avons été amenée à identifier 4 niveaux de discours :

- un discours de niveau 2 correspondant à un cadre de rationalité de type II ;
- un discours de niveau 1 correspondant à un cadre de rationalité de type I ;
- un « discours » de niveau 0 consistant en fait en des expressions telles que « ça se voit » ;
- un discours appelé 2 bis consistant en la juxtaposition d'arguments du niveau 0 avec des résultats ou expressions relevant de la théorie.

La section précédente montrait comment le développement de l'analyse, et en particulier celui de la dérivée, est passé d'un discours de niveau 1, avec des procédures géométriques ou infinitésimales validées de manière pragmatique ou par une argumentation cinématique, à un discours de niveau 2 avec la théorie de l'analyse réelle et ses fondements. Nous avons par ailleurs vu comment ce discours de niveau 2 n'a lui-même pu se constituer définitivement qu'en se défaisant de l'évidence visuelle.

Ayant déjà observé que les choix des élèves-professeurs s'orientaient vers un discours intermédiaire juxtaposant des résultats théoriques (niveau 2) avec des schémas ou des analogies de forme (niveau 0), nous allons ici tenter de mieux montrer les différentes manifestations de ce discours appelé 2bis et les alternatives possibles. Nous avons donc choisi des transpositions volontairement contrastées et pour montrer comment, tout en paraissant différentes, des transpositions peuvent en fait relever d'une même logique que nous appellerons la « praxéologie à trous » consistant à montrer le critère de croissance en juxtaposant des théorèmes isolés d'analyse avec un schéma utilisant la tangente, elle-même définie par constat visuel. De plus, cette analyse nous montrera que ce discours est largement naturalisé sous des formes diverses, ce qui contraint tout autre projet d'enseignement à s'en différencier de manière suffisamment marquée pour ne pas donner prise à cette juxtaposition des discours.

Nous allons dans un premier temps examiner ces documents en nous attachant à deux sujets de leçons ou de chapitres, à savoir l'introduction de la dérivée (4.3.1) et le critère de croissance (4.3.2) en y recherchant les indices liés 1) à la définition supposée ou explicitée de la tangente en relation avec celle de la dérivée ; 2) à la place accordée aux autres tâches à savoir la vitesse, l'optimisation et l'approximation ; 3) à la transparence sur la question des nombres en jeu.

Nous proposerons aussi les cas particuliers de deux manuels, l'un parce que tout en se situant dans une perspective fortement numérique, ses auteurs ne pourront éviter le piège de la tangente géométrique, et l'autre parce qu'il est un des rares ouvrages où l'on trouve une démonstration pour l'expression « limite de sécantes », nous montrant ainsi à quel prix il propose de concilier ces deux points de vue sur la tangente tout en restant dans des cadres théorisés.

Enfin nous proposerons une synthèse montrant les emboîtements entre une praxéologie de référence sur la dérivée, les transpositions disponibles pour le secondaire et l'organisation mathématique globale étudiée à l'université, ce qui nous amènera à proposer une méthodologie pour notre question initiale.

4.3.1 Dérivée

4.3.1.1 La dérivée dans les programmes

Voici ce que dit le programme de l'enseignement dit « officiel », en l'occurrence celui de la Communauté Française de Belgique (10.2000/240), pour le cours de cinquième année à 6 périodes hebdomadaires.

Dérivées		
Compétences à atteindre	Matières	Conseils méthodologiques
Calculer la dérivée d'une fonction Interpréter géométriquement, physiquement,… la dérivée d'une fonction en un point Lors du calcul d'une dérivée, vérifier la plausibilité du résultat en utilisant les aspects numérique, algébrique et graphique	Nombre dérivé, fonction dérivée Interprétation géométrique (tangente), cinématique (vitesse), économique (coût marginal),… Calcul des dérivées Dérivée des fonctions usuelles Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, dérivée de la composée de deux fonctions Fonctions dérivables, non dérivables en un point, sur un intervalle	Le nombre dérivé en un point sera défini à partir du taux d'accroissement Par fonctions usuelle, il faut entendre fonction constante, fonction identique, racine carrée, puissance à exposant rationnel, sinx, cosx, tgx On démontrera au moins les formules donnant la dérivée de l'une ou l'autre fonction usuelle ainsi que celles de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions dérivables Dans les exercices, on s'assurera de la plausibilité des résultats en utilisant par exemple une calculatrice ou un logiciel On aura recours aux graphiques de fonctions (√x, |x-2| par exemple) pour illustrer la dérivabilité ou la non dérivabilité

Il est donc clairement recommandé d'introduire le nombre dérivé comme limite de taux d'accroissement, et de (ne) présenter la tangente (que) comme une interprétation géométrique. La capacité à articuler les « aspects numériques, algébriques et graphiques » est quant à elle mentionnée comme compétence à atteindre.

Pour l'enseignement dit « libre », le découpage est organisé différemment, mais on y retrouvera les mêmes indications. Dans une section « les mathématiques au troisième degré du secondaire », un chapitre est intitulé « *déterminer certaines caractéristiques d'un phénomène à* *l'aide des outils du calcul infinitésimal et les interpréter à l'aide d'un graphique, un tableau numérique et une expression algébrique »,* ce qui pourrait induire une perspective plus axée sur la modélisation que sur les contenus. Il comprend ensuite un paragraphe « contenus de cinquième année» dont l'un est « dérivées », repris ci-dessous.

Dérivées Nombre dérivé, fonction dérivée Interprétation géométrique (tangente), cinématique (vitesse), économique (coût marginal),… Le nombre dérivé en un point sera défini à partir du taux d'accroissement Calcul des dérivées Dérivée des fonctions usuelles Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, dérivée de la composée de deux fonctions Par fonctions usuelle, il faut entendre fonction constante, fonction identique, racine carrée, puissance à exposant rationnel, sinx, cosx, tgx On démontrera au moins les formules donnant la dérivée de l'une ou l'autre fonction usuelle ainsi que celles de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions dérivables La cohérence des résultats sera vérifiée en comparant les aspects numérique, algébrique et graphique. A cet effet, on pourra utiliser une calculatrice ou un logiciel Fonctions dérivables, non dérivables en un point, sur un intervalle On aura recours aux graphiques de fonctions ($\sqrt{x}$, $\|x-2\|$ par exemple) pour illustrer la dérivabilité ou la non dérivabilité

De même, le nombre dérivé est associé au taux d'accroissement et la tangente est mentionnée à titre d'interprétation géométrique du nombre dérivé.

4.3.1.2 La dérivée dans les manuels

Les ouvrages suivants ont été consultés :

- Queyzanne-Revuz (Fernand Nathan, 1970
- Savoir et savoir-faire (Dessain, 5ème niveau A, 1990)
- Espace Maths (De Boeck, 5ème 6h, 1999)
- Fractale (1ère S/E - Analyse, 1991)

- Terracher (Hachette, 1ère S/E - Analyse, 1991)
- Actimaths (Van In, 5ème 4h, 2003)
- AHA (De Boeck, 1999)

Les 6 premiers manuels ont également été proposés aux personnes ayant accepté de participer à un entretien (voir au Chapitre 5) ; les extraits du dernier ouvrage relatifs aux sujets étudiés ici ont été proposés aux étudiants FUNDP (voir Chapitre 5) ; et les extraits des ouvrages 3 et 7 ont été proposés pour la dernière expérience en 2007 à l'ULg et aux FUNDP. Par ailleurs, les ouvrages 2, 3 et 6 sont des références courantes en Belgique. Ces manuels ont été choisis pour y observer aussi bien la variabilité dans les différentes démarches que la récurrence de certaines difficultés[183].

Pour faire suite à l'analyse développée au 4.2, nous allons nous intéresser à la manière dont la dérivée est problématisée en relation ou non avec les tâches liées à la tangente, la vitesse et l'approximation. En ce qui concerne les discours, nous étudierons la manière dont les manuels prennent en charge le risque de circularité dans la définition mais également si une définition opératoire est donnée.

4.3.1.2.1 Les tâches proposées

Nous décrirons ici les tâches proposées en introduction à la notion de dérivée. Nous avons déjà souligné l'acception spécifique du mot tâche dans la TAD, que nous devrons cependant prendre ici dans un sens plus large dans la mesure où nous reprendrons 1) les activités d'introduction ou activités préparatoires dès qu'elles sont identifiées comme telles, et ce quel que soit leur degré effectif de problématisation ; 2) le contexte dans lequel s'inscrit le travail, car certains manuels ont une approche plus « magistrale» et, s'ils ne proposent pas ce type d'activité, l'on peut quand même remarquer que la définition de la dérivée s'y inscrit d'emblée dans un contexte précis, numérique par exemple.

[183] Ils pourraient aussi refléter des traditions différentes selon les pays, mais il faudrait pour cela une autre étude incluant par exemple les pratiques effectives des élèves-professeurs en France sur le sujet.

4.3.1.2.1.1 Tâches liées à la tangente

Un certain nombre de manuels proposent une activité préparatoire que nous dirons liée à la tangente. En fait, excepté dans A.H.A (cf. 4.3.1.2.1.1.3), la tangente n'y est jamais problématisée en se demandant par exemple comment tracer une droite qui serait l'analogue pour une courbe de la tangente à un cercle. Les différentes activités que nous avons recensées dans un premier groupe procèdent en général selon une démarche commune :

1) se donner une fonction du second degré et sa représentation graphique, donc une parabole[184] ;

2) tracer une droite dont le coefficient est soit donné comme limite de coefficients de sécantes (Fractale), soit identifié à une vitesse instantanée calculée dans une activité précédente (Terracher); soit donné « à l'état brut » (Espace-Maths);

3) étudier l'existence de points d'intersection de cette droite avec la courbe ;

Le fait de ne posséder qu'un point d'intersection amène alors à l'utilisation du terme tangente avec plus ou moins de précautions dans la formulation.

Dans la mesure où ces différentes tâches ont une faible dimension de problématisation et proposent en fait de passer « directement » de la tangente comme objet géométrique d'un cadre II à a tangente comme objet analytique d'un cadre II, nous proposons de les considérer comme appartenant au cadre II, c'est-à-dire le travail dans le modèle mathématique Toutefois, elles offrent parfois une possibilité d'être travaillées dans le cadre I, ce qui dépend alors de l'exploitation qu'en fera l'utilisateur.

Dans un deuxième groupe, la problématique d'intersection n'est plus utilisée et la « tangence » doit alors être de nature beaucoup plus visuelle et obtenue à partir des sécantes, ce qui nous amène à associer ce groupe à un discours de niveau 2bis.

Enfin, nous développerons à part l'approche de A.H.A, qui va clairement proposer un travail dans le cadre I et un discours de niveau 1.

4.3.1.2.1.1.1 Tâches appartenant au cadre de rationalité II

Le point commun entre les différentes tâches de ce groupe est le fait de définir la tangente à partir d'une droite donnée par son coefficient, mais selon des modalités différentes.

---

[184] Soulignons que l'avantage d'utiliser une parabole pour la disponibilité d'une propriété géométrique n'est en fait jamais exploité.

La droite dont le coefficient est la limite des coefficients des sécantes

Dans le manuel Fractale, la deuxième activité (après l'activité cinématique) propose de « *déterminer des tangentes à des courbes définies par des équations du type y=f(x)* », après avoir rappelé par une notice historique que le problème de détermination de tangentes à des courbes est de nature géométrique[185].

> *Soit (P) la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, A le point de (P) d'abscisse 1.*
> *1) appelons P le point de (P) d'abscisse 2. Déterminez le coefficient directeur de la droite (AB).*
> *2) Soit h un nombre réel non nul, M le point de (P) d'abscisse 1+h et a(h) le coefficient directeur de la droite (AM).*
> *a) exprimez a(h) en fonction de h*
> *b) quelle est la limite, notée a_0 de a(h) lorsque h tend vers 0 ?*
> *3) notons (D) la droite passant par A et de coefficient directeur a_0.*
> *a) déterminez une équation cartésienne de (D) sous la forme y=g(x)*
> *b) étudiez l'intersection de (P) et (D).*
> *Remarque dans le chapitre 3, (D) a été dite tangente à (P) ; elle « touche » (P) en un seul point.*
> *Fractale*

Les questions 4 et 5 de la même activité vont ensuite porter sur la précision de l'approximation effectuée lorsqu'on remplace la valeur donnée par la fonction f, par la valeur donnée par la fonction g.

La droite dont le coefficient est la vitesse instantanée

Dans le manuel Terracher, également en deuxième position, cette activité propose d'exploiter l'expression analytique de la fonction qui aura déjà été utilisée dans un contexte cinématique pour étudier l'intersection d'une certaine droite donnée par un point et un coefficient directeur (dont on sait donc déjà qu'il peut être associé à la vitesse instantanée), et dont le lien avec la limite du quotient différentiel aura éventuellement été mis en évidence dans l'activité cinématique.

Il n'y donc pas non plus de problématisation portant directement sur la construction de la tangente. Par ailleurs, cette problématique d'intersection est ici directement formulée en termes de point double.

---

185 A cette occasion le manuel rappelle la définition d'Euclide parlant de la position de la droite par rapport à la courbe, puis la remarque d'Archimède qui dans son Traité des Spirales aurait affirmé « si une droite est tangente à une spirale, elle sera tangente en un seul point »

> *Considérons P la courbe représentative de la fonction* $t \to 5 \cdot t^2$ *au « voisinage » d'un point de la courbe d'abscisse* t_0 *(en effectuant un grossissement)*
> *On désigne par* M_0 *le point de la courbe d'abscisse* t_0, M_h *le point de la courbe d'abscisse* t_0 *+h (h est cette fois un réel quelconque)*
> *1) Calculer le coefficient directeur de la droite* $((M_0 M_h))$*. Quelle relation peut-on établir avec les résultats de l'activité 1 ?*
> *2) On considère la droite Δ passant par* M_0 *et de pente* $10 \cdot t_0$
> *a)faire une représentation graphique de P et Δ « autour de* M_0 *» lorsque* $t_0 = \dfrac{1}{2}$ *et* t_0 *=1*
> *b)contrôler par un calcul algébrique ce que suggèrent les figures précédentes, à savoir :* M_0 *est le seul point commun à P et Δ ; parmi les droites passant par* M_0 *(et non parallèles à Oy) la droite Δ est la seule à « recouper » la courbe P en* M_0
> *Terracher*

4.3.1.2.1.1.2 Tâches amenant un discours 2bis

Nous plaçons dans cette catégorie la première activité dans Espace-Maths, car elle diffère des précédentes dans la mesure où, même si le coefficient est donné, le but va être de montrer qu'il vaut la limite des coefficients des sécantes pour induire la définition comme « limite de sécantes ».

> *On donne la parabole représentant la fonction f* $\mathbb{R}$ *->*$\mathbb{R}$ *:* $x \mapsto 0,25 \cdot x^2$ *; on nomme A un point fixé de P, d'abscisse a ; B un point non fixé de P, voisin de A, d'abscisse a+h ; s la droite passant par A et B ; t la droite passant par A et de coefficient angulaire 0,5a.*
> *Lorsque a=2, calcule la coordonnée de A et celle de B ; le coefficient angulaire de s et celui de t ;*
> *Comment passes-tu algébriquement du coefficient angulaire de s à celui de t ?*
> *Trace avec précision la droite t. T'inspirant de ce dessin détermine le nombre de points d'intersection de t avec P ; vérifie par calcul ; Comment qualifierais-tu la droite t relativement à P ? Trace les droites obtenues pour les valeurs successives suivantes de h : 2 ;1,5 ;1 ;0,5. Comment ferais-tu h pour passer de s à t ? Quel serait alors le déplacement de B relativement à A.*
> *Comment qualifierais-tu en, termes de limite, la position de la droite t par rapport aux positions successives des droites s*
> *Espace-Maths*

Dans le manuel Savoir et savoir-faire, sous le titre Définition-Exemple 1, on trouve aussi l'exemple de la parabole représentant la fonction $x \to x^2$, suivi du texte ci-dessous. Il n'y a pas non plus de problématisation, mais on lit en plus un « pseudo-raisonnement » basé sur une connaissance préalable de la tangente comme limite dont une conséquence serait la limite numérique cherchée. Soulignons en particulier le « dès lors » qui confère un caractère déductif au discours.

> *Voici la parabole F, graphique de la fonction* $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\to x^2$. *Elle comprend le point T(2,4).*
> *Soit P un point quelconque de F différent de T ; notons (x, x2) sa coordonnée.*
> *Le coefficient de direction de la sécante TP est* $m_{TP}=\dfrac{x^2-4}{x-2}$
> *lorsque P « est voisin de T » la sécante TP « est voisine de la tangente t ». Nous dirons que « la tangente t est limite en T de la sécante TP »*
> *dès lors*
> *le coefficient de direction de la tangente t est la limite du coefficient de direction de la sécante TP*
> *d'où* $m_T=\lim\limits_{T} m_{TP}=\lim_2\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$
> *la fonction définie par* $m(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ *est le taux d'accroissement en 2 de la fonction définie par* $f(x)=x^2$.
> *Elle n'est pas définie en 2, sa limite en 2 est le coefficient de direction de la tangente à F en T et est appelé nombre dérivé de la fonction f en 2.*
> *Savoir et Savoir-Faire*

Dans le premier exemple, il était demandé de montrer que le coefficient de la droite t était la limite des coefficients des sécantes s. Dans le deuxième, c'est la définition de la tangente comme « limite de sécantes » qui induisait que le coefficient de la tangente est la limite des coefficients des sécantes. L'exemple suivant va proposer une activité où l'on incite à « constater » la convergence numérique sans lui donner un sens particulier :

> *Soit la fonction* $x\to\dfrac{x^2}{4}$ [186] *; A le point du graphique d'abscisse a=2 ; B un point du graphique d'abscisse b=a+h = 2+h, où h est un réel.*
> *a) représenter la fonction sur l'intervalle [0,4]*
> *b) compléter le tableau suivant et représenter chaque droite AB*

h	*1,5*	*1*	*0,75*	*0,5*	*0,25*	*0,1*	*0,01*
b=a+h							
f(b)=f(a+h)							
f(a+h)-f(a)							
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$							
pente de la droite AB							

> *que constatez-vous quand h tend vers 0, c'est-à-dire quand le point B se rapproche du point A ?*

[186] l'activité 3 est la même pour une hyperbole 2/x

> *c) soit A le point du graphique d'abscisse a et B le point du graphique d'abscisse a+h. Calculer la pente de la droite AB ainsi que la limite de celle-ci pour h tendant vers 0. Que constatez-vous ?*
> *Actimaths*

4.3.1.2.1.1.3 Tâche appartenant au cadre I : Partir de l'objet mental

Nous décrivons en 4.3.2.3.1.2 la démarche globale de l'ouvrage A.HA et reprendrons ici les extraits plus spécifiques. C'est en fait le seul ouvrage où l'on tente de problématiser la tangente, et ce en cherchant à qualifier l'objet mental « une droite qui frôle la courbe ». Les auteurs proposent de travailler d'abord une articulation système/modèle, le système étant une conception géométrique de la tangente avec la problématique d'intersection, et la modélisation étant ensuite d'ordre algébrique. On obtient ainsi une définition opératoire de la tangente. Lisons à ce sujet l'analyse qu'en fait maintenant M. Schneider, l'un des auteurs de l'ouvrage :

> *Sur base d'une représentation à l'échelle, les élèves sont de prime abord invités à repérer la partie invisible d'un mât planté au sommet d'une colline, pour quelqu'un situé au pied de celle-ci. Ce milieu matériel rend optimales les stratégies de dessin et, comme en témoignent les auteurs du projet, les élèves tracent « à vue » une droite qui « frôle la courbe en un point » et qu'on appellera « tangente » à la suite de quelques-uns d'entre eux. L'imprécision du dessin est soulevée, de même qu'est annoncée la recherche d'un procédé plus précis qui justifie le passage aux expressions analytiques des courbes. Suit alors la recherche de candidates-tangentes au point d'abscisse 0 à plusieurs courbes : $y = x^2$, $y = kx^2$, $y = 1 + x + x^2$, $y = x^3$, $y = x^3 + x^2$, $y = 1 - x + x^2 + x^3$. Les moyens d'investigation utilisés pour tester telle ou telle candidate-tangente évoluent avec les fonctions : résolution d'un système d'équation $y = ax$ et $y = x^2$ pour montrer que, si petite que soit la valeur de a, aucune droite d'équation $y = ax$ ne peut se glisser entre $y = x^2$ et $y = 0$ sans rencontrer la courbe une seconde fois; zooms graphiques pour illustrer le fait précédent et pour montrer que le graphique de $y = x^2$ peut représenter n'importe quelle fonction du type $y = kx^2$, sommation graphique pour montrer que la droite $y = 1 + x$ frôle la courbe $y = 1 + x + x^2$ tout comme $y = 0$ frôle $y = x^2$, ce qui signifie non seulement que la courbe atterrit en douceur sur la droite, mais aussi qu'il n'y pas moyen de glisser entre elles deux une autre droite; « coinçage » du graphique de $y = x^3$ entre $y = \pm x^2$ et $y = 0$, majoration de $x^2 + x^3$ par $2x^2$, ...*
> *[..]*
> *Les moyens d'investigation décrits plus haut jouent également un rôle de validation mais, en cela, ils sont complétés par d'autres arguments que le texte ajoute sans que la situation ne le requiert véritablement. Ainsi, à propos de la fonction $y = 1 + x + x^2$ voit-on apparaître une nouvelle signification du verbe « frôler » : « Frôler signifie qu'autour du point d'abscisse 0, la fonction $1 + x + x^2$ se comporte pratiquement comme $1 + x$ [...]. Numériquement, l'erreur commise est négligeable pour des x proches de 0 et correspond à l'écart entre la courbe et sa tangente en $x = 0$ ». C'est à cet endroit du texte qu'est introduite l'expression approximation affine.*
> *[..]*

> *A ce stade de leur apprentissage, les élèves ont rencontré la tangente au cercle [..] Le choix des fonctions traitées dans le projet AHA permet d'organiser progressivement le conflit entre cette conception et celle d'une droite qui frôle la courbe. Ainsi, pour valider que $y = 1 + x$ est tangente à $y = 1 + x + x^2$ à l'origine, le texte s'appuie avec raison conjointement sur les deux conceptions : la droite non seulement frôle la courbe mais encore la rencontre en un seul point sans la traverser. Par contre, les deux conceptions sont en opposition, par exemple, à propos de la droite $y = 1 - x$ qui frôle $y = 1 - x + x^2 + x^3$ au point (0, 1) mais qui la traverse autre part. Plus loin, juste avant les applications, le texte marque le coup par le biais d'une section intitulée « Mais qu'est-ce donc qu'une tangente ? » en avançant l'intention de remplacer localement une fonction par une fonction du premier degré pour justifier le fait de privilégier la conception « droite qui frôle la courbe ».*
> *[..]*
> *Cette progression débouche sur une définition algébrique de la tangente à une fonction polynomiale, directement porteuse d'une technique d'obtention de cette tangente : la tangente est la droite dont l'équation est obtenue en gardant la partie affine du polynôme. Par l'entremise d'une translation et de sa réciproque, cette définition permet également de déterminer la tangente à une courbe polynomiale en un point d'abscisse non nulle.*
> *(Schneider, 2001)*

4.3.1.2.1.2 Tâches liées à l'approximation

L'exemple de A.H.A nous montre le cas d'une problématique de « droite qui frôle », progressivement traduite en termes d'approximation. Nous avons signalé (4.2) que la dimension d'approximation liée au nombre dérivé était effectivement liée à la tangente de manière plus ou moins explicitée et c'est ce qu'on retrouve dans les transpositions. Certaines activités vont montrer que « la tangente » (telle que définie dans le manuel en question) permet une approximation de la fonction, tandis que d'autres vont rechercher l'écriture d'un développement sous forme algébrique et proposer ensuite le rapprochement avec la tangente. Cependant nous pouvons faire remarquer que là non plus il n'y pas non plus de problématisation : la forme du développement cherchée est en général donnée d'emblée et ne répond donc pas à une question ; la fonction de remplacement est souvent proposée et les vérifications demandées peuvent donc rester calculatoires. C'est pourquoi nous proposons de considérer ces tâches comme étant plutôt des illustrations de la théorie, et donc comme relevant du niveau II[187]. Une exception peut être faite pour la dernière (approximation de la vitesse à un instant ultérieur) qui pourrait être associée à un discours de niveau 1.

[187] toutefois, elles pourraient aussi être gérées sur le mode de « ça se voit » et donner lieu à un discours de niveau 2bis.

4.3.1.2.1.2.1 Tâches appartenant au cadre II comme illustrations de la théorie

La tangente peut servir à l'approximation

Si nous reprenons la deuxième activité du manuel Fractale, une droite particulière y avait été construite en la faisant passer par un point donné et en lui donnant pour coefficient directeur la limite du coefficient directeur d'une sécante « variable » passant par ce point donné et un autre point dont l'abscisse diffère de celle du premier d'un réel h. Après avoir montré que cette droite ne possédait qu'un point d'intersection avec la parabole, ce qui amenait à l'appeler « tangente », les questions ci-dessous amènent dans la suite à évaluer la qualité de l'approximation par la fonction du premier degré associée à l'équation de la droite en question.

> *4) appelons H, N, T les points d'abscisse 1+h et d'ordonnées respectives 0, 1, g(1+h).*
> *a)exprimez* $\overline{HN}, \overline{NT}, \overline{TM}$ *en fonction de h*[188]
> *b) calculez* $\overline{TM}$ *pour* $h = 10^{-1}, h = 10^{-2}$
> *c) quelle erreur commet-on en prenant* $1 + 2 \cdot h$ *pour valeur approchée de* $(1+h)^2$
> *la fonction* $(h \mapsto (1 + 2 \cdot h)$ *est dite approximation affine en 0 de la fonction* $(h \mapsto (1+h)^2)$
> *5) la droite (D), dite tangente en A à (P) est définie par le point A et son coefficient directeur* $a_0 = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$.
> *En reprenant une étude analogue, déterminez une équation de la tangente à (P) en B.*
> *Quelle approximation affine peut-on proposer pour* $(h \mapsto (2+h)^2)$ *en 0 ?*
> *Fractale*

Ecrire un développement et en faire l'interprétation géométrique

Nous avons décrit ci-dessus l'activité de Fractale qui construisait d'abord la tangente avant de souligner ses propriétés en termes d'approximation. Remarquons que le même manuel propose ensuite une troisième activité intitulée *« approximations affines classiques »* qui va procéder en quelque sorte « dans l'autre sens ». Il s'agira d'abord de rechercher l'écriture de développements d'une fonction f(h)=(1+h)^3 au voisinage du point d'abscisse 1, sous la forme $f(h) = f(1) + 3 \cdot h + h \cdot \varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$ [189]. Une expression pour la fonction φ étant

[188] Il est vraisemblable que la notation $\overline{MN}$ désigne la mesure algébrique et non la distance comme en Belgique.
[189] A certaines époques les ordres de grandeur o(h) et O(h) ont aussi été utilisés « à la place de la limite » pour ce type d'activités.

proposée ($\varphi(h) = 3 \cdot h + h^2$) il s'agit de vérifier qu'elle correspond au développement voulu et que, de plus, il est possible de majorer en fonction de la valeur de h l'erreur commise en remplaçant f(h) par $1 + 3 \cdot h$.

En traçant la courbe représentative de f et la droite représentant $1 + 3 \cdot h$, il est ensuite proposé de faire le lien avec la tangente en vérifiant que le coefficient 3 est bien la limite du quotient différentiel associé à la fonction f, et donc de définir la droite comme étant la tangente à la courbe.

Ecrire un développement et montrer que le premier coefficient vaut la limite du quotient

C'est également l'approche suivie par le manuel cité ci-dessous, mais ici sans passer par l'interprétation géométrique :

> *On donne la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 6$
> *a) calcule f(2) et f(2+h). Ecris f(2+h) sous la forme f(2)+mh+nh²*
> *Quelle erreur commets-tu si pour calculer f(2,1) tu négliges le terme nh² ? Est-elle importante relativement à la valeur exacte ?*
> *Qu'en est-il si tu calcules f(2,01) ? et f(2,001) ?*
> *Dirais-tu que f(2)+mh est une bonne approximation de f(2+h) pour de petites valeurs de h ?*
> *b) réponds aux mêmes questions en remplaçant 2 par 5.*
> *c) tente de généraliser en remplaçant 2 par a.*
> *Est-il exact que dans le développement obtenu, tu trouves* $m = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *?*
> *Justifie.*
> *Espace Maths*

Construire un développement

Sans parler ici d'activité préparatoire, le manuel Queyzanne-Revuz propose la fonction $x \mapsto x^3 + x^2$ dont on veut calculer une valeur approchée pour 1, 017 sans calculer ni $(1, 017)^2$ ni $(1, 017)^3$. Faisant remarquer que le nombre peut s'écrire 1+h, le développement de f(1+h) fournit $f(1+h) = 2 + 5 \cdot h + 4 \cdot h^2 + h^3$. Il est alors affirmé que

> *pour h « petit » on peut « négliger* $4 \cdot h^2$ *et* h^3 h*, d'où* $f(1+h) \simeq 2 + 5 \cdot h$
> *[…]*
> *on peut écrire* $f(1+h) = 2 + 5 \cdot h + h \cdot (4.h + h^{2)}$
> *ou encore* $f(1+h) = f(1) + 5 \cdot h + h \cdot \alpha(h)$ *et remarquons que* $\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$
> *Queyzanne-Revuz*

Le manuel procède alors à la définition d'une fonction différentiable, puis dérivable. Dans l'exemple, la fonction $h \mapsto 5 \cdot h$ est appelée « fonction linéaire tangente à f au point x_0=1. »

4.3.1.2.1.2.2 Tâche pouvant susciter un discours de niveau 1

Nous plaçons dans cette catégorie le manuel Terracher, dont le troisième intitulée « *le point de vue numérique* » reprend l'expression analytique de la fonction déjà utilisée dans un contexte cinématique puis graphique.La démarche est analogue aux précédentes, mais elle fait preuve d'un peu d'originalité en posant la question de pouvoir calculer la vitesse à un instant t+h.

> *A un instant donné t_0 la vitesse du corps en chute libre est mesurée par 24m/s. Il s'agit de calculer la distance d(h) parcourue pendant l'intervalle de temps h qui suit (exprimé en secondes)*
> *1) on prend h=1. Calculer t_0, S(t_0), S(t_0 +h), puis la distance d(h)*
> *2) reprendre le même calcul pour $h = \frac{1}{10}$*
> *3) montrer que $S(t_0 + h) = S(t_0) + 24 \cdot h + 5 \cdot h^2$ et retrouver les résultats précédents*
> *4) quelle erreur commet-on en estimant d(h) à 24h lorsque h=1 ? $h = \frac{1}{10}$? $h = \frac{1}{100}$?*
> *Interpréter cette erreur sur la figure.*
> *Pour quelles valeurs de h cette erreur est-elle inférieure à 10cm ?*
> *Terracher*

4.3.1.2.1.3 Tâches liées à la vitesse

Il existe finalement beaucoup d'activités préparatoires ou d'introduction portant sur la vitesse. Toutefois, nous constaterons que leur caractère fondamental reste faible voire inexistant puisque le plus souvent la vitesse instantanée a déjà été auparavant définie comme « limite de vitesse moyenne [190]» (Fractale, Espace-Maths). Dans d'autres cas, l'activité invite à le faire très rapidement, soit par le discours mêlé à l'activité (Savoir et Savoir-Faire) soit en demandant de « voir » la limite à l'aide encore de sécantes (Actimaths) ou encore en proposant des graphiques de mouvement à interpréter librement (Actimaths). Signalons ici que c'est également par expérience que nous faisons cette interprétation, ayant pu étudier comment les élèves-professeurs utilisent ce type d'activité comme introduction. Deux autres cas seront donc étudiés à part : Terracher qui propose une affirmation sur la vitesse

[190] Cette expression est elle-même sujette à interprétations : la vitesse moyenne est assez rarement écrite comme une fonction de t, donc le « passage à la limite » n'est pas évident. Et en quoi consiste exactement ce passage à la limite : par exemple, faut-il dire la vitesse instantanée est la limite de la vitesse moyenne ou des vitesses moyennes ?

instantanée non définie, mais dont l'exploitation telle quelle nous semble difficile, et A.HA qui propose des problèmes de vitesses liées.

4.3.1.2.1.3.1 Tâches appartenant au cadre II comme illustrations de la théorie

Vitesse instantanée déjà définie comme limite de vitesse moyenne

Dans Fractale, la première activité concerne la loi horaire et la vitesse instantanée. Précisons toutefois que ce manuel, comme c'est souvent le cas dans les manuels français, a dans un chapitré précédent introduit la notion de limite en zéro pour définir la vitesse instantanée comme limite de vitesse moyenne.

Nous décrirons ci-dessous l'activité qui y a amené. Etant donnée la loi horaire du mouvement d'un point M, il est demandé de calculer les positions en certains instants, puis les vitesses moyennes sur les intervalles d'extrémité inférieure 3 formés par les instants déjà cités, puis la vitesse moyenne sur un intervalle d'extrémité 3 et 3+h qui est d'abord notée $v_{(3,3+h)}$ [191] et enfin de constater que :

> *cette vitesse peut prendre des valeurs aussi proches de 2 qu'on le désire en choisissant convenablement h .*
> *La vitesse à la date 3 est conventionnellement posée égale à 2, valeur obtenue pour h=0.*
> *Cette vitesse est dite limite quand h tend vers zéro de la vitesse moyenne* $v_{(3,3+h)}$
> *Fractale, Ch6, AP3*

Dans Espace-Maths, la vitesse instantanée est déjà définie (par un vieux manuel…) et il s'agira ici de déduire l'expression de la fonction correspondante, avec la tentation de procéder à une analogie d'écritures.

> *Dans un ancien livre de mécanique, on lit entre autres*
> *« la vitesse moyenne d'un mobile, entre les instants t0 et t1, est égale au quotient entre d'une part la distance parcourue par le mobile entre les deux instants, et, d'autre part, le temps mis à parcourir cette distance »*
> *« la vitesse instantanée au temps t est la limite de la vitesse moyenne entre les instants t0 et t1, lorsque t1 tend vers t0 »*
> *« l'espace parcouru par un mobile est une fonction du temps »*
> *a)l'espace parcouru par un mobile est donné par la fonction* $f(t)=5\cdot t^2+3\cdot t$ *où t est compté en secondes et f(t) est compté en mètres.*
> *Détermine l'espace parcouru après 2 secondes et après 2,1 secondes.*
> *Quelle est la vitesse moyenne du mobile entre ces deux instants ?*

---

[191] Notons que c'est le seul ouvrage où l'on trouve une notation « presque fonctionnelle » pour la vitesse moyenne, même si ici le 3 et 3+h apparaissent sous forme d'indices.

> *Quelle est la vitesse instantanée 2 secondes après le départ ?*
> *b) tente de généraliser entre les instants a et a+h*
> *donne une formule donnant la vitesse instantanée à l'instant a en fonction de f, de a et de h.*

4.3.1.2.1.3.2 Tâches nécessitant un discours de niveau 2bis

Vitesse instantanée à définir rapidement

Dans Savoir et Savoir-Faire , sous le titre Définition-exemple 2, on trouve une activité qui semble vouloir réaliser un parallèle avec le discours sur la tangente, mais toujours sans problématisation. On notera encore ici l'utilisation des guillemets, et le fait que le rapport entre vitesse instantanée et vitesse moyenne est supposé connu, même si il pourrait y avoir une occasion de proposer une définition de cette vitesse instantanée. Soulignons cependant que c'est le seul ouvrage où il est fait mention d'un acte de modélisation par la phrase *« en passant des grandeurs à leurs mesures »* et par le changement de notation de la variable qui de t devient x.

> *Soit un axe gradué en m, parcouru par un mobile tombant en chute libre, dont l'origine est le point de départ du mobile et orienté positivement vers le bas. A l'instant t, l'abscisse x du mobile est* $\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$ *où g est l'accélération due à la pesanteur (g=9,81 m/s2), t est le temps du parcours mesuré en secondes.*
> *En passant des grandeurs à leurs mesures, on est ainsi amené à introduire la fonction*
> $x : \mathbb{R}\to\mathbb{R} : t\to\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot t^2$
> *A l'instant 2 l'abscisse du mobile est* $\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot 4$
> *A l'instant t l'abscisse du mobile est* $\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot t^2$
> *La vitesse moyenne entre les instants 2 et t est*
> $Vm=\frac{espaceparcouru}{tempsdeparcours}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot t^2-\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot 4}{t-2}=\frac{9{,}81}{2}\cdot\frac{t^2-4}{t-2}$
> *Lorsque t « est voisin de 2 » la vitesse moyenne entre les instants 2 et t « est voisine de la vitesse instantanée à l'instant 2 »*
> *La vitesse instantanée v à l'instant 2 est la limite en 2 de la vitesse moyenne entre les instants 2 et t.*
> *D'où* $v=\lim_{2} v_m=\lim_{2}\frac{9{,}81}{2}\cdot\frac{t^2-4}{t-2}=2\cdot 9{,}81$
> *La fonction définie par v(t) =* $\frac{9{,}81}{2}\cdot\frac{t^2-4}{t-2}$ *permet de calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants 2 et t. Elle est appelée taux d'accroissement en 2 de la fonction*

> *définie par x(t) =* $\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot t^2$ *. Elle n'est pas définie en 2 ; sa limite en 2 est la vitesse instantanée à l'instant 2 et est appelé nombre dérivé de la fonction x en 2.*
> *Savoir et Savoir-Faire*

Convergence à observer

L'activité suivante semble plus confuse notamment de par l'intervention des sécantes utilisées de manière uniquement graphique et par la convergence qui devrait être « observée ». Elle apparaît comme assez représentative de l'ostension déguisée décrite au Chapitre 3.

> *Une masse ponctuelle est lâchée à l'instant 0 et tombe sous l'effet de la pesanteur. On peut montrer qu'en l'absence de frottement, la distance parcourue à l'instant t est proportionnelle au carré du temps écoulé.*
> $d(t)=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$ *où t est exprimé en secondes, d(t) en mètres et g~9,81 m/sec2*
> *a)représenter cette fonction sur [0,3]*
> *b) calculer la vitesse moyenne (* $\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}$ *) entre les instants* t_1*=1 et* t_2*=2*
> *calculer la pente de la droite AB, A d'abscisse 1 et B d'abscisse 2, A et B appartenant au graphique de d(t). Comparer les résultats obtenus.*
> *c) soit* $v_m(t)$ *la vitesse moyenne entre les instants 1 et t. Exprimer* $v_m(t)$ *en fonction de t et compléter le tableau suivant*
>
> *t* *1,2* *1,1* *1,01* *1,001* *0,999* *0,99* *0,9*
> *0,8*
> $v_m(t)$
> *Vers quel nombre réel v la vitesse moyenne* $v_m(t)$ *tend-elle lorsque t tend vers 1 ? Que concluez-vous ?*
> *Actimaths*

4.3.1.2.1.3.3 Tâches amenant un discours de niveau 2 ou 1 sur la vitesse instantanée

Nous reprenons ci-dessous deux activités qui pourraient inciter à un questionnement sur la notion de vitesse instantanée : la description de graphiques de mouvement et la justification d'une affirmation. Elles laissent ainsi une grande marge de manœuvre à l'utilisateur, dont dépendra l'exploitation effective de telles questions.

Description de mouvements

> *Chacun des graphes ci-dessous donne la position (y) de quatre wagonnets se déplaçant séparément sur une ligne droite en fonction du temps (t). Les échelles de tous les graphes sont les mêmes.*
> *a)décrire le mouvement de chaque wagonnet*
> *b) quel(s) graphe(s) correspond(ent) au(x) wagonnet(s) qui a (ont)*
> *-une vitesse constante*
> *-la plus grande vitesse initiale*
> *-une vitesse nulle*
> *-une accélération nulle*
> *-une accélération toujours positive*
> *-une accélération toujours négative*
> *Actimaths*

Argumentation sur la vitesse instantanée

Dans Terracher, le même phénomène de chute libre d'un corps est étudié successivement sous les trois aspects : cinématique, graphique, numérique qui sont explicitement indiqués comme titre de chacune des activités. Le « *point de vue cinématique* » va effectivement introduire la dérivée comme vitesse instantanée mais sans réellement chercher de réponse à une question. Il s'agira plutôt de rechercher le discours justifiant une affirmation sur la vitesse instantanée. Il peut donc y avoir ici soit une diversion vers la physique qui aurait donné les formules, soit une réelle volonté de définir la vitesse instantanée comme limite du quotient donnant la vitesse moyenne en recherchant une validation de la technique de calcul.

> *Un corps en chute libre, lâché sans vitesse initiale, a parcouru au bout de t secondes la distance s(t) exprimée en mètres par* $s(t) = 5 \cdot t^2$
> *Soit h un réel strictement positif.*
> *1) calculer la vitesse moyenne entre les instants* t_0 *et* t_0*+h*
> *2) même question avec l'intervalle de temps* $[t_0 - h, t_0]$
> *3) « la vitesse instantanée à l'instant* t_0 *est* $10 \cdot t_0 m/s$ *» Expliquer cette affirmation*
> *4) application : un corps est lâché sans vitesse initiale d'une altitude de 25 mètres. Quelle est en km/h sa vitesse d'impact au sol ?*
> *Terracher*

Toutefois, ces deux activités ne pourront susciter un discours de niveau 1 que si l'utilisateur en a vraiment envie. En effet, il est très facile de les proposer en introduction et revenir directement à la théorie ensuite. C'est pourquoi nous les avons classées dans une catégorie intermédiaire car elles ne relèvent pas explicitement du cadre I, contrairement à l'exemple qui suit.

4.3.1.2.1.3.4 Tâche appartenant au cadre I : problème de vitesses liées dans A.H.A

L'ouvrage A.HA va proposer une série de problèmes de vitesses, ou plus généralement de grandeurs physiques, nécessitant un calcul spécifique qui sera ensuite défini comme un calcul de limite. Parmi ceux-ci, le problème du vase conique dont nous décrivons au Chapitre 5 les différentes gestions possibles. Lisons ici comment M. Schneider le présente comme une situation fondamentale pour le concept de dérivée :

> *Des problèmes de vitesses liées constituent, dans le projet AHA, une autre première rencontre avec le concept de limite. Voici le premier énoncé proposé aux élèves: Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm par minute. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100 cm^3/min ?*
> *Ce problème constitue un milieu « matériel », sous forme d'une expérience de pensée, paradigmatique d'une classe particulière de problèmes de vitesses liées qui se caractérise comme suit : deux grandeurs y sont mobilisées (ici le volume d'eau et sa hauteur dans le vase). Elles varient toutes deux en fonction du temps, la vitesse de variation de l'une est constante et la vitesse de l'autre, sur laquelle porte la question, est variable. Ces deux grandeurs dépendent l'une de l'autre, ce qui fait que leurs vitesses sont liées. Là sont les variables a priori dépendant de la structure mathématique du problème.*
> *[..]*
> *L'investigation qui vient d'être décrite ainsi que l'algébrisation du temps t et de l'incrément de temps Δt dans l'expression du débit moyen (qu'elle soit spontanément proposée par les élèves ou obtenue à l'invite du professeur pour alléger la recherche) débouchent sur l'identification d'un passage à la limite : rendre nul Δt avant d'égaler à 100 l'expression du débit . C'est l'occasion d'un débat sur la validité de ce calcul, sur le sens de l'indétermination 0/0, au cours duquel s'expriment des réserves analogues à celles observées par Schneider (1988 et 1992) à propos des concepts de vitesse et de débit instantané.*
> *[..]*
> *A la suite de la résolution de ce problème, le concept de débit instantané est défini comme l'expression obtenue en annulant Δt dans l'expression du débit moyen sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, une fois faites toutes les simplifications algébriques. L'expression « limite du débit moyen pour Δt tendant vers 0 » est utilisée pour décrire ce calcul. Après l'étude d'autres problèmes de vitesses liées par une démarche analogue complétée de tableaux numériques, la synthèse définit la vitesse de variation instantanée d'une grandeur qui varie en fonction du temps comme « la limite du taux moyen de variation de cette grandeur pour des intervalles de temps qui diminuent indéfiniment. » induisant ainsi un changement de point de vue par rapport à la première définition.*
> *Ce chapitre débouche sur un entraînement plus répétitif aux problèmes de vitesses liées. Manquent cependant, à ce stade, les règles de calcul des dérivées dont le projet AHA reporte l'étude au chapitre suivant. Les élèves doivent donc recourir, comme montré*

> *dans le chapitre, à l'écriture du taux moyen, sa simplification et la suppression de Δt (la simplification passe dans certains cas par la « technique du binôme conjugué » exhibée à l'occasion de deux problèmes résolus dans le chapitre). Ce choix des auteurs est délibéré. Ils l'argumentent par référence à la quête du sens : « D'autres problèmes de vitesses liées sont ensuite résolus de manière artisanale, c'est-à-dire sans mise au point préalable du calcul proprement dit des dérivées, afin que les élèves s'imprègnent du sens du quotient différentiel. »*
> *Schneider (2001)*

4.3.1.2.1.4 Autres tâches

Nous signalons ici l'existence d'autres tâches proposées comme introduction à la dérivée mais que nous n'avons jamais vu utiliser.

Coût marginal

L'exemple du coût marginal devient courant malgré le fait de poser le problème d'un passage discret/continu non évident.

> *Une firme fabrique des bouchons de flacons de parfum. Elle estime que le coût de fabrication de x bouchons est* $C(x) = 200 + 0,05 \cdot x + 0,0001 \cdot x^2$, *c'est-à-dire la somme de toutes les dépenses liées à la production.*
> *On appelle coût moyen* $c(x) = \frac{C(x)}{x}$ *le coût moyen de production d'une unité et coût marginal* $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$ *le coût e production d'une unité supplémentaire.*
> *a) quels sont les coût total, coût moyen et coût marginal de la production de 500 unités, 1000 unités et 5000 unités ?*
> *b) soit une autre formule donnant le coût marginal* $C'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$
> *Comparer* $C_m(x)$ *et C'(x) pour x=10 ;1000 ;1500 ;2000 ;5000 unités. Que concluez-vous ?*
> *Actimaths, Activité 7*

Optimisation

Nous avons aussi pu lire un problème d'optimisation classiquement proposé en application dont la formulation a été légèrement « trafiquée » pour pouvoir l'utiliser en introduction. Ici aussi, son exploitation effective dépendra de l'utilisateur.

> *Pour fabriquer une boîte parallélépipédique, on dispose d'une plaque ne carton carrée de 60 cm de côté dans laquelle on découpe à chaque coin un carré de x cm de côté. On obtient ainsi le patron de cette boîte sans couvercle.*
> *a) à quel intervalle appartient x ?*

> *b) déterminer le volume V(x) de la boîte en fonction de x*
> *c) étudier le signe du polynôme V(x)-V(10). En déduire que le volume de la boîte est maximal lorsque x=10cm*
> *d) retrouver le résultat en étudiant les variations de V(x)*
> *Actimaths, activité 8*

4.3.1.2.2 Discours et définitions

Nous allons maintenant étudier les discours qui accompagnent ces activités, les formulations utilisées et les définitions effectivement données. Nous verrons en effet que la référence à une conception primitive de la tangente ou de la vitesse est souvent faite sous forme de remarque à l'intérieur des activités tandis que le cours proprement dit manifeste la difficulté à en donner une définition, en particulier pour la tangente. Nous chercherons aussi quelle définition de la vitesse instantanée est utilisée de manière à mieux distinguer comment les manuels invitent ou non à un travail dans le cadre de rationalité I.

4.3.1.2.2.1 Changements de cadre précisés

Certains manuels veillent à marquer la séparation entre la notion de dérivée et ses interprétations, et ce de plusieurs manières : par des sous-chapitres clairement distingués dans la forme, ou par des sous-chapitres éloignés d'un certain nombre de pages, ou par des tableaux récapitulatifs comme dans Fractale et Terracher, qui de plus installent une séparation claire entre le phénomène physique et sa modélisation

Ces tableaux sont d'ailleurs donnés après une définition effective de la dérivée, puis de la tangente donnée par son coefficient directeur, définitions qui suivent des activités préparatoires proposant souvent de travailler dans les différents cadres avec la même expression analytique.

4.3.1.2.2.2 Les remarques dans les activités

Regardons maintenant comment les remarques glissées dans les activités font plus ou moins appel à la conception dite première de la tangente, c'est-à-dire comme une « extension » de la tangente au cercle.

Parfois, c'est seulement l'aspect visuel qui est mentionné (la droite a une position spéciale).

> *[…] l'interprétation graphique ci-dessus suggère que lorsque h tend vers 0, le point M_h se rapproche de M_0 et la droite M_0M_h tend à se positionner sur la droite Δ. Cette droite*

> *Δ qui joue ainsi un rôle privilégié pour le point M_0 de la courbe P, sera naturellement désignée comme « tangente » à la courbe P en M_0*
> *Terracher, AP*

Dans d'autres cas, il est dit explicitement que c'est parce qu'il y a un seul point d'intersection que la droite est appelée tangente.

> *La droite (D) a été dite tangente à (P) ; elle « touche » (P) en un seul point.*
> *[…]*
> *la droite D, dite tangente en A à P est définie par le point A et son coefficient directeur a_0 avec* $a_0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$
> *Fractale, AP*

Nous avons aussi cité le cas de Savoir et savoir-faire où les discours géométrique, numérique et graphique sont juxtaposés à l'extrême.

Terminons par le Actimaths qui propose plusieurs activités préliminaires dont les trois premières ont pour objet la tangente. Même si les autres concernent ensuite les aspects cinématique et économique, le cours revient ensuite essentiellement sur la problématique de la tangente en présentant le schéma que nous appellerons « courbe avec sécante mobile et tangente pré-positionnée » et conclut les observations avec la phrase

> *Quand M se rapproche indéfiniment du point A, la sécante AM devient tangente à la courbe Gf (schéma avec indications de mouvement) ;*
> *Nous pouvons dire que la tangente à la courbe Gf au point A d'abscisse a occupe la position limite*[192] *de la sécante AM quand le point M se rapproche indéfiniment du point A ; Cette observation va nous permettre de définir la notion de tangente à la courbe en un de ses points et ses conditions d'existence.*
> *Actimaths*

Malgré l'annonce précédente, il est ensuite plusieurs fois fait référence à « la tangente »[193], qui n'est en fait toujours pas définie. Par exemple :

> *Pour obtenir la pente de la tangente en A, nous pouvons calculer* $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
> *Lorsque cette limite existe dans R, il est naturel de la considérer comme la pente de la tangente à la courbe Gf au pointA .*

[192] En précisant de plus que pour un cercle, la tangente est la limite d'une corde
[193] Signalons aussi que la tangente est représentée sans raison sur le graphique dans l'interprétation de l'exercice sur le coût marginal.

Puis lorsqu'il s'agit d'établir l'équivalence des deux formulations, la tangente est de nouveau mentionnée :

> *selon la notation choisie, on obtient deux formes de l'expression de la pente de la tangente en (a,f(a))*
> *l'accroissement Δx de la variable est*
> *x-a* *h*
> *l'accroissement correspondant à Δx de f est*
> *f(x)-f(a* *f(a+h)-f(a)*
> *Le taux d'accroissement est donc*
> $\frac{\text{f(x)-f(a)}}{\text{x-a}}$ $\frac{\text{f(a+h)-f(a)}}{\text{h}}$
> *Quand x tend vers a, h tend vers 0 et nous obtenons le nombre dérivé de f en x=a*
> $\lim_{x\to a}\frac{\text{f(x)-f(a)}}{\text{x-a}} = f'(a)$ $\lim_{h\to 0}\frac{\text{f(a+h)-f(a)}}{\text{h}}$
> *Actimaths*

4.3.1.2.2.3 Les définitions de la tangente

Nous allons maintenant par contraste rechercher les énoncés annonçant explicitement une définition de la tangente. Nous distinguerons les définitions utilisant le coefficient directeur que nous associerons à une rationalité de type II et celles comme position limite de sécantes qui relèvent plus souvent d'un discours de niveau 2bis.

4.3.1.2.2.3.1 Cadre II : définitions de la tangente par son coefficient directeur

Nous avons signalé que cette définition ne semblait pas directement associée à l'origine historique de la dérivée. La tangente appartient à un cadre II géométrique comme tangente à une parabole, et à un cadre II analytique comme droite dont le coefficient directeur est le nombre dérivé. On n'en trouve donc de définition comme concept mathématique que dans l'un de ces deux cadres, mais peut-on passer directement d'un niveau II à un autre niveau II ?

La droite dont le coefficient directeur est le nombre dérivé

Les deux manuels français vont donner une définition complètement analytique puisque la tangente est définie par le nombre dérivé, ce qu'on trouve dans les deux extraits suivants :

> *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, x_0 un point de I où f est dérivable et a le nombre dérivé de f au point x_0.*
> *On appelle tangente à la courbe représentative de f au point M_0 (x_0,f(x_0)) la droite passant par le point M_0 et de coefficient directeur égal à a*
> *Terracher*

> *f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, x_0 est un nombre réel de I, C est la courbe représentative de f. Soit A le nombre dérivé de f en x.*
> *Définition : on dit que la droite passant par le point M0(x0,f(x0)) de C et de coefficient directeur A est la tangente à la courbe C au point M0. »*
> *Fractale*

La droite dont le coefficient est la limite du coefficient d'une sécante

La définition ci-dessous pose question de par la complexité de son écriture, mais aussi parce que ce manuel a défini la dérivée à partir de la différentiabilité et n'a donc utilisé à aucun moment les sécantes et leurs coefficients. Comme nous le verrons également au 4.3.3, une telle définition semble déjà refléter la difficulté à distinguer efficacement les deux points de vue.

> *nous donnerons la définition suivante : Soient Γ la représentation graphique d'une fonction numérique f de la variable réelle x et Δ_0 une droite passant par $M_0(x_0,f(x_0))$ de Γ et non parallèle à Oy. On dit que Δ_0 est **tangente** à Γ en M_0 si le coefficient directeur de la droite passant par M_0 et $M(x_0+h,f(x_0+h))$ a pour limite le coefficient directeur de Δ_0 quand h tend vers 0.*
> *Queyzanne-Revuz*

4.3.1.2.2.3.2 Discours 2bis : définitions de la tangente par sa « position limite »[194]

Nous avions vu dans le discours/activité d'un manuel une phrase semblant définir la tangente alors que la phrase précédente supposait qu'on la connaissait déjà :

> *Nous dirons que la tangente t est la limite de la sécante TP*
> *Savoir et savoir-faire*

Cet énoncé recevra dans Espace-Maths[195] le statut de définition comme suit

> *La **tangente en un point d'une courbe** est la droite dont la position est la limite, si elle existe, de la position d'une sécante variable AB à cette courbe, lorsque le point variable B tend vers le point fixe A*

[194] Nous ne parlons de discours 2bis pour cette définition que dans le cas où elle n'est pas accompagnée d'un discours plus raisonné.
[195] Nous nous permettons d'insister sur le contenu de ce manuel dans la mesure où c'est actuellement le plus utilisé dans les écoles, et où son contenu nous montre que les étudiants ne se contentent pas de recopier le manuel mais font une sélection.

Nous souhaitons faire remarquer ici que cette définition est donnée 15 pages après l'activité sur la tangente et est suivie d'une propriété sur le coefficient directeur visant selon nous à montrer l'équivalence entre la « tangente géométrique » qui est limite de sécantes et « la tangente analytique ». Cela ressemble à une tentative de la faire passer d'un cadre de type II à l'autre, mais cela se fait finalement en admettent des arguments de niveau 0. Remarquons aussi les précautions sur la nature du repère et la non-verticalité.

> *Dans un repère orthonormé, la position d'une droite est donnée par le coefficient angulaire de cette droite, pour autant qu'elle ne soit pas verticale.*
> *La définition ci-dessus peut se particulariser dans le cas du graphe cartésien d'une fonction numérique d'une variable réelle*
> *Dans un RON, si*
> *Gf est le graphe cartésien de f* $\mathbb{R}$ -> $\mathbb{R}$ *: x -> f(x) ;*
> *A(a,f(a)) est un point fixe de Gf ; B(a+h,f(a+h)) est un point variable de Gf, voisin de A*
> *t est la tangente, non verticale, à Gf en A (rq*) ;* m_t *est le coefficient angulaire de t ;* m_{AB} *est le coefficient angulaire de AB*
> *alors*
> *B tend vers A signifie que h tend vers 0*
> $$m_{AB} = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
> $$m_t = \lim_{h\to 0} m_{AB} = f'(a)$$
> *il en résulte les propriétés qui suivent et leurs conséquences*
> *1) le coefficient angulaire de la tangente au point (a,f(a)) [..] est égal au nombre dérivé de f en a, pour autant que cette tangente ne soit pas verticale*
> *2) une équation cartésienne de la tangente est [..] pour autant que cette tangente ne soit pas verticale*
> *3) la fonction* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to f(x)$ *est dérivable en le réel a si et seulement si le graphe cartésien de f admet une seule tangente non verticale au point de coordonnée (a,f(a))*
> *Espace Maths*

4.3.1.2.2.4 Définitions de la vitesse instantanée

Notre description des cadres de rationalité de type I et II fait intervenir la dialectique entre système et modèle. Dans le cas de la cinématique, la dérivée va apparaître comme modèle mathématique de la notion de vitesse instantanée appartenant quant à elle au système à modéliser. C'est pourquoi les définitions proposées permettent de cerner dans quel cadre le manuel propose implicitement de travailler.

4.3.1.2.2.4.1 Cadre II : La vitesse comme illustration de la dérivée

Si nous cherchons comment les manuels prennent en charge la définition de la vitesse instantanée, nous constatons qu'elle est en général insérée dans l'activité et donc presque jamais avec un statut de définition. De plus, elle fait toujours référence à la limite, sans qu'il soit jamais proposé de valider le fait que le passage à la limite fournira bien ce qu'on appelle « physiquement » vitesse instantanée. Le travail dans le cadre de rationalité I est donc éludé.

Voici quelques exemples :

> *[..] pour exprimer d'une manière plus précise, la véritable vitesse à l'instant t à l'aide de la vitesse moyenne, il faudrait choisir un intervalle de temps Δt plus petit. La limite vers laquelle tend la vitesse moyenne, quand Δt tend vers 0 caractérise au mieux la vitesse du mobile à l'instant.*
>
> $$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t+\Delta t) - e(t)}{\Delta t} = e'(t)$$
>
> *Cette limite est appelée vitesse instantanée du mouvement. La vitesse à l'instant t est égale au nombre dérivé de l'espace parcouru par rapport au temps t.*
> *Actimaths*

> *La vitesse à la date 3 est conventionnellement posée égale à 2, valeur obtenue pour h=0. Cette vitesse est dite limite quand h tend vers zéro de la vitesse moyenne* $v_{(3,3+h)}$.
> *Fractale, Ch 6, AP3*
> *La loi horaire du mouvement est* $x(t) = t^3 + 2 \cdot t - 7$. *La vitesse à la date* t_0 *est égale à* $\lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$. *Calculer la vitesse en 2.*
> *Fractale, Ch8, AP1*

> *La vitesse instantanée en 2 est la limite de la vitesse moyenne entre 2 et t*
> *Savoir et Savoir Faire*

Un cas encore plus flagrant est celui d'Espace Maths, dans lequel la définition est non seulement diluée dans un texte d'activité, mais de plus « déléguée » à « *un vieux manuel de mécanique* » comme vu précédemment.

4.3.1.2.2.4.2 Cadre I : comment un calcul de vitesse fournit la dérivée

Excepté A.HA qui annonce explicitement sa volonté de travailler dans le cadre I, le seul ouvrage donnant une définition de la vitesse instantanée procède « curieusement » puisque nous pouvons y trouver la cohabitation des deux démarches : 1) une activité préparatoire va demander d'argumenter l'affirmation « *la vitesse à l'instant t vaut …* » ce qui pourrait inviter à élaborer une définition soi-même et donc à travailler dans un cadre de type I; 2) le cours, après avoir défini le nombre dérivé d'une fonction f va proposer comme définition :

> *Si $t \mapsto f(t)$ est la loi horaire du mouvement d'un mobile,*
> *[..] le nombre dérivé de f en t0 est la vitesse instantanée du mobile en t0*[196]
> *Terracher*

Nous pouvons également signaler ici la remarque qui accompagne la « définition » dans Fractale, puisque elle propose presque une définition par la technique de calcul.

> *C'est ce procédé qui a précédé la notion de limite, non sans problèmes car il consiste à prendre dans un premier temps h différent de zéro, puis, pour obtenir la limite, à poser h=0*
> *Fractale, Ch6, AP3*

4.3.1.2.3 Approximer par la tangente ou approximer par la dérivée ?

La dimension d'approximation correspond à l'entrée de la tangente dans un cadre de type II analytique en plus du cadre de type II géométrique auquel elle appartient déjà. Cette dimension offre donc à la fois l'opportunité de dissocier la dérivée de la tangente mais aussi, et en conséquence, la difficulté de pouvoir les remettre en relation. Ce phénomène est particulièrement présent dans deux manuels qui semblent pourtant n'avoir rien en commun. Tous deux adoptent une démarche basée sur la recherche d'une approximation, qui va prendre ensuite deux formes différentes nous intéressant particulièrement puisque dans AHA c'est la tangente qui va être définie comme outil d'approximation de courbes polynomiales, tandis que dans le Queyzanne Revuz c'est le nombre dérivé qui va être défini comme outil d'approximation.

Rappelons ici que ce manuel invite à partir de l'objet mental « tangente » comme une droite qui « frôle la courbe » et en propose une modélisation en définissant la tangente à des courbes polynomiales par leur équation cartésienne.

Dans le Queyzanne-Revuz, on définit d'abord la notion de fonction linéaire tangente[197] dans un but d'approximation consistant à écrire un développement, et ensuite la différentiabilité puis la dérivabilité en un point. Pour cela on montre que :

---

[196] C'est typiquement la définition d'une praxéologie de type 2, comme celle utilisée dans les cours de cinématique des mathématiques modernes.

[197] L'utilisation du mot tangente à cet endroit n'étant d'ailleurs pas commentée.

> *la recherche d'une fonction linéaire tangente à f en x_0 revient à la recherche, lorsque h tend vers zéro, de la limite de* $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
> *S'il existe un réel l tel que* $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *= l, ce nombre est appelé dérivée de f au point x_0*
> *Queyzanne-Revuz*

Ensuite, sous le titre « interprétation géométrique » on calculera le coefficient directeur d'une droite passant par deux points de la courbe représentative qui « n'est autre que le taux d'accroissement entre x_0 et x_0+h », cette droite Δ apparaissant contrastée par rapport à une certaine droite Δ_0. Alors on donnera une définition de la tangente :

> *[..]Δ_0, une droite passant par $M_0(x_0,f(x_0))$ […]. On dit que Δ_0 est tangente [à la représentation graphique de f] si le coefficient directeur de la droite passant par M_0 et $(x_0+h,f(x_0+h))$ a pour limite le coefficient directeur de Δ_0 quand h tend vers zéro.*
> *Queyzanne-Revuz*

Vient alors un théorème énonçant l'équivalence entre 1) La représentation graphique admet une tangente au point d'abscisse x_0 et 2) La fonction est dérivable en x_0.
Une remarque conclura alors cette « mise en relation » en montrant que, quand la fonction est dérivable, l'écriture sous forme de développement d'ordre un permet de mettre en évidence une fonction qui

> *n'est autre que la fonction représentée graphiquement par la tangente Δ0 en M0 [et] qui s'appelle la fonction affine tangente à f au point x0.*
> *Queyzanne-Revuz*

justifiant ainsi l'appellation initialement donnée.
Il y a donc ici aussi un souci de définir séparément la dérivée et la tangente avant de les « remettre en relation ». Toutefois, le second manuel nous semble devoir « inventer » une séparation permettant de définir la tangente dans deux cadres théoriques, ce qui sera encore plus marqué dans les ouvrages que nous présenterons au 4.3.3.

4.3.1.2.4 Quelques curiosités

Comme l'avait déjà montré M. Schneider (1991), les guillemets dans l'expression « position limite, si elle existe » sont censés représenter une précaution mais sont souvent mal placés, devenant par exemple la tangente est la limite « si elle existe », des sécantes. De même, les guillemets sont abondamment utilisés dans ce que nous avons appelé le pseudo-raisonnement de Savoir et savoir-faire. D'autres précautions oratoires sont à signaler mais leur effet reste à discuter.

La représentation graphique semble ici un facteur déterminant : certains manuels demandent de la faire, et d'autres présentent une ou plusieurs figures induisant un raisonnement géométrique : des courbes non associées à une fonction ; des courbes accompagnées des sécantes et de la tangente clairement identifiée (par un t, ou T,…) y compris dans un exercice d'application à l'économie. La dimension dynamique de la construction de la figure est en général perdue.

Une dernière curiosité, qui nous semble intéressante à examiner de plus près est la tendance constatée dans plusieurs manuels à insister sur l'égalité $\lim\limits_{x \to a} \frac{\text{f(x)-f(a)}}{x-a} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\text{f(a+h)-f(a)}}{h}$

Cela pourrait être une trace de la difficulté proprement numérique de la notion. En effet, est-ce la même chose de faire tendre un nombre vers l'autre ou de partir de l'un et de contrôler la manière dont on s'en écarte ? Remarquons que cela semble aussi lié aux deux possibilités de concevoir les points « infiniment proches » : deux points distincts dont l'un se rapproche de l'autre ; ou deux points entre lesquels on invente un écart destiné à être ensuite réduit, ce qui correspond en quelque sorte à « un point dont on fait semblant qu'il soit deux ».

4.3.1.2.5 *Conclusions*

Ce premier parcours dans les manuels peut nous montrer que beaucoup de possibilités sont offertes mais la faible problématisation des activités et les remarques qui y sont associées incitent assez rapidement à l'ostension et surtout à la généralisation de formules.

Malgré une certaine variabilité potentielle, il existe des invariants manifestes dont l'évitement d'une définition de la tangente par le coefficient directeur et l'escamotage d'un travail du système vers le modèle à propos de la vitesse instantanée.

Notons la généralisation de la conception « limite de sécantes », qui existe maintenant avec la même formulation dans les éditions plus récentes des manuels français consultés. Par contre la diversité s'y accroît puisque nous y avons aussi trouvé des tâches de construction de courbes sur base des tangentes.

4.3.2 Le lien entre le signe de la dérivée et la croissance

4.3.2.1 Le fait mathématique

4.3.2.1.1 La question

Une fois la dérivée définie, il s'agit dans ce deuxième sujet de montrer que le signe de la dérivée est un critère pour déterminer sur quels intervalles de son domaine de définition la fonction sera croissante ou décroissante. Un résultat associé est la possibilité de rechercher les extrema à partir des valeurs où la dérivée s'annule. Ces résultats théoriques sont ensuite utilisés essentiellement pour l'exercice du type « étude de fonctions » et les problèmes d'optimisation.

Dans les années précédentes, les élèves ont une définition de la croissance (ou décroissance) d'une fonction sous la forme

> *Une fonction f est dite croissante (décroissante) sur I lorsque, pour tous x_1 et x_2 appartenant à T et tels que $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$)*

ou encore

> *Une fonction f est dite croissante (décroissante) sur I lorsque, pour tous x1 et x2 appartenant à T,* $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq$ *0 (0)*

mettant ainsi l'accent soit sur la conservation de l'ordre, soit sur le signe du taux de variation. Bien sûr les deux formulations peuvent nous sembler équivalentes mais, de même que pour l'énoncé du théorème des accroissements finis, elles ne se prêtent pas aux mêmes argumentations dans la mesure où une formulation incite à une estimation de l'accroissement tandis que l'autre est vraiment presque une traduction de la notion de pente.

L'objectif est alors d'établir les résultats suivants[198]

1. Soit une fonction réelle f définie et dérivable sur un intervalle I. Si f est croissante sur I, alors f' est positive sur I.
2. Soit une fonction réelle f définie et dérivable sur un intervalle I. Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.

En ce qui concerne le premier énoncé, la démonstration consiste à

1. calculer le quotient différentiel en x_0 appartenant à I,
2. montrer que le quotient différentiel a un signe constant sur $[x_0, x_0 + h]$,
3. en déduire que sa limite sera du même signe,
4. conclure que $f'(x_0)$ est donc positive pour tout x_0 de I.

La troisième étape (la limite a le même signe que la quantité variable) est la seule pouvant poser une difficulté : elle est souvent considérée comme allant de soi mais parfois soulignée comme une propriété spécifique à admettre (Espace Maths), ou même démontrée dans le Queyzanne-Revuz au moyen du formalisme en ε, η.

Le deuxième énoncé est en général conjecturé sur l'observation d'une représentation graphique montrant la courbe d'une fonction non monotone et le tracé de tangentes en quelques points d'un intervalle sur lequel la fonction est croissante et en quelques points d'un intervalle sur lequel elle est décroissante. Mais il nous semble que l'observation proposée correspond finalement plutôt au premier énoncé. Prenons le cas de la croissance : la courbe est visiblement celle d'une fonction croissante[199] et on voit que les tangentes ont (alors) une pente positive.

Une observation pour conjecturer le deuxième énoncé consisterait en retour à proposer des tangentes ayant une pente positive, et à pouvoir en déduire qu'alors alors la courbe est celle

[198] Nous ne traiterons pas ici les difficultés spécifiques associées à l'annulation possible de la dérivée ou à la nature de l'intervalle. Signalons seulement que nous avons observé de la part des étudiants la volonté de formuler un énoncé unique qui regrouperait la croissance et la croissance stricte, la décroissance et la décroissance stricte, la recherche d'extrema, et, d'autre part, les conditions de réciprocité. La question des points isolés est par ailleurs une difficulté supplémentaire.

[199] Déjà ici, l'argument est plus souvent l'allure de la courbe qu'un calcul sur l'expression analytique. Or l'allure est dépendante du repère, sur lequel on ne prend pas de précaution ici alors qu'il en inspirait beaucoup au moment de parler du coefficient de la tangente.

d'une fonction croissante. La question serait alors effectivement qu'on ne sait pas tracer toutes les tangentes……

Signalons à ce sujet des réflexions d'élève

> *Est-ce que la fonction est croissante parce que les tangentes montent*
> *ou est-ce que les tangentes montent parce que la fonction est croissante ?*

Ou encore « *Il va falloir tracer toutes les tangentes pour montrer qu'une fonction est croissante ?* »
C'est précisément ce « en tout point » ou « en tous les points »qui va devoir être précisé. Pour cela, nous allons présenter le discours théorique inscrivant ce résultat dans la théorie de l'analyse réelle (donc le cadre II), puis ses transpositions. Alors nous pourrons distinguer deux discours particuliers : un discours que nous qualifierons de « médiateur » entre le cadre I et le cadre II, mettant l'accent sur les propriétés des réels nécessaires au développement de l'analyse, notamment l'axiome des intervalles emboîtés ; un deuxième discours que nous qualifierons par contre « d'intermédiaire » qui est généralisé dans les manuels belges, et qui fait reposer le résultat sur deux théorèmes (cadre II) illustrés par une figure (niveau 0). Ces théorèmes (Lagrange et Rolle) sont effectivement des éléments du discours théorique que nous aurons présenté précédemment, mais ne sont ici mentionnés dans le secondaire que pour légitimer la technique, constituant ainsi un discours composé de bribes de la théorie restant isolées.

En fonction de sa volonté de rattacher ce résultat à une théorie connue, ou de sa difficulté à travailler dans le cadre I, l'élève-professeur est alors amené à adopter le discours actuellement le plus fréquent, consistant en une adaptation « censurée » du discours universitaire qui oblige alors à utiliser la notion de tangente, et à tenir alors un discours de niveau 2bis.

4.3.2.1.2 *Cadre II : le discours théorique*

Nous présentons ci-dessous un exemple du discours rencontré dans un syllabus de première année d'université[200]. Même si ce type de document vise surtout à être un « condensé de

[200] Plusieurs syllabi ont été consultés, manifestant quelques variantes notamment au niveau des axiomes de base (soit la borne supérieure, soir les intervalles emboîtés). L'un d'eux, Schmets () utilisé à l'ULg, fournit un exercice supplémentaire demandant de préciser pourquoi il est important que la fonction soit à valeurs réelles.

théorie », laissant normalement l'enchaînement à la charge du professeur ou de l'étudiant, il nous semble intéressant de mieux le regarder, et ce pour deux raisons. Tout d'abord parce que les élèves-professeurs venant pour la plupart de terminer leurs études de mathématiques, ils sont donc *a priori* « plus proches de la théorie ». Ensuite, parce que nous souhaitons mettre en évidence que ce sont des parties isolées de ce discours qui vont constituer les organisations proposées pour le secondaire.

Le syllabus dont nous avons repris la structure, Strodiot (FUNDP), est composé de deux parties. Le sujet nous intéressant est abordé dans la deuxième partie. Pour ne pas reproduire toutes les démonstrations, nous allons présenter le cheminement théorique dans le tableau ci-dessous. La colonne de gauche contient l'énoncé ou la référence des définitions, propriétés et théorèmes utilisés, la colonne de droite contient les notions et résultats sur lesquels se fonde cet énoncé.

		Énoncé	**Fondé sur**	
1	Page 20 chapitre 5 du syllabus 2	Condition suffisante pour un extremum local Proposition Soit f [a,b] -> $\mathbb{R}$, continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b [. Alors 1)f est croissante (resp décroissante) sur [a,b] si et seulement si $\forall x \in]a,b[$, $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) 2) si $f'(x)>0$ (resp <0) $\forall x \in]a,b[$, alors f est strictement croissante (resp strictement décroissante) sur [a,b]	Théorème des accroissements finis La limite d'une quantité positive (négative) est positive (négative) Fonction continue	3
2	Page 13 Chapitre du syllabus 2	Condition nécessaire pour un extremum local Thm Soit f une fonction I -> $\mathbb{R}$, dérivable en a intérieur à I Si a est un extremum, alors f'a) =0	Définition de l'extremum Définition du point intérieur La limite d'une quantité positive (négative) est positive (négative)	
3	Page 17 chapitre 5 du syllabus 2	Théorème des accroissements finis Soit f [a,b] -> $\mathbb{R}$, continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b [. Alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f(b)-f(a) = f'(c)\,(b-a)$	Théorème de Rolle	4

		Énoncé	Fondé sur	
4	Page 15 chapitre 5 du syllabus 2	Théorème de Rolle Soit f [a,b] -> $\mathbb{R}$, continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[. Alors la derivée f' s'annule en un point de l'intervalle ouvert]a,b[. Illustration par schéma avec tangentes horizontales	Une fonction continue sur un intervalle fermé et borné y atteint ses bornes supérieures et inférieures ->Fonction continue Définition de fermé, de borné, de borne supérieure et inférieure	5
5	Page 16 chapitre 4 du syllabus 1	Bornes inférieure et supérieure d'une fonction Thm Soit f D $\subset \mathbb{R}^n$ -> $\mathbb{R}$, avec D fermé borné Si l'application f est continue, alors elle atteint ses bornes inférieure et supérieure	L'image d'un fermé borné par une fonction continue est un fermé borné ->Continuité Définition d'un fermé Définition d'un borné Définition de borne inférieure et supérieure d'une fonction	6 7
6	Page 15 chapitre 4 du syllabus 1	Bornes inférieure et supérieure d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné Proposition Soient f une application $\mathbb{R}^n$ -> $\mathbb{R}^p$ continue D un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ Alors l'ensemble f(D-) est une partie fermé et bornée de $\mathbb{R}^p$	Définition d'un fermé Définition d'un borné Toute suite d'un fermé borné admet une sous-suite qui converge dans cet ensemble Continuité et suites Thm 5.2	8 8
7	Page 16 chapitre 4 du syllabus 1	Définition de borne inférieure et supérieure d'une fonction		
8	Page 14 Chapitre 4 du syllabus 1	Caractérisation d'un ensemble fermé borné Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est fermée et bornée si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui converge vers un élément de A	Définition d'un fermé Définition d'un borné suite, sous-suite, convergence Thm de Bolzano-Weierstrass Si une suite converge vers une limite, alors toutes les sous-suites convergent vers cette limite	9 10

		Énoncé	Fondé sur	
9	Page 35 Chapitre 1 du syllabus 1	Thm Bolzano-Weierstrass De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente	Thm des intervalles emboîtés	11
10	Page 34 Chapitre 1 du syllabus 1	Proposition Si une suite x_n de nombres réels converge vers $x \in \mathbb{R}$, alors toutes ses suites extraites convergent aussi vers x	x est un nombre réel	
11	Page 31 Chapitre 1 du syllabus 1	Thm des intervalles emboîtés Soient $([a_n, b_n])$ une suite d'intervalles fermés et emboîtés telle que la suite des longueurs $(b_n-a_n)_n$ converge vers zéro. Alors 1)la suite (a_n) des origines et la suite (b_n) des extrémités convergent toutes deux vers une même limitée notée x 2) l'intersection de tous les intervalles notée $\cap[a_n, b_n)$ est le singleton {x}	Une suite majorée (minorée) est convergente La limite de la différence de deux suites vaut la différence des limites	12
12	Page 26 Chapitre 1 du syllabus 1	Thm Toute suite croissante et majorée (non majorée) converge vers sa borne supérieure (vers $+\infty$) Toute suite décroissante et minorée (non minorée) converge vers sa borne inférieure (vers $-\infty$)	Caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure Existence de la borne supérieure	13 14
13	Page 9 Chapitre 1 du syllabus 1	Caractérisation de la borne supérieure Proposition Soit S une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors b = Sup S $\Leftrightarrow$ b est un majorant de S et tout intervalle ouvert de centre b contient un élément de		
14		Proposition Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ; toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure	Définition de majorée, minorée, borne supérieure et inférieure Admise	
15	Page 15 Du syllabus 1	Passage à la limite dans les inégalités Soient f et g deux fonctions de D $\mathbb{R}^n$ ->r et a un point d'accumulation de D Si $\exists\alpha$ tq $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in B(a, \alpha)$ alors $\lim_a f(x)$) $\leq \lim_a g($x	Non démontré	
16		Définition fermé		
17		Définition borné		
18		Définition borne supérieure et inférieure		
19		Continuité		

Nous avons également indiqué que certaines démonstrations faisaient de plus référence à l'appartenance à $\mathbb{R}$, ou à la continuité d'une fonction. Mentionnons aussi que beaucoup d'énoncés font référence à $\mathbb{R}^n$, ce qui est une des difficultés de la transition secondaire-université. Soulignons enfin que, dans cette organisation, la complétude de $\mathbb{R}$ est exprimée par la propriété de la borne supérieure, prise comme axiome, et que la propriété des intervalles emboîtés devient alors un théorème. Dans d'autres organisations, c'est la propriété des intervalles emboîtés qui sera utilisée comme axiome[201].

Le contenu de ce syllabus, comme d'autres consultés, est approprié à des études en mathématiques, mais les étudiants ne peuvent l'utiliser directement pour démontrer au niveau du secondaire le critère de croissance d'une fonction. Nous allons constater qu'ils vont alors adopter en grande majorité le discours des manuels qui leur proposent des transpositions suffisamment proches de ce discours, mais n'en reprenant que des bribes, à savoir l'énoncé des théorèmes[202] et la définition de la continuité c'est-à-dire les éléments 1, 2 , 3, 4 et 19 du discours théorique, constituant ainsi ce que nous appellerons une « praxéologie à trous », puisqu'il n'y a rien permettant de relier entre elles ces bribes, à part le recours à la tangente.

Après avoir regardé les recommandations des programmes sur ce critère de croissance (4.3.2.2) nous présenterons les transpositions (4.3.2.3).

4.3.2.2. Le critère de croissance dans les programmes

Voici ce que dit le programme 10.2000/240, pour le cours de cinquième année à 6 périodes hebdomadaires.

Dérivées		
Compétences à atteindre	*Matières*	*Conseils méthodologiques*
Utiliser les propriétés des dérivées dans des applications diverses	*Théorèmes classiques* *Théorème des accroissements finis* *Dérivée première et croissance, extrema* *Dérivée seconde et concavité, points d'inflexion, point de rebroussement, point anguleux* *Applications diverses :* *-Modélisation de problèmes liés à la physique, l'économie, aux sciences humaines,*	*Toutes les démonstrations ne doivent pas être faites, cependant les propriétés seront reliées entre elles* *Chaque fois que l'occasion se présentera, il sera fait usage des moyens modernes de calcul, à tout le moins dans un but de vérification* *Des caractéristiques d'une fonction pourront être déduites du*

[201] Voir Gilbert & Rouche (2001)

[202] Le théorème des accroissement finis est aussi utilisé pour prouver que la primitive de la fonction nulle est une fonction constante, puis que « la dérivée de l'intégrale est la fonction » dans le cas où la notion de primitive n'a pas été définie. Mais les transpositions actuelles favorisent l'introduction de la primitive avant la notion d'intégrale définie comme variation de primitive.

Dérivées		
Compétences à atteindre	*Matières*	*Conseils méthodologiques*
	-Approximation locale d'une fonction par une fonction du premier degré *-Recherche d'une valeur approchée d'une racine d'une équation* *-Problèmes d'optimalisation* *-Représentation graphique de quelques fonctions* *Règle de l'Hospital*	*graphique de sa dérivée, et réciproquement* *Diverses méthodes peuvent être rencontrées : par exemple, la méthode de dichotomie, celle des tangentes ou celle de Newton* *Les calculatrices et les logiciels apportent une aide sérieuse dans ce chapitre*

Nous pouvons constater que les « théorèmes classiques » apparaissent directement comme des outils pour pouvoir utiliser la dérivée dans la résolution de problèmes, avec pour seule indication sur le plan théorique de « relier entre elles les propriétés ».

Dans le programme de l'enseignement dit « libre », on trouve

Théorèmes classiques :

Théorème des accroissements finis, relation entre la croissance d'une fonction dérivable et le signe de sa dérivée première, relation entre la concavité du graphique d'une fonction deux fois dérivable et le signe de sa dérivée seconde

Toutes les démonstrations ne doivent pas être faites, cependant les propriétés seront reliées entre elles

Applications diverses :

-Modélisation de problèmes liés à la physique, l'économie, aux sciences humaines,

-Approximation locale d'une fonction par une fonction du premier degré

-Recherche d'une valeur approchée d'une racine d'une équation

-Problèmes d'optimalisation

-Représentation graphique de quelques fonctions

-Règle de de l'Hospital

Chaque fois que l'occasion se présentera, il sera fait usage des moyens modernes de calcul, à tout le moins dans un but de vérification

4.3.2.3 Le critère de croissance dans les manuels

Rappelons ici que nous avons consulté sur ce sujet les mêmes ouvrages que pour l'introduction de la dérivée (cf. 4.3.1.2).

4.3.2.3.1 Un discours médiateur entre cadre I et cadre II

4.3.2.3.1.1 AHA

Dans un manuel intitulé « vers l'infini pas à pas – approche heuristique de l'analyse », le groupe AHA[203] part du constat suivant

> *L''apprentissage des concepts d'analyse interfère inévitablement avec des intuitions partagées par le plupart des élèves. Si certaines d'entre elles peuvent être le germe de développement plus formels, tout comme elles l'ont été dans l'histoire des mathématiques, d'autres, par contre, s'opposent à la théorie établie. Trop souvent, l'enseignement a pour effet de juxtaposer une théorie à ces intuitions sans ni s'appuyer sur les premières, ni corriger les secondes.*

Le projet cherche alors à partir

> *[.] des intuitions communes sur les pentes, les vitesses, les aires… pour construire pas à pas les concepts de l'analyse. (…) les concepts de fonction, dérivée, intégrale, limite y évoluent à travers une suite de problèmes résolus de manière à mettre en évidence les conjectures initiales, les doutes, et même parfois les erreurs ou fausses pistes.*

4.3.2.3.1.2 Résumé de l'approche

En ce qui concerne les notions de tangentes, dérivée et croissance, AHA propose l'approche succinctement décrite ci-dessous.

Un chapitre entier (3) est consacré à la tangente sous le titre « juste frôler une courbe ». Ce chapitre pose clairement la question « qu'est-ce qu'une tangente ? » et définit très progressivement la tangente à différentes courbes représentant des fonctions polynomiales, comme une droite dont l'équation est l'approximation affine du polynôme.

Le chapitre suivant (4) est consacré à la notion de taux de variation intervenant dans différents problèmes faisant intervenir le temps, et au fait qu'on puisse calculer des taux instantanés « *en simplifiant d'abord algébriquement le quotient* $\frac{\Delta G}{\Delta t}$, *puis en posant* Δt *égal à 0* », ce

[203] Le sigle a.h.a, une référence au « haha, l'éclair de la compréhension » de M. Gardner, désigne volontairement tant le projet que l'équipe, composée de P. Bolly, A. Chevalier, M. Citta-Vanthemsche, M. Grand'Henry-Krysinska, Chr . Hauchart, D. Legrand, N. Rouche, M. Schneider.
Lire aussi Schneider (2001).

qui est en fait une manière de calculer certaines limites sans avoir réellement défini la notion[204].

Le chapitre 5 propose alors la « rencontre entre tangente, pente et vitesse », en posant la problématique de pouvoir « associer une pente à un point d'une courbe », ce qui amène à « prendre la décision raisonnable de définir la pente en un point de la courbe comme la pente de la tangente en ce point ».

Après études de plusieurs problèmes, la dérivée est définie en tant qu'outil commun apparu dans leur résolution. Lors de la conclusion de ce chapitre, on lit

> *la dérivée …donne des informations sur l'allure du graphique de la fonction : intervalles de croissance ou de décroissance, valeurs extrêmes , ajustement de la courbe à certaines tangentes connues,… par exemple, on conclut que dans tout intervalle dans lequel la fonction est monotone croissante (resp ; décroissante), la fonction dérivée f' est positive (resp. négative). Pour une étude plus complète, voir le chapitre 12*
> *(A.H.A)*

Il y a donc une présentation séparée des énoncés 1) la positivité de la dérivée est une condition nécessaire à la croissance et 2) la positivité de la dérivée est une condition suffisante à la croissance de la fonction, mai aussi une première indication du fait que ce deuxième résultat a une existence propre en faisant l'objet d'un chapitre spécifique.

Le chapitre 6 étudie le comportement à l'infini et des problèmes d'optimisation liés à certaines catégories de fonction. Dans sa conclusion sous forme de questions-réponses, on lit :

> *question : si f(x) est positive sur un intervalle, alors f est croissante sur cet intervalle » ; réponse : cet énoncé est intuitivement vrai mais la démonstration ne sera exposée qu'au chapitre 13. (…) Ces propriétés sont facilement vérifiables sur les graphiques des fonctions étudiées jusqu'à présent en observant les tangentes*
> *(A.H.A)*

Nous arrivons aux chapitres 11, 12 et 13. Dans le chapitre 11, l'étude de suites tendant vers l'infini amène à énoncer l'axiome d'Archimède, affirmant « *l'existence d'entiers naturels aussi grands que l'on veut* ». Puis la recherche de « trous » entre les points d'abscisse rationnelle sur une droite pose la question des irrationnels et provoque la décision de les considérer comme des nombres « en plus » « *puisque les rationnels semblent déjà répondre à tous les besoins et jouir de toutes les commodités* ».

[204] Ici aussi c'est la référence au temps et le fait de manipuler des grandeurs qui permet de s'en donner l'autorisation

Afin d'accorder le statut de nombre à tout décimal illimité (périodique, puis non périodique), l'étude de la série harmonique alternée amène à construire ln2 comme l'intersection d'intervalles très particuliers, et donc à énoncer l'axiome des intervalles emboîtés :

> *il existe un et un seul nombre x contenu dans tous les intervalles d'une suite infinie d'intervalles emboîtés fermés dont la longueur tend vers 0*

Cet axiome donne un statut aux irrationnels, en même temps qu'il met en évidence que

> *ce sont les irrationnels, ces nouveaux venus, qui occupent presque toute la place sur la droite réelle*

Nous avons voulu ici résumer le circuit suivi par AHA pour parvenir à la démonstration annoncée, que nous reproduisons dans le paragraphe suivant.

4.3.2.3.1.3 D'une question cinématique (cadre I) à une démonstration numérique (cadre II)

Le chapitre 13, clairement intitulé « *Sur quels nombres baser l'analyse* » annonce qu'il va montrer pourquoi ces nouveaux nombres sont nécessaires au développement des concepts et outils de l'analyse, qu'on ne pourrait mettre en place si on ne disposait que des rationnels[205]. Pour cela, les auteurs procèdent à « *l'autopsie d'un énoncé* », en posant la question de la condition suffisante[206] :

> *suffit-il que la dérivée d'une fonction soit strictement positive en tout point d'un intervalle pour que cette fonction soit croissante sur cet intervalle ?*
> *(A.H.A)*

Sont alors proposés deux arguments : une courbe accompagnée du tracé de quelques tangentes à pente positive, mais aussi le fait que si x(t) est la position d'un mobile, une vitesse positive provoquera un déplacement dans la direction des x positifs. Ces deux arguments « *ont l'air solides comme du béton* », mais les auteurs demandent ce que signifie vraiment « en tout point d'un intervalle [207]» et ce qui se passerait si nous ne prenions que les rationnels.

[205] Cette idée est aussi développée dans « pourquoi l'analyse n'est pas rationnelle »,de G. Noël.

[206] Remarquons qu'ici la dérivée est supposée strictement positive pour obtenir une fonction croissante. Il est vraisemblable que la variété des combinaisons possibles est également une source de questions, amenant souvent à la recherche d'un énoncé le plus englobant possible.

[207] Remarquons que cette expression devient souvent « sur un intervalle », et dans les préparations analysées, seuls 2 étudiants sur 27 poseront une question analogue (voir le Chapitre 6).

En traitant successivement

-l'exemple de la fonction $f(t)=t+t^3$, dont la dérivée est positive en tout point de (-1,1) et qui est effectivement croissante ;

-l'exemple de $f(t) = -\frac{1}{t}$ sur [-2,2] qui amène à douter mais sans remettre en cause l'énoncé ;

-l'exemple de $f(t) = 1-\frac{1}{t^2-2}$ sur [0,4], dont la dérivée est bien strictement positive en tout point rationnel de (0,4), mais qui n'est pas croissante, la discontinuité se situant en $\sqrt{2}$;

il apparaît bien nécessaire de considérer « tous les points » pour établir la démonstration comme suit.

> *Soit une fonction f(t) définie sur un intervalle]a,b[de la droite réelle et possédant une dérivée f'(t) telle qu'en tout point de]a,b[f'(t)>0. Alors quels que soient les points u et v de]a,b[avec u<v, on a f(u) ≤f(v)*
>
> *Supposons que la thèse ne soit pas vraie, et que, par conséquent, il existe deux instants u et v avec u<v et f(u)>f(v). Considérons l'abscisse* $\frac{u+v}{2}$.
>
> *On ne peut avoir à la fois* $f(\frac{u+v}{2}) \geq f(u)$ *et* $f(v) \geq f(\frac{u+v}{2})$,
>
> *et donc au moins l'une des deux inégalités suivantes est vraie*
>
> $f(u) > f(\frac{u+v}{2})$ *ou* $f(\frac{u+v}{2}) < f(v)$.
>
> *Supposons que ce soit la première et posons* $u=u_1$ *et* $\frac{u+v}{2} = v_1$..
>
> *L'inégalité s'écrit alors* $f(u_1)>f(v_1)$.*Considérons l'abscisse* $\frac{u_1+v_1}{2}$.
>
> *Au moins une des deux inégalités est vraie :*
>
> $f(u_1) > f(\frac{u_1+v_1}{2})$ *ou* $f(\frac{u_1+v_1}{2}) > f(v_1)$.
>
> *Supposons que ce soit la deuxième et posons* $\frac{u_1+v_1}{2} = u_2$ *et* $v_1=v_2$.
>
> *L'inégalité s'écrit alors* $f(u_2)>f(v_2)$
>
> *On continue de même indéfiniment, ce qui engendre une suite d'intervalles* $[u,v]$, $[u_1,v_1]$, $[u_2,v_2]$, …….$[u_n,v_n]$, …. *Dont chacun est moitié moins long que le précédent ; ces intervalles sont tels que pour tout n,* $f(u_n)>f(v_n)$. (I1)
>
> *Les intervalles ci-dessus sont emboîtés et leur longueur tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ils possèdent donc un point commun r.*
>
> *On sait par hypothèse que f'(r)>0 ; or on sait aussi que* $f'(r) = \lim_{x \to r} \frac{f(x)-f(r)}{x-r}$
>
> *D'après la définition de la limite, le quotient* $\frac{f(x)-f(r)}{x-r}$ *est aussi proche que l'on veut de f'(r) et donc strictement positif, si x est assez proche de r.*

> *Donc, en prenant n assez grand,* $\frac{f(u_n)-r}{u_n-r}>0$ *et* $\frac{f(v_n)-r}{v_n-r}>0$
> *Or,* $u_n \leq r$ *et* $v_n \geq r$*, donc* $f(u_n)-f(r)>0$ *et* $f(v_n)-f(r)>0$*,*
> *c'est-à-dire* $f(u_n)<f(r)<f(v_n)$*, ce qui contredit l'inégalité I1*
> *(A.H.A)*

Sur le plan du discours technologique, ce résultat permet au bon sens de retrouver son compte (il est conforme à l'intuition sur les tangentes ou les vitesses), mais il secoue ce même bon sens en nous « obligeant » à concevoir d'autres nombres :

> *nous avons utilisé l'axiome des intervalles emboîtés. Or celui-ci est vrai pour les réels mais pas pour les rationnels ; il suffit pour s'en convaincre d'encadrer* $\sqrt{2}$ *par des approximations décimales de plus en plus précises. L'intersection de tous les intervalles ainsi définis ne contient pas de nombre rationne[208]l.Reprenons notre interprétation de f(t) comme position d'un mobile. D'après l'énoncé du théorème, la vitesse du mobile est strictement positive. Donc le mobile avance. Et pourtant, si le mouvement n'avait été défini que sur les rationnels –ces nombres si familiers– alors, nous n'aurions pas pu prouver que le mobile avance comme nous nous y attendons. (…) Pour forcer le mobile à se mouvoir conformément à notre bon sens, nous devons dans la modélisation mathématique, recourir à des nombres que notre bon sens n'accueille pas très volontiers*
> *(AHA)*

Le théorème est ensuite « raffiné » pour traiter le cas d'une dérivée positive (au sens large). En conclusion de cette section, les auteurs soulignent que ces démonstrations ont utilisé des outils de pensée spécifiques à l'analyse : la manipulation d'inégalités, la dichotomie, le remplacement d'une fonction par une autre très voisine.

Le discours de AHA cherche donc volontairement à rapprocher, dans le temps et dans l'espace, le théorème sur la croissance d'une fonction avec les propriétés des réels qui le fondent, et donc à s'inscrire d'emblée dans un contexte numérique, tout en prenant en considération le caractère fondamental que peut apporter un discours cinématique.

4.3.2.3.2 Un discours intermédiaire : vers une praxéologie « à trous »

Nous trouvons ici les trois autres manuels belges. Deux d'entre eux font référence aux théorèmes de Lagrange et de Rolle, et, ne pouvant les démontrer, se trouvent alors amenés à les interpréter en termes de tangente. D'autre part, les théorèmes sont énoncés soit avec une formulation en termes de pente, soit directement sous forme géométrique, ce qui leur fait

[208] Remarquons ici que la négation de la propriété des intervalles emboîtés n'est pas si facile à concevoir…..

perdre une grande partie de leur apport théorique réel pour l'analyse. On pourrait penser que cette référence à la tangente « compense » en quelque sorte le fait de donner un résultat théorique sans le démontrer. Mais le troisième manuel (Actimaths) fait l'économie des théorèmes, tout en faisant quand même référence à la tangente[209].

L'approche de ces manuels est fort semblable :

1) Énoncé et démonstration de la condition nécessaire[210] ;

2) Enoncé du théorème de Lagrange (ou des accroissements finis),

> *soit f ℝ ->ℝ , Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b [alors il existe au moins un réel c de]a,b[tel que f'(c)=* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

qui est admis et pour lequel on propose une interprétation graphique ayant toutefois déjà la forme d'un énoncé théorique:

> *Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b [alors il existe au moins un réel c de]a,b[tel que la tangente au graphe cartésien de f au point (c,f(c)) soit parallèle à la droite comprenant les points (a,f(a)) et (b ;f(b))*

3) Enoncé du théorème de Rolle, présenté comme un cas particulier de Lagrange

> *Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b [et f(a)=f(b) , alors il existe au moins un réel c de]a,b[tel que f'(c)=0*

pour lequel on propose aussi immédiatement une formulation graphique

> *Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b [et f(a)=f(b), alors il existe au moins un réel c de]a,b[tel que la tangente au graphe cartésien de f au point (c,f(c)) soit parallèle à l'axe x*

Nous ferons les remarques suivantes à propos de cette transposition :

1) Le théorème de Rolle est présenté comme une « conséquence » du théorème de Lagrange, alors qu'il permet de démontrer ce dernier dans l'organisation théorique ;

2) Dans Espace Maths, l'interprétation graphique avec la tangente fait l'objet d'un énoncé ayant la forme d'un énoncé théorique. D'une part, il nous semble peu compatible avec la difficile définition qui en a été donnée en tant que « limite d'un faisceau de sécantes ». D'autre part, la présence systématique de schémas à côté de tels énoncés a tendance à mettre

---

[209] il reste possible que le manuel consulté s'adressant à une classe de niveau moyen, il soit en fait l'adaptation « tronquée » du manuel s'adressant au niveau fort, qui lui contiendrait les théorèmes.

[210] Espace Maths précise ici que la conservation du signe dans le passage à la limite relève d'une certaine propriété, qui est énoncée et admise dans le chapitre sur les limites.

l'accent sur cet aspect graphique et la tentation est alors grande de se référer à l'évidence du schéma pour « prouver » l'énoncé.
La juxtaposition est extrême dans le manuel Savoir et Savoir-Faire où l'on assiste à un « écrasement » des discours. Ce même manuel présente d'ailleurs d'abord l'aspect graphique, laissant apparaître que le problème est de tracer une tangente parallèle à une direction donnée, et qu'on aboutit au résultat théorique sur les nombres concernés[211]. Par contraste, ce même manuel propose ensuite comme exercice une interprétation du théorème des accroissements finis dans un objectif d'approximation par une fonction linéaire, nécessitant alors une formulation, devenue rare, du théorème des accroissements finis en termes d'accroissements et non plus en termes de rapport.

Le troisième manuel (Actimaths) constitue un cas à part et révélateur, dans la mesure où il n'énonce pas les théorèmes mais fait quand même référence à la tangente en proposant d'emblée un graphique « parfait » sur le plan suggestif au sens où les tangentes sont tracées et les sens de variation sont indiqués. Au-delà de la prédominance du « constat graphique », puisqu'il s'agit bien de constater la croissance sur seule base de la courbe, nous avons déjà suggéré que ce schéma correspondait en fait plus à la condition nécessaire.
Suit alors le texte :

> *Rappelons que le nombre dérivé de f en x0, c'est-à-dire la valeur de la dérivée en x0, est la pente de la tangente au graphique de f au point d'abscisse x0. Dans l'intervalle]a,b[, la fonction est croissante et on constate que la pente de chacune des tangentes au graphique de f en un réel quelconque x0 de]a,b[est positive. Donc la dérivée de f est positive sur]a,b[.*
> *Actimaths*

Après une petite phrase « *il existe donc une relation entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée* », le théorème est énoncé sous forme d'équivalence. Comme pour rééquilibrer, il est ensuite signalé la possibilité d'utiliser la tangente comme approximation :

> *on peut linéariser y=f(x) en remplaçant la fonction f par une fonction du premier degré qui […]…. donne une bonne approximation de f(x) . Géométriquement, il suffit de remplacer la courbe représentative de la fonction considérée par sa tangente au point* x_0
> *Actimaths*

[211] Ce qui pourrait fournir une autre entrée dans le cadre II.

En conclusion, même provisoire, il semble que la référence à la tangente et au constat graphique prenne un statut dépassant l'interprétation géométrique et soit comme un passage obligé lorsqu'on veut citer les théorèmes. Signalons aussi la tendance à proposer un graphique « générique » sans l'associer à une fonction explicitée.

On repère par contre des « traces [212]», disséminées et mises en remarque, du discours théorique : le fait de mentionner l'appartenance à $\mathbb{R}$ dans certains énoncés ou démonstrations ; dans un manuel on trouvera un encart consacré à la propriété *« l'image d'un fermé par une fonction continue est un fermé »,* sans motivation particulière ni lien avec le reste du chapitre, etc.

De manière générale, les manuels témoignent d'une difficulté à relier entre eux les différents éléments extraits de l'organisation mathématique complète, aboutissant à une sorte d'équilibrage permanent. Ce qui confirme que le sujet choisi présente une difficulté certaine, puisque patente dans les manuels.

4.3.2.3.3 Quelques portes ouvertes sur un discours de niveau 1

Nous regroupons dans une catégorie spéciale les deux manuels Fractale et Terracher dont la présentation est sensiblement la même : des activités préparatoires (AP), suivie d'une section contenant la théorie. Dans cette partie théorique, on trouve les énoncés correspondant à la condition suffisante sous la forme :

> *Théorème 1 (Que nous admettrons)*
> *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I*
> *si la dérivée f′ est nulle alors f est constante sur I ;*
> *si la dérivée f′ est strictement positive sur I, sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I*
> *si la dérivée f′ est strictement négative sur I, sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I*
> *(Terracher)*

ou

> *Sens de variation d'une fonction .*
> *f est une fonction dérivable sur I et f′ sa dérivée nous admettrons la propriété suivante, vue en AP4 dans un cas particulier*

[212] Pour reprendre les mots de Ben Salah (2001) dans la mesure où ce sont comme des traces très ponctuelles des éléments de la praxéologie « complète » .

> *Si la dérivée de f est nulle, alors f est constante sur I*
> *Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I*
> *Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I*
> *(Fractale)*

Cependant, dans les deux cas, les activités préparatoires offrent l'opportunité de développer une explication de ce critère, laissant ici encore à l'utilisateur le soin de développer sa propre exploitation des activités.

Terracher fournit presque ce discours en précisant que l'objectif du paragraphe consacré aux activités préparatoires est de « *faire comprendre pourquoi et comment le signe de la dérivée d'une fonction influe sur les variations de la fonction*, ce qui conduira au « *principe de Lagrange* », en proposant « *l'idée de base* » puis deux activités et une conclusion.

> *Idée de base*
> *Sur une fonction donnée ($f(x) = 1-x^2$, sur $[0,1]$), on donne deux points d'abscisses a et b, et A, B les points correspondants du graphique de f.*
> *-Calculer le coefficient directeur de la sécante AB ($m=-(a+b)$)*
> *-La fonction est dérivable et on calcule la dérivée ($f'(x) = -2x$)*
> *-« cherchons s'il existe un réel x de 0,1 tel que $f'(x) = m$ »*
> *-La réponse est oui, en résolvant l'équation, de solution $x=\frac{a+b}{2}$*
> *-« la signification graphique de ce résultat est la suivante : quels que soient les points A et B de la courbe représentative de f on peut trouver une tangente à la courbe parallèle à AB »*
> *<u>l'AP1</u> propose le même exercice avec d'autres fonctions et des intervalles donnés*
> *l'AP2*
> *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose que f vérifie la propriété : quels que soient a et b dans I il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*
> *montrer que si pour tout x élément de I*
> *$f'(x)=0$, alors f est constante*
> *$f'(x) \geq 0$,alors f est croissante*
> *$f'(x) \leq 0$,alors f est décroissante*
>
> *[et un texte en bas de la page]*
>
> *« en fait dans l'activité 2 l'hypothèse on suppose… est superflue : cette propriété est vraie pour toutes les fonctions dérivables sur un intervalle, en conséquence les résultats obtenus seront vrais pour n'importe quelle fonction dérivable sur un intervalle »*

Il y a donc dans ce manuel une volonté de présenter le Principe de Lagrange comme « une cause » (au sens de « pourquoi ») du critère. Même si la tangente n'est mentionnée que comme interprétation graphique, la résolution de l'équation f'(x)=m reste cependant non motivée.

Le fait de passer d'un intervalle I à un ouvert]a,b[n'est pas non plus commenté. Notons toutefois dans la rubrique « trucs et astuces » des chapitres concernés quelques avertissements comme des traces résiduelles du problème théorique sous-jacent :

> *le principe de Lagrange ne s'applique que sur un intervalle ! Attention donc aux ensembles de définition « troués*
> *[..]*
> *il vaut mieux dire f bornée sur I que f bornée*

Dans un esprit similaire, Fractale propose l'AP4 consistant en l'étude de la relation entre le sens du déplacement d'un point sur une trajectoire rectiligne et le signe de sa vitesse. Le problème est proche de celui exploité par AHA, ou de celui qui sera proposé dans l'ingénierie utilisée pour nos expériences, mais n'est pas commenté ni interprété [213].

4.3.2.3.4 Discours de niveau 2

Dans la dernière catégorie, nous trouvons le Queyzanne-Revuz qui va proposer un discours strictement théorique. Dans le Chapitre 6 intitulé *étude des variations d'une fonction numérique d'une variable réelle. Application au mouvement rectiligne d'un point*, la partie I (Variations) donne la définition d'une fonction croissante sur base du taux d'accroissement, puis démontre la condition nécessaire (en précisant que cela nécessite de savoir que la limite d'une quantité positive est positive, résultat démontré précédemment avec le formalisme en ε,η). Ensuite les théorèmes fournissant les conditions suffisantes sont énoncés en précisant qu'ils seront démontrés dans une classe ultérieure :

> *Si une fonction f dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est telle que $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$, cette fonction est une application constante sur I ;*
> *Si une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est telle que $\forall x \in I$ $f'(x) \geq 0$, cette fonction est une application croissante sur I ;*
> *Si une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est telle que $\forall x \in I$ $f'(x) \leq 0$, cette fonction est une application décroissante sur I ;*
> *Enfin, les énoncés sous forme d'équivalence sont proposés :*
> *f croissante dans I* $\Leftrightarrow (\forall x \in I) f'(x) \geq 0$
> *[….]*

[213] Nous pouvons ici faire remarquer une contradiction : les activités préparatoires sont des mises en situation mais ne sont pas « corrigées » ni rédigées, ce qui pourrait expliquer que les étudiants ne les utilisent pas spontanément ; Or, dans le même temps, AHA qui propose un discours complètement rédigé est souvent mis de côté pour cette raison (voir les réponses des étudiants dans le Chapitre 6).

Nous pouvons constater ici que les théorèmes de Rolle et Lagrange ne sont pas mentionnés, qu'aucune référence n'est faite à la tangente, et que la seule référence à la nature nécessaire des nombres réside dans le fait que dans les énoncés des conditions suffisantes (signe->sens de variation) puis des équivalence, il est précisé que l'intervalle I est un intervalle de $\mathbb{R}$, ce qui n'était pas présent dans les conditions nécessaires.

4.3.3 Deux cas particuliers

Nous décrirons ici le cas de deux manuels nous semblant témoigner de la difficulté à articuler les registres. Tous deux, français, vont proposer une définition de la dérivée dans le cadre d'approximations, mais nous allons voir que, sans motivation apparente, leur définition de la tangente repasse par la fameuse « limite de sécantes », dont le deuxième va même tenter une définition dans un cadre vectoriel. Ces deux manuels nous semblent en fait ne vouloir définir la tangente que d'un cadre II à un autre cadre II. Ne pouvant passer par le cadre I, ils sont alors amenés, surtout dans le deuxième cas, à « théoriser » la « limite de sécantes ».

4.3.3.1 Discours de niveau 2 et reconnaissance du discours de niveau 1

Le premier manuel propose une combinaison différente des approches décrites précédemment, en particulier au niveau de la forme : Mathématiques premières S/E de M. Glaymann, Cl. Jobert et J. Malaval, édité chez Cedic en 1982. Une particularité de ce manuel réside en effet selon nous dans le fait de proposer les résultats relevant de « la théorie », sur le même plan (ne serait-ce par exemple qu'en conservant la même typographie) que d'autres énoncés qui d'habitude sont cités avec un statut d'anecdote historique, ou mis dans un petit cadre comme légende d'une illustration. Tout en s'inscrivant dans une théorie du numérique, et donc plutôt dans un cadre II, ce manuel accorde donc un statut aux discours que nous avons qualifiés de type 1, comme la technique de Fermat qui est exposée et utilisée ou encore un énoncé cinématique du théorème de Lagrange.

4.3.3.1.1 Maximiser et approximer avant de dériver

Tout en couvrant la totalité du programme de l'année, ce manuel accorde une grande place au domaine de l'analyse avec 4 chapitres sur 9 : (2) les objets de l'analyse (le point sur les fonctions, les suites) ; (3) les fonctions numériques (usuelles et polynômes) ; (4) l'ordre zéro (comportement des suites, comportement des fonctions, étude globale d'une fonction) ; (5) l'ordre un (nombre dérivé, dérivée et primitive).

De manière générale, l'accent est mis sur les problématiques d'encadrement, d'approximation, de développements limités, et sur les particularités des nombres réels. Déjà dans le thème (2), après les définitions de fonctions, bijections, symétrie, etc., est abordée la notion d'extrema avec une définition suivie de l'exposé[214] de la méthode de Fermat, qui est ensuite mise effectivement en œuvre sur l'exemple $f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 - 1$ et est proposée comme exercice sur une fonction de la forme $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

> *« Pierre de Fermat propose en 1629 une méthode <u>intuitive</u> pour déterminer les abscisses des points où une* ***application polynôme*** *f admet un extremum : il compare les images par f des réels x et x+E ; en général ces images sont différentes, cependant <u>au voisinage</u> d'un extremum la fonction f « varie peu » : si le réel E est <u>petit</u>, f(x) et f(x+E) sont voisins.*
> *Aussi pour déterminer les abscisses des points où f admet un extremum, Fermat écrit l'égalité f(x) = f(x+E). Il constate, comme f est une application polynôme, qu'il peut simplifier par E, puis il prend E=0 ; il obtient ainsi une équation qui fournit les abscisses cherchées. »*
> *(Cedic)*

Les chapitres suivants aborderont encore la notion de croissance qui sera d'abord étudiée au moyen des opérations sur les expressions des fonctions. Après un chapitre sur les suites, les premiers travaux sur les fonctions vont inclure les questions liées à la précision, à la tabulation de fonctions selon un certain pas, aux encadrements de valeurs, aux différences d'ordre n pour des fonctions polynômes, et commencer à étudier le comportement à l'infini de fonctions selon les termes qui y apparaissent. En particulier, on peut calculer le volume du bol parabolique à l'aide d'un encadrement avec des suites, et on cherchera les développements polynomiaux de fonctions au voisinage d'un point donné, par exemple « $1+x$ *est une approximation polynomiale de* $\frac{1}{1-x}$ *autour de zéro à la précision* $2 \cdot x^2$ »

[214] Nous avons souligné ce qui est en italique dans le texte original et laissé en gras ce qui y apparaît en gras.

Très vite il est question de remplacement d'une fonction par une autre.

> *Exemple pour la fonction f(x) =* $\dfrac{1}{1+x}$*, on demandera :*
> *-tabuler la fonction pour des réels de la forme* 10^{-k}
> *-montrer qu'au voisinage de 0, f(x) est très voisin de 1*
> *-tabuler la fonction f(x)-1 au voisinage de 0 et montrer que* $f(x) \approx 1-x$
> *-montrer qu'au voisinage de 0,* $f(x) \approx 1-x+x^2$
> *-peut-on poursuivre dans cette voie ? -quel sens donnez-vous à l'écriture* $u(x) \approx v(x)$ *?*
> *(Cedic)*

Le même genre d'exercice posé pour une fraction non rationnelle amènera ensuite à utiliser une stratégie purement numérique puisque les calculs algébriques deviennent fastidieux.
Après les suites, la notion de limite de fonctions sera abordée à travers la notion de « domination » d'une fonction sur l'autre. On trouvera par exemple la définition « la fonction f est plus près de zéro que la fonction g ». Enfin, le théorème des valeurs intermédiaires est admis pour supporter l'interpolation linéaire, toujours dans le but de déterminer des valeurs approchées de certains réels.

Si nous avons décrit les tâches proposées, c'est pour montrer l'intention de ce manuel de mettre l'accent sur l'aspect numérique. Toutefois, lorsqu'il s'agit d'aborder l'ordre un, le paradoxe géométrique est toujours là, même s'il semble « mieux géré » dans la mesure où les deux points de vue sont présentés. En effet, l'introduction va parler de la tangente en un point d'une parabole, abordée par une problématique d'intersection aboutissant à l'équation caractérisant les points d'intersection M_k de la parabole avec une droite D_k partageant déjà un point avec la parabole. Ensuite, on trouve les deux phrases suivantes qui vont permettre d'obtenir l'équation de la tangente.

> *Nous disons que la tangente au point* M_0 *à la parabole P* ***est la position limite*** *de la droite* D_k *lorsque le point* M_k *se rapproche du point* M_0 *en décrivant la parabole.*
> *Nous* ***admettrons*** *qu'une tangente à la parabole P la coupe en deux points confondus. Ainsi la droite* D_k *est tangente à la parabole lorsque les deux points* M_0 *et* M_k *sont confondus*
> *Cedic*

Mais la première phrase sur la position limite n'est en fait pas nécessaire dans ce contexte et aucune des deux ne définit la tangente. Toutefois la deuxième phrase aurait pu servir de définition, et va être exploitée dans la suite où l'on va définir une fonction taux d'accroissement $k(x_1)$ et où il y aura une définition explicite de la tangente, même si il subsiste une « trace de la sécante » quant à la désignation de la variable (pourquoi x_1 plutôt que x ?)

> *<u>par définition</u>, la tangente au point M_0 à la parabole P est la droite qui passe par le point M_0 et dont le coefficient directeur est la limite de la fonction k lorsque x_1 tend vers x_0*

C'est ensuite que va être reprise la technique de Fermat pour déterminer un extremum, ce qui aboutira à la définition de nombre dérivé dans le cas d'un polynôme puis de polynôme dérivé :

> *Pour une fonction polynôme f et α un réel, nous avons montré que*
> $f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha).\ g(x) = f(\alpha) + c_0(x-\alpha) + (x-\alpha)^2.h(x)$
> $c_0 = g(\alpha)$ *; c'est le nombre dérivé de f au point α, noté $f'(\alpha)$.*

Comme on le voit, la dérivée, d'abord présentée pour des fonctions polynômes, est d'emblée inscrite dans un contexte numérique exprimé sous forme de développement de fonction, conditionné cependant à la définition de la limite. Elle sera d'abord mise en oeuvre pour des problèmes de vitesses (avec une définition explicite de la vitesse instantanée) et d'optimisation. La définition sera ensuite généralisée au chapitre suivant en insérant la limite du quotient dans l'existence d'un développement d'ordre un

> *« V est un voisinage de x_0 ; la fonction f définie sur V admet un développement d'ordre 1 en x_0 : $f(x) = a + b(x-x_0) + (x-x_0).\ e(x)$ où $\lim\limits_{x_0} e(x) = 0$. Nous pouvons écrire $f(x) = a + (x-x_0)(b+e(x))$. Nous savons que nécessairement $a=f(x_0)$. Pour tout réel x de V, avec $x \neq x_0$, nous avons $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b + e(x)$. Il en résulte que $\lim\limits_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b$.*
> *L'unicité de la limite permet de conclure que la fonction f n'admet qu'un seul développement d'ordre 1 en x_0. Le réel b est donc attaché à la fonction et au réel x_0 : on l'appelle nombre dérivé de la fonction f en x_0 »*
> *(Cedic)*

Il y a ensuite généralisation de la notion de tangente en proposant la définition

> *[…] Δ_0 est tangente à la courbe au point M0 signifie que le coefficient directeur de la droite qui passe par le point M0 et le point M de coordonnées (x_0+h, $f(x_0+h)$), où h est un réel, a pour limite le coefficient directeur de la droite Δ_0 lorsque h tend vers zéro.*

Remarquons toutefois que seul le mot « définition » précise que l'énoncé est à prendre comme définition de la tangente. Supprimer ce petit mot inciterait alors à interpréter l'énoncé comme une propriété de la tangente Δ_0, elle-même définie (ou seulement préconçue) par ailleurs.

4.3.3.1.2 Dérivée et variation : discours 2 et discours 1

Dès la définition du nombre dérivé dans le cas d'une fonction polynôme, il est proposé d'établir un lien avec le sens de variation :

> *Regardons le comportement de la fonction polynôme f au voisinage d'un point β :*
> *quel que soit le réel x, $f(x)-f(\beta) = (x-\beta).(f'(\beta) + (x-\beta).h(x))$,*
> *et pour $x \neq \beta$,* $\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} = f'(\beta) + (x-\beta)\cdot h(x)$
> *c'est le taux d'accroissement de f entre x et β.*
> *Lorsque x est voisin de β, le réel $x-\beta$ est voisin de zéro et $h(x)$ est voisin de $h(\beta)$. Intuitivement, nous prévoyons que dans cette hypothèse le réel $(x-\beta).h(x)$ est suffisamment petit pour que $f'(\beta)+(x-\beta).h(x)$ soit du signe de $f'(\beta)$: au voisinage de β, le taux d'accroissement est du signe de $f'\beta)$.*
> *Réciproquement, si* $\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$ *reste positif, lorsque x est voisin de β, alors $f'(\beta)$ ne peut être strictement négatif.*

Si l'approche précédente nous parait relever du cadre II, ce lien va être précisé grâce à une analogie cinématique (discours 1) dans le chapitre suivant, où l'on trouve les énoncés suivants

> *Revenons au mouvement rectiligne d'un point [..] défini par la loi horaire $t \mapsto f(t)$.*
> *Supposons que $f(0)=0$ et que f est dérivable sur l'intervalle $[0,a]$ avec pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t)$ positif ou nul.*
> *La phrase « la vitesse est toujours positive » est une façon de décrire cette dernière hypothèse. Dans ce cas,* ***le principe de Lagrange*** *est de dire que le point M « ne peut pas reculer »; en d'autres termes si $t_1 \leq t_2$, alors $f(t_1) \leq f(t_2)$. Nous pouvons alors formaliser cette idée en admettant le*
> *Théorème 1*
> *Si la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et si pour tout réel x de I, $f'(x)$ est positif ou nul, alors la fonction f est croissante sur l'intervalle I*
> *[..]Notez l'importance du terme intervalle dans l'énoncé du théorème 1 : en effet, si il y a « un trou », le mobile M pourrait éventuellement repartir d'un point situé en arrière du point atteint avant le trou*
> *(Cedic)*

4.3.3.2 Théoriser la limite de sécantes pour travailler dans un cadre II

Les recherches de Schneider (1988, 1991) mettent en évidence les risques de glissements indus de la notion de limite entre le domaine numérique et le domaine géométrique. Si la définition de « position limite de sécantes » est censée proposer une meilleure visualisation de la notion de tangentes (donc plus propice à l'ostension), elle n'est en général jamais critiquée, excepté par Schneider (1991) qui demande à quelle topologie sur l'ensemble des droites on peut se référer.

S'il est effectivement possible de se définir une telle topologie, par exemple sur un faisceau de droites, cela n'est en tout cas jamais précisé. Nous n'avons trouvé que dans un manuel relativement ancien (M. Condamine et P. Visssio, algèbre et analyse pour classes de première, Delagrave, 1970) une tentative de définition de la limite géométrique au moyen des composantes de vecteurs, comme suit.

> *Limite d'une droite*
> *Limite d'un vecteur*
> *Par définition, le vecteur u a pour limite le vecteur u_0 si les composantes du vecteur ($u-u_0$) ont pour limites dans une base donnée zéro. On admet que s'il en est ainsi dans une base, il en est de même dans toutes les bases*
> *Limite d'une droite variable passant par un point fixe*
> *Soit F une famille de droites passant par un point fixe M_0. Définissons chaque droite D par le point M_0 et un vecteur directeur u. Soit D_0 une droite fixe passant par M_0. Par définition, la droite D a pour limite (ou position limite) la droite D_0 si le vecteur u a pour limite un vecteur directeur de D_0*
> *Propriété :*
> *si le point T intersection d'une droite variable D passant par un point fixe M_0 avec une droite fixe d ne passant pas par M_0 tend vers un point fixe T_0 de d alors la droite D a pour limite la droite M_0T_0.*
> *Propriété :*
> *si dans un plan rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ le coefficient directeur d'une droite variable D passant par un point fixe M_0 a une limite finie m_0, alors D a pour limite la droite D_0 passant par M_0 et de coefficient directeur m_0 (une limite infinie, alors D a pour limite la droite passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{j}$.*
> *Démonstration dans le cas de la limite finie*
> *Désignons par T et T_0 les intersections respectives des droites D et D_0 avec la droite d'équation $x=x_0+1$. Posons $\vec{u}=\overrightarrow{M_0T}$ et $\overrightarrow{u_0}=\overrightarrow{M_0T_0}$. Si m_0 et m sont les coefficients directeurs des droites D_0 et D, alors $\overrightarrow{M_0T}$ (1,m) et $\overrightarrow{M_0T_0}$ (1,m0). Puisque $\overrightarrow{T_0T}=\vec{u}-\overrightarrow{u_0}$ et m a pour limite m_0, alors D a pour limite D_0.*
>
> *Ensuite la tangente peut être définie comme limite d'une sécante M_0M pour M arbitrairement voisin de M.*
> *(Delagrave)*

Ce travail de définition de limite géométrique via la notion de limite de vecteur par la limite des composantes (comme dans un des deux dictionnaires) vise donc à « justifier » le passage de la « limite géométrique » à la limite des rapports représentant les coefficients directeurs, passage qui est généralement considéré comme évident, alors qu'il est précisément sujet à caution (Schneider, 1991). Il s'agit presque d'une manière de développer un cadre théorique uniquement pour résoudre cette question.

Ceci est d'autant plus intrigant que cette notion n'est en fait utilisée nulle part ailleurs dans ce manuel puisque le même manuel définit la dérivée à partir de la différentiabilité et de la recherche d'une approximation affine destinée à permettre l'estimation de l'écart $f(x_0+h) - f(x_0)$ en fonction de $x-x_0$. Ce n'est qu'ensuite que les deux notions seront mises en relation comme suit :

> *si la fonction est différentiable pour x_0, alors la courbe admet une tangente M_0T au point M_0 et cette tangente a pour coefficient directeur le nombre dérivé en x_0 ;*
> *si la courbe admet une tangente non parallèle à Oy, alors la fonction est dérivable en x_0 et le nombre dérivé est égal au coefficient directeur de la tangente.*
> *(Delagrave)*

Cette construction nous semble en fait vouloir dans le même temps séparer la tangente géométrique de la tangente analytique et montrer leur équivalence, mais en restant au niveau de cadres II. Pour cela, il faut alors donner une définition de la tangente géométrique comme limite de sécantes, donner la définition de la dérivabilité via une fonction d'approximation affine qui sera représentée par une droite, et finalement montrer que ce sont les mêmes. Nous pouvons donc y constater un souci de bien séparer les deux cadres, mais peut-être aussi un évitement d'une définition directe de la tangente par la limite du quotient, puisque la propriété du coefficient directeur égal au nombre dérivé ne sera alors que la conséquence d'une mise en relation de deux théories, comme si on n'avait travaillé que dans des cadres de type II.

4.3.5 Les dérivées vues par les deux institutions

Nous avons mentionné dans les chapitres précédents que le thème mathématique des dérivées avait été choisi de par sa double visibilité institutionnelle. Notre lecture de l'histoire de la dérivée et de la tangente, associée à l'analyse de manuels du secondaire et de syllabus universitaires va nous permettre de comparer les organisations mathématiques qui sont associées à la dérivée dans les deux institutions, pour montrer comment elles procèdent selon deux dynamiques presque contradictoires, puis de proposer différentes organisations en relation avec les cadres de rationalité identifiés.

4.3.5.1 Praxéologie « source » ou constitutive de la dérivée

Rappelons que la notion de praxéologie fait référence à 1) un type de tâches ou classes de problèmes, que nous choisissons de penser comme étant « les vraies raisons d'être » du savoir; 2) des techniques qui permettent de réaliser les types de tâches et de résoudre les classes de problèmes; 3) un discours technologique qui est un discours rationnel visant à justifier et à rendre intelligible l'usage de la technique; 4) la théorie qui se veut un niveau supérieur de rationalité. Si nous nous basons sur notre lecture de l'histoire de la dérivée, nous pouvons décrire une praxéologie constitutive associée à la dérivée comme suit.

1) Type de tâches : les problèmes de vitesses variables, de tangentes, d'optimisation, d'approximation (affine)

2) Technique : calcul de dérivées

3) Discours technologique : argumentations locales et souvent hybrides, liées à l'utilisation de points « infiniment proches » et donc des infinitésimaux, ou d'une argumentation cinématique pour accepter l'existence du « rapport extrême »par analogie avec la notion de vitesse instantanée.

4) Théorie : l'analyse mathématique réelle basée sur la construction axiomatique de R et l'utilisation d'inégalités et de quantificateurs.

Voyons maintenant comment ces différents composants sont articulés dans les organisations telles que nous les avons identifiées au niveau du secondaire et de l'université.

4.3.5.2 Organisations mathématiques associées à la dérivée

En comparant l'organisation universitaire avec celle largement naturalisée dans les manuels pour le secondaire belge, on obtient le tableau ci- dessous.

	Université : organisation globale	Secondaire : organisation locale
Types de tâches et classes de problèmes	« Oubli » des types de tâches	Statut inégal des tâches
techniques		Prédominance de la technique de calcul et de l'utilisation du critère de croissance
Discours technologique		Pratiquement pas de discours technologique
Théorie	Axiomatisation de R et définition des concepts fondamentaux : nombre réel, fonction, limite; Etude systématique des propriétés de ces concepts, dont le critère de croissance; Organisation rationnelle globale évitant le recours à un argument géométrique ou cinématique	Ersatz de théorie autour d'une « justification » du critère de croissance
Statut de la dérivée	Objet	outil
Statut de la tangente	absente	Outil didactique

Précisons quelques points de ce tableau :

1) Statut inégal des tâches

Nous avons vu, et ce sera confirmé par les travaux d'élèves-professeurs, que la majorité des activités proposées comme introduction à la notion de dérivée ou au critère de croissance consiste dans la recherche guidée d'une position limite de sécantes identifiée à une tangente non définie, et non dans la recherche d'une technique de construction de tangente. Les problèmes d'optimisation, approximation et de vitesses sont des problèmes d'application.

2) Prédominance de la technique

Il s'agit ici de l'importance accordée à l'exercice dit « étude de fonction ».

3) Pas de discours technologique et ersatz de théorie

Nous avons vu que les transpositions du secondaire, ce qui sera confirmé par les discours des élèves-professeurs, ne proposent pas d'éclaircissement sur les notions et résultats, du moins pas d'autre argument que la figure correspondante. Même les problèmes de cinématique sont traités comme des applications sans montrer ni la validité de l'application de la théorie à ces questions, ni la signification du résultat. De plus, la référence à la théorie va consister en l'énoncé de théorèmes légitimant la technique du critère de croissance, et non dans le rappel des propriétés dont il a fallu doter les réels pour que cette connexion entre géométrie et analyse soit possible.

4) Organisation universitaire

Nous mettons ici en évidence que son rôle est de présenter le niveau théorique sous forme d'une organisation déductive globale. Il est donc légitime qu'elle ne se préoccupe plus des questions d'origine et qu'elle n'utilise plus d'argumentation hybride. D'autres travaux sur la transition secondaire-université montrent bien la difficulté à aborder l'analyse réelle qui est alors « trop différente » de ce qui a été vu dans le secondaire, cette différence apparaissant dans le fait que les institutions se sont en quelque sorte réparti les différents composants puisqu'en fait elles ne poursuivent pas le même objectif.

Si nous revenons à la définition des deux types de praxéologie complémentaires (Chapitre 3), nous retrouvons effectivement une praxéologie de type 2 à l'université, mais qui devra travailler sur base de concepts appartenant à un modèle qui n'est relié à rien puisque la praxéologie majoritaire dans le secondaire n'est pas du type 1. En particulier la nécessité d'un travail d'élaboration théorique n'aura pas été installée.

4.4 Conclusions

Nous allons dans cette conclusion dégager de l'analyse précédente des indications pour la méthodologie de notre étude.

Notre analyse du thème et des ses transpositions amène à souligner la répartition des éléments tâche/technique/discours.théorie dans deux types de praxéologies très différents. Cette répartition aboutit à ce que Chevallard (1999) désigne comme « *une déconnexion franche du cœur théorico-technologique de l'oeuvre d'avec ses applications* ». Dans ce cas, c'est bien la notion d'application qui change de statut : elle est « *génétiquement nécessaire* » au développement de l'œuvre, mais devient « *institutionnellement contingente* » lorsqu'il s'agit de l'étude de la même œuvre. On peut aussi dire que « *le rapport entre question et réponse tend ainsi à s'inverser* » (Chevallard, 1999). Le cas des dérivées peut donc être vu comme un exemple typique de l'opposition entre deux dynamiques :

> *le type de tâches précède génétiquement le bloc technologico-théorique, lequel se construit alors comme moyen de produire et de justifier une technique appropriée… [tandis que] structuralement le savoir permet d'engendrer la technique pour un type de tâches donné*
> *(Chevallard, 1999).*

Cette opposition entre deux dynamiques se manifeste dans les transpositions par

1) des difficultés à définir la tangente autrement que géométriquement (même dans les manuels partant de l'approximation numérique, la définition de la tangente se fera en disant que son coefficient est la limite du coefficient de sécantes dont on ne s'est pourtant pas servi) ;

2) le fait de la considérer souvent comme préexistante ;

3) le peu de place accordée à la cinématique mais aussi à l'approximation ;

4) un évitement d'une définition de la tangente par le biais de son coefficient directeur ;

5) un évitement d'une définition de la vitesse instantanée.

Concernant le critère de croissance, nous avons de plus mis en évidence l'existence d'un discours « intermédiaire » qui se présente *a priori* comme un compromis pour pouvoir rester dans une rationalité de type II, mais qui relève en fait de la juxtaposition d'arguments du cadre théorique avec des arguments de niveau de rationalité 0 censés en faciliter la compréhension.

Il semble donc que le discours de niveau 1, présent dans l'histoire et de plus constructif de la notion, n'ait pas de place dans les transpositions. En effet, certains manuels « ouvrent la porte » à un discours de niveau 1, mais semblent laisser ce choix sous la responsabilité du professeur[215], et seul l'ouvrage A.H.A affiche le choix de travailler dans ce type d'organisation.

Si nous reprenons ci-dessous une forme simplifiée du tableau précédent, la notion de notion de « praxéologie à trous [216]» apparaît alors de manière plus flagrante :

[215] On pourrait alors parler du « topos » du professeur dans la manière dont il utilise les activités et discours existant dans les manuels.

[216] Il est sans doute possible d'étudier le lien avec la notion d'organisation incomplète (Bosch& Gascon, 2004).

Schémas avec tangente

Axiomatisation (19 étapes) Théorèmes Rolle et Lagrange Critère	Théorèmes Rolle et Lagrange Critère

L'appellation « à trous » souhaite refléter d'une part l'absence de discours technologique (au sens d'un discours rationnel cohérent) dans l'organisation locale et, d'autre part, le fait que cette organisation repose sur un discours qui consiste en fait en une version censurée du discours théorique. Nous avons vu que la justification majoritairement proposée dans le secondaire pour le critère de croissance est en fait le discours théorique mais dans lequel on a fait « des trous ». Ce sont précisément ces trous qui seront comblés par le recours à l'utilisation de la tangente qui se prête plus à l'ostension : la définition de position limite de sécantes va permettre de forcer visuellement le passage à la limite dans le quotient différentiel, et la représentation de tangentes en quelques points d'une courbe va « forcer la conviction » quant au critère de croissance.

Mettons-nous maintenant à la place des élèves-professeurs qui viennent d'étudier « la première colonne ». Suite à « l'échec » de la réforme des maths modernes, il est souvent préconisé de s'écarter de la perspective reposant sur les structures mathématiques, mais dans la mesure où ces structures ont été développées pour encadrer une série de techniques, que se passe-t-il lorsqu'on sort de ce cadre ? Comment construire et valider ces techniques ? Personne ne dit non plus précisément selon quelle organisation il faudrait travailler dans le secondaire. Peut-on par exemple travailler dans une praxéologie des grandeurs, le rôle du discours technologique étant alors de prouver que les techniques donnent bien le résultat attendu sur des préconstruits ?

Notre objectif sera donc d'observer le comportement des élèves-professeurs face à cette différence entre les organisations, différence qui crée implicitement deux normes et donc la tentation de basculer simplement d'une norme à l'autre. Nous chercherons en particulier à voir si ce qui reste du niveau théorique (« le cadre ») peut aider à la construction d'un discours technologique lorsque ces étudiants deviennent professeurs.

Il nous est en effet déjà possible d'associer la première colonne de ce tableau à un cadre de type II et un discours de niveau 2, tandis que la deuxième relève du discours de niveau 2bis. Pourtant, notre analyse précédente montre l'existence dans l'histoire d'autres niveaux de discours possibles, et les manuels nous ont montré des possibilités d'exploiter le contexte cinématique.

De manière à étudier la forme de rationalité adoptée par les élèves-professeurs, nous allons donc les confronter (en plusieurs étapes, comme nous le décririons dans le chapitre 5) à des praxéologies relevant de cadres de rationalité clairement distincts qui sont présentées dans le tableau ci-dessous, construit à partir des précédents.

Université	**Transposition majoritaire**	**A.H.A**	**Ingénierie**
Cadre II	Cadre II	Cadre I + II	Cadre I
discours 2	discours bis	discours 1 + discours 2	discours 1
Axiomatisation (19 étapes) Théorèmes Rolle et Lagrange Critère	Schémas Théorèmes Rolle et Lagrange Critère	axiomes Archimède et intervalles emboîtés Dérivée comme modèle de la vitesse instantanée Problème cinématique Démonstration numérique Critère	 Problèmes de vitesse, optimisation et approximation Techniques et discours de nature cinématique Dérivée comme modèle de la vitesse instantanée Critère

Chapitre 5

Méthodologie

5.1 Objectifs

Nous avons émis l'hypothèse que les élèves-professeurs changeant d'institution rencontraient une difficulté à montrer la fonctionnalité de la rigueur mathématique et à s'approprier une posture de rationalité différente de celle que leur permet la connaissance de la théorie. Cette difficulté à élaborer un discours technologique adéquat à l'institution et à son enseignement se traduirait alors par une forme de « fusion » des organisations rationnelles possibles en un discours se situant en quelque sorte à cheval sur les deux cultures.

A la suite d'une étude préliminaire sur ce que représente la rigueur en mathématiques (Chapitre 3), nous en avons envisagé deux fonctionnalités différentes, à savoir la recherche de rationalité et la mise en place d'un formalisme. Nous avons alors mis en relation la notion de cadre de rationalité avec les travaux de M. Schneider (2007) proposant de distinguer deux types d'organisations mathématiques, ou praxéologies. Le premier type d'organisation (cadre de rationalité I) relève d'un travail sur le système vers la construction d'un modèle, c'est-à-dire la recherche de techniques de résolution de problèmes portant sur des grandeurs, des objets géométriques et des « nombres » ainsi que des procédures de validation de ces techniques, procédures qui peuvent alors rester liées aux caractéristiques des objets en jeu. P. Job et M. Schneider (2007) proposent d'appeler « praxéologie des grandeurs » une telle organisation. Le deuxième type (cadre de rationalité II) concerne la constitution d'une théorie capable d'englober dans une organisation déductive « modèle » les techniques ainsi développées. A chacun de ces cadres correspond alors un niveau de discours (1 ou 2) exprimant la rationalité qui le caractérise.

Ensuite, le Chapitre 4 visait à montrer que la difficulté à élaborer un discours rationnel pour présenter la notion de dérivée au niveau du secondaire est une réalité mathématique que doivent affronter ces étudiants-professeurs. Nous avons en particulier montré que cette difficulté est une conséquence du fait que les organisations mathématiques potentielles correspondent à deux cadres de rationalité ne relevant pas du même projet, car de types différents. Le cadre II est celui de l'analyse réelle qui définit ses objets de départ comme les nombres réels, les limites et les fonctions puis en déduit les propriétés des suites et des fonctions réelles, dont celles liées à la dérivation. Ce cadre propose une rationalité culturellement attachée à la communauté mathématique universitaire. Par rapport à la praxéologie constitutive (ou « source ») de la dérivée , cette praxéologie « analyse » construit en fait les techniques et tâches à partir d'une théorie à fort pouvoir de légitimation, ce qui lui permet de se passer d'un discours technologique.

A moins de transférer cette même culture telle quelle dans le secondaire, la transposition du savoir savant en savoir enseigné va donc aboutir à une autre organisation mathématique des notions concernées. Toujours par rapport à notre praxéologie dite « source » une possibilité serait de construire une organisation de type I qui viserait à soumettre des tâches de type I, à proposer des techniques permettant d'y apporter des réponses et à élaborer le discours technologique dont la mission serait alors de justifier que les techniques sont bien adéquates. En particulier, les tâches étant issues de questions propres à des objets mentaux ou à des grandeurs, ce discours devra permettre la transformation de ces objets mentaux en concepts mathématiques, sous peine de voir ensuite une théorie complexe et précise cohabiter avec des objets mentaux non élucidés.

Cette transition d'une organisation du type théorique à un travail dans une praxéologie des grandeurs implique un changement de posture dont nous devrons étudier les modalités. Or il apparaît dans plusieurs études sur l'analyse que ce changement de dynamique est vraiment problématique, M. Bosch (?) parlant même de véritable « bicéphalie » à ce sujet. Nous avons identifié dans les chapitres précédents les obstacles certains auxquels se trouvent confrontés les élèves-professeurs lorsqu'ils doivent aborder le thème de la dérivée et de son association avec la tangente, notamment dans le cas du critère de croissance. Les obstacles relevant de la nature même du savoir en jeu (par exemple tout simplement les conceptions de la tangente et sa définition, la définition de la vitesse instantanée et de la dérivée) sont en effet gérés selon deux dynamiques contraires qui s'opposent dans les institutions. Nous avons de plus souligné que la présence d'objets mentaux comme la tangente et la vitesse instantanée constitue un véritable obstacle à ce changement. En effet, les transpositions étudiées montrent plutôt un évitement de leur définition, amenant ainsi à les considérer comme implicitement « évidents ». C'est ainsi que s'est naturalisée une transposition particulière, que nous avons appelée praxéologie « à trous », visant à sélectionner les tâches liées à la tangente qui pourra alors illustrer les théorèmes extraits de la théorie et ainsi tenir lieu de discours technologique. Comme nous l'avons montré précédemment, cette praxéologie juxtapose des extraits de théorie avec des illustrations nécessitant alors un discours mêlant les énoncés théoriques (niveau 2) avec l'évidence visuelle ou des analogies d'écritures, que nous avons associées à une rationalité de niveau 0. C'est pourquoi nous avons qualifié ce discours « intermédiaire » de discours 2bis.

Nous allons dans cette deuxième partie tenter de déterminer comment les élèves-professeurs affrontent ces difficultés et si les notions de rigueur et de rationalité mathématique interviennent dans leurs choix. Pour cela nous allons d'abord, dans le chapitre 5, décrire brièvement le contexte dans lequel nous avons recueilli nos données (5.2), puis nous décrirons les investigations et expérimentations qui y ont été menées (5.3). Enfin le chapitre 6 montrera à quels types de discours et pratiques donnent lieu les difficultés liées au savoir.
La première section de ce chapitre (5.2) décrira le contexte institutionnel de recueil des données analysées. Les données présentées et analysées dans notre travail ont été recueillies auprès des élèves-professeurs de deux universités (Université de Liège et Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur) de 2003 à 2007. Tout en ayant choisi les institutions pour leur différence de perspective quant à la formation initiale (décrite en 5.1.1), l'objectif n'était pas de procéder à une comparaison directe des dispositifs de formation concernés mais plutôt de tirer parti de la multiplicité d'opportunités d'observation ainsi offerte. Par la suite nous préciserons le contexte d'observation ou dégagerons quelques points de comparaison lorsque cela s'avère éclairant ou si cela peut susciter des pistes

d'investigation ultérieures, notamment quant au rôle du contrat didactique, ou contrat de formation, créé par les choix institutionnels.

La deuxième section (5.3) précisera la nature des observations effectuées. Pour mettre en évidence les manifestations de notre hypothèse, nous avons procédé à deux types d'investigations. Ayant souligné dans le chapitre précédent comment le même mot de « rigueur » pouvait avoir plusieurs interprétations liées soit à la recherche de rationalité, soit au formalisme[217] comme théorisation incluant une construction axiomatique, nous examinerons donc, entre autres au moyen d'entretiens, en quels termes la rigueur est évoquée dans les différentes institutions dans la mesure où ces interprétations sont susceptibles de justifier -consciemment ou non- les pratiques des élèves-professeurs. Les entretiens auprès de professeurs d'université nous permettront en particulier de caractériser le discours de niveau 2 et comment sont perçues les difficultés de la transposition au secondaire.

En parallèle, nous observerons, d'une part, les pratiques adoptées par les élèves-professeurs lorsqu'ils sont confrontés aux difficultés mises en évidence dans l'association des concepts de dérivée et tangente, et, d'autre part, les discours qu'ils tiennent sur ces pratiques. Cela nous permettra d'identifier vers quelle forme de rationalité ils s'orientent. Au travers de ces investigations pour la recherche, nous décrirons aussi comment insérer dans un dispositif de formation différentes actions destinées à confronter les élèves-professeurs à d'autres rationalités possibles, de manière à cerner le rôle joué par leurs savoirs mathématiques et didactiques dans l'élaboration d'un discours technologique sur le sujet choisi, mais aussi dans la constitution d'une praxéologie professionnelle.

5.2 *Contextes des observations*

5.2.1 Le contexte institutionnel

Nous allons ici décrire comment se fait en Belgique le changement d'institutions lié à la formation dite initiale en précisant quelles y sont les modalités de cette formation initiale. Dans un premier temps nous exposerons les aspects légaux avec la définition de l'AESS et la

[217] Le formalisme comme production (et utilisation) d'un symbolisme adéquat y est implicitement associé .

lecture des textes définissant les compétences attendues de l'enseignant et les objectifs de la formation initiale. Nous observerons ensuite comment les universités restent libres de faire des choix portant aussi bien sur l'organisation et la gestion de la formation sur un plan logistique que dans le statut des personnes contribuant à cette formation. Pour ce faire, nous avons choisi les exemples de deux des universités francophones pour montrer que les modalités de formation peuvent différer fortement d'une institution à l'autre, afin de tenter d'identifier sur quels points diffèrent les contrats didactiques résultant des choix institutionnels.

5.2.1.1 L'Agrégation pour l'Enseignement Secondaire (AESS)

L'Agrégation pour l'Enseignement Secondaire Supérieur (habituellement désignée par AESS) est un titre délivré par les opérateurs de formation habilités (universités et certaines Hautes Ecoles). Ce titre suppose l'obtention préalable d'un diplôme universitaire de licence, lequel est obtenu, selon les spécialités, en 4 ou 5 années d'études universitaires. Le titre d'AESS n'est pas lui-même requis pour enseigner, mais est nécessaire à la nomination d'un professeur.

Le lien entre la discipline étudiée pour le diplôme universitaire (licence ou diplôme d'ingénieur civil) et la discipline associée au titre d'AESS est déterminé par les notions de « titre requis » et « titre jugé suffisant », eux-mêmes variables selon les réseaux d'enseignement[218]. Ceci permet à des « non-mathématiciens » (les ingénieurs, les physiciens, informaticiens) de présenter une AESS en mathématiques ou maths/sciences.

---

[218] Un article de 94 prévoit pourtant l'uniformité, mais il n'a apparemment jamais été appliqué. Sans décrire en détail l'organisation de l'enseignement en Belgique, nous pouvons préciser qu'il existe plusieurs réseaux d'enseignement (le réseau dit « officiel » de la Communauté Française, le réseau dit « libre » rattaché aux diocèses, et d'autres réseaux dépendants des autorités des communes et/ou des provinces. La Belgique étant déjà caractérisée par une extrême décentralisation politique et administrative, cette complexité historique se marque également dans le domaine de l'enseignement, où elle influence encore les décisions présentes et à venir. Selon l'analyse de J. Beckers, l'enseignement en Belgique reste en effet « *au carrefour de plusieurs tensions* : *la tension entre Flamands et Wallons, en principe réglée par la communautarisation*[218] *de l'enseignement en janvier 1989 ; la tension entre laïcs et religieux, même apaisée par le pacte scolaire, qui émerge à tout propos, révélant des préoccupations de survie institutionnelle comme des oppositions idéologiques profondes. Elle est particulièrement visible dans la réalité des réseaux, le rôle des pouvoirs publics et la mission des inspecteurs ; la tension entre les diverses conceptions du rôle de l'école, qui prend des formes plus subtiles dans la manière de décliner l'autonomie, la participation, la solidarité et le rôle des pouvoirs publics* ».

Dans le cadre de cette étude, signalons seulement que l'on constate parfois des volontés chez les étudiants de ne pas changer de réseau d'enseignement entre leurs études secondaires, leurs études universitaires puis leur activité professionnelle. Ils sont cependant théoriquement amenés à exercer ensuite dans un ou plusieurs des réseaux d'enseignement, et donc à devoir prendre en compte des programmes qui sont différents d'abord par leur rédaction

Cette question est gérée différemment selon les organismes de formation. Ainsi les FUNDP proposent officiellement une AESS mixte « maths-sciences », ce qui permettra aux physiciens et ingénieurs de prendre part « de plein droit » au cours de didactique et épistémologie des mathématiques. Ceci n'est pas envisagé à l'ULg, qui propose aux ingénieurs d'être accueillis à l'AESS mathématiques.

5.2.1.2 Missions de l'enseignant et objectifs de la formation initiale

Les missions de l'enseignant et les objectifs de la formation initiale des enseignants du secondaire supérieur sont définis par un décret (D.08-02-01 modifié D.20-12-01) entré en vigueur en septembre 2001, les opérateurs de formation (en l'occurrence, les universités ou certaines hautes écoles) restant libres de la mise en œuvre et de l'organisation locale.

5.2.1.2.1 Compétences de l'enseignant

Ce décret demande aux organismes de formation
(de poursuivre) comme objectif dans la formation des agrégés de l'enseignement secondaire supérieur d'amener chaque étudiant à développer les treize compétences suivantes
- mobiliser des connaissances en sciences humaines pour une juste interprétation des situations vécues en classe et autour de la classe et pour une meilleure adaptation aux publics scolaires ;
- entretenir avec l'institution, les collègues et les parents d'élèves des relations de partenariat efficaces ;
- être informé sur son rôle au sein de l'institution scolaire et exercer la profession telle qu'elle est définie par les textes légaux de référence ;
- maîtriser les savoirs disciplinaires et interdisciplinaires qui justifient l'action pédagogique ;
- maîtriser la didactique disciplinaire qui guide l'action pédagogique ;
- faire preuve d'une culture générale importante afin d'éveiller l'intérêt des élèves au monde culturel ;

et sur certains points par les contenus mathématiques en jeu. Depuis le « décret-mission » de 1997, ils doivent également travailler dans la perspective de développer des compétences définies par un livret spécifique. Le fait d'être attaché à l'un ou l'autre réseau pourrait seulement avoir une influence dans la mesure où on constate des différences dans l'application du décret-mission, ou pour les étudiants déjà en fonction dans l'un des réseaux et qui en auraient assimilé les « habitudes ».

- développer les compétences relationnelles liées aux exigences de la profession ;
- mesurer les enjeux éthiques liés à sa pratique quotidienne ;
- travailler en équipe au sein de l'école ;
- concevoir des dispositifs d'enseignement, les tester, les évaluer et les réguler ;
- entretenir un rapport critique et autonome avec le savoir scientifique passé et à venir ;
- planifier, gérer et évaluer des situations d'apprentissage ;
- porter un regard réflexif sur sa pratique et organiser sa formation continuée

5.2.1.2.2 *Objectifs de la formation initiale*

Ce même décret fixe un volume horaire de 300 h à répartir selon 4 axes thématiques, en définissant comme suit un volume horaire minimum pour chacun de ces axes :

Appropriation connaissances socio-culturelles		Au moins 30h
	Sociologie éducation ; Analyse institution et acteurs ; Approche théorique diversité culturelle ; Politique de l'éducation ; Réflexion éthique sur la profession	
Appropriation connaissances pédagogiques		au moins 60h
	Transposition didactique : épistémologie de la discipline, didactique de la discipline, recherche en didactique de la discipline, approche interdisciplinaire, connaissance et exploitation pédagogique des médias et des TIC.	
	Formation pédagogique intégrée : évaluation des apprentissages, processus enseignement-apprentissage, étude critique des grands courants pédagogiques et recherche en éducation	
Appropriation des connaissances socio-affectives et relationnelles		Au moins 30h
	Approche adolescent et vie scolaire ; Gestion de groupes dans la classe et autour de celle-ci ; Relations interpersonnelles	
Savoir-faire		Au moins 90h
	Séminaires analyse des pratiques ; Stages situation réelle : observation participante ; Stages situation réelle : enseignement ; Stages situation réelle : activités hors cours	

5.2.1.3 Deux organisations différentes de la formation initiale

Rappelons qu'il ne s'agit pas d'évaluer les dispositifs de formation mentionnés ici ni de les comparer, mais de décrire comment la liberté de mise en œuvre dont disposent les universités se traduit par une grande diversité dans les programmes proposés par les institutions impliquées, dans l'offre de cours de didactique ainsi que dans le public fréquentant les cours, ce qui amène à des contrats didactiques également très variables. Cela permettra aussi de situer le contexte dans lequel ont été recueillies les données et informations présentées dans ce travail. De plus, cela nous permettra de considérer que la récurrence des difficultés observées est donc révélatrice d'obstacles à caractère plus général. Signalons de plus que les informations ci-dessous concernent la période des observations, mais que des modifications sont prévues pour insérer les programmes d'AESS dans les filières dites didactiques des masters prévus par le décret appelé « Bologne ».

5.2.1.3.1 Diversité dans les programmes et leur gestion par l'institution

5.2.1.3.1.1 Le programme d'AESS à Liège

Depuis 1995, l'Université de Liège a mis en place un Centre Interfacultaire de Formation des Enseignants (Cifen), permettant un dialogue entre les personnes impliquées dans les différents axes de la formation, et favorisant un rapprochement entre les responsables des cours de didactique spéciale dans des disciplines éloignées. De plus, les assistants en didactique spéciale sont spécifiquement recrutés parmi les professeurs du secondaire, certains y exerçant toujours à mi-temps. Il y a donc ici une sorte de « zone tampon » entre l'institution universitaire et l'institution du secondaire. Le programme d'AESS proposé par l'Université de Liège s'articule comme suit (* indique les cours donnant lieu à évaluation) :

Axe « socio-culturel»			45h	
	Analyse de l'institution scolaire	Cours	10h	*
	Sociologie de l'éducation	Cours	10h	*
	Approche de la diversité culturelle	Cours	10h	*
	Education à la citoyenneté	Séminaire	15h	
Axe « Pédagogique »			135h	
	Didactique disciplinaire	cours	75h	*
	Approche interdisciplinaire	Séminaire	15h	
	Education aux média	cours	15h	*
	Didactique générale	Cours	30h	*
Axe « socio-affectif »			30h	
	Psychologie éducationnelle	cours	15h	*
	Situations scolaires difficiles	Séminaire	15h	
Axe « savoir-faire »			90h	
	Stages observation		20h	
	Stages enseignement		40h	*
	Activités hors cours		10h	
s	Pratiques réflexives	Séminaires	20h	
Leçon publique				*

Les cours généraux sont donnés en amphithéâtre, toutes disciplines confondues, et sont évalués par un examen et/ou par plusieurs travaux. Les séminaires sont organisés par groupes de 20 et évalués sur base de travaux écrits.

5.2.1.3.1.2 Le programme d'AESS aux FUNDP- Namur

Le programme de l'AESS dans les disciplines scientifiques est ici proposé par une Commission d'agrégation de la Faculté des Sciences réunissant entre autres les responsables des cours de didactique spéciale dans les différentes disciplines puisque les FUNDP proposent une AESS mixte (biologie-chimie, maths-physique, etc.).

Le programme d'AESS proposé par les FUNDP s'articule comme suit :

	Cours	TD et TP Intégration théorie/pratique	Stages
Education scolaire et société	30h	15h	
Psycho-pédagogie	60h	30h	
Didactiques disciplinaires et épistémologies	70h	35h	45h
Cours à option	15h		
Total	175h	80h	45h
	175h	125h	

Le bloc de 105h de didactique et épistémologie disciplinaires étant réparti ainsi :

Didactique et épistémologie		AESS Physique - Maths	AESS Maths
Sciences expérimentales		x	
Physique		x	
Maths	60h	x	x
	15h		x
Maths et autres disciplines	15h		x
Didactique comparée sciences et maths	15h	x	x
		120h	105h

Enfin les 15 h de cours à option peuvent être choisies parmi

- Analyse des systèmes éducatifs
- Pédagogie de l'interculturel et intégration européenne
- Éducation aux nouvelles technologies de l'enseignement
- Atelier d'expression orale et gestuelle
- Introduction à l'enseignement d'une 3ème discipline scientifique
- Séminaire de recherche d'action et de développement pédagogique
- Séminaire de recherche en didactique d'une discipline
- Compléments d'histoire des mathématiques

- Tout autre cours susceptible d'enrichir les enseignements moyennant accord de la Commission, par exemple bioéthique, chimie et environnement,…

Sans aller jusqu'à fournir les programmes de formation proposés par les autres universités, ces deux exemples illustrent déjà le rôle de l'institution dans l'interprétation d'un décret relatif aux missions de l'enseignant et aux contenus de la formation initiale.

On remarquera que la formation initiale est prise en charge de manière différente au niveau institutionnel, les facultés étant plus ou moins impliquées dans le contrôle de la formation et dans l'affectation de ressources spécifiques (groupe d'heures supplémentaires ou charges de cours, postes d'assistants, …).

On remarquera aussi que l'organisation choisie par les FUNDP officialise une ouverture des futurs professeurs de mathématiques aux autres disciplines. Cela pourrait être une opportunité de distanciation par rapport au statut « d'étudiant en maths » qui peut favoriser la réflexion épistémologique ainsi qu'une préparation aux questions qui seront ultérieurement posées par les élèves.

Enfin la leçon publique est un examen spécifique à Liège, où il est d'ailleurs l'objet d'interprétations très différentes allant d'un « aboutissement » des stages à l'examen disciplinaire.

5.2.1.3.2 Diversité dans les offres de cours et les modalités d'évaluation

Nous avons dit que les institutions dédiaient plus ou moins de ressources à la formation initiale et à la didactique en général, ce qui amène également une diversité dans le type de cours qui pourra être proposé.

Dans un cas, l'offre de formation se déroule sur un semestre et cible directement une application à l'enseignement dans le secondaire, notamment par des séances de « micro-teaching ». Ces séances consistent en une présentation par un étudiant d'une leçon qu'il a préparée sur un sujet imposé, suivie d'une analyse critique par le groupe. Les préparations écrites de leçons sont ensuite lues et commentées par le formateur, en vue de l'évaluation finale. Cette évaluation prendra également en compte la remise en fin d'année d'un dossier reprenant les préparations éventuellement corrigées[219], ainsi qu'un travail écrit dont l'objectif

[219] Ces préparations et leurs versions corrigées, ainsi que certains des travaux écrits, constituent une des observations sur lesquelles nous travaillerons.

est d'être « réflexif ». Une deuxième note concerne l'évaluation des stages pratiques, prenant en compte l'évaluation faite par un membre du département de mathématiques, l'évaluation faite par un des formateurs et l'évaluation du maître de stage. Une troisième note concerne l'examen dit de « leçon publique », consistant dans le fait de présenter une leçon sur un sujet imposé, et ce devant un jury composé des personnes intervenant dans les cours et les visites de stage.

Dans l'autre cas, le cours se déroule sur une année et propose un cours systématique de didactique et épistémologie des mathématiques, incluant la présentation de recherches mis aussi la rédaction de travaux écrits sur des questions spécifiques, ainsi qu'une mise en situation comme celle du vase conique (décrite en 5.3.1.2). L'évaluation se fait par un travail écrit d'analyse didactique en fin d'année sur base des expériences de stages, ainsi que par un examen écrit, portant sur la didactique mais aussi sur l'épistémologie des mathématiques. L'organisation des stages est sensiblement la même, mis à part le fait qu'à Liège, les membres du département de mathématiques prennent part aux visites et donc à l'évaluation.

5.2.1.3.3 Diversité dans le public

Nous allons ici décrire la diversité que l'on peut constater au sein du public suivant cette formation. S'il existe une diversité « naturelle », elle peut être plus ou moins renforcée selon les choix affichés par l'institution.

5.2.1.3.3.1 Diversité concernant la formation de base

Nous avons vu que les deux universités choisies gèrent différemment la question de l'accès des non-mathématiciens à l'AESS mathématiques. Nous le mentionnons ici car, tout en paraissant anecdotique, il amène probablement certaines difficultés dans la position que peuvent adopter formateurs et étudiants, et donc dans le contrat didactique. Ces étudiants ont en fait la même formation secondaire mais pas la même spécialisation universitaire : ceci influence-t-il leur manière de se préparer à l'enseignement ? La participation de l'ingénieur ou du physicien au cours de didactique des mathématiques, et donc la possibilité d'expression et de dialogue, est rendue plus ou moins légitime selon les institutions : ceci influence-t-il leur posture ? Même si nous ne répondrons pas à la question dans ce travail, il nous semble important de la conserver à l'esprit.

5.2.1.3.3.2 Diversité concernant l'appartenance à l'institution

Si le public accueilli dans le cadre de la formation initiale est divers quant à sa formation de base, il existe une autre forme de diversité relative à la distance dont l'étudiant dispose vis-à-vis des institutions concernées : l'enseignement universitaire et l'enseignement secondaire.

Les étudiants peuvent en effet suivre cette formation selon un plan de fractionnement qu'ils organisent librement, et qui peut durer entre 1 et 3 ans. On peut donc rencontrer au cours de didactique spéciale des étudiants aux profils divers et qui seront vraisemblablement dans des contrats et des postures différents en fonction de ce qu'on pourrait appeler leur degré d'appartenance à l'une ou l'autre des institutions : certains sont encore dans leur cycle d'études (en général la dernière année), d'autres suivent les cours l'année suivant immédiatement la fin de leurs études ; parmi ceux-ci certains choisissent d'y consacrer une année tandis que d'autres commencent à travailler en même temps ; d'autres encore reviennent suivre le cours après une expérience professionnelle dans l'enseignement ou dans le privé. En ce qui concerne les ingénieurs et informaticiens, on trouvera également des étudiants qui enseignent déjà ainsi que des étudiants qui ont exercé ou exercent encore le métier d'ingénieur. Il est par contre rare qu'ils préparent l'AESS en même temps que leurs études dans une autre filière.

L'étudiant se trouve alors dans un contrat didactique tout à fait inconfortable vis-à-vis de l'institution. En effet, il a été (ou est même encore) élève de cette institution et se trouve donc tenu d'en respecter les usages, dans le même temps que le fait de devenir professeur nécessite de changer de posture et de prendre son autonomie[220]. Dans les deux universités, il est évalué conjointement pour les stages par des personnes appartenant aux deux institutions, et, dans l'organisation choisie par l'ULg, l'étudiant est de plus évalué pour son AESS par les professeurs dont il a été l'élève, et ce à deux occasions : lors des visites de stage et pour l'examen de leçon publique.

---

[220] On peut noter ici que le fait de pouvoir préparer l'AESS en même temps que la dernière année d'études, c'est-à-dire de se préparer à enseigner en même temps qu'on finit d'étudier, reste un point clé dans l'organisation du dispositif de formation initiale. C'était la formule initiale, jusqu'à la réforme en 2001, et on trouve actuellement encore des étudiants dans ce cas. La question se pose à nouveau pour l'organisation de l'AESS dans le cadre de la réforme de Bologne. La formation serait vraisemblablement d'une part accessible après une première année de deuxième cycle (donc après 4 ans d'université), d'autre part « incluse » dans une cinquième année comprenant d'autres cours. Cette cinquième année s'intitule « filière didactique » dans les textes ministériels (prévoyant aussi une filière « recherche » et une filière « recherche appliquée ») .

Nous avons voulu ici donner un aperçu de la variabilité dans les choix institutionnels relatifs à la prise en charge de la formation initiale (y compris au sein d'une même institution), et dans les modalités pratiques d'organisation, de manière à appréhender la complexité du contrat didactique dans lequel se trouvent les élèves-professeurs. Pourtant la manière dont ce contrat influence les pratiques et discours observés ne sera pas directement exploité dans ce travail, et ne pourrait l'être que dans une perspective future. En effet nous verrons que, malgré cette variabilité, certaines difficultés s'avèreront récurrentes quel que soit le contexte, ce qui nous confirmera qu'elles trouvent leur origine dans le savoir mathématique et son enseignement.

5.3 Observations : pratiques et discours

5.3.1 Observations de pratiques

Du fait des approches différentes adoptées dans les deux dispositifs, il a été possible de recueillir des observations complémentaires organisées suivant les 4 axes suivants. Selon les cas, les étudiants auront effectué tout ou partie des actions proposées et certaines combinaisons seront détaillées si besoin.

1. Préparations de cours sans contrainte, avant tout enseignement de didactique :
   - avec ou sans exposé oral ;
   - avec ou sans interview ;
2. Eléments de la TSD :
   - dévolution aux élèves-professeurs d'une situation adidactique ;
   - analyse d'erreurs d'élèves en termes d'obstacles épistémologiques ;
3. Eléments de la TAD :
   - analyse de transpositions existantes dont une est « orthogonale[221] » aux transpositions habituelles ;
   - synthèse ;
4. Construction d'un discours technologique à partir de tâches imposées constituant une ingénierie didactique de la dérivée et de techniques proposées par les élèves.

[221] Au sens où elle relève d'une rationalité de type I.

Une dernière étape consistera à modifier le milieu de l'élève-professeur en y insérant des projets d'enseignement relevant des différentes praxéologies identifiées à la fin du Chapitre 4, ainsi que des questions spécifiques dont la mission est de contraindre l'étudiant à travailler au niveau du thème (niveau S_{+2}) en articulation avec le niveau S_{-1} (pratiques de l'élève) sans pouvoir utiliser d'arguments venant du niveau S_{+3} (valeurs) ou S_{+1} (projet pédagogique). L'objectif est alors d'utiliser à bon escient les « nouvelles » connaissances didactiques pour prendre conscience du milieu effectif de l'élève.
Dans l'ensemble, nous avons surtout cherché à observer aussi bien les pratiques que les discours sur ces pratiques (Sensevy & Mercier, 2007).

5.3.1.1 Les préparations de leçons

Nous distinguerons ici deux modalités différentes de réalisation de cette activité. A l'ULg, les étudiants auront préparé des leçons « sur papier », exercice que nous avons fait accompagner de certaines consignes, ainsi que d'une réflexion *a posteriori* par écrit ou en entretien.
Aux FUNDP, il a été demandé aux étudiants de choisir deux approches différentes de la dérivée (tangente), de les présenter à l'oral et de les commenter en entretien.

5.3.1.1.1 Préparations à l'ULg

Dans le cours proposé à l'ULg, il est demandé aux étudiants de préparer des leçons « *telles qu'ils les donneront en classe* ». Ces préparations reflètent donc la posture « spontanée » de l'étudiant par rapport à la discipline et au métier et c'est sur leur base que l'étudiant « donnera cours » (en effet les préparations de stages en sont très proches).
L'exercice pourrait être accusé d'être « artificiel ». Nous sommes consciente qu'un même travail écrit sera « défendu » de manière différente en fonction de la personnalité de l'étudiant et du déroulement de la leçon, mais l'écrit demande précisément une distanciation par rapport au contenu, et va de plus révéler les choix faits par l'étudiant parmi la documentation à sa disposition, choix qui relèvent aussi des pratiques enseignantes. Nous avons donc choisi d'en dégager certaines des informations recherchées pour notre étude.

Nous inspirant de contextes utilisant « l'écriture sous contrainte » pour favoriser l'explicitation, nous avons complété cet exercice par des consignes pour voir comment cela peut favoriser ou non l'élaboration du discours technologique recherché.

Nous pouvons aussi préciser que, nous insérant dans une organisation existante, une de nos tâches était de « corriger » les préparations écrites demandées aux étudiants. Dans la mesure où le rôle de « formateur » est une des questions associées au sujet d'étude nous préoccupant, les outils d'abord conçus comme outil de correction se sont aussi rapidement inscrits dans un objectif personnel d'accompagnement plutôt que de prescription ou vérification.

Des sujets sont ainsi proposés chaque semaine par le responsable du cours. Nous précisons ci-dessous les indications et consignes qui ont été données aux étudiants, ceci afin d'identifier quels types d'exercices peuvent favoriser l'élaboration d'un discours mettant en évidence la rationalité sous-jacente à l'articulation des contenus mathématiques évoqués dans la leçon. Ces sujets sont répartis en trois séries, la première pour l'année 2003-2004, la deuxième pour l'année 2004-2005 et la troisième pour 2005-2006 puisque nous avons donné des consignes différentes pour ces trois années.

5.3.1.1.1.1 Première série de préparations : sujets et consignes

La première série concerne les étudiants de 2003-2004. Deux sujets sont proposés chaque semaine par le responsable du cours pour la semaine suivante, et les étudiants choisissent librement le sujet qu'ils veulent traiter. Les intitulés sont choisis parmi les sujets appartenant au livret définissant les compétences en mathématiques, avec parfois une indication sur le public cible (exemple classe de 5ème à 4h par semaine). Dans le cas contraire, ce sera à l'étudiant de préciser à quel public est destinée la leçon préparée.

Les indications de préparation sont à cette époque assez générales et consistent en

1) un plan du type : définition des objectifs, puis mise en situation, développement ; retour (si cela s'y prête) à la situation introductive et synthèse.

2) des conseils généraux : ne pas s'y prendre au dernier moment ; insister sur la synthèse ; prendre le temps de consulter plusieurs ouvrages.

3) Une première grille d'analyse de ces préparations qui leur est communiquée et commentée par l'assistante. D'abord élaborée comme « grille de correction », cette grille leur est aussi donnée comme un outil de relecture de leur travail.

Grille de lecture des préparations de leçons	
Contenu	Erreurs : connaissance / formulation Notions : manquantes / superflues
Clarté	Présentation de la matière Rédaction et " Fluidité " Notations Correspondance objectifs/développement Synthèse
Forme	Langage et orthographe Schémas, graphiques,…
Originalité - Atouts	
Remarques générales	

5.3.1.1.1.2 Deuxième série de préparations : sujets et consignes

La deuxième série concerne les étudiants de 2004-2005. Pour cette deuxième série, les sujets sont proposés deux semaines à l'avance par le responsable du cours, afin de voir si le facteur lié au temps de préparation avait un impact.

Pour cette deuxième série, d'autres indications ont été proposées, d'une part, dans la précision des objectifs, et, d'autre part, dans une première tentative d'explicitation de l'articulation des notions en jeu. Pour cela, nous avons demandé d'utiliser autrement les rubriques « objectifs » et pré-requis » que les étudiants indiquaient plus ou moins spontanément au début de leur travail, ce qui va être précisé dans les sections suivantes.

5.3.1.1.1.2.1 Travail sur les objectifs

Au fil des années, il nous est apparu que la rubrique « objectifs » contenait le plus souvent des intitulés très généraux, par exemple «établir le lien entre la dérivée première et la croissance d'une fonction». Outre le fait que ces énoncés sont souvent tirés de documents et donc impersonnels, ils ont le défaut essentiel de ne pas se prêter à une forme de vérification, risquant ainsi de rester des « vœux pieux » sans offrir de prise à la falsification. Or il nous semblait que la leçon devait être conçue dans un but précis et qu'il devait être possible de voir si on a atteint ce but. Pensant de plus que l'intervention du didacticien en formation initiale, comme acteur du système, peut être de permettre à l'étudiant d'identifier « son » message sur les mathématiques, les contraintes dans lesquelles il doit travailler et les moyens qu'il peut se donner pour diffuser ce message, nous avions dès le début indiqué, parmi les critères de lecture des préparations, la « correspondance objectifs-développement », critère cherchant à estimer dans quelle mesure les développements de la leçon permettent d'atteindre le(s) objectif(s) mentionné(s).

Si, dans un premier temps, nous avons demandé aux étudiants de rédiger les objectifs en termes de comportements attendus et vérifiables des élèves, nous avons ensuite préféré revenir à l'idée première de « message », pour deux raisons. D'une part, parce que sinon on obtenait « j'aimerais que l'élève soit capable de faire le lien entre la croissance d'une fonction et sa dérivée » et, d'autre part, parce que nous avions constaté des phénomènes que nous avons appelés « déplacement de foyer ». Il s'agit en fait d'un glissement du thème de la leçon vers une autre préoccupation plus ou moins associée. Si le phénomène est fréquent dans la dynamique de la classe[222], il est curieux de l'observer sur des préparations écrites. Par exemple, une leçon sur les systèmes linéaires aboutit souvent à consacrer plusieurs pages au principe d'équivalence, sans doute parce qu'il est justement non justifiable à ce niveau. Ou encore, une leçon sur l'introduction de la notion de limite aboutit en général à une majorité de pages sur les cas d'indétermination.

Ces déplacements ont souvent pour effet de générer une leçon dont on ne cerne plus très bien le sujet principal. Nous avons donc « repris » une notion apprise dans un cours de pédagogie : le foyer d'une leçon (ou d'une séquence)[223], qui est l'idée autour de laquelle s'articule la leçon, en quelque sorte le message que l'on souhaite y délivrer. Lors de l'année 2004-2005, nous avons donc proposé aux étudiants de travailler avec cette notion en leur demandant de définir un foyer (ou message) pour leurs préparations.

5.3.1.1.1.2.2 Travail sur l'articulation des notions

Les pré-requis sont souvent complétés au hasard, avant la leçon elle-même. Nous avons même souvent rencontré des cas de leçons indiquant des pré-requis non utilisés dans le développement. Il nous a donc semblé que l'interaction entre les savoirs et savoir-faire mathématiques, et la notion d'organisation dynamique de ces savoirs n'était pas claire. Dans l'optique de voir comment les étudiants géraient les aspects outil et objet des concepts, et de

[222] Les questions des élèves, débats etc., peuvent très bien nécessiter de s'éloigner de son objectif initial.

[223] Nous n'avons en fait plus vu de trace de cette notion dans les cours donnés ensuite à l'AESS, ni dans d'autres contextes de formation des maîtres.

mettre en évidence d'éventuelles questions quant à la justification et aux fondements de leurs discours, nous leur avons proposé d'établir ce que nous avons appelé un « réseau conceptuel [224]». Il s'agissait en fait d'un exercice consistant à identifier les notions et résultats intervenant dans la leçon, et avec quel statut.

> *Vous pouvez aussi imaginer que c'est une analyse (a posteriori) de votre travail, finalement assez proche de ce que vous présente en ce moment M. N. en comparant des approches (ou transpositions didactiques) différentes de la notion de fonction exponentielle. C'est évidemment un travail beaucoup moins précis qui vous est demandé, et vous restez comme convenu libres de le tenter ou pas. C'est toutefois intéressant pour moi de savoir ce qui vous en empêche, donc continuez à me dire si cela vous pose des difficultés et pourquoi. Voici quelques idées pour classifier les notions et résultats.*
> *Notions*
> *-objet mathématique défini dans la leçon,*
> *-objet mathématique utilisé et déjà défini,*
> *-objet mathématique utilisé mais non défini (exemple de la continuité),*
> *-autre.*
> *Arguments*
> *-résultat mathématique et démontré,*
> *-résultat mathématique donné comme tel et non démontré,*
> *-argument explicatif dont vous pensez qu'il est mathématique, mais pas développable ici,*
> *-argument explicatif dont vous pensez qu'il n'est pas mathématique (intuition ou autre...),*
> *-autre*

Une étudiante ayant produit spontanément un schéma qui regroupait les différentes notions en jeu selon des catégories problèmes/moyens/méthodes, nous nous sommes inspirée plus directement de la TAD pour leur proposer l'exercice sous la forme suivante :

> *Vous pouvez aussi chercher à identifier*
> *-les questions mathématiques en jeu,*
> *-les techniques/procédures définies pour y répondre,*
> *-les éléments de théorie qui justifient/valident ces techniques.*[225]

5.3.1.1.1.2.3 Utilisation des manuels et autres ouvrages

Parmi les consignes, figurait le conseil de consulter plusieurs ouvrages. Nous avons constaté une forte demande des étudiants (mais aussi de certains universitaires) pour « un bon

[224] Cette appellation donnée au départ n'est finalement pas très parlante ni incitante.

[225] Cette précision a été donnée dans un deuxième temps pour voir dans quelle mesure les étudiants sont conscients de la dynamique d'articulation des savoirs présents dans leur leçon. Un exercice semblable a également été proposé aux étudiants des FUNDP pour leurs préparations de stages.

manuel ». Ici les avis peuvent diverger : l'un peut leur conseiller un manuel de référence, l'autre peut leur conseiller d'en consulter plusieurs ainsi que des ouvrages qui ne soient pas des manuels, et de consulter des ouvrages de différentes époques. L'avertissement est donné que « *plus on consulte d'ouvrages, plus il faudra faire attention à construire un exposé qui reste cohérent* ».

Afin de mieux savoir quels types d'ouvrages les étudiants utilisaient pour leurs préparations, il leur a été demandé de fournir avec les préparations les références sur lesquelles ils s'étaient basés.

5.3.1.1.1.3 Troisième série de préparations et consignes

La troisième série concerne les étudiants de 2005-2006. Pour cette dernière série également, les sujets sont proposés à l'avance par le responsable du cours, selon un délai variable. En particulier les sujets sur la dérivée et sur les variations d'une fonction ont ici été proposés 3 semaines à l'avance.

A la suite des années précédentes, les étudiants ont reçu les conseils et consignes suivants.

> *I - Premiers conseils*
> *1) Ne pas s'y prendre au dernier moment*
> *2) Consulter plusieurs types de documents tout en prenant garde à construire un discours cohérent*
> *3) Se relire (ou faire relire)*
>
> *II - Consignes*
> *1) Indiquer vos objectifs ou le message que vous souhaitez faire passer avec cette leçon*
> *2) Indiquer vos références*
>
> *III - Organisation déductive et discours rationnel*
> *Cet exercice vise à mettre en évidence l'organisation déductive et le discours rationnel qui structurent la leçon proposée.*
> *1) Cherchez à identifier (à un niveau de détail que vous jugez suffisant) les notions et arguments sur lesquels elle repose ou qu'elle met en jeu.*
> *Notions*
> *objet mathématique défini dans la leçon,*
> *objet mathématique utilisé et déjà défini,*
> *objet mathématique utilisé mais non défini (exemple de la continuité),*
> *autre.*
> *Arguments*
> *résultat mathématique et démontré,*
> *résultat mathématique donné comme tel et non démontré,*
> *argument explicatif dont vous pensez qu'il est mathématique, mais pas développable ici,*
> *argument explicatif dont vous pensez qu'il n'est pas mathématique (intuition ou autre...),*

> *autre »*
> *Vous pouvez aussi chercher à identifier*
> *les questions mathématiques en jeu,*
> *les techniques/procédures définies pour y répondre,*
> *les éléments de théorie qui justifient/valident ces techniques*
>
> *2) Quels sont, selon vous, les enjeux liés à la rigueur et/ou à la rationalité qui sont associés au sujet et à la manière dont vous l'avez traité ?*

Nous pouvons déjà remarquer que, excepté la liste des références, les points II et III n'ont jamais été abordés et n'ont d'ailleurs pas suscité de questions.

5.3.1.1.2 *Préparations aux FUNDP*

En octobre 2005, il a été demandé aux étudiants (éventuellement par groupes de 2 ou 3) de rechercher et choisir deux approches contrastées de la notion de dérivée et d'en faire une présentation, suivie d'un entretien s'inscrivant ici aussi dans le cadre des pratiques réflexives.

Si l'exercice de préparations à l'ULg se situe volontairement dans un objectif de « production immédiate » d'une leçon, il s'agissait ici de se libérer de cette contrainte et de procéder à une sorte de phase préliminaire de préparation. Un deuxième objectif était de les « contraindre » à rencontrer plusieurs transpositions ce qui ne semble pas être fait spontanément, et de les amener à en faire une analyse comparée, notamment pour motiver les choix qui seraient éventuellement faits.

5.3.1.2 Mise en situation: résoudre un problème dans la rationalité de type I

Les étudiants des FUNDP ont été chaque année placés en situation de résolution de problème, confrontés au problème du vase conique :

> *Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1cm/min. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100 cm³/min ?*

Expérimenté et analysé dans la cadre de la thèse de M. Schneider (1988), avant d'être repris dans l'ouvrage AHA, ce problème vise essentiellement à introduire le nombre dérivé à partir de la notion de débit instantané, sans passer par la notion de tangente et même sans forcément posséder la notion de calcul de limite.

5.3.1.2.1 *Analyse du problème*

Nous nous inspirerons ici de l'analyse qu'en fait M. Schneider, qui a d'abord décrit le travail effectué par des classes du secondaire et a ensuite régulièrement posé le même problème dans le cadre de la formation initiale aux FUNDP, puis à l'ULg depuis 2006.

5.3.1.2.1.1 Description

Le problème du vase conique est un problème de vitesse, ici la vitesse d'augmentation du volume, mais se distingue de la formulation habituelle d'un problème de cinématique [226] donnant le plus souvent une loi horaire[227] (et donc déjà la modélisation par une fonction) qu'il faudra manipuler pour répondre à d'autres questions. Dans ce problème, le contexte est précis et ne nécessite pas de décodage préalable[228] de formules. De plus, l'énoncé pose une question précise qui va motiver la recherche. Cette question n'est pas directement relative à la vitesse tout en indiquant que c'est bien le temps qui est la variable[229], et c'est pour y répondre qu'un équivalent de loi horaire sera écrit (du moins dans les approches s'y prêtant) pour décrire l'évolution du volume en fonction du temps (ou de la hauteur puisque dans cette version la hauteur est toujours égale au temps et même au rayon du cône).

Le caractère « concret » du problème permet une visualisation, par exemple de la surface et de la profondeur de l'eau dans le vase[230], autre que la représentation graphique mais aussi une expérience de pensée qui validera les stratégies mises en œuvre. De plus, une représentation graphique dans ce cadre ne posséderait pas l'inconvénient majeur de risque de confusion entre trajectoire et loi horaire[231].

Plus précisément, il y a ici deux vitesses qui sont liées : celle de l'accroissement du volume (dV/dt) et celle de l'accroissement de la hauteur d'eau (dh/dt). Qui plus est, on est dans un

---

[226] Par exemple les problèmes trouvés dans les années 1970 où le cours d'analyse était associé à une forte composante de cinématique du point. On rencontre encore ce type de problèmes dans les manuels actuels mais présentés comme application de la notion de dérivée avec une loi horaire donnée.

[227] Même si les élèves ne se l'autorisent que dans le cas de leçons en individuel, une question souvent posée à la lecture de ce type d'énoncé est « comment le sait-on ? »

[228] Précisons que cette remarque n'est pourtant pas une justification de la recherche systématique de « problèmes concrets ».

[229] On retrouvera cette caractéristique dans l'ingénierie.

[230] Il y a ici la possibilité d'associer la vitesse qui est une grandeur « intensive » avec une grandeur « extensive ». Le fait reste important mais n'est pas l'objet de notre étude.

[231] L'analyse de l'évolution historique du concept a montré que si l'objet « courbe » est le point de départ, il y avait eu deux changements de point de vue. Galilée (puis Torricelli et Roberval) considère d'abord la courbe comme une trajectoire (par une association entre point spatial et instant). Newton va ensuite assimiler le point géométrique à l'instant et implicitement considérer la courbe comme représentation de la loi horaire.

problème de 2 grandeurs liées où la constance de variation de l'une induit l'intuition que l'autre varie à vitesse variable. Une autre des variables didactiques du problème est l'égalité entre hauteur et temps (accroissement d'1 cm par minute) qui amène à dh/dt=1 et donc à dV/dt = dV/dh = πh^2 (=$\pi t^2 = \pi r^2$), le débit pouvant alors être assimilé à une surface. La solution t = $10/\sqrt{\pi}$ revient donc à égaler à 100 une surface au lieu d'un débit, solution qui pourra être contrôlée par un argument physique intuitif mais dont des variantes numériques permettront ultérieurement de délimiter le champ d'opérationnalité.

5.3.1.2.1.2 Stratégies et obstacles

Mais la résolution ci-dessus suppose connue la théorie des dérivées, ou plus précisément la connaissance du débit instantané comme étant la dérivée du volume par rapport au temps. Lorsque cette théorie n'est pas disponible (et même quand elle l'est…) il faudra en quelque sorte « inventer » cette notion de taux de variation instantanée du volume d'eau. Pour cela, il faudra dépasser la formule « débit égale volume divisé par le temps », mais aussi la notion de débit moyen. Une fois perçue la nécessité de prendre en compte la continuité de l'accroissement (le niveau ne monte pas brutalement de 1 cm à chaque seconde), puis de travailler sur des accroissements pendant des intervalles de temps Δt inférieurs à 1 minute et ensuite « de plus en plus petits »[232], peuvent s'établir différentes écritures moyennant la maîtrise suffisante du calcul littéral. Selon la manière de traiter ces petits accroissements (par pas explicites puis par un incrément générique, par une suite, etc…, on peut aboutir à

$V(t) = \frac{\pi \cdot t^3}{3}$ et $V(t+\Delta t) = \frac{\pi \cdot (t+\Delta t)^3}{3}$.

Par analogie avec le débit moyen entre deux instants $\frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$, il est alors possible de rechercher directement le taux d'accroissement $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ qui vaut $\pi \cdot t^2 + \frac{\pi \cdot t}{\Delta t} + \frac{\pi \cdot (\Delta t)^2}{3}$, à condition de simplifier par Δt t[233]. Alors, le raisonnement conduira à négliger les termes en Δt puisqu'ils sont « négligeables devant t » selon l'expression utilisée dans le cadre des

[232] Rappelons qu'il est ici possible de travailler avec des Δh.

[233] Remarquons qu'il est très rare de voir la recherche d'écritures exprimant $V(t+\Delta t)$ en fonction de $V(t)$ et Δt comme $V(t+\Delta t) = V(t) + \Delta t \cdot (..)$. Comme pour l'écriture du théorème de Rolle et du théorème des accroissements finis, cette écriture passe par une conception de la variation en termes d'accroissements (la nouvelle valeur vaut l'ancienne plus quelque chose) et non en termes de taux d'accroissement.

ordres de grandeurs ou simplement parce qu'ils sont de plus en plus petits jusqu'à pouvoir les considérer comme nuls. On retrouve alors le raisonnement de Fermat avec le double statut de l'infinitésimal, la simplification puis annulation étant là aussi permise par le fait que le volume est une fonction polynôme du temps. Cette résolution peut ici susciter des réactions, par le double statut du Δt et par la différence entre ce qui est autorisé en algèbre (compensation des écritures) et ce qui est en train de se faire ici. Remarquons que cette procédure permet de calculer une dérivée (outil) sans avoir défini l'objet ni même l'objet « limite ». Les deux notions pourraient ici recevoir une première définition par la procédure utilisée.

Notons toutefois qu'il existe un moyen de résoudre directement le problème par une approche purement physique en considérant des tranches de plus en plus fines jusqu'à être assimilées à une surface, ou en raisonnant avec les unités :

« débit/montée = (100cm^3/min)/1cm/min) = 100cm^2 [234]»

et donc chercher pour quel rayon r l'aire de la section du cône vaut 100.

Après avoir observé plusieurs fois les étudiants, nous citons ici quelques étapes-leviers et stratégies apparaissant de manière récurrente dans la résolution de ce problème :

- calculer le débit comme volume (total) divisé par temps (total) et trouver t=9,46 (ou rechercher une tranche telle que V_2-V_1=100 et trouver h=9,46) ;
- développer une argumentation pour contrer ce résultat ou seulement inciter à la construction d'un autre tableau de valeurs ;
- calculer un débit moyen par tranche de 1 minute et obtenir qu'entre t=5 et t=6, il vaut 95,294 alors qu'entre 6 et 7 il vaut 132,994 ;
- développer une argumentation pour prouver qu'alors l'encadrement de la valeur cherchée est 5<t<7 et non 6<t<7 ;
- admettre la notion « d'instantané » malgré l'obstacle de non-mesurabilité ;
- chercher pour quelle hauteur h il y a eu une augmentation de 100 entre h et h-1 (h=6,1347) ;
- développer une argumentation pour prouver qu'alors l'encadrement de la valeur cherchée est 5,13<t<6,13 ;

[234] Dans Schneider (1988).

- travailler avec deux variables h et t sans utiliser la relation entre les deux.

La suppression des Δt de l'équation finale peut aussi nécessiter des calculs préliminaires avec plusieurs valeurs de Δt.

Un questionnement peut aussi être soulevé quand on constate que l'équation $\pi \cdot t^2 = \pi \cdot r^2 = 100$ revient à égaler un débit avec une surface, ce qui correspond d'ailleurs aux approches plus directes qui sont parfois observées.

5.3.1.2.1.3 Le changement de registre

Certaines de ces stratégies sont difficiles à « contrer », notamment celle consistant à écrire $débit = \frac{V(t)}{t} = \frac{\pi \cdot t^2}{3}$ qui produit alors $t = 9,77$, et d'autres sont difficiles à exploiter comme celles de caractère plus « physique » qui donnent directement la solution exacte.

Cela est effectivement lié à leur caractère soit « purement » algébrique comme la première soit « purement » physique comme celles citées plus haut. Le but étant de résoudre le problème mais aussi que les procédures utilisées soient validées, cela requiert en fait l'utilisation conjointe d'arguments de nature physique, d'écritures algébriques et de raisonnements numériques. Or l'adoption d'un point de vue numérique, par exemple avec l'élaboration d'un tableau de valeurs puis la recherche d'approximations, n'est pas spontanée.

Face à la variabilité des stratégies observées, une difficulté est de développer l'argumentation qui permettra de convaincre soit que le résultat est le bon, soit qu'il faut au contraire changer de stratégie, et d'orienter vers un point de vue numérique.

5.3.1.2.2 Expérimentations associées

Lors des 3 années, nous avons observé les groupes en train de travailler sur le problème. Nous avons associé cette expérience à un travail lié à l'analyse du milieu et de la dévolution qu'il autorise. Précisons que la première année, les étudiants ne savaient pas que ce problème avait un rapport avec la notion de dérivée, tandis qu'ils en étaient informés lors de la deuxième expérimentation[235] ainsi que la troisième.

[235] Pour laquelle les présentations orales des groupes (et donc les discussions qu'elles soulevaient) ont de plus été enregistrées.

De plus, cette mise en situation nous permet de voir comment les élèves-professeurs se comportent spontanément lorsqu'ils sont face à un problème relevant du cadre de rationalité I. Sous l'angle du formateur, on peut en effet aussi parler de dévolution de cette situation dans la mesure où l'on observe (surtout dans le cas où ils ne connaissent pas le savoir visé) une activité de ces élèves-professeurs ressemblant fort à celle qui pourrait être observée chez leurs futurs élèves. Cette action de formation s'inscrit donc dans la lignée des recommandations de Briand (cf. Chapitre 2) parlant de *« placer l'étudiant en position d'observateur, en retrait d'intention de transmettre spontanément le savoir »*, de manière à *« restaurer les rapports personnels à l'activité mathématique : vérité, argumentation, preuves, types de preuves, démonstration »*, ou encore de I. Bloch parlant de situations à dimension adidactique dans lesquelles les élèves-professeurs pourraient *mettre en œuvre des preuves pragmatiques et non plus seulement formelles, et (de) savoir comment traiter des formulations provisoires* ».

Si aucune institution ne dit avec quelle rationalité il faut travailler dans le secondaire, cette expérience nous prouvera en effet que les élèves-professeurs travaillent spontanément dans une rationalité de type I lorsqu'ils résolvent le problème sans recourir d'emblée à la dérivée[236], la conclusion de cette mise en situation était souvent « ah ben oui, c'est la dérivée ». Cependant il ne leur était alors pas demandé de produire le cours qui exploiterait une telle situation en définissant la dérivée dans une praxéologie de type I. Ce sera l'objet de l'expérimentation suivante.

5.3.1.3 Exploitation d'une ingénierie didactique relevant de la rationalité I

Ayant constaté la réaction première des étudiants face aux différentes transpositions et notamment leurs difficultés à exploiter des situations d'introduction utilisant les notions de vitesse[237], nous avons cherché à mieux comprendre quels obstacles ils devaient surmonter non seulement pour définir la dérivée à partir de problèmes de cinématique,[238] mais aussi pour valider l'utilisation de la dérivée-outil afin de répondre à des questions portant sur la

[236] Nous avons cependant constaté la dernière année l'utilisation de la dérivée, voire de l'intégrale, pour résoudre le problème comme une application.
[237] Voir l'analyse des préparations au Chapitre 6.
[238] Nous avons expliqué dans le Chapitre 4 nos motivations pour exploiter un projet cinématique et non un projet géométrique.

croissance d'une grandeur, et donc à travailler dans une rationalité de type I, mais cette fois en tant que professeur.

Dans ce but nous avons utilisé une ingénierie développée à la suite des travaux de M. Schneider (1988) et actuellement en cours d'expérimentation dans l'enseignement secondaire[239]. Cette ingénierie est proposée en annexe. Dans la première et la deuxième expérimentation, nous n'avons utilisé que les questions et figures, tandis que la totalité de la brochure a été utilisée lors de la troisième expérimentation. Nous en décrirons ici les principales caractéristiques et en proposerons une analyse *a priori* afin de mettre en évidence en quoi elle se distingue des transpositions habituelles, et les points précis où sa réalisation requiert un changement de posture. Nous allons donc en faire deux lectures simultanées : du point de vue des auteurs et du point de vue de notre étude.

5.3.1.3.1 Description et analyse a priori de l'ingénierie

5.3.1.3.1.1 Tâche I : Lecture raisonnée d'un graphique

Avant de se placer dans un contexte d'étude de mouvement, les deux premières figures visent à rappeler la signification d'un graphique représentant une grandeur dépendante lorsque la variable indépendante est le temps.

Ensuite les figures 3 et 4 fixent le contexte : la particule se déplace le long d'un axe et on va représenter sa position en fonction du temps[240]. C'est alors l'opportunité de préciser ce qui est à entendre par le mot « position »: est-ce l'endroit de l'espace où est le mobile (le point physique) ou bien le repérage de ce point sur l'axe (le point géométrique et son abscisse) ou la valeur de la distance parcourue depuis l'origine (nombre)? Il s'agira alors de préciser :

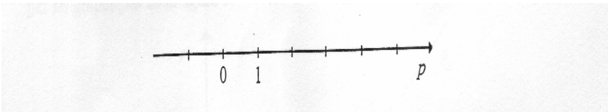
1) les éventuelles erreurs de lecture de telles courbes dont la confusion entre trajectoire et représentation de la position : une « parabole » tournée vers le bas ne correspond pas à une balle décrivant une trajectoire parabolique mais à une balle dont la distance à l'origine augmente puis décroît ;

---

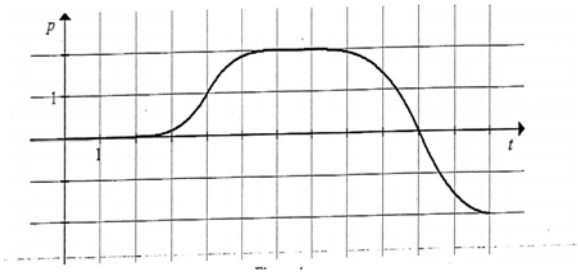
[239] Thèse en cours de J.-Y. Gantois : *« Transpositions didactiques de la théorie des dérivées depuis le secondaire jusqu'aux cours universitaires de « mathématiques générales ».*

[240] Ce contexte de mouvement rectiligne nous amène à implicitement ne considérer que des fonctions « normales ». La continuité de la fonction-position, et parfois celle de la fonction-vitesse, seront utilisées sous une forme « en acte ». Même *si « l'interprétation des phénomènes naturels fait tour à tour appel au continu et au discontinu »* (Baire, 1904), l'étude de discontinuités ne nous paraît nécessaire que dans une phase ultérieure de théorisation, lorsqu'on on peut *« acquérir des connaissances sur le normal en étudiant le pathologique »* (Volkert, 2006).

2) les modalités de lecture de ces graphiques, c'est-à-dire ce qu'on peut chercher sur le graphique pour répondre à certaines questions et les raisonnements que l'on peut conduire (déductions que l'on peut faire) à partir de ce qu'on a vu sur le graphique Il s'agit donc ici de passer d'une lecture–observation à une lecture-interprétation, ou encore une lecture raisonnée.



Ingénierie dérivées – figure 3



Ingénierie dérivées – figure 4

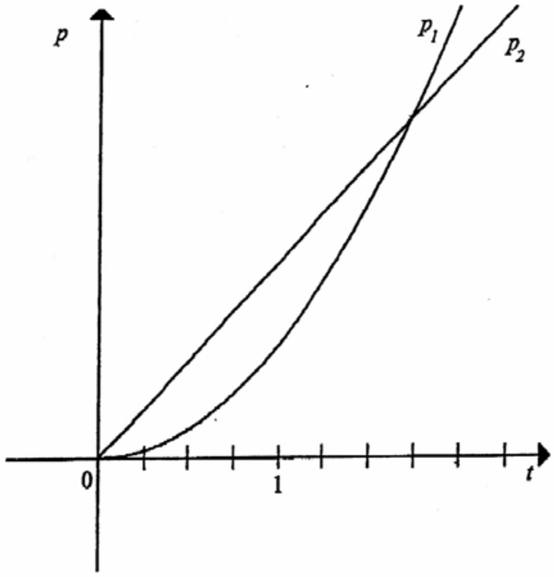
Les auteurs du projet espèrent ici que demander la description du mouvement permettra aux élèves d'identifier soit les périodes auxquelles le mobile se déplace en marche avant ou en marche arrière, soit dans quelle direction le mobile se déplace dans des périodes données. Cette identification passe alors par un discours technologique s'appuyant sur la comparaison de différences de position entre deux instants par rapport à des intervalles de temps judicieusement choisis. Ce même discours permet aussi de préciser qualitativement la notion de vitesse moyenne et celle d'accélération en interprétant « la concavité » en termes d'écarts de position sur des intervalles de temps égaux. La partie où la concavité est tournée vers le haut correspond à des écarts de plus en plus grands (et donc des vitesses moyennes de plus en plus grandes), tandis que la concavité tournée vers le bas correspond à des écarts de position de plus en plus petits et donc à des vitesses moyennes de plus en plus petites. Mettant ainsi en évidence que le mobile peut aller « de plus en plus vite » ou « de moins en moins vite », l'idée que la vitesse pourrait « changer tout le temps » commence à s'installer. Signalons que, par rapport au problème du vase conique, la notion de vitesse utilisée ici correspond à la conception première que l'on peut en avoir, celle qui est accessible par analogie avec le mouvement d'une voiture par exemple. Il n'y a donc pas ici les difficultés

liées à la généralisation du concept lorsqu'on l'applique à des vitesses plus « complexes », comme la vitesse de variation d'aire, ou variation de volume comme dans le cas du vase.
Remarquons que les notions de dérivée première et dérivée seconde sont ici utilisées toutes deux comme outils implicites mais surtout dans l'ordre inverse de ce qui est rencontré dans les programmes et les transpositions habituelles : ici la notion de vitesse instantanée (dérivée première) est installée à partir de l'idée « d'aller de plus en plus vite » formulée à partir de la concavité (dérivée seconde).

En ce qui concerne notre étude, cette première tâche permettra de savoir si les élèves-professeurs peuvent développer cette argumentation en utilisant simplement des Δx et des Δt, ou si ils adoptent une autre posture qui consisterait à lire les graphiques au travers du filtre de leurs propres connaissances de niveau II (en disant par exemple que, quand la courbe est concave, c'est qu'il y a accélération parce que la dérivée seconde est positive) sans pouvoir les transformer de manière à exprimer les raisonnements de niveau I conduisant à la même conclusion. Ce filtre constitué par la rationalité de type II risque de plus, dans ce cas, d'empêcher la lecture raisonnée souhaitée pour en faire une simple observation, et de provoquer alors l'entrée dans un discours de niveau 2bis.
Une autre possibilité, déjà signalée dans notre étude des transpositions, est que cette tâche aux objectifs « modestes » soit transformée en une introduction « alibi » avant la définition des concepts théoriques.

5.3.1.3.1.2 Tâche II : détermination graphique d'un instant par la vitesse

Les figures précédentes demandent un début d'argumentation concernant le mouvement d'une particule et la comparaison des différentes valeurs de sa vitesse moyenne. Les questions posées ensuite ont pour but de se donner les moyens de comparer efficacement les mouvements (et donc) les vitesses de deux particules, et ce en travaillant toujours avec les représentations graphiques de ces mouvements (figure ci-dessous), les expressions analytiques qui « donnent » la position en fonction du temps n'intervenant que dans la tâche III. Il s'agira donc d'apprendre à développer progressivement des stratégies mixtes dans lesquelles le registre graphique appuie une argumentation cinématique, l'insuffisance du registre graphique nécessitant ensuite la recherche de précision au moyen du registre analytique. En particulier, ce qui est perçu sur le graphique devra être précisé (pour le calcul de la valeur exacte) au moyen de l'expression des fonctions, garantissant alors de plus l'unicité du résultat.



Ingénierie dérivées-figure 5

La description des mouvements sur base des représentations graphiques se fait comme dans la question précédente : la particule p_2 a une vitesse constante puisque les différences de positions sont toujours proportionnelles aux différences d'instants, la représentation graphique étant une droite ; la particule p_1 a une vitesse qui augmente tout le temps puisque les différences de position sont de plus en plus grandes.

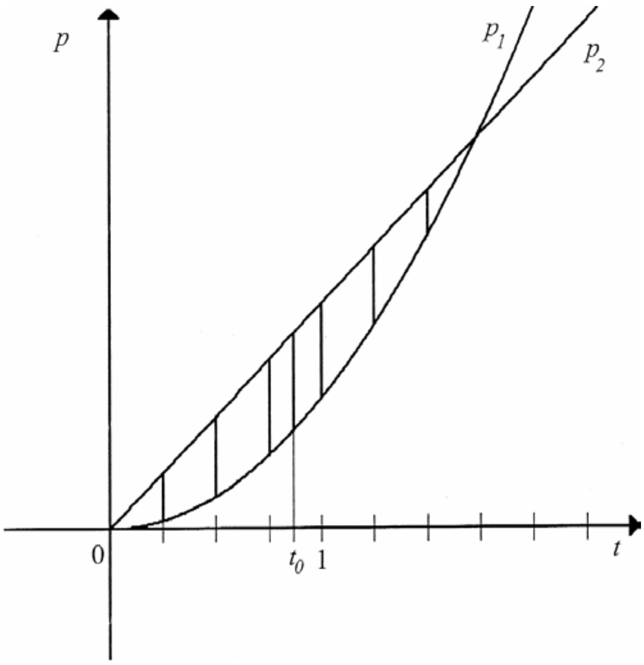
La question est ici de déterminer si il existe un (ou plusieurs) instant(s) au(x)quel(s) la particule p_1 a la même vitesse[241] que la particule p_2. Notons déjà que, contrairement à ce qui a été observé dans les transpositions, la question concerne la recherche d'un instant et non directement le calcul d'une vitesse. Ceci autorise à exploiter la notion de vitesse en tant que grandeur et donc à rester dans une rationalité de type I.

Plusieurs stratégies d'élèves sont proposées aux élèves-professeurs. Nous allons ici développer l'argumentation appuyant ces stratégies, en y soulignant l'articulation entre les registres.

[241] Un obstacle potentiel sera dans tous les cas de distinguer le moment ainsi défini d'un moment correspondant à une intersection entre la courbe et la droite.

5.3.1.3.1.2.1 Stratégie 1 : maximiser les écarts de position

La première stratégie proposée par un élève est de « chercher l'instant auquel l'écart entre les courbes est maximal ».



Ingénierie dérivée - stratégie 1

Lecture du graphique

Sur le graphique, on peut lire que l'écart entre les positions des deux particules augmente mais se met à diminuer à partir d'un certain moment, ce que l'on peut mettre en évidence par une série de traits « verticaux » entre les deux courbes.

Argument cinématique

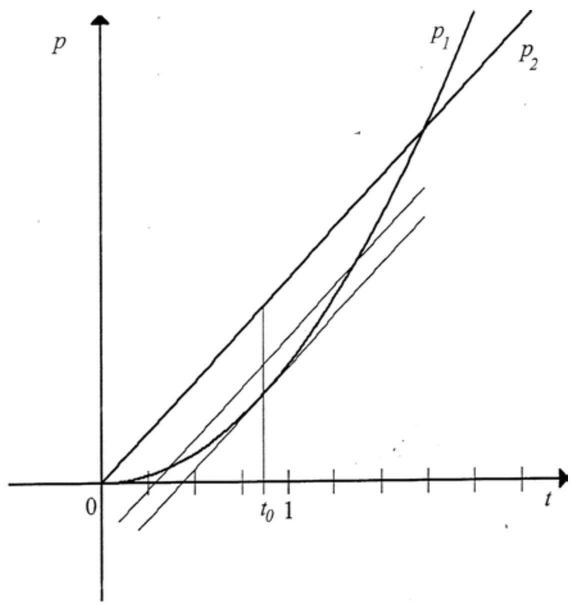
En utilisant le discours tenu pour la tâche précédente, il est possible de dire que la particule p_2 démarre avec une vitesse constante tandis que p_1 démarre au même moment avec une vitesse nulle qui va ensuite augmenter tout le temps. La lecture du graphique permet de dire que l'écart entre les particules augmente puis diminue. Or, tant que la vitesse de p_1 est inférieure à celle de p_2, l'écart ne peut qu'augmenter. Donc il faut que la vitesse de p_1 devienne supérieure à celle de p_2 sinon p_1 ne pourra jamais rattraper p_2 et on sait que cela se produit puisqu'il y a un point d'intersection. Comme p_2 a une vitesse constante et que les mouvements ne sont pas interrompus, il y a un moment où les vitesses instantanées sont égales.

Détermination graphique

On peut déterminer ce moment en disant que c'est l'instant auquel l'écart cesse d'augmenter pour diminuer, c'est donc le moment où l'écart est maximum[242]. Le tracé de « traits » représentant cet écart permet d'obtenir un encadrement de l'instant cherché.

5.3.1.3.1.2.2 Stratégie 2 : associer vitesse et pente de courbe et comparer les pentes

Cette stratégie consiste à chercher un endroit de la courbe où la pente est la même que la pente de la droite représentant le mouvement de p_2. Pour cela, l'élève propose de tracer des parallèles à cette droite et de voir à quel endroit « une parallèle colle à la courbe ».



Ingénierie dérivées – stratégie 2

[242] Rappelons que nous avons constaté que la tâche « recherche de maxima » n'est jamais utilisée dans les manuels comme introduction à la dérivée.

Argument associant graphique et cinématique

La question précédente fournit l'opportunité d'associer la vitesse instantanée à une « pente de courbe [243]». Une particule se déplaçant à une vitesse constante est représentée par une droite, donc un objet dont la pente est constante. En explicitant le mouvement de la particule décrit par une courbe, on avait pu mettre en évidence l'existence d'une vitesse non constante. En détaillant quelques rapports entre différences de position et différence d'instants on peut associer la variabilité de ces rapports à la variabilité de la « courbure » ou, pour garder le même terme, de la « pente » de la courbe en un point. L'idée d'associer pente et vitesse commence alors à s'installer.

La stratégie proposée peut être validée par deux argumentations. Une première consiste à dire « c'est le moment à partir duquel, si la particule continuait ensuite à vitesse constante, son déplacement serait représenté par une (demi-)droite parallèle à p_2 ». Si la courbe a « la même pente que la droite » c'est qu'à ce moment là elle ressemble à la droite. Donc, si on veut prouver qu'il existe un moment où la particule p_1 a la même vitesse que p_2, il faut prouver l'existence d'un point de la courbe où a) la pente de la courbe vaut la pente de la droite représentant le mouvement de p_2 ; b) la courbe pourrait être remplacée par une droite parallèle à p_2 [244]

Technique graphique

On peut alors chercher à placer sur la courbe une droite parallèle à p_2. On va constater que cette droite peut avoir 0, 1 ou 2 points d'intersection avec la courbe. L'endroit où il peut y avoir égalité des pentes correspond à « une zone où la courbe colle à la droite » mais sans plus.

Une deuxième argumentation consistera à préciser que, tant que la droite possède deux points d'intersection avec la courbe, on peut dire qu'entre ces deux positions la particule p_1 a eu la même vitesse moyenne que la particule p_2 puisque les différences de positions sont les mêmes pour des intervalles de temps identiques. Mais « tant que la courbe reste courbe » ou tant qu'il y a deux points distincts, il y a variation de la vitesse instantanée sur la portion de

[243] La notion de « pente de courbe » en un point est un objet qui à ce stade n'a pas de statut mathématique, mais qui se révèle bien pratique. Elle pourrait ultérieurement être définie *via* la fonction dérivée, mais cela ne se fait pas souvent.

[244] Cette approche est déjà très proche de celle de l'approximation sans en posséder la nature.

courbe entre ces deux points, donc il faut chercher l'endroit de la zone où il n'y a qu'un point d'intersection. Si on continue de déplacer la droite parallèle avec deux points d'intersection, on va alors réduire l'intervalle de temps sur lequel la vitesse moyenne de p_1 vaut celle de p_2 ($\sqrt{3}$ dans la tâche III), jusqu'à obtenir un intervalle ayant la même vitesse moyenne ($\sqrt{3}$ dans la tâche III), mais un intervalle « réduit » à un seul instant. Il y aura alors en quelque sorte « copie » de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée[245].

Une autre possibilité est encore de dire que l'instant cherché, c'est-à-dire là où ça vaut la vitesse de p_2 ($\sqrt{3}$ dans la tâche III), est « forcément » entre les deux instants correspondant aux intersections parce que, si la vitesse moyenne de p_1 vaut la vitesse de p_2 ($\sqrt{3}$ dans la tâche III) alors que la vitesse instantanée de p_1 est inférieure à celle de p_2 au début du mouvement et n'est pas constante, c'est que la vitesse instantanée de p_1 a pris des valeurs inférieures à la vitesse de p_2 ($\sqrt{3}$ dans la tâche III) et des valeurs supérieures à la vitesse de p_2 ($\sqrt{3}$ dans la tâche III). Comme la particule ne s'est pas arrêtée (continuité implicite) et que sa vitesse augmente tout le temps, la vitesse de p_1 a du valoir la vitesse de p_2 ($\sqrt{3}$ dans la tâche III) à un moment. Notons qu'ici on met en fait en œuvre ce qui sera légitimé par le théorème des accroissements finis[246].

Alors on raisonne par encadrements successifs de la valeur cherchée, mais la seule exploitation graphique s'avèrera insuffisante.

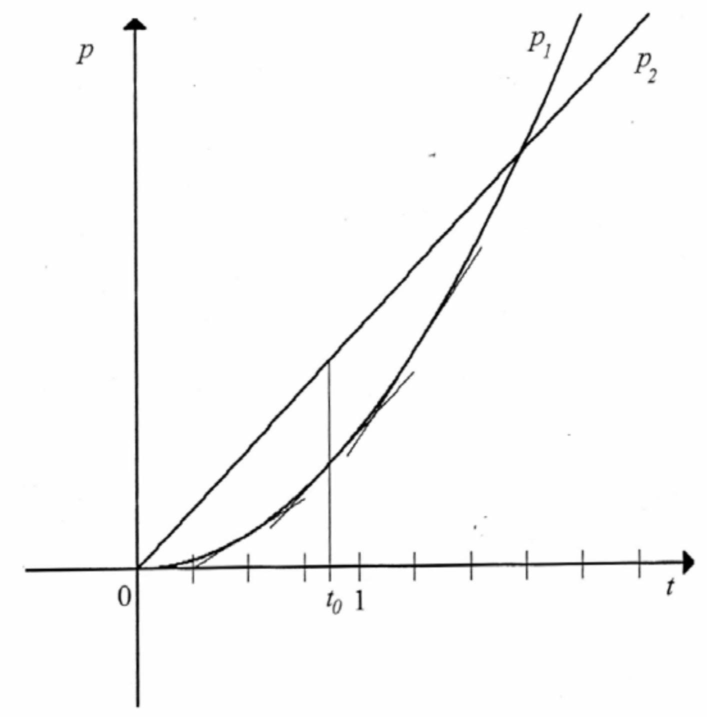
5.3.1.3.1.2.3 Stratégie 3 : tracer des droites collant à la courbe

Basée sur la même association entre la pente de la courbe et la vitesse instantanée, une troisième stratégie consiste à tracer des droites collant à la courbe et à chercher en quelle valeur de t la droite est parallèle à p_2.

---

[245] Le fait de transformer un intervalle en un instant (théoriquement autorisé par la définition d'un intervalle) se retrouve dans des questions liées à la croissance d'une fonction et au fait d'utiliser des intervalles ouverts ou fermés. Rappelons la question formulée par une étudiante : peut-on parler de croissance en un point ?

[246] On a ici un exemple de « théorème en acte » comme défini par Gérard Vergnaud (1980). Selon le raisonnement exprimé, on retrouvera le théorème des valeurs intermédiaires (la vitesse de p_1 a pris toute valeur intermédiaire entre sa vitesse initiale et une valeur supérieure à celle de p_2), ou le théorème des accroissements finis (si on connaît la valeur de la vitesse moyenne sur un intervalle, il existe un instant auquel la vitesse instantanée vaut cette valeur).



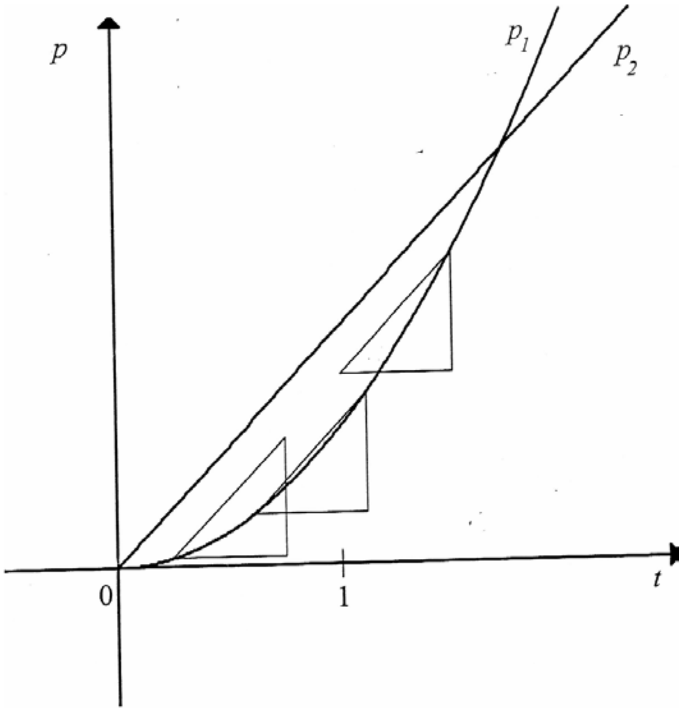
Ingénierie dérivées – stratégie 3

Cette stratégie relève plus de la première argumentation proposée dans le cas précédent, à savoir imaginer qu'à partir d'un moment t_0 la vitesse de p_1 est constante, ce qui produit alors un mouvement qui serait représenté par une droite à laquelle la courbe devrait de même « ressembler » pour les instants proches de t_0. La technique est alors de sélectionner quelques points et y tracer les droites « collant » ainsi à la courbe jusqu'à ce que l'une d'entre elles ait la même pente que p_2.

La stratégie n° 3 est donc encore plus proche d'une démarche d'approximation que la précédente.

5.3.1.3.1.2.4 Stratégie 4 : associer vitesse et pente de courbe et comparer les accroissements

L'élève propose ici de « dessiner » des triangles rectangles dont l'hypoténuse est parallèle à p_2 jusqu'à ce que les deux extrémités de l'hypoténuse soient sur la courbe. Alors l'instant cherché se trouve entre ces deux points et il propose de tracer des triangles de plus en plus petits.



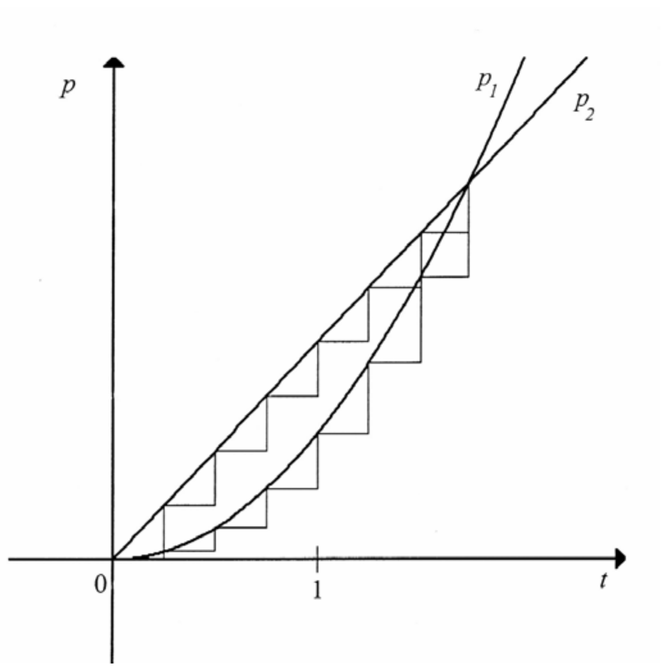
Ingénierie dérivées - stratégie 4

Argument cinématique et graphique

Il s'agit donc de raisonner sur les accroissements de temps (base horizontale du triangle) et les accroissements de position (côté vertical du triangle) et de chercher deux instants entre lesquels il y a le même accroissement de position pour le même accroissement de temps. Cela revient bien à déterminer un intervalle sur lequel la vitesse moyenne des deux particules est la même, ce qui correspond en quelque sorte aux deux points déterminés par une sécante parallèle à p_2.

5.3.1.3.1.2.5 Stratégie 5 : rechercher des déplacements identiques dans un même intervalle de temps

Une autre stratégie proposée par les élèves est de tracer des traits verticaux représentant les écarts de position entre les particules et des traits horizontaux représentant des intervalles de temps égaux, formant ainsi des marches et contremarches. Le moment cherché se trouve alors dans l'intervalle pour lequel les hauteurs sont égales.



Ingénierie dérivées - stratégie 5

Argument cinématique

Cette stratégie proposée par les élèves consiste à rechercher le moment pour lequel les particules auront effectué le même déplacement dans un intervalle de temps identique. Lorsque les hauteurs des contremarches sont égales, c'est que la vitesse moyenne est la même sur cet intervalle et donc qu'il y a un moment dans cet intervalle où la vitesse a été la même, en argumentant comme précédemment.

5.3.1.3.1.2.5 Conclusion sur les stratégies de la tâche II.

Dans cette tâche II, les expressions analytiques ne font pas encore partie du milieu proposé à l'élève. Nous pouvons aussi souligner ici que, contrairement à ce que nous avons identifié dans les transpositions, la question est posée en termes de recherche d'un instant et ne nécessite donc pas de formule de calcul de la vitesse.

Or, selon notre hypothèse, la difficulté à percevoir le milieu effectif de l'élève joue un rôle majeur dans le discours adopté par l'élève-professeur. C'est pourquoi cette deuxième tâche constitue elle aussi un moyen particulièrement propice à faire apparaître le conflit potentiel entre les deux formes de rationalité.

L'objectif de cette tâche est en effet de « seulement » poursuivre la lecture raisonnée initiée dans la tâche précédente en l'exerçant sur des questions plus complexes. Tant qu'on ne dispose pas des expressions, le seul discours disponible est bien *a priori* celui qui ne ferait intervenir que des arguments cinématiques et leur représentation graphique. De même que pour la tâche I, l'enjeu pour notre étude est donc de voir si les élèves-professeurs parviennent à utiliser cette tâche en restant dans une rationalité de type I, c'est-à-dire sans la résoudre avec des résultats de la théorie. De plus, cet appel à la théorie risquerait de nouveau de se traduire par l'impossibilité de réellement « lire » la figure et d'en « imposer » alors une lecture qui ne serait qu'observation, et donc un discours de niveau 0.

Enfin, nous étudierons la manière dont les élèves-professeurs discriminent les stratégies proposées. En effet, même si elles conduisent toutes potentiellement à la notion de dérivée *via* celle de pente ou de taux, certaines stratégies sont effectivement formulées en termes de vitesse moyennes et d'autres le sont plutôt en termes d'accroissements et non de rapport. Il serait bien sûr plus facile de se placer dans le cadre II pour les transformer sous une forme unique les englobant toutes. Nous chercherons également dans les stratégies 2 et 3 à savoir comment ils gèrent l'utilisation de la tangente comme outil implicite : si cette droite est spontanément proposée par des élèves, les étudiants parviennent-ils à l'interpréter dans une rationalité de type I ? Cherchent-ils, au contraire, à l'inscrire d'emblée dans un cadre de type II, ce qui ne se fait le plus souvent qu'au prix d'un discours de niveau 2bis ?

5.3.1.3.1.3 Tâches III et IIIbis : techniques de calcul

La même question est posée ensuite en disposant des expressions analytiques des lois horaires, à savoir $p_2(t)=\sqrt{3}\cdot t$ et $p_1(t)=t^2$ pour la tâche III puis $p_2(t)=\sqrt{3}\cdot t$ et $p_1(t)=t^3$ pour la tâche IIIbis. Dans un premier temps, c'est alors l'opportunité d'effectuer les calculs correspondant aux différentes stratégies proposées précédemment, d'autant que le seul graphique ne permettait qu'un encadrement de la valeur cherchée.

Dans un deuxième temps, une deuxième question va ensuite plus directement demander le calcul de la vitesse à un instant donné. Le résultat obtenu en répondant à cette deuxième question peut alors être validé par sa congruence avec les résultats obtenus en répondant à la première question.

De plus, les stratégies 4 et 5 seront alors amenées à s'exprimer en termes de rapport des accroissements, ce qui n'est pas nécessaire avant.

5.3.1.3.1.3.1 Stratégie 1 : Maximiser l'écart de position

Insuffisance du graphique

Même en mesurant les traits visualisant les écarts de position, on ne peut qu'obtenir un encadrement de la valeur cherchée.

Utilisation de l'analytique

On peut alors chercher pour quelle valeur de t, l'expression $\sqrt{3} \cdot t - t^2$ est maximale. En utilisant les connaissances sur les fonctions du second degré, on sait que la parabole aura sa concavité tournée vers le bas, et l'on peut alors utiliser soit l'abscisse du sommet ($-\frac{b}{2 \cdot a}$), soit le fait qu'il se trouve entre les deux racines si elles existent. On obtient alors l'instant $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il est important ici de noter que cette stratégie n'utilise pas d'infinitésimal et qu'elle permettra donc de valider les résultats obtenus par les stratégies suivantes qui utiliseront un infinitésimal.

5.3.1.3.1.3.2 Stratégie 2 : déplacer une droite parallèle à p_2

Insuffisance du graphique

On aboutit de toute façon à une insuffisance pour déterminer la valeur exacte.

Utilisation de l'analytique

La pente de p_2 est $\sqrt{3}$. On va donc chercher une droite d'équation $y = \sqrt{3} \cdot t + k$ qui n'ait qu'un point d'intersection avec la courbe. Pour cela on résout l'équation $t^2 - \sqrt{3} \cdot t - k = 0$ qui n'aura qu'une solution si son discriminant est nul soit lorsque $k = \frac{3}{4}$. Alors on trouve $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ici aussi, la stratégie n'utilise pas d'infinitésimal et pourra valider les autres.

5.3.1.3.1.3.3 Stratégie 3 : tracer des droites collant à la courbe

Le calcul est le même que pour la stratégie 2.

5.3.1.3.1.3.4 Stratégie 4 : construire un triangle rectangle

Utilisation de l'analytique

La base du triangle vaut Δt et sa hauteur (différence des positions) vaut $\sqrt{3} \cdot \Delta t$ puisque si les deux points sont sur la courbe, la vitesse moyenne entre les deux positions est de $\sqrt{3}$.
Si t désigne l'abscisse de l'extrémité gauche, son ordonnée est t^2.
Alors l'extrémité droite a pour abscisse $t + \Delta t$ et pour ordonnée $(t + \Delta t)^2$, puisque le point est sur la courbe, mais aussi $t^2 + \sqrt{3} \cdot \Delta t$ en la calculant comme ordonnée de l'extrémité gauche augmentée de la hauteur.
Alors $(t + \Delta t)^2 = t^2 + \sqrt{3} \cdot \Delta t$, soit $2 \cdot t + \Delta t = \sqrt{3}$ après simplification par Δt.
On peut ici adopter deux points de vue :
1) considérer que, puisqu'on cherche un triangle le plus petit possible, on prend tout de suite $\Delta t = 0$, ce qui donne la valeur $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2) Penser dans un premier temps que le moment cherché est dans un intervalle du type $[t, t + \Delta t]$ avec la contrainte $t = \frac{\sqrt{3} - \Delta t}{2}$. Alors l'instant cherché est entre $t_1 = \frac{\sqrt{3} - \Delta t}{2}$ et $t_2 = \frac{\sqrt{3} - \Delta t}{2} + \Delta t = \frac{\sqrt{3} + \Delta t}{2}$. Puis l'intervalle est « réduit » à un instant en annulant Δt.
La première option se rapproche de l'idée « pour chercher un instant, on fait semblant qu'ils sont deux » : en effet, on calcule la vitesse moyenne sur un intervalle $[t, t + \Delta t]$ en sachant que Δt va ensuite être nul. La deuxième relève plutôt d'une sorte de « transfert » de la vitesse moyenne sur un intervalle à la vitesse instantanée lorsque cet intervalle est réduit à un point[247].
Dans les deux cas, on retrouve pour cette technique de calcul le double statut de l'infinitésimal puisque on a divisé par Δt avant de le considérer comme nul.
Le problème de l'utilisation de l'infini pouvait déjà avoir été mentionné dans la tâche II lors de la proposition de faire des triangles « de plus en plus petits ».

[247] Notons ici que personne ne doute qu'en prenant des Δt de plus en plus petits, l'on obtienne bien un instant à l'intersection des intervalles ainsi utilisés.

5.3.1.3.1.3.5 Stratégie 5 : marches et contremarches

Insuffisance du graphique

La technique graphique permet seulement d'identifier la zone correspondant à deux contremarches égales mais pas le moment exact. De plus, comme un pas de temps est choisi, cela ne garantit pas qu'il n'en existe pas un autre que l'on « ne verrait pas ».

Utilisation de l'analytique

En écrivant l'égalité des contremarches Δp_1 et Δp_2 pour un intervalle Δt, on obtient

$\Delta p_1 = (t+\Delta t)^2 - t^2$ et $\Delta p_2 = \sqrt{3}\cdot(t+\Delta t) - \sqrt{3}\cdot t$ donc $2\cdot t\cdot\Delta t + \Delta t^2 = \sqrt{3}\cdot\Delta t$

Ici, on peut procéder de deux manières :

1) diviser par Δt et arriver à $2\cdot t + \Delta t = \sqrt{3}$, puis annuler Δt. Dans ce cas, la division par l'infinitésimal et l'annulation du même infinitésimal ne se font pas dans la même expression.

2) écrire $t = \dfrac{\Delta t\cdot(\sqrt{3}-\Delta t)}{2\cdot\Delta t}$, puis simplifier puis annuler. Dans cette option, la division et l'annulation se font dans la même expression.

5.3.1.3.1.3.6 Conclusion sur les techniques de calcul

Dans cette première étape, les stratégies 1, 2 et 3 amènent donc à des techniques de calcul algébrique fournissant un résultat non contestable, à condition toutefois d'avoir admis le discours cinématique assurant que ces stratégies répondaient effectivement à la question posée.

Les stratégies 4 et 5 amènent quant à elles à des techniques ne répondant plus aux critères algébriques : utilisation de l'infinitésimal, annulation sans compensation. De plus, elles mettent en évidence la nécessité de se donner une définition de la vitesse instantanée, utilisée jusque-là sous forme de grandeur.

Appartenant donc toutes à une rationalité de type I, leur cohabitation constitue de plus un milieu particulier à double titre. Comme nous l'avons souligné dans l'analyse de la tâche II, ces stratégies font référence à des conceptions distinctes de la vitesse instantanée. Le fait qu'elles amènent à une même réponse vise donc à construire un concept mathématique répondant effectivement aux conceptions individuelles de l'objet mental impliqué.

Sur un plan plus « technique », les techniques de calcul 1, 2 et 3 possédant le côté rassurant de l'algèbre peuvent permettre de valider les techniques 4 et 5 qui produisent le même résultat par des calculs moins « homologués ». Il faudra donc observer comment les étudiants prennent conscience de cette fonction particulière des techniques algébriques dans le milieu.

1) Les exploitent-ils ou les négligent-ils? En effet, la présentation habituelle de la dérivée procède d'emblée par la volonté d'aller vers une technique de calcul de limite.

2) Explicitent-ils dans leurs discours cette possibilité de valider les unes par les autres ?

Cette tâche III permet ici un discours technologique qui peut « quitter le système » et l'argumentation presque uniquement cinématique pour « aller vers le modèle ». En particulier, l'utilisation du double statut de l'infinitésimal correspond en fait à un passage à la limite par l'action, et pourra donc constituer une définition opératoire de la limite même lorsque le concept n'a pas été vu auparavant. De même, la vitesse instantanée peut recevoir une définition « mathématique » comme étant le résultat de la technique de calcul utilisée pour répondre à la question. Pour cela, il peut encore subsister deux options :

1. calculer la vitesse moyenne sur un intervalle $[t, t+\Delta t]$ en calculant le rapport entre la différence de position et la durée. La différence de position est $(t+\Delta t)^2 - t^2 = 2\cdot t\cdot\Delta t + \Delta t^2$ et le rapport avec la durée (diviser par Δt) sera $2\cdot t+\Delta t$. L'annulation de Δt permet ensuite d'obtenir $v(t) = 2\cdot t$. Cette option correspond à une conception de la vitesse instantanée comme étant la vitesse moyenne entre t et $t+\Delta t$ lorsque Δt est nul.
2. considérer que t est un instant dans l'intervalle $[t-\Delta t, t+\Delta t]$ avec $\Delta t = 0$ et qu'il a la vitesse moyenne de cet intervalle qui est $\frac{(t+\Delta t)^2 - (t-\Delta t)^2}{2\cdot\Delta t} = 2\cdot t$. Cette option correspond à une conception de la vitesse instantanée en un instant comme étant une copie de la vitesse moyenne sur un intervalle lorsque cet intervalle est réduit à l'instant considéré.

Le fait que les deux conceptions amènent au même objet mathématique que les stratégies précédentes pourra conforter la définition de celui-ci et la possibilité d'admettre ces deux conceptions.

Un autre point sur lequel nous serons intéressée par les choix des étudiants est celui qui concerne la tangente. Elle apparaît en effet dans les tâches II et III comme outil implicite de l'organisation mathématique en construction, ce qui est à l'opposé du rôle qui lui est attribué dans les transpositions habituelles, à savoir une technique de l'organisation didactique à laquelle on donne auparavant tant bien que mal une définition mathématique. Les réactions des étudiants, dans leurs pratiques comme dans leurs discours, nous fourniront donc un indice supplémentaire de la possibilité à travailler dans un cadre de type I. En effet, la droite utilisée (appelée droite-guide dans la brochure) est bien le concept mathématique appelé tangente, mais cette ingénierie ne vise pas à étudier la tangente comme objet avant les dernières tâches concernant l'approximation. Si les tâches prennent en compte les conceptions de la vitesse instantanée pour en construire une définition opératoire, la droite ne nécessite a priori pas un tel travail[248]. Nous étudierons donc comment les étudiants peuvent ou non retourner dans le cadre II en déplaçant l'objet de l'ingénierie et en faisant de la tangente l'objet mathématique principal.

Enfin, un élément essentiel du milieu proposé à l'élève réside dans le fait de poser une question sur la recherche d'un instant puis une question sur le calcul de la vitesse à un instant donné. Comme nous l'avons déjà indiqué, cela permet d'utiliser dans un premier temps la vitesse instantanée comme argument dans un discours cinématique supportant les stratégies et techniques de calcul (et donc travailler dans un cadre I), sans devoir en donner trop rapidement une définition telle que celles rencontrées dans les transpositions. De plus, un objectif est que, pour répondre à la deuxième question, les élèves mettent alors en œuvre les techniques développées lors de la réponse à la première. De nouveau cela permet de valider la deuxième réponse par la première, alors que les transpositions consistent le plus souvent à « donner une formule » issue du cadre II sans pouvoir argumenter dans le cadre I que son résultat correspond bien à la vitesse instantanée. Nous chercherons donc à savoir dans quelle mesure les élèves-professeurs sont conscients de cette caractéristique très

[248] Bien sûr cette image de « droite qui colle à la courbe » peut, comme cela a été observé chez des élèves, évoquer la tangente au cercle et donc le mot « tangente ». Mais le professeur peut alors prendre la responsabilité d'utiliser de telles remarques pour en faire une entrée dans le discours 1 ou dans le discours 2bis.

particulière du milieu de l'élève. Il y a ici deux enjeux liés, à savoir la perception du milieu et l'acceptation d'une validation de type pragmatique.

5.3.1.3.1.3.7 Tâche IIIbis : les techniques numériques l'emportent

Nous avons vu que les techniques algébriques correspondant aux stratégies 1, 2 et 3 permettent de valider les autres. Pour le moment, les premières sont à la fois plus faciles et plus « sûres ». La question suivante va alors inverser cette situation et limiter leur portée en augmentant le champ d'opérationnalité des deux autres.

En effet, la recherche du maximum utilisait les propriétés des fonctions du second degré, sur lesquelles on ne pourra plus s'appuyer. La tâche IIIbis consiste donc à prendre une fonction de degré 3 (t^3) pour la particule ayant une vitesse non constante. On conserve alors les caractéristiques des mouvements des deux particules, mais certaines stratégies ne seront plus efficaces. En effet, il ne sera plus possible de maximiser simplement la fonction donnant l'écart entre les positions des deux particules à un instant donné (stratégie 1) ni même de résoudre simplement l'équation de degré 3 donnant l'intersection de la droite $y=\sqrt{3}\cdot t+k$ et de la courbe $y=t^3$ (stratégies 2 et 3).

Donc si les 4 techniques graphiques fonctionnent toujours, tout en présentant la même insuffisance à produire un résultat exact, seules les deux dernières stratégies vont permettre de calculer l'instant cherché, ce qui amène alors à conférer à la nouvelle technique de calcul (simplifier par Δt puis l'annuler) un plus grand domaine de validité (ou portée) que les techniques algébriques utilisées précédemment. Toutefois, sa légitimité est ancrée, d'une part, dans le fait d'avoir pu précédemment l'associer à une argumentation cinématique qui confirme qu'elle fournit des résultats conformes à l'intuition sur les grandeurs et, d'autre part, dans le fait d'avoir pu vérifier qu'elle fournit les mêmes résultas que d'autres calculs au sujet desquels on n'a pas de doute.

Les détails du calcul sont fournis dans la brochure complète en annexe.

Comme nous l'avions indiqué pour la tâche III, il est ici aussi possible au professeur de mettre en évidence les définitions opératoires du passage à la limite et de la vitesse instantanée en montrant qu'elle permet de calculer et/ ou définir la vitesse instantanée à tout instant comme suit : Si un mobile a une loi de position $p(t)$, alors sa vitesse moyenne sur un intervalle $[t, t+\Delta t]$ est $\frac{\Delta p}{\Delta t}$. Et le résultat obtenu en supprimant les termes en Δt après toutes les simplifications algébriques classiques s'appelle vitesse instantanée à l'instant t. Ceci permet alors de définir en même temps « le passage à la limite ».

5.3.1.3.1.4 Tâche IV : définir la tangente par la vitesse instantanée

Les stratégies proposées pour les tâches II et III permettaient d'utiliser une dérivée outil implicite dans un contexte cinématique sans avoir besoin de posséder la notion de dérivée ni même celle de limite (qui peut d'ailleurs être définie encore ultérieurement). Parmi ces stratégies, certaines font plus ouvertement appel à une droite particulière dont nous savons qu'elle est la tangente, mais qui n'a pour le moment été vue qu'au travers d'une association entre la vitesse instantanée et « la pente de la courbe ».

En effet, les stratégies 2 et 3 montraient qu'en recherchant un moment associé à une certaine vitesse instantanée, on recherchait en fait un point où une droite de direction donnée (la vitesse connue) « colle à la courbe ». C'est donc sous la forme d'une droite collant à la courbe et dont la pente est égale à la vitesse instantanée en un instant que la tangente apparaît ici.

La stratégie des triangles utilise également cette droite, mais sans exploiter la notion de pente ni le fait de « coller ». Ce sont les points d'intersection et les accroissements en temps et en espace qui sont exploités.

La tâche IV est donc conçue pour permettre de préciser ce que peut être cette droite, et ce toujours dans le contexte cinématique. Par rapport à la tâche III qui amenait à développer une série de calculs, l'exercice IV est aussi l'occasion de « revenir au visuel » en demandant de tracer la représentation graphique de la loi de position d'un mobile lorsqu'on en connaît certaines positions et certaines vitesses à des instants donnés.

> *Considérons un mobile sur une trajectoire rectiligne. Il démarre à l'instant t=0 de la position p=2. Il accélère jusqu'à l'instant t=3. A cet instant, il occupe la position p=6 et sa vitesse instantanée vaut 2. Il décélère ensuite jusqu'à l'arrêt qui se produit à l'instant t=6 et à la position p=10. Il fait alors demi-tour et atteint la position p=8,25 à l'instant t=7,5. Sa vitesse vaut alors -2,5. Il continue à accélérer jusqu'à l'instant t=9 et la position p=2. Sa vitesse devient alors constante et vaut -6.*
> *Enoncé de la tache IV*

Prenons le début de l'exercice. La courbe devra « monter » du point (0,2) au point (3,6). On sait que la vitesse à l'instant 3 vaut 2, et donc que la « pente de la courbe » sera 2. Mais comment représenter cela ? En reprenant la stratégie utilisée à l'exercice 2, accompagnée éventuellement d'un argument cinématique sur la vitesse augmentant « de manière continue » jusqu'à 2, on pourra tracer la droite passant par le point (3,6) et de pente 2 et dire que la courbe doit s'en rapprocher, puis croiser cette droite au point (3,6) et s'en éloigner tout de suite puisque le mobile ne s'arrête pas et que la vitesse continue à varier tout de suite après.

Etant donnée la propriété de « coller à la courbe » qui a été étudiée dans la tâche II, il est aussi possible de préciser que l'intersection entre la courbe et la droite ne se fait pas n'importe comment. La courbe doit en quelque sorte « se poser » sur la droite et la quitter de la même façon.

Par contre, pour tracer la courbe après cet instant, en fait pour déterminer comment elle s'éloigne de la « droite-guide », on devra prendre en compte le point suivant (6,10) mais surtout le fait que la vitesse ne va plus augmenter mais diminuer. Ayant effectué l'interprétation en termes de concavité de la courbe à l'exercice I, on sait que la concavité devra alors être tournée vers le bas et la seule manière d'y arriver est que la courbe « parte de l'autre côté de la droite ».

Le même exercice fournit aussi l'opportunité d'exploiter certaines propriétés déjà vues dans la tâche II, à savoir que, quand le mobile se déplace à vitesse constante, la courbe sera confondue avec la droite-guide, et que quand le mobile s'arrête, la droite-guide est « horizontale », la vitesse étant nulle.

Cet exercice est donc une opportunité de rechercher une définition opératoire de cette droite, par exemple comme « la droite passant par un point de la courbe et dont la pente vaut la vitesse instantanée ». Pour que cette définition en soit une, il faut pourtant assurer que la droite ainsi définie est bien celle que l'on a utilisée. En particulier, elle doit posséder cette propriété de « coller à la courbe » qui a été justifiée de manière cinématique (c'est comme si le mobile avait ensuite toujours la même vitesse). Une difficulté dans la tâche IV sera en effet de justifier que la courbe ne croise pas n'importe comment la droite-guide mais s'en approche «aussi près qu'on veut ». Cette propriété a été exprimée lors de l'exercice II, où le déplacement d'une droite de la pente désirée permettait de cerner une zone où « la courbe avait même pente que la droite » ou encore « où la courbe ressemble à la droite » ou « où la courbe pourrait être remplacée par la droite », ce qui avait alors été associé à une propriété sur les vitesses.

Pour compléter cet argument d'assimilation de la vitesse instantanée à la pente, une possibilité est d'écrire que, sur tout intervalle de temps $[3-\Delta t, 3]$, la vitesse moyenne est $v_m = \dfrac{p(3)-p(3-\Delta t)}{\Delta t}$. Donc l'écart entre la position du mobile à l'instant $3-\Delta t$ et la position du mobile à l'instant 3 vaut toujours $v_m \cdot \Delta t$. Comme la vitesse est en train d'augmenter pour atteindre 2, on aura toujours $p(3)-p(3-\Delta t) < 2\cdot\Delta t$, ce qui signifie l'écart entre les positions peut effectivement être rendu « aussi petit que l'on veut » pour peu que Δt le soit.

Cette tâche présente donc deux enjeux pour notre étude. Le premier va consister à voir si les élèves-professeurs recherchent une définition de la tangente relevant du cadre I, ou si ils se retournent vers le cadre II ou même le discours que nous avons appelé 2bis qui consiste à définir la tangente comme limite de sécantes, définition qui n'aurait de plus aucun sens dans le contexte de l'ingénierie.

Le deuxième réside dans la capacité à associer dans le cadre I le fait d'avoir pour pente la vitesse instantanée et le fait de « coller à la courbe ». Nous avons vu dans le Chapitre 4 que la propriété d'approximation affine par la tangente est peu présentée sur le plan théorique, et reste souvent dans un discours de niveau 2bis (ça se voit). Il est possible ici d'en rechercher une justification dans le cadre I, et même de tenter l'entrée dans le cadre II. En fonction des connaissances sur la notion de limite, il est en effet possible de chercher à mettre en relation ces deux conceptions de la limite :

-le résultat du calcul consistant à simplifier, puis annuler ;

-le nombre susceptible de représenter la vitesse instantanée en 3 et qui est tel que cette vitesse instantanée soit aussi proche que l'on veut de la vitesse moyenne entre les instants 3 et $3-\Delta t$.

Il y a alors une possibilité de justifier l'expression présentant « la vitesse instantanée comme limite de la vitesse moyenne ».

Rappelons enfin que, lorsqu'ils sont interrogés sur la motivation pour tracer les tangentes à une courbe, les élèves-professeurs répondent souvent que cela permet de mieux tracer la courbe alors que c'est précisément un exercice qu'ils ne donnent pas, ni en introduction pour motiver la dérivée, ni même en application. Leurs réactions face à cette tâche nous éclairera sans doute sur ce paradoxe.

5.3.1.3.1.5 Tâche V : Décontextualiser

La tâche IV faisait apparaître une position particulière du mobile correspondant à la recherche d'un maximum. L'exercice V vise donc à permettre aux élèves de réaliser que la nouvelle technique de calcul permet aussi de déterminer un extremum, y compris dans tout autre contexte qui n'a plus (directement) à voir avec le mouvement. Une première partie va approfondir la question en termes de mouvement, avant de procéder à la décontextualisation.

5.3.1.3.1.5.1 Toujours une particule en mouvement

Lors de l'exercice IV, on aura pu faire décrire l'évolution de la distance entre le mobile et l'origine : tant qu'il accélère, il s'en éloigne et la distance augmente, puis lorsqu'il décélère, il s'en rapproche et la distance diminue. Il existe donc un instant auquel la distance est maximale, et c'est l'instant auquel la vitesse est nulle. Cette propriété est à utiliser dans l'exercice V qui va demander la tâche « inverse », c'est-à-dire chercher le(s) moment(s) où la vitesse est nulle pour une loi donnée $p(t) = 4 \cdot t^3 - 100 \cdot t^2 + 600 \cdot t$

Il faudra tout d'abord établir que, entre les deux instants donnés, le mobile est parti de l'origine et il y est revenu (p(0) = p(10) = 0),et ce en ayant des positions différentes de l'origine (il n'y est pas resté).

Alors, en s'inspirant de l'exercice précédent, on pourra rechercher le moment où le mobile cesse de s'éloigner de l'origine pour s'en rapprocher. Il faudra d'abord le distinguer d'un moment où sa vitesse cesse d'augmenter pour diminuer (où il cesse d'accélérer pour décélérer), par exemple avec le cas du point (3,6) de l'exercice 4, afin de le caractériser comme un instant tel que les accroissements de position sont positifs avant et négatifs après.

D'après les premières descriptions de mouvement qui ont été faites, on sait que les accroissements de positions ont le même signe que la vitesse, donc il faut chercher un instant t tel que pour un incrément de temps Δt aussi petit que possible:

-la vitesse entre $t-\Delta t$ et t est positive pour avoir des accroissements de position positifs ;

-la vitesse entre t et $t+\Delta t$ est négative pour avoir des accroissements de position négatifs.

Comme c'est le même mobile, il faudra donc que la vitesse en t soit nulle.[249]

La vitesse moyenne entre t-Δt et t est $3 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 150 - 3 \cdot t \cdot \Delta t + 25 \cdot \Delta t + \Delta t^2$ et la vitesse moyenne entre t et t+ Δt est $3 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 150 + 3 \cdot t \cdot \Delta t - 25 \cdot \Delta t + \Delta t^2$.

La vitesse à l'instant t vaut donc $3 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 150$ et chercher l'instant où elle est nulle revient à chercher la solution de l'équation du second degré qui se trouve bien dans l'intervalle [0, 10], soit t_0 = 3,92 qui donnera alors une distance maximale à l'origine de 1056,31.

5.3.1.3.1.5.2 Et maintenant : un volume « en mouvement »

La question suivante vise donc à élargir encore le domaine de validité de la technique de calcul en train d'être développée. On va pouvoir résoudre un problème d'optimisation qui n'est plus lié à un mouvement, mais à la variation d'une grandeur en fonction d'une autre., qui n'est pas le temps[250]. Cela permettra donc d'élargir la notion de vitesse moyenne et vitesse instantanée à celle de taux de variation moyen et taux de variation instantané, pour des fonctions « comparables » à des lois de position.

Le problème de la boîte obtenue à partir d'une plaque dont on découpe les coins est assez classique et toujours utilisé comme problème d'application. Notons qu'il peut aussi être proposé dans des niveaux inférieurs avec pour objectif de travailler la notion de grandeur et celle de fonction.

Avant de donner une expression analytique du volume en fonction de la longueur découpée, il peut y avoir une investigation préalable :

-comprendre le problème ;

-éventuellement faire réaliser les découpages et confronter les résultats ;

-repérer que une seule variable est en jeu ;

-établir que, pour x=0, le volume est nul de même que pour x= 10 (ou plus généralement la moitié de la largeur de la plaque) ;

-établir que le volume va d'abord augmenter puis diminuer, soit directement par raisonnement, soit par une confrontation avec quelques valeurs qui sera ensuite confortée

[249] Une difficulté est ici de considérer que c'est le même mouvement même si il y a un « arrêt » à l'instant de vitesse nulle, mais le mobile doit s'arrêter pour faire demi-tour.

[250] Signalons que nous avons pourtant déjà vu des élèves écrire x(t) pour exprimer que la longueur enlevée était différente en fonction du temps.

par l'argumentation : en augmentant x j'augmente la hauteur donc le volume mais je diminue aussi la base. Dans un premier temps les petites valeurs de x vont faire augmenter la hauteur à partir de 0, plus qu'elles ne font diminuer la base qui part de 20 et 30, puis ce sera le contraire.

Une fois établie l'expression fonctionnelle du volume, les auteurs du projet misent sur une identification selon deux voies : formelle par l'exacte similitude des expressions et contextuelle par l'expérience de pensée décrite ci-dessus. D'une part, c'est la même fonction, donc le même graphique, donc le maximum est obtenu pour la même valeur de la variable indépendante mais ici c'est x et non plus t. D'autre part, on peut décrire le mouvement du mobile avec les mêmes mots que lorsqu'on décrit la manière dont le volume dépend de la longueur enlevée (d'abord ça augmente, puis ça diminue) ce qui confère une validité à l'analogie effectuée, qui est plus qu'un simple changement de lettre[251]. Cela devrait permettre de déduire qu'il existe bien un volume maximal et qu'on peut déjà dire lequel.

En fonction du questionnement suscité, on pourra au besoin revenir sur le calcul en utilisant des incréments de longueur Δx.

A la fin de cet exercice, on peut donc

1. parler plus généralement de taux de variation d'une grandeur en fonction d'une autre et de taux de variation « instantané » voire de vitesse de variation instantanée
2. affirmer que la technique consistant à calculer la vitesse de variation instantanée par annulation de Δt dans le calcul de la variation moyenne entre t et $t+\Delta t$ est efficace pour maximiser (ou minimiser) la grandeur dépendante.

L'exercice fournit donc aussi une entrée dans le cadre II du modèle en définissant le taux instantané comme limite du taux moyen.

En ce qui concerne plus directement notre étude, cette tâche IV nous permettra d'étudier comment les élèves-professeurs parviennent à rester dans une rationalité de type I ou si ils sont déjà dans celle de type II. Le risque est ici de considérer cette tâche comme une application de formules ou résultats qui auraient été donnés auparavant à la suite de constats purement graphiques, et donc de produire un discours de niveau 2bis. Nous étudierons en

[251] Nous avons déjà évoqué la différence à faire entre analogie et expérience de pensée.

particulier quelle importance est accordée à l'analogie de forme par rapport à l'analogie de contexte ou expérience de pensée.

Enfin, la réalisation de cette tâche requiert d'étendre les résultats établis pour des lois de position à d'autres fonctions en possédant les caractéristiques. Parmi ces résultats, se trouve le critère de croissance validé sous forme cinématique : « tant que la vitesse est positive », le mobile « avance [252]». Est-il possible d'admettre que, en considérant toute fonction comme une loi de position[253], on peut affirmer que « tant que la dérivée est positive, la fonction est croissante » ?

5.3.1.3.1.6 Tâche VI et VII : Approximation

Enfin le dernier exercice va préciser comment la même technique (calculer un taux d'accroissement instantané) permet de déterminer des fonctions du premier degré susceptibles de « remplacer » une autre fonction. Rappelons ici que l'association entre la dérivée et la tâche d'approximation affine est un des obstacles que nous avons mis en évidence dans notre analyse des transpositions au Chapitre 4. Nous pouvons par ailleurs signaler que c'est un des points sur lesquels il est assez difficile de rester dans la rationalité de type I. D'ailleurs les tâches VI et VII ne font plus référence au contexte cinématique.

Certains des exercices précédents montraient « une courbe qui colle à une droite » ou « une courbe qui a la même pente qu'une droite » en ayant associé la notion de pente à celle de vitesse instantanée. La proximité de la courbe et de la droite en un instant donné était donc plus ou moins associée à un argument cinématique (voir l'analyse de la tâche IV) mais on va maintenant élargir le domaine de validité de la technique à d'autres fonctions, en particulier des fonctions non polynômes.

Il est d'abord demandé de comparer les valeurs données par une fonction et par celle de remplacement « autour » du point où l'on affirme que le remplacement est valable. Il s'agira donc

[252] De nouveau, nous ne traitons pas ici les problèmes liés à l'annulation de la dérivée. Ces questions peuvent aider à « raffiner » ensuite les premiers résultats établis, sur le plan de la formulation comme sur le plan théorique. On peut toutefois attirer l'attention sur une possibilité de confondre la condition suffisante avec la condition nécessaire, notamment dans l'expression « pour que le mobile avance, il faut que sa vitesse soit positive ».

[253] On parle en fait de toute fonction « assimilable » à une loi de mouvement, c'est-à-dire qui en possède la continuité et, implicitement, la dérivabilité.

1) de mettre en évidence que les deux fonctions donnent la même valeur au point de référence (qui appartient donc à la fois à la courbe et à la droite) et que l'approximation ne consiste pas par exemple en une troncature ou un arrondi (en examinant quelques valeurs);
2) d'établir la conjecture selon laquelle la précision de l'approximation est liée à la différence entre la valeur de la variable et le point de référence (en particulier la différence n'est pas toujours la même). Plus on prend une valeur « proche » de celle de référence, plus la différence entre l'image donnée par la fonction et celle « donnée par la droite » est petite.
3) de dépasser cette formulation pour aller vers une formulation définissant la limite : la différence entre les valeurs données par les fonctions est aussi petite que je veux, pourvu que je prenne une valeur de la variable suffisamment proche de la valeur de référence.

Le tracé des courbes et droites utilisées pourra conforter les élèves dans l'intuition que la fonction de remplacement correspond à la droite-guide utilisée précédemment. Mais il reste à prouver que, dans un voisinage d'un point donné x_0, la droite dont la pente est le taux de variation instantanée en x_0 (notion généralisée dans l'exercice V) est toujours (du moins dans les cas étudiés qui s'y prêtent) une fonction de remplacement, c'est-à-dire que pour toute autre valeur de la variable située dans le voisinage choisi, la différence entre la valeur donnée par la fonction de départ et la valeur donnée par celle de remplacement dépend à la fois de la précision voulue -aussi petite que je le veux- et de la différence entre les deux valeurs de la variable, ce qui incitera à comparer les accroissements plutôt que les valeurs isolées. Remarquons que c'est une difficulté que nous avons déjà évoquée lors de la description de l'exercice IV, mais ici la volonté de procéder à une approximation fournit le point de départ.
Soit p la pente de la droite donnée, il faut alors prouver que si autour de x_0 l'accroissement en ordonnée de la fonction f est « bien approximé » par l'accroissement en ordonnée de la fonction $x \mapsto p \cdot x + k$ (c'est-à-dire aussi proche que je le veux de cet accroissement), alors c'est que p est le taux de variation instantané de f en x_0 Autrement dit, il faut prouver que $p = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Soit ε la précision de l'approximation, on voudrait donc que, pour toute valeur x suffisamment proche de x_0 : $f(x)-f(x_0)=p\cdot(x-x_0)\pm\varepsilon(x-x_0)$

ou encore $p\cdot(x-x_0)-\varepsilon(x-x_0)<f(x)-f(x_0)<p\cdot(x-x_0)+\varepsilon(x-x_0)$

soit $p-\varepsilon<\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0)}<p+\varepsilon$ et donc $-\varepsilon<\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0)}-p<\varepsilon$

On peut alors se ramener au fait que cette approximation est cherchée pour x « voisin de x_0 » ce qui peut s'écrire x= x_0 + Δx. Alors $-\varepsilon<\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-p<\varepsilon$

La différence entre un certain quotient fonction de x_0 et de Δx et la pente de la droite peut donc être aussi petite que je le veux, y compris si je calcule ce quotient pour un Δx très petit ce qui correspond à la notion de taux de variation instantané de f en x_0, tel qu'il a été défini dans l'exercice V. Comme la pente p ne dépend pas de x_0 ni de Δx, on a bien le résultat voulu.

Nous avons déjà exprimé que ce point est une des difficultés de l'association dérivée/tangente, et qu'il était difficile de le travailler dans une rationalité de type I. Toutefois, ces exercices nous fourniront l'opportunité d'étudier si les élèves-professeurs essaient de travailler dans le cadre II ou si ils adoptent un discours de niveau 2bis consistant par exemple à se contenter d'un constat graphique, ou d'une comparaison de tableau de valeurs pour conclure. Nous chercherons également si ils dépassent la formulation du type « plus x est proche de,…plus f(x) est proche de… » qui relève également de l'ostension déguisée dans la mesure où cette formulation ne met en évidence qu'un aspect visuel de la notion de limite.

5.3.1.3.1.7 Conclusions sur l'ingénierie

L'objectif de cette ingénierie est donc bien de proposer un cheminement dans lequel la réponse à certaines questions (tâches) passe par la mise en place du calcul de dérivée (technique), de telle manière que ce calcul ne soit accepté que grâce à une argumentation (discours technologique), qui est au début de nature cinématique puis de portée plus générale. La technique prend ainsi une certaine légitimité obtenue au départ dans un cadre de rationalité « de bas niveau » mais conservée au-delà des limites initiales du cadre de travail. Nous avons donc bien un travail qui va du système au modèle, soit une rationalité de type I comme nous l'avons définie.

Elle pose bien sûr le problème de travailler avec des « infinitésimaux » sous la forme d'incréments variables que l'on peut rendre aussi petits que l'on veut et de plus quand on le veut ! De même que Newton avait évité la querelle en travaillant avec des variables temporelles, les premières questions posées ici ne soulèvent pas de problème théorique, à moins de tomber sur des élèves remettant en question la continuité du temps qui s'écoule.

Tout en permettant la gestion de techniques plus heuristiques, relevant en fait de plusieurs conceptions de la vitesse instantanée, c'est la technique ayant la plus grande portée qui émerge de la succession des tâches. De plus, les exemples sont conçus pour permettre des validations pragmatiques conférant sa légitimité à la technique : elle correspond bien à ce qu'on pense être la vitesse instantanée et le calcul est validé parce qu'il donne le même résultat que d'autres techniques.

Les différences majeures par rapport aux transpositions plus classiques sont :

- le développement d'un discours spécifique pour passer de la notion de vitesse moyenne à vitesse instantanée, qui est en général « plaqué » ;
- l'utilisation de la dérivée comme outil implicite mais en cours d'explicitation ;
- l'utilisation de la tangente comme outil implicite qu'on ne cherche *a priori* pas à expliciter mais qui peut recevoir une définition opératoire ;
- le fait de privilégier une définition de la tangente par le biais de son coefficient directeur ;
- des tâches habituellement considérées comme de simples exercices d'application, en particulier pour la maximisation, sont ici utilisées pour travailler le concept avant de le définir ;
- l'utilisation de théorèmes sous une forme implicite (valeurs intermédiaires et accroissements finis) ;
- la validation pragmatique du critère de croissance.

Dans la mesure où nous avons supposé que la dialectique outil-objet entre dérivée et tangente était un obstacle à la construction du discours technologique, il sera donc

intéressant d'identifier comment les élèves-professeurs réagissent à cette approche : acceptent-ils de travailler avec une dérivée-outil ? Avec une tangente-outil ?
De plus, ayant analysé comment la conception de l'ingénierie visait à constituer un milieu spécifique, nous chercherons à étudier comment les élèves-professeurs perçoivent l'existence de ce milieu. Autrement dit, le milieu de l'élève fait-il partie du milieu de l'élève-professeur ?

5.3.1.3.2 Expérimentations associées

5.3.1.3.2.1 Première expérimentation

Afin de confirmer que cette transposition et sa dynamique – qui va des tâches au discours validant les techniques mises en place – étaient complètement « orthogonales » par rapport à celles plus fréquemment adoptées par les étudiants, nous avons dans un premier temps proposé aux étudiants de l'ULg en 2005-2006 l'ingénierie en question (sans les stratégies d'élèves) avec les questions ci-dessous :

> *1) Lisez attentivement (et traitez) les situations présentées dans le document « étude d'un mouvement ».*
> *2) Quel discours ce document vous inspire-t-il ?*
> *3) Pouvez-vous imaginer de l'exploiter pour élaborer une leçon ? Pourquoi ?*

5.3.1.3.2.2 Deuxième expérimentation

Dans un deuxième temps, les étudiants des FUNDP ont reçu en 2005-2006 la même ingénierie avec les stratégies d'élèves et les consignes suivantes :

> *Voici une suite de questions à partir desquelles on peut introduire la théorie des dérivées, ainsi que des réponses d'élèves à la question II.*
> *A partir de ce matériau, rédigez un discours qui justifie et rend intelligible les techniques utilisées pour répondre aux questions : celles qui sont fournies en annexe ou celles que vous pouvez imaginer mises en œuvre par les élèves. En quoi votre discours permet-il de déboucher sur les résultats classiques de la théorie ? En quoi s'écarte-t-il de la présentation traditionnelle ?*

Rappelons que, contrairement aux étudiants de l'ULg, ces étudiants avaient reçu une formation[254] aux concepts de didactique et qu'ils avaient déjà effectué au cours de l'année de formation : a) l'exercice de comparaison d'approches de la dérivée ; b) la mise en situation

[254] Décrite dans la première partie de ce chapitre.

avec le problème du vase conique ; c) les présentations orales et entretiens relatifs aux exercices précédents.

Le travail devait être effectué par écrit dans un délai de 6 à 7 semaines puis présenté oralement en répondant à nos questions. Ces présentations ont été enregistrées.

Suite à notre analyse *a priori* de l'ingénierie proposée, il nous parait important de signaler que sa réalisation requiert effectivement un changement de posture non négligeable.

5.3.1.3.2.3 Troisième expérimentation

5.3.1.3.2.3.1 Objectifs

Cette dernière expérimentation vise à tenir compte des résultats obtenus par les investigations précédentes.

L'analyse des préparations (voir au Chapitre 6) montre que, à quelques exceptions près, le questionnement des transpositions n'est pas spontané.

Les mises en situation et les deux premières expérimentations avec l'ingénierie montrent par ailleurs que les élèves-professeurs peuvent travailler dans une rationalité de type I et acceptent un discours de niveau 1, notamment dans l'expérience du vase conique, mais ne le réinvestissent pas pour développer eux-mêmes un discours technologique. En particulier, les ingrédients du milieu de l'élève ne sont pas identifiés par les élèves-professeurs.

Nous avons aussi observé qu'ils utilisent les concepts de didactique pour justifier leur organisation didactique, mais pas toujours à bon escient. Par exemple, dès qu'il y a intervention du professeur, ils parlent d'« effet de contrat à éviter » ; ils pensent avoir traité une situation adidactique parce qu'elle est concrète; ils parlent d'obstacle méthodologique lorsqu'on passe de t^2 à t^3.

Enfin, on ne peut nier une tendance à mettre en avant des « difficultés de surface » comme « oh, mais la formule du volume (ou le développement du cube), ça va être difficile », ou à utiliser des arguments que nous dirons « pédagogiquement corrects» comme « trop de calculs, ça complique ».

C'est pourquoi, la troisième expérimentation avec la brochure vise à provoquer une utilisation spécifique des connaissances didactiques pour questionner les transpositions, en évitant les effets décrits ci-dessus.

Pour cela, il nous a paru nécessaire de modifier la « situation du professeur » telle que décrite par C. Margolinas (Chapitre 2), en « contraignant » les élèves-professeurs à travailler au niveau S_2 (thème mathématique) par l'introduction dans son milieu de connaissances didactiques et de questions ne lui permettant pas de redescendre aux niveaux « inférieurs » ni de remonter au niveau S_3 (valeurs).

Ce faisant, nous demandons alors vraiment aux élèves-professeurs la constitution d'une praxéologie professionnelle, dont le discours technologique soit basé sur des connaissances mathématiques et didactiques et non sur des valeurs ou des considérations pédagogiques.

5.3.1.3.2.3.2 Préparation

En 2006-2007, les étudiants de l'ULg et des FUNDP ont reçu l'ingénierie avec une brochure en expliquant le déroulement « prévu »; un extrait du manuel Espace –Maths concernant l'introduction de la dérivée et le critère de croissance ; un extrait du manuel A.H.A concernant une démonstration de ce critère (présenté au Chapitre 4)et une série de questions préparatoires au travail demandé.

La brochure est présentée en annexe 2. Elle correspond à une version de l'ingénierie déjà modifiée par rapport à celle proposée dans les expérimentations précédentes. En particulier, on ne demandait alors pas aux étudiants de travailler avec les stratégies d'élèves, et la question de la vitesse négative n'était plus envisagée dès la première tâche.

Les questions préliminaires sont reprises ci-dessous :

> *RÉFÉRENTS ET QUESTIONS PRÉLIMINAIRES*
> *Voici trois documents impliquant la dérivée et le critère de croissance. L'un d'entre eux vous est sans doute familier, les deux autres moins. Il vous est demandé de lire attentivement ces documents et de vous préparer à pouvoir les décrire et en analyser les enjeux didactiques, et ce en utilisant les cadres théoriques de la didactique des mathématiques. Remarquez qu'il n'est pas question ici de préparer une leçon ni de juger ou de comparer ces projets, ce qui ne vous empêche pas de formuler et d'argumenter des propositions de modifications.*
> *Nous vous rappelons ci-dessous une série de notions qui vous ont été présentées au cours et auxquelles vous pouvez vous référer, ainsi que des questions préliminaires et d'autres plus précises. Vous serez évalué(e), sur votre capacité à exploiter les concepts de didactique ainsi que vos connaissances mathématiques pour analyser ces documents, à partir de questions concrètes qui vous seront communiquées lors de l'évaluation.*
> *1) Théorie des Situations Didactiques (TSD)*
> *• Discuter le caractère fondamental des questions posées.*
> *• Discerner et justifier les moments de dévolution possibles.*
> *• Identifier et décrire à chaque fois les ingrédients du milieu et justifier en quoi ils permettent d'éviter les effets de contrat.*

• Décrire les savoirs institutionnalisés et justifier leur forme et leur choix.
2) Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)
• Décrire les projets en termes de praxéologie (tâches, techniques, discours technologique, théorie).
• Décrire la nature du discours technologique et situer ses similitudes et/ou différences avec la théorie.
• Situer la dérivée et la tangente en termes de tâche, techniques,… dans chacun de ces projets.
3) Sur ce thème on vous a parlé :
• de l'obstacle géométrique de la limite ;
• de différents emplois et définitions de la tangente ;
• des éléments du milieu relatif au problème du « vase conique » et du type de validation utilisée ;
• du travail de Fermat sur la dérivée ;
• des pratiques ostensives.
Liste des documents
• Introduction de la dérivée (extrait de Espace-Maths… EM)
• Critère de croissance (extrait de Espace-Maths…)
• Projet ou ingénierie en chantier : « les dérivées »
• Une démonstration particulière (extrait de AHA)
QUESTIONS COMPLÉMENTAIRES
1) Tangente
• Pourquoi trace-t-on (quelle utilisation fait-on de) la tangente dans l'introduction EM?
• Pourquoi trace-t-on (quelle utilisation fait-on de) la tangente dans le critère de croissance EM ?
• Pourquoi trace-t-on (quelle utilisation fait-on de) la tangente dans le projet « dérivées » ?
• Comment définit-on ce concept dans les divers documents ?
2) Graphique
• Quelle utilisation fait-on du graphique dans l'introduction EM ?
• Quelle utilisation fait-on du graphique dans le critère de croissance EM ?
• Quelle utilisation fait-on du graphique dans le projet « dérivées » ?
3) Fonction
• Quelle utilisation fait-on de l'expression de la fonction dans la transposition habituelle ?
• Quelle utilisation fait-on de l'expression de la fonction dans l'ingénierie ?
• Pourquoi utiliser des fonctions du temps ?
• Pourquoi fait-on une activité avec p(t) = t2 puis une autre avec p(t) = t3 dans le projet « dérivées » ?
4) Vitesse et accélération
• Comment définit-on la vitesse dans la transposition habituelle ?
• Comment définit-on la vitesse dans le projet « dérivées »
• Pourquoi pose-t-on deux questions sur la vitesse dans le projet « dérivées » ?
• Quelles sont les difficultés a priori liées au signe de la vitesse et à celui de l'accélération ?
5) Critère de croissance
• Comment est-il expliqué dans le projet « dérivées » ?
• Comment est-il validé dans le projet « dérivées » ?
• Comment est-il expliqué dans la transposition habituelle « dérivées » ?

• Comment est-il validé dans la transposition habituelle « dérivées » ?
• Comment est-il expliqué dans le document « AHA » ?
• Comment est-il validé dans le document « AHA » ?
6) Outil ou Objet
« Pour un concept mathématique, il convient de distinguer son caractère « outil » de son caractère « objet .[…] Par « outil », nous entendons son fonctionnement scientifique dans les divers problèmes qu'il permet de résoudre. […] Par « objet », nous entendons le concept mathématique, considéré comme objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné » (R. Douady)
Dans chacune des transpositions :
• sous quel(s) aspect(s) apparaît la notion de dérivée ?
• sous quel(s) aspect(s) apparaît la notion de tangente ?
• comment cela se traduit-il dans les questions posées et dans les définitions proposées ?

5.3.1.3.2.3.3 Questions finales

Après une réflexion d'environ 7 semaines, les étudiants ont ensuite répondu par écrit aux questions suivantes :

Questions ULg
1) Quelles ont été ou sont encore aujourd'hui les « vraies raisons d'être » (au sens d'Y. Chevallard) des concepts de dérivée et de tangente ? Quel(s) rôle(s) jouent-ils dans les praxéologies : au niveau des tâches, techniques ou technologies/théories ?
2) Pour introduire le nombre dérivé, la plupart des professeurs dessinent des sécantes qui « tournent » autour d'un point jusqu'à occuper la position de la tangente t. Que pensez-vous de la question : « Comment qualifierais-tu, en termes de limite, la position de la droite t par rapport aux positions successives des droites s ? » (EM, page 22) et sur quelle institutionnalisation du concept de tangente cette activité pourrait-elle déboucher ?
3) Un élève dit : « C'est croissant parce que les tangentes montent tandis qu'un autre dit « non, les tangentes montent parce que c'est croissant ». Que leur répondez-vous ?
4) Comment expliquer, ne fût-ce que de manière intuitive, le rôle joué par le théorème des accroissements finis pour établir le lien entre la croissance/décroissance du graphique d'une fonction et le signe de sa dérivée première. Pourquoi les auteurs du projet AHA parviennent-ils à démontrer ce lien, sans parler ni de ce théorème, ni de la tangente ?
5) Là où le graphique de la loi de position d'un mobile sur une trajectoire rectiligne est décroissant tout en ayant une concavité tournée vers le haut, on parle d'accélération positive. Or, sur de telles portions du graphique, on observe des espaces parcourus de plus en plus petits sur des intervalles de temps égaux, ce qui inciterait les élèves à parler de décélération ? Comment leur justifier cette différence de langage ?

Questions FUNDP
1) Pour introduire le nombre dérivé, la plupart des professeurs dessinent des sécantes qui « tournent » autour d'un point jusqu'à occuper la position de la tangente t. Que pensez-vous de la question : « Comment qualifierais-tu, en termes de limite, la position de la droite t par rapport aux positions successives des droites s ? » (EM, page 22) et sur

quelle institutionnalisation du concept de tangente cette activité pourrait-elle déboucher ? Comment interprétez-vous le succès de cette approche ?
2) Caractérisez les trois façons d'établir, dans les documents fournis, le lien entre la croissance/décroissance du graphique d'une fonction et le signe de sa dérivée première
3) Dans le projet « dérivées », décrivez le milieu permettant la dévolution aux élèves de la construction de la notion de dérivée.

A partir de leurs réponses nous leur proposions ensuite de prendre part à un entretien enregistré.

5.3.1.4 Faits complémentaires

Si notre étude va se concentrer sur la manière dont les élèves-professeurs se comportent face à la double dynamique théorie*->applications ou tâche->discours dans le cas de la dérivée et relativement à des observations organisées, certaines observations complémentaires viendront conforter notre analyse.

5.3.1.4.1 Analyse a priori des stages

Pour étudier la prise de conscience par les étudiants du fait qu'une présentation de leçon est dirigée par une organisation mathématique et que certains éléments relèvent de leur choix, il leur a été demandé d'accompagner leurs préparations de stages par la réponse aux questions suivantes :

A quel type de question le savoir visé apporte-t-il une réponse ?
De quelle organisation mathématique plus globale le savoir visé fait-il partie dans la transposition didactique habituelle ? Caractériser la transposition didactique que vous choisissez : à quelle organisation mathématique renvoie-t-elle en termes d'articulation des savoirs, de justification des résultats, des classes de problèmes étudiés et des techniques correspondantes, des ostensifs associés et de leur statut. Quelle forme prend dans cette transposition l'institutionnalisation du savoir enseigné ?
Quelles questions pensez-vous pouvoir dévoluer aux élèves ? Pourquoi ces questions ? Quelles intuitions des élèves permettent-elles de mettre à l'épreuve ? Comment, d'après vous, les élèves peuvent-ils se débrouiller avec ces questions sans votre aide ?
Sur quoi espérez-vous vous appuyer pour dévoluer ces questions en évitant des effets du contrat didactique qui dénatureraient l'apprentissage des élèves ? En d'autres termes : quelles sont les facettes matérielles, cognitives et/ou sociales du milieu ?
Qu'est-ce que les élèves apprennent sur les mathématiques en général à travers votre séquence ?

Cette liste de questions a été élaborée à partir d'une liste existante utilisée par le Professeur M. Schneider, qui demandait de l'utiliser pour effectuer une analyse *a priori* et une analyse *a posteriori*, à discuter avec le maître de stage.

5.3.1.4.2 *Explications de règles*

Il a été demandé en 2005-2006 aux étudiants ULg comment ils expliqueraient la technique de résolution d'une équation du premier degré.

5.3.2 Investigation sur le discours à propos de la pratique

Les observations décrites dans la section précédente concernaient des observations de pratiques avec les discours sur ces pratiques. Nous avons couplé ces observations de pratiques/discours à l'observation de discours plus « généraux » sur les pratiques en procédant ici à différents types d'investigation, soit sous forme d'entretiens soit sous forme écrite.

Tout d'abord nous avons interviewé des professeurs enseignant à l'université et quelques professeurs enseignant dans le secondaire ainsi que des étudiants. Il s'agit d'entretiens semi-directifs, au cours desquels il nous a paru opportun d'interroger les différentes personnes sur ce qu'ils entendent par « rigueur » ou « manque de rigueur ». En effet, l'analyse menée au Chapitre 3 nous amène à penser que l'élaboration d'un discours technologique dans un cadre de rationalité de type I pourrait rentrer en conflit avec ce que les personnes ont comme conception sur la rigueur mathématique et les notions proches telles que formalisme, rationalité, etc., ainsi que sur leur place dans l'enseignement des mathématiques. Nous avons choisi une formule d'entretiens semi-directifs qui nous semblait répondre à deux objectifs de notre étude : mettre en évidence que la notion de « rigueur » est associée à des conceptions et des faits très variables et observer comment s'opérationnalisent les propos tenus par les personnes interviewées, en les interrogeant aussi sur des sujets de notre choix de manière à caractériser le discours de niveau 2 et comment professeurs et étudiants envisagent son adaptation dans le secondaire.

Cette même technique d'entretien a été utilisée pour les entretiens suivant les travaux guidés et pour les pratiques réflexives.

Des enquêtes écrites nous ont également fourni des données. Une première enquête consistait à demander aux élèves-professeurs de commenter sous l'angle de la rigueur certaines préparations de leçons sur le thème des dérivées. Lors d'une deuxième enquête, nous avons seulement demandé à des étudiants de dernière année universitaire ce que représentait « la rigueur en mathématiques ». Enfin, une dernière enquête écrite concerne les pratiques réflexives sur la préparation d'une leçon.

5.3.2.1 Entretiens

5.3.2.1.1 L'entretien semi-directif

Si l'échange de paroles est une activité à la fois variée et bien réglée , celle-ci présente pourtant une certaine complexité étudiée par les linguistes, les psychologues, les sociologues, les psychologues sociaux, les psychothérapeutes, d'autant plus que le « mieux communiquer » s'impose à nous. C'est le fond sur lequel se détachent les dispositifs mis en place sous le nom d'entretiens : « *tous ont en commun de reposer sur une relation à deux, sur la rencontre de l'autre avec la part d'inconnu qu'elle recèle toujours, qu'on l'affronte ou qu'on s'en défende ; tous mobilisent peu ou prou le transfert et le contre-transfert, qu'on les reconnaisse ou qu'on les ignore, qu'on les analyse ou qu'on les utilise plus ou moins sciemment* ». (Delhez, 1994). Parmi ces dispositifs, R. Delhez propose une classification dépendant de trois critères :

1) la source principale de l'information, qui peut être détenue par l'interviewer (entretiens d'accueil, de délégation, ou de licenciement) ; partagée par l'interviewer et l'interviewé (entretiens de recrutement et d'évaluation) ; ou détenue par l'interviewé ;

2) le caractère objectif ou subjectif de l'information ;

3) l'origine de la demande d'entretien (consultation, supervision, ou recherche).

Nous sommes dans le cas où 1) c'est l'interviewé qui détient l'information, et « *le but de l'interviewer est de faire émerger cette information, que l'interviewé possède pour partie à son insu* » ; 2) avec une information subjective et presque « *constitutive de ce qu'est l'interviewé : il ne s'agit pas seulement de son histoire et de sa problématique personnelles, mais de tout ce qui va de pair avec la place qu'il occupe dans l'ensemble social : représentations, valeurs, intérêts, attitudes, normes de perception, de pensée, de jugement, de comportement* »(Delhez, 1994) ; et 3) une demande émanant de l'interviewer. C'est ce que R. Delhez appelle un ENDR, pour entretien non directif de recherche ou d'enquête. L'entretien peut se dérouler sur un thème X énoncé en une fois au départ « pouvez-vous me dire ce que X représente pour vous ? », et il est alors à proprement parler non directif. Il peut aussi être focalisé ou semi-directif, étant alors en fait orienté par une liste de thèmes et de sous-thèmes (le guide d'entretien), établi souvent à l'avance par l'interviewer. Dans ce cas, « *l'information recueillie l'est au bénéfice de l'interviewer ou d'un tiers ; même si l'interviewé s'est entendu dire des choses qu'il ignorait savoir […] la destination, le traitement, l'exploitation de cette information lui échappent* ». (Delhez, 1994).

Une des difficultés est de ne faire de l'entretien ni une interview journalistique (avec transformation, ou refus du caractère imprévisible), ni un interrogatoire (abus de questions), ni même une conversation (lorsque l'interviewer formule une opinion, un jugement).

En conclusion, nous avons tenté d'appliquer les conseils suivants :

> *Le rôle de l'interviewer est de veiller à ce que l'interviewé ne s'écarte pas trop du sujet ou ne se répète exagérément, en l'amenant à faire des rapprochements ou des recoupements qu'il n'opère pas spontanément, à combler des lacunes manifestes, à clarifier ce qu'il n'énonce qu'obscurément, à s'étendre sur ce qu'il ne fait qu'effleurer. C'est ainsi qu'il pourra recueillir aussi complètement que possible tout ce que le thème évoque pour son interlocuteur.*
> *(Delhez, 1994).*

Il importe donc d'écarter pendant l'entretien toute préoccupation étrangère, même ce qui concerne l'avant et l'après de cet entretien ; de balayer toute interprétation tributaire de notre cadre de référence ; de ne rien attendre de l'interviewé, hormis son savoir ; de rester attentif à la neutralité de ses propres interventions. S'il doit se mettre dans un état d'esprit neutre, l'interviewer ne doit pas être passif et manifester une écoute active :

> *apprendre à mener un entretien, c'est apprendre à écouter, et apprendre à poser le moins de questions possibles […] l'interviewer acquiesce, sans approuver, ni désapprouver ; quand quelqu'un parle, il faut* **le** *croire […] cela n'oblige en aucune façon à croire ce qu'il dit.*
> *(Delhez, 1994).*

5.3.2.1.2 Entretiens sur « la rigueur en mathématiques »

Nous avons sollicité les premiers entretiens en envoyant le courrier suivant à plusieurs personnes appartenant aux deux universités.

> *Dans le cadre d'une thèse de doctorat en didactique des mathématique sous la direction de M. Schneider, je cherche à étudier les conceptions que les étudiants ont de la rigueur lorsqu'ils se préparent à devenir enseignants.*
> *Une des hypothèses est qu'ils sont alors partagés entre deux univers où la rigueur s'exprime différemment :*
> *-l'université, où ils sont étudiants,*
> *-l'enseignement secondaire.*
> *D'un point de vue méthodologique, il me parait intéressant de questionner à la fois des professeurs d'université et du secondaire sur ce qui a trait à la rigueur dans leur propre institution.*
> *Pour cela, j'aimerais vous rencontrer afin de vous interviewer sur le sujet. Cet entretien pourrait durer entre ½ heure et ¾ heure.*
> *J'ai pensé à quelques questions que vous pourriez avoir en tête avant cet entretien. Elles ne doivent pas avoir de caractère contraignant et ne visent pas à l'exhaustivité.*
> *-Comment situez-vous la rigueur?*
> *-Comment situez-vous le manque de rigueur?*
> *-Auriez-vous des exemples?*
> *-Comment situez-vous la différence entre la rigueur dans l'enseignement secondaire et à l'université ?*
> *Si cette opportunité de donner votre opinion à ce sujet vous intéresse, vous pouvez me répondre par mail, afin de convenir d'un rendez-vous.*

Nous pouvons noter que les réponses ont été assez rapidement positives en ce qui concerne les membres des universités.

En ce qui concerne les entretiens avec des professeurs du secondaire, nous avons préféré faire une demande « directe » auprès des professeurs avec qui nous étions en contact, suite à une expérience précédente où une demande de collaboration était restée « lettre morte » malgré l'intérêt affiché. Pour cela, nous devions souvent tirer parti de discussions déjà engagées pour demander « cela vous intéresserait-il de contribuer à une étude en cours en me donnant votre opinion sur le sujet de la rigueur dans l'enseignement des mathématiques ?». Cela nécessite plus d'adaptation dans les horaires respectifs et finalement seuls quelques rendez-vous ont pu être pris.

Nous avons également fait une demande oralement auprès des étudiants. A Liège, nous avons seulement précisé que nous demandions leur collaboration dans le cadre d'une recherche, sous la forme d'un entretien (en précisant que cela n'entrait pas en compte dans l'évaluation de l'AESS). La demande a été formulée plusieurs fois, et trois étudiants ont répondu positivement. A Namur, nous avions précisé que cela concernait la rigueur, mais nous n'avons pas obtenu de réponse positive.

La plupart des entretiens ont finalement duré une heure, voire beaucoup plus. Ils ont été enregistrés avec l'autorisation de l'interviewé, pendant que nous prenions également des notes par écrit. La liste de questions présentée ci-dessus était utilisée comme point de départ, soit parce qu'elle avait été fournie à l'avance, soit parce que nous la proposions en début d'entretien. Nous avons en général laissé libre cours à la discussion en essayant de la relancer et de rebondir sur les propos tenus en demandant par exemple des précisions, ou des exemples, ou une confirmation que nous avions bien compris.

Nous avions par ailleurs choisi quelques sujets sur lesquels nous souhaitions avoir les réactions de toutes les catégories de personnes :
1) comment expliqueriez-vous la règle de résolution d'une équation du premier degré ($ax=b \Leftrightarrow x=b/a$) ?
ceci afin de voir si ils donneraient la préférence à l'aspect « règle » ou à la recherche d'un discours plus spécifique ;
2) que pensez-vous de l'utilisation des figures suivantes pour expliquer les identités remarquables ou la distributivité : i)un carré de côté a « dans » un carré de côté (a+b) et ii) deux rectangles contigus de dimensions a, b et a, c ?
ceci afin de voir si ils les considèreraient comme des « illustrations » ou si les associeraient à un discours rationnel, qui pourrait par exemple présenter les nombres comme devant vérifier les propriétés des grandeurs dont ils sont les mesures.
3) lorsque notre projet a été mieux avancé, nous avons proposé aux interviewés les différents manuels disponibles en leur demandant de nous donner leur avis sur la façon dont était présenté le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction réelle.

5.3.2.1.3 Autres entretiens

Les travaux guidés décrits précédemment ont également fait l'objet d'entretiens, ceux-ci étant alors souvent plus courts et parfois plus directifs dans la mesure où il s'agissait de demander un complément par rapport au travail écrit qui avait été rendu.
Rappelons pour mémoire quels travaux ont été suivis d'entretiens :
- Sélection et présentation d'approches contrastées de la dérivée (FUNDP, 2005-2006) ;

- Demande de discours technologique à propos de l'ingénierie (FUNDP, 2005-2006) ;
- Analyse de projets (FUNDP & ULg, 2006-2007).

Enfin, le travail de pratiques réflexives a aussi été fait sous forme d'entretiens pour certains des étudiants.

5.3.2.2 Enquêtes écrites

5.3.2.2.1 Questionnaire sur l'évaluation de manuels et de préparations

Les étudiants des FUNDP (2004-2005) ont été sollicités pour lire plusieurs textes relatifs à la présentation des notions de nombre dérivé, fonction dérivée, tangente et croissance. Les textes sont présentés en annexe 3 Le chapitre d'A.H.A consacré à la tangente y avait été volontairement inclus.

La première année (2004-2005), il leur a été demandé de répondre par écrit aux questions suivantes, et ce peu de temps après la mise en situation du vase conique.

> *Quelle est l'approche qui vous parait la plus rigoureuse et pourquoi ?*
> *Quelle est l'approche qui vous parait la moins rigoureuse et pourquoi ?*
> *Quelles sont les différentes facettes de la dérivée travaillées dans ces documents ? Avec quels moyens ?*
> *Qu'est-ce qui est vraiment défini ou qui demeure au niveau de l'intuition ?*
> *Quelle est l'organisation mathématique qui structure ces productions ?*
> *Vous y sentez-vous à l'aise et pourquoi ?*
> *Que préférez-vous comme approche didactique ? Pourquoi ?*

La deuxième année (2005-2006), cette lecture servait de support aux entretiens suivant l'exercice consistant à sélectionner deux approches de la dérivée.

5.3.2.2.2 Pratiques réflexives

Dans le cadre des pratiques réflexives, dont l'objectif est d'amener les élèves-professeurs à analyser leurs propres pratiques, nous avons demandé aux étudiants de reconstituer le déroulement de leur préparation du ou des sujets liés à la dérivée et la croissance d'une fonction. L'objectif de recherche était pour nous d'avoir accès à « la partie invisible » de la préparation de manière à recueillir des informations susceptibles de compléter celles obtenues par l'analyse de l'écrit (ou de la présentation orale de la leçon le cas échéant). En ce

qui concerne l'objectif de formation, notre intention était également de reconnaître la problématicité de l'activité : « préparer une leçon, cela ne va pas de soi » et qu'il était donc légitime de rencontrer des difficultés et d'en parler.
Les étudiants ont pu faire ce travail soit par écrit, soit dans le cadre d'entretiens à deux ou trois.

5.3.2.2.3 *Préoccupations du jeune professeur*

Dans la mesure où nous supposons que les élèves-professeurs sont vite « happés » par le niveau S_{+3} des valeurs et croyances assez générales sur l'enseignement, nous avons exploité les réponses de professeurs débutants lors d'une enquête en formation continuée sur les conceptions du « métier de jeune professeur ».

5.3.2.3 Autres investigations

Certains travaux guidés cités dans le cadre de l'observation de pratiques peuvent également être mentionnés ici, dans la mesure où nous avons enregistré les propos accompagnant

- le travail sur le vase conique (FUNDP, 2004-2005) ;
- la présentation de deux approches de la dérivée (FUNDP, 2005-2006).

5.4 Conclusions sur la méthodologie

L'ensemble des actions, entretiens et enquêtes qui ont été décrits dans ce Chapitre 5 souhaite donc répondre à notre objectif de coupler une observation de pratiques effectives avec la connaissance du discours sur ces pratiques, et de rechercher la place des savoirs mathématiques dans ce discours.
On peut bien sûr en percevoir les limites dans la mesure où nous utiliserons des informations issues parfois de contextes différents. Mais c'est précisément le fait de toujours y retrouver les mêmes difficultés proprement mathématiques qui va nous intéresser.
C'est aussi pourquoi nous ne chercherons à présenter dans ce travail que les résultats mettant en évidence la persistance de ces difficultés. En ce sens, notre étude se veut d'abord

exploratoire et il reste possible d'entreprendre des études plus systématiques sur cette base. Nous avons toutefois mentionné la totalité des observations disponibles dans la mesure où leur examen pourra nous donner quelques idées pour les perspectives à envisager.

Chapitre 6

Pratiques et discours des élèves-professeurs

Notre hypothèse repose sur la distinction, dans le discours mathématique, entre deux niveaux de rationalité dont la difficile articulation, combinée aux difficultés suscitées par la volonté d'être « un bon enseignant », peut conduire à 3 types de discours didactiques tels que nous les avons identifiés dans l'analyse des transpositions.

Dans le Chapitre 4, nous avons d'abord analysé les obstacles propres au thème mathématique et à ses transpositions. Nous y avons mis en évidence l'existence dans l'histoire, d'une part, d'une rationalité de type I allant des grandeurs et objets géométriques aux concepts mathématiques qui en permettent une modélisation moyennant le travail avec une continuité de nature cinématique ou géométrique et, d'autre part, d'une rationalité de type II qui expose l'analyse réelle de manière déductive à partir de la donnée d'une continuité numérique *via* l'axiomatisation.

A ces deux types de rationalité sont alors associés deux niveaux de discours selon la capacité à assumer l'une ou l'autre rationalité. Cependant l'analyse des transpositions à des fins d'enseignement nous a amenée à discerner 3 types de discours: un discours explicitement de niveau 1, un discours clairement de niveau 2, mais aussi un discours intermédiaire que nous avons appelé 2bis qui consiste en une copie du discours de niveau 2 dont on ne reprend que des énoncés de théorèmes accompagnés par des arguments ne relevant ni du niveau 1 ni du niveau 2 et que nous avons plutôt associés à un niveau 0 de par la faiblesse de leur caractère explicatif.

Le discours de niveau 2 est, par exemple, celui que l'on trouve dans des syllabus universitaires, et correspond à la demande de Bolzano de refuser les pseudo-preuves géométriques et de ne faire appel aux notions de temps et d'espace que pour « éclairer », et non pour prouver.

Le discours de niveau 1 est, par exemple, proposé par l'ingénierie décrite dans le chapitre 5, ainsi que dans le manuel A.H.A qui développe de plus un discours médiateur entre le niveau 1 et le niveau 2, avec une démonstration numérique utilisant la construction axiomatique des réels en tant que réponse à une question cinématique.

Quant au discours de niveau 2bis, c'est celui rencontré dans de nombreux manuels, consistant à tenir un discours théorique « censuré », que nous avons aussi appelé « praxéologie à trous ». Certains théorèmes majeurs de la théorie sont exhibés de manière à légitimer l'utilisation de techniques, mais ne peuvent à eux seuls jouer le rôle explicatif attendu du discours technologique. Cet appel au caractère emblématique[255] de la rigueur ne lui permet donc pas de jouer sa fonction sur le plan mathématique, les enjeux liés au savoir restant « masqués », mais seulement sur le plan didactique en insérant tant bien que mal, et en apparence seulement, le projet d'enseignement dans la rationalité de type II. En effet, cette insertion ne se fait qu'au prix de la cohabitation avec un discours utilisant des graphiques et des illustrations sans pouvoir en faire une lecture raisonnée[256] et en les accompagnant alors de formulations comme « on voit que… ». Ce discours, que l'on pourrait dire bipolaire, a été qualifié de 2bis.

Souhaitant étudier plus spécifiquement le rapport des élèves-professeurs à la question de la rationalité, ainsi que le rôle que peut y jouer la formation initiale, nous avons cherché à exploiter cette analyse préliminaire pour donner des éléments de réponse à la question de G. Cirade (2006) sur la capacité des futurs professeurs à prendre en charge des projets d'enseignement fondés sur « des mathématiques en construction[257]». Notre analyse de l'ingénierie au chapitre 5 nous montre en effet que la recherche d'un enseignement de la dérivée qui ne soit pas une ostension déguisée et lacunaire de la théorie relève bien d'un

[255] Ce caractère dit emblématique de certains ostensifs comme « la cloche de Gauss » a par exemple été mis en évidence dans la thèse de P. Calmant ().
[256] Comme décrite dans le Chapitre 5.
[257] Voir au Chapitre 2.

véritable changement de rationalité qui n'a rien d'aisé, une des difficultés étant la perception par l'élève-professeur du milieu effectif de l'élève et l'identification des éléments qui permettent de travailler dans une rationalité de type I[258]. Nous avons donc été amenée à mettre en place une méthodologie (décrite dans le Chapitre 5) permettant d'analyser les pratiques et discours des élèves-professeurs face à cette problématique en 3 temps :

1) leurs postures *a priori* ;

2) leurs postures lorsqu'ils sont confrontés en formation initiale à un projet d'enseignement qui pourrait être accompagné d'un discours de niveau 1 qu'ils doivent élaborer eux-mêmes ;

3) leurs postures lorsque ce discours de niveau 1 leur est fourni.

Auparavant, dans la section 6.1, nous utiliserons les entretiens réalisés sur le thème de la rigueur. Suite à notre analyse du développement historique de la dérivée et de la manière dont les praxéologies associées peuvent « s'opposer », il nous a en effet paru nécessaire de montrer de quelle manière le discours de niveau 2 associé à l'enseignement universitaire se dissocie complètement du discours de niveau 1, traduisant ainsi la différence de projet entre les deux rationalités correspondantes. C'est en cela que notre étude s'inscrit aussi dans une problématique de transition entre les institutions.

La section 6.2 (Postures *a priori*) proposera ensuite l'analyse de nos observations concernant les choix spontanés de pratiques effectués par ces élèves-professeurs, mais aussi de leurs discours sur ces pratiques dont nous allons montrer qu'ils visent à légitimer le choix du discours 2bis en en défendant les facettes de niveau 2 sur le plan mathématique et de niveau 0 sur un plan « didactique » ou plutôt pédagogique : il faut rester « propre » mathématiquement parlant et en même temps ne pas compliquer la vie des élèves.

Ensuite, nous étudierons (6.3) les pratiques et discours obtenus lors de « travaux guidés », c'est-à-dire lorsque nous leur avons demandé de travailler spécifiquement sur un projet se situant volontairement dans une rationalité de type I.

[258] Même si notre question porte sur la formation initiale, les difficultés à s'approprier de tels projets se rencontrent également chez des professeurs plus chevronnés. Par exemple, les travaux de l'équipe Amperes sur les Parcours d'Etude et de Recherche parle de « professeurs voulant bien faire l'effort de se les approprier ».

Précisons ici que, dans les extraits d'entretiens, les phrases entre crochets ([ ]) correspondant aux questions des personnes dirigeant l'entretien. Dans les propos d'étudiants interrogés en groupes, ceux-ci seront désignés par E_1, E_2, etc.

6.1 Difficultés de transposition du discours théorique

Les élèves-professeurs viennent, en général, de terminer leurs études universitaires qui privilégient le discours de niveau 2 et ils vont se retrouver face à des élèves susceptibles de poser des questions de niveau 1. Comme nous l'avons dit en définissant les deux niveaux de rationalité, c'est presque par définition que la rationalité de type II ne prend plus en compte les obstacles épistémologiques associés à la construction du concept. La recherche d'un enseignement susceptible de recevoir les questions des élèves sur la nature fondamentale du savoir nous paraît donc nécessiter une forme de « flexibilité rationnelle » permettant d'abord de reconnaître cette différence entre les deux rationalités et ensuite de discerner à quel niveau de discours on se situe afin d'assumer un niveau de discours qui reste intelligible sans risquer l'amalgame.

Nous avons dans notre introduction évoqué le cas d'étudiants qui se posent eux-mêmes de telles questions au moment de préparer leurs leçons, et il est vraisemblable que ces questions ont en quelque sorte une « vie antérieure ». Le changement d'institutions provoque-t-il alors un changement de rationalité, ou plusieurs ?

Avant d'observer les difficultés des élèves-professeurs à discerner les deux rationalités, nous allons chercher à savoir comment elles sont particularisées au niveau des institutions. En effet, nous avons indiqué au Chapitre 3 que la transposition au secondaire de la rigueur acquise dans les théories était perçue comme problématique. Si on peut définir des objectifs ou des prises de position assez générales, les modalités et mécanismes de cette transposition restent suffisamment imprécis pour générer cette confusion entre le système à modéliser et le modèle mathématique (Chevallard, 1997).

Pour cela, les entretiens sur la rigueur menés auprès de professeurs des deux institutions et d'étudiants en formation initiale (voir la méthodologie décrite au Chapitre 5) nous indiqueront comment ils expriment cette difficulté de transposition du discours de niveau 2 à une autre institution. Rappelons que ces entretiens visaient à cerner la perception des niveaux de rationalité au travers de réponses à des questions évoquant la notion de rigueur par rapport au fonctionnement des mathématiques dans les deux institutions et la problématique de transition secondaire-université.

Nous allons, en exploitant les propos les plus représentatifs, proposer des éléments d'explication à l'influence du changement d'institution dans la transition vécue par les élèves-professeurs en montrant progressivement comment, à partir des fonctions de la rigueur mathématique, l'enseignement secondaire et l'enseignement universitaire sont finalement envisagés comme deux mondes disjoints.

6.1.1 Fonctions de la rigueur

Pour ce qui concerne les professeurs d'université, la notion de rigueur évoque plutôt la garantie de la consistance d'une théorie lorsque la disponibilité d'un formalisme permet de tout justifier. On peut alors articuler les propos autour de deux pôles : le besoin de validation conforme et l'absence d'ambiguïté, y compris dans l'usage des ostensifs, qui met alors en évidence le rôle de la définition des concepts.

Concernant la validation conforme, la notion de démonstration est précisée par opposition à d'autres formes de raisonnement:

> *Même une démonstration, ils ne savent pas ce qu'est une démonstration. Ils confondent un exemple et une démonstration, donc pour moi c'est un problème de rigueur dans la pensée mathématique. Donc il faut passer beaucoup de temps en 1ère candi à différencier*
> *1) un contre-exemple d'un exemple ;*
> *et 2) une démonstration de « juste quelques cas où ça marche bien ».*
> *ER-1*

La nécessité de distinguer entre une généralisation d'exemples et une démonstration est illustrée ci-dessous. Nous verrons plus loin que les étudiants vont ensuite assimiler la validation cinématique du critère de croissance avec une simple généralisation et donc en refuser la validité.

> *Faire comprendre pourquoi on veut être aussi précis. Pourquoi faut-il être aussi précis en mathématiques. Pourquoi faut-il démontrer par exemple ?*
> *Je prends toujours un exemple*
> *Si on prend le simple polynôme* n^2+n+41 *, évalué en les valeurs entières.*
> *À chaque fois les valeurs obtenues sont des nombres premiers.*
> *Si je dis à l'étudiant, voilà* n^2+n+41 *'est toujours un nombre premier, c'est une proposition.*

> *Ce qu'il aura tendance à faire c'est d'essayer, prendre quelques valeurs et dire ah ben oui ça marche.*
> *Et puis je leur réponds : essayez jusqu'à 39 et puis vous verrez qu'à 40 ça ne marche plus.*
> *Alors je leur explique voilà ce que vous avez énoncé et soi-disant démontré en prenant quelques valeurs, c'est faux. Ça c'est pas un comportement de mathématicien. Vous voyez le genre d'erreur que vous pouvez faire en ne démontrant pas.*
> *ER-1*

La notion de « rigueur » est aussi associée à la possibilité de pousser « au maximum » la justification :

> *Une démonstration, pendant deux ans on l'a donnée comme ça et un jour un étudiant a posé une question, l'assistant me l'a relayée en disant je sais pas y répondre et on a retravaillé cette démonstration et il y avait bien quelque chose de pas tout à fait clair.*
> *ER-1*

> *Parfois on ne justifie pas assez, croyant que c'était évident.*
> *ER-1*

En effet, la question se pose aussi de savoir « que justifier ? ». A partir de cette question, nous voyons déjà apparaître dans les propos ci-dessous le rôle de la définition (pourquoi montrer que les deux définitions donnent bien le même objet ?) et une distinction entre deux catégories : ceux qui font des mathématiques et ceux qui s'en servent.

> *Je me souviens d'une démonstration entre « le spam » et l'ensemble des combinaisons linéaires. Dans le syllabus il y a 3 lignes, mais on y a repassé 8 heures.*
> *Finalement j'ai supprimé la démo et mise en fin d'année en synthèse, pour les questions qu'ils doivent chercher eux-mêmes.*
> *Donc ce type de démo, une double inclusion avec deux définitions différentes, ils ne savent pas le faire en octobre.*
> *[C'est donc dans la nature de cette démo, une double inclusion]*
> *Oui, pour eux c'est tellement évident qu'ils ne voient pas pourquoi je passe du temps.*
> *[C'est donc la difficulté de démontrer quelque chose qui paraît évident]*
> *Oui, là ça rejoint plus mon premier point quand je disais que « ce qu'il faut démontrer ou pas » c'est une difficulté globale. Et en plus dans d'autres cours, ils se servent des maths mais sans faire les démos c'est « en maths, vous avez vu que » et au départ ils pensent que ça suffit.*
> *ER-1*

A propos du rôle de la définition, nous trouvons clairement exprimée chez les universitaires la nécessité de caractériser les objets par une définition et en leur associant des ostensifs :

> *Et alors je voulais dire qu'il y avait un deuxième type de rigueur, je trouve, qui est essentiel pour un mathématicien, ça se voyait très fort en algèbre, c'est de pouvoir caractériser l'objet qu'on manipule.*

> *Certains étudiants, quand on leur demande : c'est une matrice, c'est un nombre, c'est un vecteur ?…..Ils n'ont aucune idée, c'est x*
> *Mais x peut représenter des tas de choses. Comme au cours d'algèbre il y a des notations comme le zéro. Le zéro peut signifier plusieurs choses mais ils étaient libellés de la même façon partout. Donc un des exercices tout à fait difficiles à faire pour eux, c'était de dire je prends la fonction nulle, je lui applique un x et j'obtiens le zéro scalaire nul, etc.*
> *Je lui associe la matrice nulle et donc….*
> *Mais ils ont cette difficulté au début. Même une fois qu'on a reconstitué tout ce schéma avec eux et qu'on leur dit maintenant tu l'écris, ce n'est pas encore facile.*
> *[donc c'est dans l'écriture ?]*
> *L'écriture correcte.*
> *Parfois ils ont la pensée correcte mais ils ne parviennent pas à l'exprimer avec le symbolisme vu au cours. Ou un autre symbolisme qui serait tout à fait cohérent. Moi si ils me mettent désormais je note telle chose par tel symbole, ça ne me dérange pas. Je n'impose pas nécessairement le même formalisme mais …*
> *ER-1*

Cette question de la définition des objets, ici évoquée dans le cas des matrices, rappelle toutefois la distinction entre des objets préconstruits et les concepts mathématiques. Ici, c'est une définition opératoire qui est attendue par le professeur.

> *J'ai un collègue qui les met dehors si ils ne peuvent pas définir une matrice, donc il les prévient : si vous ne savez pas dire une matrice associée à une application linéaire c'est ça, on ne continue pas l'examen.[…]*
> *Et c'est vrai que je lui ai dit que, sans faire comme lui, c'était catastrophique de voir que on parle de matrices pendant 6 des 10 chapitres et il y en a, quand on leur demande « mais au fond c'est quoi une matrice », si ils ne savent pas c'est que quelque chose ne va pas ailleurs.*
> *Alors à l'examen il faut refaire un travail pour construire une définition. C'est-à-dire qu'ils savent manipuler les objets et..*
> *Et ils ont de la peine à donner la définition générale. La question type par exemple c'est les valeurs propres. On demande qu'est-ce qu'une valeur propre associée à une transformation linéaire, elle-même associée à une matrice A. Et la réponse c'est : « lambda »*
> *Alors je dis et si on l'appelle « mu » ? Alors que ce qu'on leur demande c'est* $A \cdot X = \lambda \cdot X$ *et expliquer ce qu'est le X, le A et le* λ*.*
> *ER-1*

Comme cela apparaît dans certains des propos ci-dessus, l'on voit très vite apparaître une distinction entre deux mondes : un monde où on démontre les résultats mathématiques et un monde où on les utilise.

6.1.2 Deux mondes

Nous allons donc dans cette section donner plusieurs exemples de propos dans lesquels se manifeste cette conception admettant que l'enseignement secondaire est plutôt dans le monde des utilisateurs de techniques, avant de rechercher l'origine de cette conception.

6.1.2.1 Un monde théorique et un monde technique

L'existence de deux mondes est en effet assez vite officialisée, pour ne pas dire institutionnalisée. On trouve par exemple l'identification d'un monde dans lequel se font les mathématiques, et qui serait garant de la vérité des résultats, et un autre monde qui les utilise :

> *C'est le propre du mathématicien, c'est de certifier que des théorèmes sont corrects.*
> *Notre job, c'est de certifier donc on est obligés d'être rigoureux pour ça. On ne peut pas dire c'est à peu près ça, ou c'est ça pour la plupart des nombres.*
> *C'est notre spécificité.*
> *ER-3*

> *Il n'y a pas 2 mathématiques, mais l'éclairage que je vais donner n'est pas le même bien entendu. Pour le mathématicien, la raison des maths, et c'est son job, c'est de certifier aux utilisateurs de maths que tel résultat est bien correct. Si on dit que pour telle équation différentielle, les mathématiciens l'ont étudiée et que sous telles hypothèses on calcule la solution comme ça, ça c'est le boulot du mathématicien.*
> *Il faut qu'il le fasse avec énormément de rigueur. Parce que les autres (ingénieurs, biologistes, économistes, enfin tous les utilisateurs) vont partir de ça comme étant vrai.*
> *Et il faut bien que quelqu'un l'ait fait et j'ai dit aux étudiants : ça c'est votre responsabilité.*
> *Je reviens à la différence entre le cours de maths aux matheux et le cours de maths au biologistes. Là il y a un gros problème de pourquoi et à moi de les convaincre. Il y a un cours de maths en première année, pas pour le plaisir de faire des maths, mais j'attends de vous que, avec ce bagage mathématique, vous puissiez passer d'un problème écrit en français à une formulation mathématique et puis être critique par rapport aux résultats que vous avez. Donc c'est que vous allez utiliser un outil mathématique dans le cadre de votre discipline.*
> *ER-3*

Mais la façon dont on évoque le degré de compréhension attendu de l'utilisateur va montrer deux points de vue en tension. Dans le propos ci-dessous, l'utilisateur doit (peut) en même temps comprendre ce qu'il fait et faire confiance à une autre institution pour la validité :

> *Vous l'utiliserez et il faut que vous sachiez ce que vous êtes en train de faire. Mais vous n'avez pas une phase de démonstration, c'est les mathématiciens qui le certifient pour vous. Et je le dis souvent au cours : les mathématiciens ont montré que on a tel résultat*

> *et nous allons l'utiliser, tandis que de l'autre côté, les mathématiciens, c'est à vous de démontrer le résultat. Je caricature un peu, hein, mais pour moi il y a vraiment cette différence.*
> *ER-3*

Dans un autre propos, l'utilisateur a juste à se conformer au mode d'emploi. Cela peut aussi révéler une forme de renoncement à la compréhension.

> *Je pense qu'il y a deux catégories. Ceux qui vont utiliser l'outil, mathématique ou autre, comme une recette et n'ont pas besoin de connaître plus. La rigueur serait de bien utiliser l'outil dans les bons contextes. Je vois ça fort en statistiques, par exemple en biologie : utiliser les bons tests. Mais dans un certain sens ça ne les intéresse pas de savoir pourquoi ce test-là et pas un autre. On doit respecter ça.*
> *D'un autre côté il y a des gens qui voudraient bien comprendre ce qu'ils font et pourquoi ils le font, mais à mon avis, c'est une minorité.*
> *On peut développer cette rigueur mais on n'ira pas dire à un biologiste qui va utiliser des tests : oui mais il faudrait que tu comprennes ce que tu fais.*
> *Ça devient de l'idéologie.*
> *ER-4*

Remarquons que dans le propos ci-dessus, la volonté de compréhension de l'utilisateur est effectivement reconnue, mais comme étant une exception, ce qui pourrait alors expliquer qu'on ne lui accorde pas plus de crédit.

Si nous observons ici une différence quant au degré de maîtrise attendu, à savoir comprendre ou utiliser, elle va se manifester sous une autre forme pour les futurs professeurs qui doivent de plus comprendre pour faire comprendre :

> *Au département de maths notre exigence est différente car les maths ne nous servent pas comme outil, mais on va devoir l'enseigner, transmettre. Donc on doit comprendre ce qu'on va transmettre. Si on sort de licence en disant je sais faire des intégrales mais je ne comprends pas comment ça fonctionne, c'est difficile de les enseigner.*
> *ER-4*

Pourtant le secondaire va se trouver placé dans le monde technique, d'abord par comparaison avec « la vie de tous les jours » :

> *Les maths dans la société sont principalement une technique dans la vie de tous les jours. Je connais très peu de gens qui font des dérivées et des intégrales dans leur vie. Or on les apprend en secondaire et je ne vois vraiment pas l'intérêt. 95% des gens utilisent les maths de façon technique donc c'est logique que le secondaire insiste sur cet aspect de ce qui sera utilisé après.*
> *ER-4*

S'ensuivent alors des difficultés sur les transitions entre ces deux mondes.

6.1.2.2 Difficultés des transitions

On trouve ici l'expression de regrets des universitaires par rapport à la réduction imposée au secondaire, en évoquant les difficultés des étudiants sortant du secondaire et ne comprenant pas pourquoi on développe la théorie en première année d'université :

> *Il faut être clair : la technique n'est pas tout. Il ne faut pas faire croire aux gens qu'ils sont forts en maths parce qu'ils savent utiliser des techniques. On le voit avec ceux qui arrivent en maths à l'université où on exige une compréhension qu'ils n'ont pas cherchée dans le secondaire.*
> *ER-4*

Dans le propos ci-dessous, on trouvera encore l'expression de ce regret mais aussi une forme de définition des rôles de chaque institution :

> *Maintenant, ils nous disent mais pourquoi vous démontrez tout ça ? Il y en a qui l'on fait avant vous, on veut bien vous croire.*
> *[..]*
> *Il me semble que l'étudiant qui arrive sortant de rétho a une vision des maths qui est fort technique. Les maths c'est quelque chose qu'il faut faire, que des gens ont étudié avant moi et que moi je vais utiliser. Mais les maths utilisées en premier bac, c'est beaucoup de manipulations de l'abstrait. La technique calculatoire est toujours présente mais on va loin au-delà. Et c'est un aspect qui est peu développé dans le secondaire. Encore une fois, c'est absolument pas une critique, je pense que c'est pas l'objectif du secondaire.*
> *ER-3*

Alors il devient nécessaire de proposer de « combler le manque », en supposant, par exemple que ce sont les notions de logique qui manquent au développement d'habiletés démonstratives :

> *[Dans les discours que j'ai entendus, on sent un trou entre ce qui est théorique, donc rigoureux, et ce qui est « exemples ». On n'aurait le choix qu'entre « la démo par les exemples » ou la démonstration théorique que l'on pense pas à la portée des élèves. Donc il n'y aurait rien entre les deux ?]*
> *Peut-être bien. Je pense qu'il y a des profs qui essaient de combler les trous en disant parfois on fait quand même un peu des démonstrations théoriques, mais je ne vois pas très bien ce que je pourrais mettre entre les deux.*
> *C'est les outils de raisonnement qui manquent.*
> *ER-3*

Les regrets concernent aussi « l'autre transition », soit les élèves-professeurs devenus professeurs dont on pense que l'existence de contraintes institutionnelles explique qu'ils ne puissent viser un certain niveau de rationalité :

> *Là je ne comprends pas bien. Les jeunes profs sont sans doute très vite mis dans le bain : « ici on a un polycopié et tu dois l'utiliser ». Je connais l'exemple d'une étudiante qui a été remplacée parce qu'elle ne voulait pas utiliser le polycopié de l'école.*
> *On est souvent déçu par des élèves qui s'adaptent très vite et qui nous disent « oh mais non on n'a pas le temps ». On leur demande « et tu vois des démos ? », et ils répondent « oh mais non on n'a pas le temps et même le programme n'en demande pas », alors qu'on avait des filles et des garçons qui excellaient dans ce domaine-là.*
> *Je pense que avec ce carcan du programme on leur met un peu la pression quand ils arrivent*
> *ER-1*

Pourtant, l'absence de validation au secondaire est aussi considérée comme « normale » :

> *[fait-on des mathématiques différentes dans le secondaire ?]*
> *Non, je ne pense pas mais ce sont des aspects différents des maths. Je pense que nos étudiants qui vont enseigner se mettent vite au diapason de ce qu'on leur demande. C'est plus technique, on fait moins de démonstrations. Quelque part ce sont des maths faciles parce que on ne se pose pas de question de fondement, mais quelque part c'est normal. Je pense que les notions de mathématiques, on ne peut pas les enseigner du premier coup comme étant toutes faites.*
> *ER-3*

Si l'on a vu apparaître l'identification de contraintes professionnelles (programmes, temps, etc.) empêchant par exemple les professeurs du secondaire de faire des démonstrations, d'autres éléments d'explication de cette mise à distance sont fournies dans les entretiens.

6.1.2.3 Le secondaire comme « utilisateur »

Dans quel monde en effet placer l'enseignement secondaire ? Nous avons déjà vu évoquer l'argument des « mathématiques de tous les jours » pour justifier que cet enseignement du secondaire doive surtout fournir des techniques. Mais il semble aussi que l'enseignement secondaire soit inclus dans le monde des utilisateurs de techniques mathématiques garanties par les mathématiciens parce que les modalités de transposition du savoir savant ne sont pas bien connues.

Par exemple, voici comment un professeur d'université pense l'enseignement de la méthode de résolution d'équations du premier degré. La rigueur est ici dans le fait d'appliquer correctement un théorème qui serait connu ailleurs :

> *Et donc dans l'attitude technique, c'est clair qu'on est quand même rigoureux.*
> *Si on recherche une solution d'une équation, on peut faire telle et telle transformation parce que on a appris que si on multiplie les deux membres d'une égalité par un même nombre non nul, ça reste toujours une égalité. On l'a appris une fois pour toutes et on le fait correctement. Donc là il y a une rigueur, en un certain sens.*
> *Donc il y a une rigueur dans le fait d'appliquer la règle. Je peux passer d'une ligne à une autre parce que quelque chose me dit… Que je peux le faire.*
> *[Et c'est quoi ce quelque chose ? quelle est la justification qu'on peut donner à ce moment-là]*
> *Parce que il y a un théorème mathématique qui l'a démontré. On a démontré que les deux membres, …, enfin qu'une égalité restait une égalité quand on multiplie par un même nombre non nul. Donc je pense que les professeurs ont la même exigence de rigueur.*
> *ER-3*

La suite du propos met alors vraiment en évidence la méconnaissance de ce qui est fait dans le secondaire :

> *[Et si il demande mais pourquoi on peut faire ça multiplier, diviser par, ou additionner un même nombre]*
> *Ça je pense qu'on a du le démontrer avant, même dans le début du secondaire.*
> *Maintenant l'a-t-on démontré ou l'a-t-on montré, je n'en sais rien. Mais à un moment donné il y a eu une propriété de base à mémoriser.*
> *ER-3*

Prenons ici un peu de temps pour rappeler que, au moment des mathématiques modernes, la résolution d'équations était effectivement enseignée dans le secondaire dans le cadre d'une théorie gérant les équations du premier degré comme des équations du type $a*x=b$ dans un groupe muni d'une opération *. C'était la composition avec l'élément symétrique de a qui permettait d'établir le résultat[259]. Comment alors transposer ce résultat dans le secondaire sans que cela ne devienne une injonction ? Beaucoup d'enseignants du secondaire inférieur « donnent la règle » mais nous avons à ce sujet vu au Chapitre 3 la réflexion d'élèves demandant si c'était la même règle avec un autre professeur...

[259] par exemple dans le manuel Aleph1 – Analyse – Seconde ACT (Hachette).

Une autre explication serait une différence de maturité. Alors les élèves du secondaire ne pourraient voir la dérivée que comme une technique et c'est l'université qui leur expliquera que c'est un taux de variation instantanée :

> *Je crois que tout simplement dans le secondaire j'ai vu la limite et la dérivée comme des techniques. Je savais très bien dériver, je ne me trompais pas mais la signification profonde de la dérivée, je ne l'avais pas perçue.*
> *Je pense que la maturité de l'élève est telle que c'est une notion sur laquelle il faut revenir après. Je ne vois pas de problème à dire : on a donné la définition et on a surtout insisté sur la technique de calcul parce que c'est à la portée des élèves à cet age-là et puis en premier bac on revient sur la notion en disant attention voilà ce qu'il y a en plus. Même en bio, je reviens dessus en disant c'est un taux de variation instantanée particulier.*
> *Et ça dans le secondaire on ne l'a pas vu mais il ne fallait peut-être pas le voir. C'est à nous à le faire.*
> *ER-3*

Dans le même ordre d'idées, on peut aussi attribuer aux élèves du secondaire un manque de curiosité, vite généralisé :

> *Une des difficultés de cette rigueur est qu'elle nécessite une curiosité, un désir de maîtrise de l'outil, et ce désir n'existe pas toujours.*
> *Je pense que dans le secondaire les élèves n'ont aucun intérêt, aucun désir de maîtriser les dérivées.*
> *ER-4*

De manière générale, même sur un nombre restreint d'entretiens, on observe dans le même temps un regret que le secondaire soit « trop technique » et une forme de résignation sous la forme « on ne pourrait pas faire autrement ».

Toutefois, certains universitaires sont conscients que le travail proposé au secondaire est une forme d'illusion. Par exemple, lorsque les démonstrations d'analyse qui y sont exposées ne tiennent compte que de la phase dite de synthèse :

> *Moi j'ai toujours pensé que ça devait être difficile d'expliquer justement les notions d'analyse, comme les limites, les suites, etc.*
> *Je les ai vues, mais je n'ai vraiment compris la notion de limite qu'à l'université.*
> *Je pense que je l'appliquais comme une recette de cuisine, je savais que si on avait ceci sur cela on devait faire ça, etc. mais je ne comprenais pas la notion de limite.*
> *Et le pour tout epsilon, il existe un rang et compagnie, ça m'échappait complètement*
> *[..]*
> *Mais on va parfois trop loin dans la rigueur, je pense à ce prof. Les démonstrations où on divise par epsilon/3 au lieu d'epsilon pour que ça tombe juste. Ça m'a toujours plutôt*

> *énervée. Tandis que maintenant j'aurais tendance à dire « Plus petit que epsilon, Plus petit que epsilon, Plus petit que epsilon, ben la somme est encore d'ordre epsilon. »*
> *Mais là on mettait des /3, des /6 dans la démo ou des epsilon/2n et là je trouvais comme étudiante que c'était vraiment un peu exagéré. Parce que ce n'est qu'après coup que l'on pouvait savoir qu'il fallait diviser par epsilon/2, ou sur 3.*
> *[La rigueur allait en fait dans le sens inverse du raisonnement]*
> *oui, c'est ça, oui. C'était pour que ce soit joli. Et là j'adhère moins.*
> *Il y a peut-être cette différence entre certains profs du secondaire et nous, c'est que justement ils ne se rendent pas compte du re-travail du cours tout le temps.*
> *ER-1*

Ou encore lorsque ce travail est identifié comme étant déconnecté à la fois du bon sens et de la théorie :

> *Oui, mais la technique…. Ils trouvent une technique mais quand on arrive à dire :« voilà x est plus grand que 3 » la phrase en français ne leur dit rien. Un enfant de primaire pourrait comprendre que x peut être 4, 5, 6 etc. Mais eux, ils sont dans un cadre mathématique et les phrases qu'ils disent c'est n'importe quoi, je veux dire c'est déconnecté. [..] Ils sont dans le monde du calcul technique et pas le monde de la simplicité, de la réalité.*
> *ER-4*

De même, le risque de favoriser une dimension strictement procédurale est identifié :

> *Par exemple, pour un étudiant, faire le graphe d'une fonction sans avoir regardé les CE, ça ne lui pose pas de problème. De toute façon, la rigueur voudrait qu'on les fasse d'abord. Mais pour l'étudiant on fait les CE parce que le prof l'a demandé.*
> *Qu'on le fasse au début ou à la fin pour eux c'est pareil.*
> *[Si ils le font après et qu'ils le relient bien au travail fait avant ?]*
> *Oui mais ça veut dire qu'ils ne voient pas pourquoi on fait les CE.*
> *Parce que ça demande des connaissances maths plus difficiles. On ne peut pas dériver là où la fonction n'est pas définie.*
> *[Il y a donc des choses qu'on fait sans savoir pourquoi on les fait parce que le pourquoi fait appel à des notions mathématiques plus poussées]*
> *Tout à fait.*
> *ER-4*

6.1.2.3 Niveaux de discours

Quant à l'éventualité d'un discours explicatif qui ne soit pas la théorie, nous allons proposer les exemples de deux postures contrastées d'universitaires, entre lesquelles nous citerons les propos d'un élève-professeur expliquant comment la différence qu'il ressent va l'amener à utiliser un « discours » que lui-même juge assez particulier.

Voici comment, en analyse, un professeur imagine un niveau « imagé » de la limite, qui serait opposé à un niveau théorique ne pouvant d'ailleurs pas être compris autrement que sous sa forme procédurale :

> *Prenons la notion de limite qui est quelque chose de mathématiquement difficile à imaginer car elle touche à l'infini.*
> *Dire par exemple que telle fonction tend vers telle valeur quand x tend vers zéro.*
> *Souvent ce qu'on fait pour convaincre, c'est d'essayer.*
> *C'est clair qu'on doit commencer par là pour sous-tendre son intuition. Mais alors il y a une définition avec pour tout epsilon, il existe etc.*
> *Ça c'est un aspect où les profs ont dit : on le fait mais….,*
> *ou alors : on le fait pas car on risque de perdre les élèves et du temps.*
> *Et quand on le fait, je ne suis pas sure que les élèves aient vraiment compris ce qui se passe.*
> *Je l'ai vu chez mes filles, un prof le faisait : Pour chaque epsilon, il existe un delta tel que….*
> *Il prenait un epsilon, calculait le delta.. et l'étudiant le ré-imaginait dans sa tête comme une technique.*
> *Chaque fois, on prend un epsilon, on construit un delta.. mais la vraie signification profonde de la limite, elle n'était pas passée.*
> *ER-3*

Dans la lignée du langage « imagé », un élève-professeur évoque ici son explication de géométrie dans l'espace avec des bics et des blocs qu'il a fait suivre du résultat en termes de vecteurs directeurs. Il est lui-même étonné de ne pas avoir reçu de remarque et en déduit que l'utilisation d'un langage imagé (d'autres étudiants parlent de naturel) peut amener la théorie :

> *…« c'était pas très rigoureux au niveau mathématique, mais ils ont compris, alors qu'est-ce qui vaut mieux… je sais en parlant que ce que je dis n'est pas très correct mais ensuite ce que j'écris au tableau l'est totalement. Je le dis avec les vecteurs mais avec que ça, ils n'auraient pas compris. Je le savais parce que j'avais déjà eu des tas de problèmes avec les droites. Donc j'ai mis de côté la rigueur, pour finalement leur faire accepter quelque chose qui est rigoureux. Je me suis demandé si ce que je faisais était vraiment correct, je m'attendais à avoir une remarque à la fin mais….*
> *ER- 8*

Enfin, nous terminerons avec cette autre personne qui proposera de ne faire dans le secondaire « que les maths qu'on peut y faire » en ne travaillant que dans des cadres où l'élève a les moyens de justifier son raisonnement. Il cite l'exemple de la combinatoire ou encore des dérivées « juste pour la physique ».

> *C'est vrai que c'est difficile, mais on ne peut pas faire autrement que de dire : ça c'est justifié par d'autres théories. Mais on ne peut pas faire autrement, on est obligés de vivre comme ça.*

> *Ça va très loin : on utilise les réels mais on ne sait pas les justifier. On peut montrer que c'est logique par rapport au reste mais c'est tout.*
> *[Que peut-on faire alors]*
> *Justifier les choses qui sont accessibles.en demandant « Peux-tu justifier dans cette théorie ».*
> *Par exemple quand c'est plus des nombres entiers.*
> *Je pense qu'en maths on a trop été dans la technique et on a été dans l'infinitésimal donc dans l'analyse.*
> *Mais par exemple en probabilité, combinatoire on peut tout justifier parce que c'est que des nombres entiers et finalement c'est difficile de raisonner.*
> *Dans la combinatoire, plus qu'en probabilités, on a toutes les cartes en main et ça oblige à réfléchir.*
> *[..]*
> *Moi je suis pour diminuer les maths dans le secondaire ; Apprendre à réfléchir, avoir des idées forger une personnalité ; En maths y a pas ça.*
> *On pourrait faire rien que de la combinatoire des équations, inéquations, …*
> *Dérivées et tout ça : en faire un peu pour la physique et c'est tout, mais pas autant de technique.*
> *On a perdu des étudiants parce que on leur fait peur avec ces maths.*
> *C'est trop détaché de la réalité.*
> *ER-4*

La même personne précise aussitôt que cela signifierait alors un changement conséquent dans la manière de travailler au secondaire :

> *Ce qui est important c'est que l'étudiant puisse répondre à la question « pourquoi ». Pourquoi est-ce que tu passes de là à là ?*
> *Le prof ne va pas se poser la question tout le temps, car pour lui c'est évident.*
> *[..]*
> *Un étudiant rigoureux doit être capable d'inventer la raison, enfin de la découvrir.*
> *Mais alors il faudrait que le prof ait la capacité d'interroger de cette façon.*
> *ER-4*

Après avoir ainsi donné un aperçu de cette désarticulation entre les institutions, nous allons nous pencher sur les pratiques observées.

6.2 Postures a priori

Rappelons que nous allons ici nous allons exploiter deux types d'observations, à savoir

1) Les préparations de leçons faites à partir des sujets

- introduction de la notion de dérivée (ULg, 1ère série)
- dérivée première d'une fonction (ULg, 2ème série)
- introduction de la notion de dérivée (ULg, 3ème série)
- variations : critères de croissance et décroissance, connaissant la dérivée (ULg, 1ère série)

- variations : croissance, décroissance, extrema (ULg, 2ème série)
- dérivée et variations (ULg, 3ème série)

2) les discours sur la préparation d'une leçon sur la dérivée et/ou le critère de croissance, incluant

- les commentaires des étudiants FUNDP sur différents documents qui leur ont été soumis ;
- les analyses que font les étudiants FUNDP pour comparer des projets de leur choix ;
- les propos des étudiants ULg sur la préparation d'une leçon concernant un des deux sujets nous fourniront ensuite une interprétation possible des choix observés dans les préparations.

6.2.1 Préparations de leçons

6.2.1.1 Introduction du nombre dérivé

Sans analyser tout le discours tenu, nous allons ici distinguer les préparations selon l'approche choisie, le fait de donner une définition de la tangente ou non et comment interagissent les définitions de la dérivée et de la tangente.

6.2.1.1.1 Activités d'introduction

12 étudiants sur 27 choisissent comme première activité d'introduction une activité relative à la construction de tangentes, celle-ci n'étant problématisée que dans trois cas: une qui propose d'étudier l'intersection d'une droite donnée avec une parabole, une qui pose le problème du tracé de la tangente à un cercle et utilise le positionnement de la règle pour faire apparaître le passage de sécante à tangente ; une qui se demande *« comment trouver l'équation d'une droite qui répondrait à l'idée qu'on se fait d'une tangente »* ;

7 choisissent une activité à caractère cinématique (vitesse instantanée), immédiatement suivie par une activité sur la tangente ; leur intention étant de procéder par analogie en associant la vitesse moyenne à une sécante et la vitesse instantanée à la tangente, et ce directement par un argument graphique ;

2 proposent plusieurs activités basées sur la notion de variation, avant de revenir à une approche formaliste ;

2 ne proposent pas d'activité et introduisent la notion de taux d'accroissement, puis la recherche d'une limite ;

1 propose une activité d'approximation d'une courbe polynomiale ;

3 ne proposent pas d'activité et commencent par la définition.

6.2.1.1.2 *Définitions de la tangente, de la dérivée et de la vitesse instantanée*

Pour ce qui concerne les définitions de la tangente et de la dérivée, nous indiquons ici les différentes définitions rencontrées et leurs interactions éventuelles. Nous mettrons en gras ce qui est énoncé avec un statut explicite de définition. En effet, même lorsque la tangente n'apparaît pas dans l'activité d'introduction, elle est presque toujours mise en relation avec la dérivée lors de la leçon, et souvent sous la forme du cercle vicieux déjà mentionné.

Pour ce qui concerne la vitesse instantanée, nous n'avons trouvé aucune préparation où sa définition soit questionnée : elle est supposée acquise au cours de physique, ou alors le passage à la limite est rapidement posé, pour ne pas dire imposé[260].

Remarquons également qu'un grand nombre d'étudiants semblent vouloir travailler en deux temps, à savoir d'abord des activités à visée « intuitive », mais où beaucoup de choses sont dites, et de la théorie dite « rigoureuse » ensuite. En recensant ainsi les différentes formulations rencontrées dans une même préparation, nous pouvons réaliser à quel point ces deux faces de la leçon sont déconnectées l'une de l'autre.

Si nous regardons les préparations qui suivent une démarche apparemment inverse, c'est-à-dire qui commencent par définir la dérivée comme limite du quotient différentiel puis en font une interprétation géométrique avec la tangente définie comme limite de sécantes, nous pouvons finalement proposer de considérer que c'est la même problématique qui se manifeste différemment dans les deux catégories de préparations. En effet, nous pouvons dans les deux cas parler de la cohabitation d'un discours relevant d'une rationalité d'ordre 0, au sens où on trouvera des phrases comme « on voit que », ou « plus x est proche de, plus

[260] De la même manière que le discours rencontré dans les manuels (cf Chapitre 4).

f(x) est proche de … », juxtaposé avec un discours relevant d'une rationalité d'ordre II avec une écriture qui se fait immédiatement en termes de limites.

Tangente	Dérivée	Remarques
limite, si elle existe, des sécantes	**La pente de la tangente est m = lim…** **Ce nombre est le nombre dérivé**	L'étudiant a commencé par une application cinématique et est tout de suite passé à la définition de la tangente sans même résoudre son exercice Travaille sur courbe associée à une fonction sans expliciter l'expression analytique
La droite atteint la position limite où elle est tangente à la courbe	Limite du taux d'accroissement	Travaille sur courbe associée à une fonction sans expliciter l'expression analytique
« la tangente est limite en T de la sécante TP »		cf Savoir et Savoir-Faire
1) Cette vitesse instantanée correspond à la pente de la droite qui épouse au mieux la courbe au point (), c'est-à-dire la pente de la tangente à la courbe en ce point 2) La tangente est la droite dont la position est la limite, si elle existe de la position d'une sécante variable		La tangente est supposée implicitement connue et cet énoncé est donné dans le contexte d'un exercice cinématique où il n'est pas utile Deuxième énoncé donné comme interprétation géométrique, sur courbe sans expression de la fonction.
Limite, si elle existe, de la sécante	Limite du quotient	
La tangente en (a, f(a)) est la droite de coefficient directeur f'(a)	**Le nombre dérivé est la limite du quotient différentiel**	Approche formaliste : pas de risque
	Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente	Pas de statut précis aux énoncés Est partie de la tangente au cercle sans précision ultérieure
Position limite d'une sécante	Limite du quotient	Exercice sur la tangente immédiatement après un exercice sur la vitesse
1) définition intuitive : « position limite», si elle existe de la sécante **2)définition rigoureuse : la droite de coefficient directeur f'(a)**		L'étudiante mentionne la distinction à faire entre les deux définitions

Tangente	Dérivée	Remarques
		Travaille sur les limites en posant le problème de déterminer la pente de la tangente mais sans donner de définition à la tangente, supposée connue
La droite tend vers une position limite tangente à la courbe en A	Le coefficient de cette tangente est lim … qu'on appelle nombre dérivé	
La droite n'ayant qu'un point d'intersection avec la parabole, on la qualifie de tangente à la parabole		Part du cas de la parabole et à la fin généralise le fait que le nombre dérivé sera le coefficient directeur de la tangente à la courbe (alors non définie)
	Limite du taux d'accroissement	Donne une interprétation géométrique du nombre dérivé comme pente de la tangente, non définie
Lorsque l'un des deux points d'intersection de la courbe t de la sécante se rapproche de l'autre jusqu'à être confondu avec celui-ci, la sécante porte le nom de tangente		Est visiblement partie de l'exemple dans SSF mais a revu la définition de la tangente
La tangente occupe la position limite de la sécante quand l'abscisse du point M se rapproche indéfiniment de a. Cette observation nous permet de définir la tangente		Cf Actimath
A la position limite la droite devient tangente à la courbe et dès lors la limite de son coefficient angulaire donnera la pente de la tangente	1) On appellera la pente de la tangente en un point d'abscisse a, le nombre dérivé de f en a 2) définition comme limite de taux d'accroissement	Ces énoncés sont donnés dans une introduction. Les premiers exercices sont tous consacrés à la tangente et à sa construction. Il donnera en fin de leçon une série d'exercices d'application, issus de AHA
	Limite du taux d'accroissement	Approche très formaliste. Une des rares préparations à ne pas parler de tangente
La sécante tend à devenir tangente à la courbe au point P donc la pente de la tangente = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$	Limite du taux d'accroissement En remarque : f'(a) = pente de la tangente	Est parti d'un problème de vitesse, abandonné pour la situation des sécantes

Tangente	Dérivée	Remarques
On remarque alors que la droite AB s'approche de la tangente à la courbe au point A La droite t, tangente à la courbe donne la direction de la vitesse instantanée à l'instant t1, qui elle-même est donnée par la pente de cette tangente	Limite du taux d'accroissement Le nombre dérivé en a est le coefficient de direction de la tangente au graphique de cette fonction en son point d'abscisse a	La tangente non définie est utilisée dans un problème de vitesse. Après définition du nombre dérivé, elle énonce la propriété sur une tangente non définie
On dira que la pente de la tangente au graphe est (la valeur de la vitesse instantanée). puis **La tangente au graphe d'une fonction est la droite vers laquelle tendent les sécantes PQ1, PQ2, .. où Q1, Q2,. sont des points de plus en plus proches de P**		La tangente est explicitement représentée sur un graphique dans un problème de vitesse dans lequel la vitesse moyenne est dite représentée par la sécante
Définir et caractériser la tangente (qui touche) au graphe de f au point d'abscisse a **On appelle tangente la droite t qui a pour équation** $t \equiv y - f(a) = f'(a) \cdot (x-a)$	Limite du taux d'accroissement	Activité d'espace maths sur la parabole
La tangente est la position limite de la sécante AB lorsque le point B se rapproche indéfiniment du point A		L'étudiante fait intervenir la tangente trigonométrique pour calculer la pente
Lorsque le point B se déplace sur la courbe, la sécante AB varie et devient tangente lorsque B devient infiniment proche du point A Donc la pente de la tangente est la limite de la pente des sécantes AB tend à devenir tangente au graphe au point A. Alors $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ =pente de la tangente t au graphe	En remarque : si la limite existe, elle s'appelle le nombre dérivé Puis définition comme limite du taux d'accroissement	Avait annoncé une définition « rigoureuse » de la tangente qui n'est finalement pas donnée

Tangente	Dérivée	Remarques
Plus le point M est proche du point A, plus la droite AM semble répondre à l'idée que l'on se fait d'une tangente. **La tangente au graphe cartésien est la droite qui passe par A et dont le coefficient angulaire est la limite en zéro des coefficients angulaires des sécantes**	**Ce coefficient angulaire de la tangente est le nombre dérivé de f en 1**	Annonce que la question est de déterminer une équation d'une droite qu'on pourrait dire« tangente ». Le rôle des sécantes est alors bien d'aider à la construction d'un objet que l'on sait indéfini
La pente de d (sécante) tend vers le nombre dérivé en a. La droite d tend vers une position limite appelée tangente au graphe au point a. Par définition, la tangente au graphe au point d'abscisse a est donnée par $t_a \equiv y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$	Limite du taux d'accroissement	Approche formaliste puis interprétation géométrique
L'hypoténuse se rapproche de la tangente au point A et les coefficients angulaires des segments de droite se rapprochent de celui de la tangente	Limite du taux de variation, en remarque de bas de page c'est toujours une limite 0/0 S'il existe le nombre dérivé est le coefficient angulaire de la tangente	Commence par essayer de parler de pente d'une courbe. Comme le taux de variation moyen dépend des bornes, il regarde l'évolution de ce taux sur plusieurs intervalles, mais dessine alors une droite t. Fait l'analogie avec le dessin d'un cercle avec des polygones réguliers et parle de segments de droite « se rapprochant de la courbe » puis repart sur tangente non définie
La tangente en un point A d'une courbe est la droite dont la position est la limite, si elle existe, de la position d'une sécante variable AB à cette courbe, lorsque le point variable tend vers le point fixe A.		Approche formaliste pour définir la dérivée mais dans l'interprétation géométrique, donne la définition de la tangente comme limite de droites. Calculant le nombre dérivé en un point donné, elle affirme que la droite ayant ce nombre comme coefficient est tangente au graphe.

6.2.1.1.3 Conclusions

Nous pouvons remarquer une prédominance des activités sur la tangente et sa conception comme limite de sécantes, soit comme activité première soit comme activité seconde (19 sur 27). Même l'étudiant ayant lu AHA a cité ce cas dans son introduction, reléguant les autres applications dans les applications finales.

En particulier, les étudiants ayant choisi une activité sur la vitesse instantanée la complètent tout de suite avec un exercice sur la tangente dans lequel ils mettent en parallèle d'une part, vitesse moyenne et pente de sécante et, d'autre part, vitesse instantanée et pente de tangente, puis insistent sur l'analogie des formules.

La fameuse définition comme position limite de sécantes, accompagnée de la précaution « si elle existe », est utilisée par 8 étudiants (presque un tiers), dont 5 fois avec un statut explicite de définition et une seule fois avec la précision que c'est une définition intuitive qui sera (plus ou moins) questionnée pour en produire une autre.

On rencontre à 5 occasions (soit un cinquième des observations) le fait que le nombre dérivé est explicitement défini à partir de la tangente, mais surtout de très nombreux cas où les formulations sont enchaînées sous forme de remarques, sans savoir laquelle définit l'autre.

On retrouve chez presque un tiers des étudiants le souci de montrer que les notations $\lim_{x \to a}$ et $\lim_{h \to 0}$ sont équivalentes. Par contre, une seule étudiante utilise avec aisance des notations en Δx et Δf, donnera deux définitions de la tangente et la fonction d'approximation associée au nombre dérivé.

Dans l'ensemble, les discours ne sont pas clairement distingués et les énoncés ont souvent un statut ambigu. On ne relève que 3 préparations où le nombre dérivé et la tangente reçoivent une définition ne permettant pas de circularité et ne reposant pas sur la connaissance implicite de la tangente, dont une correspondant à une approche uniquement théorique.

Parmi elles, une seule définit la tangente par l'entremise de son coefficient directeur.

Ces préparations restent donc très proches des transpositions proposées dans les manuels et seules trois étudiantes ont opéré des modifications sur leur contenu. Il y a donc environ 1 étudiant sur 9 qui « questionne la transposition du secondaire ».

6.2.1.2 Lien entre dérivée et croissance

Nous allons ici décrire ce qui peut être observé dans les préparations de leçon sur le lien entre dérivée et variation d'une fonction réelle. Rappelons que le développement théorique complet fait intervenir les théorèmes de Rolle et Lagrange dont nous avons vu une démonstration en 19 étapes, la première étant l'existence des bornes supérieure et inférieure d'une fonction continue. Nous avons alors parlé de « praxéologie à trous » pour les transpositions rencontrées dans les manuels « classiques », pour exprimer qu'elles ne reprennent que les étapes 1, 2, 3, 4 et 19 sans pouvoir les relier entre elles, tandis que AHA propose une démonstration par l'absurde à caractère numérique en faisant apparaître les propriétés incontournables des nombres réels au moyen de l'axiome des intervalles emboîtés.

6.2.1.2.1 Type d'approche choisi

- 13 préparations sur 24 vont proposer ce qu'ils appellent la « démonstration[261] » avec les théorèmes, c'est-à-dire la praxéologie à trous, les théorèmes étant mentionnés en début de leçon ou cités dans le cours de la démonstration. Parmi elles, une étudiante développe la démonstration complète sur le cas d'une fonction constante.
- 7 préparations vont se passer des théorèmes, mais utiliser quand même la tangente sous forme d'illustration comme dans Actimath. Nous avions à ce sujet fait remarquer que le tracé de tangentes sur une courbe visiblement croissante correspondait plutôt à la condition nécessaire.
- 4 préparations se passent des théorèmes et de la notion de tangente (description ci-dessous).

En associant les deux premières catégories, il y a donc 20 préparations sur 24 qui adoptent la « praxéologie à trous », donc un discours de niveau 2bis.

Signalons de plus que la proportion d'étudiants utilisant directement le discours intermédiaire (théorèmes et figures) a diminué en passant de presque deux tiers à la moitié. Inversement, on observe une augmentation du nombre de préparations se passant des

[261] Les personnes participant aux entretiens ont souvent jugé certains manuels « non rigoureux parce qu'ils ne faisaient pas la démonstration ».

théorèmes mais utilisant le tracé de tangentes sur une courbe pour justifier à la fois la condition nécessaire et la condition suffisante (voir au 6.2.1.2.3).

6.2.1.2.2 *Approches alternatives : discours de niveau 0 ou de niveau 1*

Parmi les 4 préparations n'utilisant ni les théorèmes, ni la notion de tangentes, on trouve :
1) 2 préparations qui proposent l'étude du lien entre le signe de la dérivée et les intervalles sur lesquels on peut dire que la fonction est croissante (ou décroissante). Les deux sont proposées par des étudiantes en fonction depuis au moins 2 ans. Etant connue l'expression analytique de la fonction, un calcul algébrique permet de repérer les intervalles de croissance qui sont alors mis en correspondance avec les intervalles sur lesquels la dérivée est positive.
Même si la croissance est établie par calcul et non plus par constat, la conclusion reste de l'ordre de la constatation puisqu'il s'agit de déduire le critère à partir des colonnes d'un tableau, sans rechercher les causes de cette correspondance.
2) Une préparation qui propose un problème d'optimisation amenant à poser la question « *si f est croissante entre 2 points d'abscisse a et a+h , comment être sûr qu'elle le sera pour toute valeur de h ?* » Les résultats sont alors énoncés à la suite d'un discours ne faisant intervenir que le quotient différentiel.
C'est finalement le seul cas de recherche d'un discours de niveau 1, proposé par un étudiant n'ayant pas fait d'études universitaires en mathématiques.

6.2.1.2.3 *Utilisation des tangentes*

Dans certaines préparations, le lien entre le signe de la dérivée et le coefficient directeur de la tangente est explicitement rappelé en début de leçon. Nous observons deux manières de procéder : donner une courbe représentant une fonction « visiblement croissante » avec le tracé d'une tangente recouvrant tout l'arc de courbe concerné ; ou donner une courbe représentant une fonction non monotone et tracer des tangentes en quelques points. En général, la fonction n'est pas explicitée et nous avons détaillé au chapitre 4 l'ambiguïté de cette figure censée démontrer à la fois que la positivité de la dérivée est nécessaire et qu'elle est suffisante.

6.2.1.2.4 *Remarque sur les énoncés et théorèmes*

Si les théorèmes de Rolle et Lagrange sont correctement énoncés, on observe aussi des phrases comme

> *on voit que f est croissante*
> ***ssi** la tangente est une droite croissante*
> ***ssi** la pente de la tangente est positive*
> *(dans 2 préparations).*

Quant au théorème de Lagrange, nous remarquons dans une préparation une tendance à mettre en avant son interprétation graphique :

> *le théorème de Lagrange exprime que*
> *Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b [alors il existe au moins un réel c de]a,b[tel que la tangente au graphe cartésien de f au point (c,f(c)) soit parallèle à la droite comprenant les points (a,f(a)) et (b ;f(b))*
> *ce qui se traduit par*
> *Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b [alors il existe au moins un réel c de]a,b[tel que* $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

De même que dans les manuels, les préparations présentent le théorème de Rolle comme un cas particulier, donc plutôt une conséquence, du théorème de Lagrange. Seul un étudiant précise que le théorème de Lagrange est démontré en utilisant le théorème de Rolle sur une fonction particulière. Remarquons aussi le cas d'une étudiante qui parvient à écrire les deux versions dans une même préparation.

6.2.1.2.5 *Sur les intervalles de* $\mathbb{R}$

Notre analyse théorique, et le discours de A.H.A, ont mis en évidence que ce sont les notions de réel et d'intervalle dans $\mathbb{R}$ qui sont en jeu dans ce résultat. Cette question est complètement éludée dans les préparations faisant appel au tracé de tangentes en quelques points et concluant « *la dérivée est toujours positive* », mais semble « laisser des traces » dans 2 préparations posant clairement la question d'être sûr de la croissance « *sur un intervalle entier* » ou « *en tout point d'un intervalle* », ou « *entre a et a+h pour tout h* ».

6.2.1.2.6 Conclusions

Il nous apparaît donc que les étudiants adoptent en grande majorité la transposition proposée par les manuels classiques, en comblant les trous par l'utilisation de la notion de tangente. Nous pouvons aussi constater que seulement 4 étudiants (un sixième) manifestent un questionnement en adoptant une autre transposition ou, dans une moindre mesure, en rétablissant l'ordre dans les théorèmes de Rolle et Lagrange. De plus, cette proportion est en diminution sur les trois années observées.

En termes de niveau de discours, il n'y finalement qu'une préparation manifestant la volonté de rechercher un discours de niveau 1, les autres étant du niveau 2bis ou 0.

6.2.2 Analyse de manuels faite par les étudiants

6.2.2.1 Le rôle de la rigueur pour les élèves-professeurs

Nous avons constaté dans la section 6.2.1 que les élèves-professeurs s'orientent plus facilement, d'une part, vers une approche de la dérivée à partir de la tangente au risque de faire apparaître une définition circulaire et, d'autre part, vers ce que nous avons appelé une praxéologie à trous consistant en une adaptation du discours théorique complet mais en en supprimant certaines parties supposées « non démontrables » à l'adresse des élèves, tout en acceptant d'en garder d'autres, à savoir des théorèmes non démontrables eux-mêmes mais qui peuvent être illustrés moyennant le recours à la notion de tangente et donc à l'évidence visuelle.

Dans un premier temps, ces observations nous confirment la remarque d'I. Bloch (2005), à savoir que les élèves-professeurs ne « *questionnent pas la transposition du secondaire* ». Dans un deuxième temps, nous pouvons de plus dire qu'ils l'acceptent consciemment puisqu'ils ont opéré des choix dans les manuels qui contenaient aussi la possibilité de faire autrement. Mais elles ne nous donnent pas directement accès aux raisons qui les ont amenés à s'orienter vers ces approches, raisons qui, d'après notre hypothèse, seraient liées à leur posture vis-à-vis de « la rigueur mathématique » et au fait que l'appropriation d'une posture relevant d'une rationalité différente est une difficulté qu'ils rencontrent dans le contexte institutionnel de la formation initiale.

Un premier ensemble d'observations complémentaires témoigne du fait que ces choix sont liés à la manière dont les élèves-professeurs évaluent la rigueur de certaines approches. Il s'agit des réponses des étudiants FUNDP au questionnaire concernant différents documents sur l'introduction de la dérivée. Ces documents étaient :

- document I : un extrait d'une préparation faite par une étudiante des années précédentes, basé sur un problème de vitesses ;
- document II : extrait concernant la tangente dans une leçon d'un professeur expérimenté. Partant de la tangente au cercle, cet extrait propose une sorte d'animation graphique pour aboutir à la définition en limite de sécantes ;
- document III : l'extrait du manuel Actimaths (analyse au Chapitre 4) ;
- document IV : les extraits de l'ouvrage A.H.A sur les tangentes et les dérivées.

Rappelons qu'il leur était notamment demandé 1) de dire quelle était pour eux l'approche la plus (la moins) rigoureuse et pourquoi ; et 2) de préciser ce qui, pour eux, était bien défini dans ces documents ou restait au niveau de l'intuition. Voici ce que nous indiquent leurs réponses.

6.2.2.1.1 Embranchement entre discours 1 et discours 2bis

Les premières réponses des étudiants aux questions sur le caractère plus (ou moins) rigoureux des approches proposées vont rapidement mettre en évidence que ce « critère » est important. En particulier, ces questions vont tout de suite amener à ne plus considérer que deux documents : le III, que nous avons analysé comme caractéristique du discours 2bis et de l'ostension déguisée ; et le IV qui s'annonce comme un discours de niveau 1.

En effet, l'approche considérée comme étant la plus rigoureuse est :

-la III (c'est-à-dire le manuel Actimath) pour 6 étudiants sur 8 ;

-la IV (c'est-à-dire le manuel AHA) pour 3 étudiants sur 8.

L'approche jugée la moins rigoureuse est :

-la II (extrait de leçon) pour 5 étudiants sur 8 ;

-et la IV pour 3 étudiants sur 8.

Ces premiers chiffres nous donnent déjà confirmation du fait que la rigueur est pour eux une notion problématique et source de contradictions dans la mesure où :

1) l'approche heuristique de AHA peut être évaluée aussi bien la plus rigoureuse (3 sur 8) que la moins rigoureuse (3 sur 8) ;

2) l'un des étudiants indique *ex aequo* les ouvrages III (ostension déguisée) et IV (heuristique) en réponse à la première question.

Soulignons enfin que la III, que nous avons analysée comme caractéristique de l'ostension déguisée et du discours 2bis, est majoritairement sélectionnée comme « la plus rigoureuse ». Nous allons donc chercher à connaître comment ils évaluent cette rigueur.

Un premier type d'arguments concerne le fait pour une approche « *d'être complète* », c'est-à-dire « *d'aborder un bon nombre de facettes* » ou de « *donner toutes les définitions* ».

Par exemple, un étudiant dira à propos de A.H.A :

> *C'est manifestement le plus rigoureux, car il aborde un bon nombre de facettes de la dérivée.*
> *[…] en partant premièrement des études des tangentes à des courbes polynomiales et de leurs pentes ;*
> *[…] ensuite en utilisant des exemples faisant appel aux notions de vitesses ou de débit…*

Un autre dira à propos d'Actimaths :

> *Il étudie avec autant de rigueur le développement jusqu'aux dérivées,*
> *[…] et est très complet pour ce qu'on a à apprendre aux élèves.*

Un deuxième type d'arguments se rapporte au fait « *d'être adapté (ou adéquat) au public du secondaire* ». Nous avons rencontré cet argument sous différentes formes dans les réponses sur la rigueur de l'approche, alors que la question de cette adaptation ne leur était pas posée. Nous avions déjà constaté lors de l'expérience du vase conique que les élèves-professeurs se positionnaient vite comme « *devant le donner tel quel en classe* ». Certaines réponses à notre question confirment qu'ils imaginent tout de suite le cas où ils devraient présenter le manuel à des élèves, et que, de plus, ils n'imaginent pas avoir à le questionner ou à adapter leur discours. Concernant A.H.A, les critiques portent le plus souvent sur la longueur du discours[262] :

> *Il semble beaucoup trop long pour être utilisé dans son entièreté à la préparation d'un cours.*
> *(à propos de A.H.A)*

> *Il y a beaucoup de calculs et le paquet est trop gros à avaler pour un élève […] je ne pense pas que les élèves parviendraient à suivre le fil.*
> *(à propos de A.H.A)*

> *Cette approche demandera beaucoup plus de temps en classe que les autres…*
> *(à propos de A.H.A)*

Concernant Actimaths, on trouve des réponses proposant le même argument mais sans réelle explication :

> *La troisième me parait la plus rigoureuse. Elle me semble en tous cas la plus adéquate parmi toutes ces différentes façons d'introduire la dérivée.*
> *(à propos de Actimaths)*

mais aussi

> *Je ne suis pas convaincue que cette méthode d'introduction (exemples pour dégager une notion unique de dérivée) soit la meilleure manière d'aborder une manière pour les élèves.*
> *(à propos de Actimaths)*

On trouve par exemple ces critiques sur le contenu de A.H.A qui montrent que les étudiants n'ont pas cherché à lire le discours sur le plan mathématique :

> *Il est également supposé que la tangente ne doit pas rencontrer la courbe, cependant un peu plus loin, on accepte finalement que la tangente puisse couper la courbe. Autant d'imprécisions qui peuvent induire les élèves en erreur…*
> *(à propos de A.H.A)*

> *Cette approche ne me parait pas adaptée pour l'introduction de la dérivée à des élèves de secondaire (car) elle insiste trop sur des choses qui ne sont pas d'un grand intérêt pour eux.*
> *(à propos de A.H.A)*

Enfin, une étudiante remarque que le texte n'est pas forcément destiné aux élèves mais à leurs professeurs :

[262] A ce sujet, A.H.A propose un discours rédigé contrairement aux manuels, ce qui peut poser la question de la forme écrite du discours.

> *Le texte IV est plutôt prévu pour des personnes ayant déjà terminé leurs études secondaires.*
> *(à propos de A.H.A)*

Un troisième type d'arguments se rapporte à l'utilisation d'un vocabulaire ou de « rubriques » possédant un caractère suffisamment « standard ».

Celui-ci peut correspondre au discours théorique :

> *Cette approche contient les termes mathématiques exacts.*
> *(à propos d'Actimaths)*

> *Cette approche est rigoureuse dans l'enchaînement et dans les définitions de ces notions. En effet, elle introduit un vocabulaire mathématique tels que les points stationnaires, points anguleux…*
> *(à propos d'Actimaths)*

> *Il manque les formules de dérivation.*
> *(à propos de A.HA)*

ou même

> *Des dessins précis.*
> *(à propos d'Actimaths)*

Le caractère canonique peut aussi être attribué au fait de correspondre à une approche déjà rencontrée :

> *Je ne me sens pas à l'aise dans la quatrième approche (qui) aborde la dérivée et la notion de tangente d'une façon bien différente de celle qui m'a été donnée (dans le secondaire). Je n'avais jamais abordé la tangente à l'aide d'addition de deux fonctions.*
> *(à propos de A.H.A)*

et

> *Je ne me sens pas à l'aise dans la quatrième, celle-ci étant sans doute la moins proche de la façon dont j'ai moi-même appris la dérivée.*
> *(à propos de A.H.A)*

De même, la terminologie utilisée semble pouvoir intriguer ou rassurer :

> *(dans aha), on voit la dérivée comme pente de la tangente, mais elle est appelée « limite du quotient différentiel ».*
> *[..]*
> *(dans actimaths) on voit les notations Δt, h, Δx, […] et je trouve bien que les élèves connaissant les deux formulations avec limite quand x tend vers a ou limite quand h tend vers 0.*

Dans les rares cas où les étudiants fournissent une explication à leur évaluation de la rigueur d'un document, nous voyons donc apparaître plus souvent des références à la rigueur comme formalisme que comme recherche de rationalité.

De plus, il semble que les documents ne puissent être lus en tant que « discours mathématique ».

6.2.2.1.2 *Sur la définition de la tangente et de la dérivée*

Ayant déjà souligné comment la dérivée est souvent définie sur base d'une tangente non définie, ou définie comme limite de sécantes, nous avons relevé dans les évaluations comment les étudiants acceptaient les définitions proposées. Rappelons que ces étudiants avaient auparavant réalisé l'exercice du vase conique introduisant la dérivée sans passer par la tangente ni même la limite, type d'approche qui leur est précisément proposé dans le document IV (AHA).

Les arguments cités ci-dessous nous montrent qu'ils restent plus sensibles à des définitions de la dérivée « passant par » la notion de tangente et à des définitions de la tangente comme limite de sécantes (documents II et III) :

> *La définition de la tangente est clairement énoncée dans le document II.*
>
> *Généralement, la notion de tangente est très bien définie dans chaque document, et la notion de pente un peu moins.*
>
> *Notions de tangentes : approche très claire dans le texte II.*

Voici plus spécifiquement les arguments concernant Actimaths au sujet duquel nous rappelons que la définition n'y est jamais donnée :

> *La définition de dérivée est donnée comme pente de la limite des sécantes qui est la tangente.*
> *(à propos de Actimaths)*

> *(le III) introduit clairement et rigoureusement les définitions qui nous intéressent.*
> *(à propos de Actimaths)*

> *Le III est une approche très rigoureuse, étant donné qu'on y donne les définitions correctes de la tangente, la pente de la tangente, du taux d'accroissement et finalement de la dérivée.*
> *(à propos de Actimaths)*

En général, l'approche spécifique de A.H.A concernant la tangente n'est pas perçue par les étudiants qui ne prennent pas conscience qu'il s'agit d'un discours préalable à la définition. Ceci laisse donc supposer que la nécessité d'un travail de construction des concepts, et donc l'existence d'une rationalité de type I, leur sont étrangères :

> *La dérivée et sa définition se retrouvent clairement définies dans ces approches […], le quatrième document (aha) ne définit pas la notion de tangente aussi bien que dans les autres approches […] par exemple, ils parlent de la tangente comme « une droite qui frôle la courbe », ce qui me parait une belle preuve de manque de rigueur.*
> *(à propos de A.H.A)*

ou encore

> *(dans aha) ils risquent de s'attarder trop sur d'autres concepts comme les tangentes.*
> *(à propos de A.H.A)*

Nous pouvons aussi remarquer que le passage par la tangente pour définir la dérivée reste perçu comme naturel, malgré l'expérience précédente du vase conique. Pour une étudiante :

> *La tangente est un élément essentiel à l'établissement de la notion de dérivée.*

Cependant certaines contradictions sont exprimées. Arrêtons-nous pour cela sur les propos d'une étudiante qui dit :

> *Je pense que tout le monde a une notion intuitive de la tangente et pente de la tangente. De même il est assez intuitif de voir le lien entre la pente de la tangente et la variation d'une fonction. Par contre à la fin des leçons, les notions de pente de la tangente et dérivée sont vraiment données et ne sont donc plus intuitives. Pour ce qui est de la tangente, je trouve qu'il reste un minimum d'intuition, étant donné qu'elle est définie comme une limite de sécantes.*

et dans le même temps *:*

> *Pour définir la notion de tangente et de pente de la tangente je préfère l'approche III en calculant le taux d'accroissement d'une droite en deux points et en rapprochant les points de plus en plus. Pour moi, ceci est plus parlant que l'approche avec les vitesses moyennes et instantanées…*

Ceci nous permet aussi d'observer qu'ils ne sont pas conscients des difficultés évoquées dans notre analyse théorique. En effet une seule étudiante parle de la connexion géométrie/analyse *:*

> *L'organisation qui structure ces productions est celle de la géométrie bien que les dérivées soient du domaine de l'analyse.*
> *[…] car la notion de tangente à une courbe est omniprésente.*
> *[…] c'est facile parce qu'il est tout à fait possible d'avoir une représentation graphique en dimension 2 […] et de s'imaginer les tangentes en ces points…*

D'après nous, ces remarques peuvent laisser penser que, même si la référence au cadre géométrique pour introduire la dérivée n'est pas toujours satisfaisante, elle est plus facile à admettre qu'une approche avec les vitesses. Nous avions à ce sujet relevé précédemment qu'un manuel proposait une activité à caractère cinématique mais en l'accompagnant d'une petite phrase « énigmatique » : « *en passant des grandeurs à leurs mesures* ». Les seules fois où nous avons rencontré des préparations s'en inspirant, la question n'était pas traitée. Une interprétation pourrait être qu'une vision des mathématiques comme instrument de modélisation est moins facilement admise que la référence à un autre cadre proprement mathématique.

Il nous parait intéressant de constater que ces propos n'ont pas permis de définir une posture spécifique à chaque étudiant, et reflètent en cela la contradiction ressentie par chacun quand il s'agit de rigueur. Nous constatons aussi le petit nombre d'étudiants conscients des difficultés sous-jacentes (2 sur 8), tout en sachant que cela n'empêchera pas ces derniers d'adopter en classe l'approche du manuel III.
Enfin la problématique de modélisation en mathématiques apparaît ici de la même manière que dans les préparations : « les *exemples concrets permettent de savoir à quoi ça va servir* », donc pour des applications ultérieures, en évitant de faire référence au fait que les objets mathématiques pourraient trouver leur origine dans une recherche de « *modélisation du réel* » (Douady, 1992). Si nous prenons en compte que ces étudiants avaient effectué l'exercice du vase conique, il apparaît donc que la seule pratique d'une rationalité de type I n'est pas suffisante pour en permettre la mobilisation ultérieure.

6.2.2.2 Sélection d'approches contrastées

Il avait été demandé aux étudiants de sélectionner deux approches contrastées de la dérivée et de les exposer. Des entretiens ont également eu lieu dans le cadre de pratiques réflexives.

Nous ne détaillerons pas ici les informations recueillies qui, pour l'essentiel, confirment celles présentées par ailleurs. Signalons seulement comment un étudiant avait exprimé à sa façon la difficulté d'une présentation strictement numérique et la tentation d'y associer la tangente :

> *Comme ça le numérique te saute aux yeux, sinon…*

Pour faire suite aux difficultés déjà constatées dans l'analyse des préparations et l'analyse de manuels, nous ne reprendrons que ce qui concerne la difficulté à définir la tangente, et en particulier à concilier le point de vue géométrique avec le point de vue de l'approximation affine.

A la suite de cet exercice, il a été demandé aux étudiants de formuler quelle définition de la tangente ils donneraient pour faire suite à deux des approches présentées : l'une par un faisceau de droites et l'autre selon la recherche d'un développement d'ordre un. Comme on va le voir, la définition liée à l'approximation affine semble problématique mais cette difficulté se traduit par une absence de définition tandis que, dans le cas de l'approche géométrique, la difficulté va se traduire par une certaine variété dans les formulations. Nous avons recensé dans le tableau ci-dessous les différentes définitions telles qu'elles sont classées par les étudiants.

	Approche par un faisceau de droites	**Approche par l'approximation affine**
1	La tangente est la droite qui frôle la courbe en un point	La tangente est une droite qui frôle la courbe en un point A, et à ce point on remplace la courbe par sa tangente
2	On verrait comme la tangente est une droite qui passe uniquement par un point de la courbe et définit son taux d'accroissement	/
3	Une droite qui n'a qu'un seul point commun avec la courbe (dans les deux cas $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	Une droite constituant une sorte de limite numérique d'une droite donnée comme exemple
4	La tangente est vue comme une droite passant par un point de la courbe. La pente de cette droite sera donnée par $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	Une droite qui aurait un coefficient angulaire égal aux valeurs numériques (dérivée) et qui passerait par un point de la courbe (dont l'expression analytique est donnée)

	Approche par un faisceau de droites	Approche par l'approximation affine
5	C'est la droite qui détermine le mieux le taux d'accroissement d'une courbe, c'est la limite d'un taux d'accroissement $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	Droite dont les points sont calculés via un tableau et touchant une courbe donnée en un point
6	La tangente est la droite qui colle à la courbe, 1 point commun avec la courbe -> dessin via calcul de la pente	/
7	La tangente en un point de la courbe est la droite qui passe par ce point et ne coupe la courbe qu'en ce point sans être sécante à la courbe	La tangente…
8	Droite qui a un seul point d'intersection avec la fonction considérée en un point donné	/
9	C'est une droite qui coupe la courbe en un seul point et qui décrit localement le taux de croissance de cette courbe	/
10	C'est la droite qui représente le mieux le taux d'accroissement de la courbe en un point de celle-ci	C'est la droite dont l'équation « approche » le plus l'équation de la courbe donnée au départ en un point Approche : quand on résout les 2 équations avec des valeurs proches du point où l'on veut la tangente
11	Droite qui « colle » le mieux à la courbe en un point donné et par conséquent la droite qui ne coupe la courbe qu'en un point	/
12	La tangente de la courbe en un point (a) est la limite des droites passant par 2 points de la courbe, lorsque les 2 points tendent vers (a)	La tangente à la courbe en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point
13	Tg=droite qui ne coupe la fonction qu'en 1 seul point et qui renseigne sur la pente de la fonction en ce point	Tg= ?
14	Limite d'une suite de sécantes au graphe de la fonction (en fait, limite d'une suite de fonctions)	La droite qui approxime le mieux la fonction en un point

Cette confusion rappelle celle rencontrée dans les préparations. Remarquons que la problématique d'intersection en un seul point reste prédominante en étant citée dans tous les cas. Sa combinaison avec l'autre point de vue aboutit alors à des expressions comme « frôler en un seul point » ou « approxime en un point » ou « coller en un point, ou même « toucher en un point ». De manière générale, les deux points de vue ne sont donc pas mis en relation, comme si ce n'était pas la même droite.

Dans l'ensemble, les définitions apparaissent en fait comme des expressions tentant de tenir compte à la fois de l'objet mental, du concept géométrique et du concept analytique, mêlant alors les rationalités associées. La définition proposée par le 11 est un exemple de « pseudo-raisonnement » en associant une première conception « coller le mieux en un point » qui se traduit directement par « ne coupe qu'en un point », le rapport devant se faire naturellement (« et par conséquent »).

La dernière définition constitue une exception. Elle est donnée par un étudiant qui a d'emblée interprété la « limite de sécantes » comme une convergence dans un ensemble de fonctions du premier degré, et qui se situe en fait dans un cadre II mais non explicité.

Les autres exceptions concernent l'étudiant(e) 10 qui fournit deux définitions relevant d'une rationalité de type I dans la mesure où elles sont susceptibles de motiver un travail de précision du concept. De même pour les 2, 5 et 9 dans le cas de la définition d'après le faisceau. La proportion d'étudiants discernant le niveau de rationalité dans lequel ils travaillent reste donc faible (4 sur 14).

6.2.3 Discours sur les préparations

Nous décrirons ici ce qu'écrivent les élèves-professeurs au sujet de leur propre préparation d'une leçon portant sur la dérivée ou sur le critère de croissance.

Dans une première partie nous reprendrons les propos de jeunes professeurs décrivant en quoi consiste en général pour eux la préparation d'un cours. Nous y verrons que leurs objectifs sont centrés sur les élèves et les moyens de dépasser les difficultés supposées.

Dans une deuxième partie nous chercherons à cerner comment ces objectifs guident la préparation d'une leçon sur l'un des sujets nous intéressant dans cette étude. Nous tenterons alors de mettre en évidence les « aller-retour » entre les niveaux S_{+1} de conception du projet et S_{+3} des valeurs sur l'enseignement, en montrant que les références au niveau S_{+2} du thème mathématique n'interviennent que pour maintenir la conformité au discours de niveau 2.

Mais le questionnement sur la définition de la tangente ainsi que le recours à des arguments sur « le support visuel » vont alors construire le discours de niveau 2bis.

Une dernière partie illustrera plus directement la construction de ce discours intermédiaire puisque nous pourrons l'observer via la réflexion d'une même étudiante qui changera complètement de posture.

6.2.3.1 Chassé-croisé entre les niveaux de discours

Une enquête sur les préoccupations de jeunes professeurs lorsqu'ils préparent leurs leçons fait apparaître un souci réel d'aider les élèves à apprendre en même temps que le souci de « faire les choses comme il faut ». Lorsque nous menons cette analyse sur un thème mathématique précis, un premier souci de conformité aux textes officiels est assez manifeste et semble guider le choix dans les documents consultés :

> *Est-ce que mes objectifs correspondent bien aux objectifs spécifiés dans le programme officiel ? Sont-ils clairs et précis ?*
> *PR-1*

Mais ce souci de conformité semble aussi légitimer le fait de se contenter de certains textes. Par exemple l'étudiant(e) 3 propose d'enlever « *les textes trop compliqués pour les élèves* ». On retrouve ici la forme « perverse » d'empirisme consistant à penser les élèves incapables de s'attaquer à toute forme de théorisation :

> *Le programme nous donne une idée de ce qui nous est demandé de voir et souvent de la manière de l'aborder. Nous avons également une idée sur l'ordre des différents points à enseigner.*
> *[..]*
> *Nous essayons de trier les informations en enlevant les textes trop compliqués pour les élèves, ceux hors programme ainsi que ceux qui contiennent des erreurs*
> *PR-3*

Ce souci s'accompagne rapidement d'inquiétudes quant au respect des méthodes préconisées, le discours pédagogique reprenant alors le dessus.

Cela peut se manifester dans la volonté de montrer l'utilité de la notion :

> *Comment donner une représentation de la notion qui « parle » aux élèves ? Comment démontrer son utilité pratique ? Que donner comme exemples concrets ?*
> *PR-1*

Une autre manifestation est l'intention de « faire découvrir le savoir par les élèves » :

> *Nous aimerions que les élèves soient amenés à trouver par eux-mêmes plusieurs éléments de réponse. Pour les aider dans leur recherche, nous préférons organiser trois exemples intuitifs sous forme de petites questions. Ils peuvent alors avancer pas à pas dans cette nouvelle matière en complétant les feuilles qui leur sont distribuées.*
> *PR-4*

On peut aussi vouloir suivre la méthode du cours programmé, impliquant alors l'attachement aux prérequis :

> *Pour me conformer au principe de cours programmé qui veut que l'on puisse lors d'une séquence d'enseignement, progresser par un grand nombre de petites étapes bien assurées, je me devais d'expliquer tous ces concepts pour garantir le même prérequis à tous les élèves, ce qui prendrait plus de temps et risquerait de nous écarter du sujet en suscitant d'autres questions.*
> *PR-5*

Ces préoccupations d'organisation relèvent en fait des niveaux S_1 (conception de leçon) et S_3 (valeurs sur l'enseignement) dans le modèle de C. Margolinas. Le chassé-croisé entre ces deux niveaux pourra-t-il passer par le niveau S_2 du thème mathématique ?

On commence à trouver des références au savoir en termes de prérequis à la leçon en préparation. Ces pré-requis, en l'occurrence la notion de limite, ne vont apparaître que sous une forme assez générale du type « libellé de contenu » sans que les étudiants n'expriment une prise de conscience que seule une forme particulière de limite est traitée (la limite 0/0) et que cette forme n'est que l'écriture d'un phénomène précis, à savoir la signification à accorder au quotient de deux quantités qui tendent vers 0 en même temps (l'ultima ratio de Newton). Autrement dit, leurs discours montrent qu'ils restent dans le niveau S_1 (projet de leçon) , avec des incursions dans le niveau S_3 des valeurs sur l'enseignement, sans « remonter » spontanément au niveau S_2 du thème mathématique.

> *Comment faire le lien avec la matière vue lors des cours précédents (limite, asymptote, continuité) ?*
> *[..]*
> *Est-il nécessaire de faire un rappel sur les limites ? Non*
> *[..]*
> *Rafraîchir les idées des élèves au sujet des accroissements, taux d'accroissement, coefficients angulaires, sécantes et tangentes. De cette manière il est plus simple de faire le lien avec la notion de dérivée. Mais comment définir ces notions ? Faut-il en donner une définition rigoureuse ?*
> *PR-1*

et

> *Doit-on envisager une leçon transitoire ? Par exemple, il faudra avoir vu le calcul des limites. Si ce n'est fait, prévoir un chapitre avant celui des dérivées.*
> *PR-3*

Par contre, une autre forme de référence au savoir va consister en une série de questions d'ordre théorique permettant en quelque sorte de rester conforme au discours 2 :

> *Le nombre dérivé apparaît comme le pilier de la théorie des dérivées. Est-ce vraiment le cas ?*
> *Oui car en découle la définition de fonction dérivée.*
> *[..]*
> *Va-t-on parler du calcul des dérivées des fonctions usuelles avant même la définition d'une fonction dérivée ?*
> *[..]*
> *Quelle est la définition du nombre dérivé en un point à adopter ? Faut-il demander que le point a soit non isolé du domaine ? Pourquoi ?*
> *La limite doit-elle être finie ? réelle ?*
> *Doit-on démontrer la dérivée de la fonction trigonométrique ?*
> *[..]*
> *Doit-on parler des points anguleux lors des fonctions non dérivables ?*
> *Attention, il manque un théorème important qui lie la notion de dérivabilité et celle de continuité. Bien spécifier que la réciproque est fausse en utilisant l'exemple de racine de x.*
> *PR-3*

> *Propriété : le domaine de dérivabilité est toujours inclus ou égal au domaine de définition de f. Faut-il faire la démonstration de cette propriété ?*
> *PR-4*

> *Je sais qu'il faut être prudent avec les si et seulement si et qu'il n'est pas nécessaire de les mettre partout. [..]*
> *Faut-il demander f continue sur [a,b] ou sur]a,b[?*
> *[..]*
> *Si je veux une condition nécessaire et suffisante, il faut que j'introduise les points isolés.*
> *PR-6*

Il semble alors que l'entrée dans le niveau S_2 du thème mathématique ne se fasse que pour « rester mathématiquement propre ». Mais alors il y a très vite des « impossibilités » qui vont rapidement amener à ne pas rester très longtemps dans un niveau technologico-théorique pour arriver rapidement à la technique.

On retrouve cette préoccupation pour les notations :

> *Nous avons rencontré un problème pour déterminer les bonnes notations à utiliser :* Δf *ou* Δy
> *[..]*
> *Nous nous sommes demandés s'il fallait illustrer les deux cas suivants* $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ *et* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

> *[..]*
> *Le nombre dérivé de la fonction f en a est égal à la limite* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *si celle-ci existe dans* $\mathbb{R}$.
> *PR-4*

Ce qui n'empêche l'étudiant d'écrire ensuite :

> *Nous n'illustrerons la définition* $\lim\limits_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *que sur un seul exemple. En effet ils n'utiliseront plus jamais cette méthode pour calculer le nombre dérivé.*
> *PR-4*

De même l'étudiante 6 ci-dessous exprimait ouvertement (mais sans en être consciente ?) quelques contradictions quant aux rôles du théorème de Rolle et du théorème des accroissements finis. Directement après, on trouve un argument pédagogique selon lequel elle a le sentiment « de faire un cadeau aux élèves » en leur « donnant » la fonction F :

> *Je donnerai le théorème des accroissements finis et je ferai la démonstration grâce au théorème de Rolle, qui lui sera admis.*
> *[..]*
> *La première remarque à faire est que le théorème de Rolle découle du TAF. Alors pourquoi le voir ? Parce que la démonstration du TAF fait intervenir Rolle.*
> *Il suffit d'appliquer Rolle à la fonction* $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$.
> *Je ne demanderai pas aux élèves de retenir cette fonction. Si je leur pose cette démonstration lors d'une interrogation ou d'un examen, je la leur donnerai*
> *PR-6*

D'autres exemples montrent que les opportunités de rentrer dans le questionnement du savoir sont souvent « contrées» par un argument du niveau S_3 selon lequel il faut « faciliter l'apprentissage » :

C'est, par exemple, ce qu'on rencontre pour les réserves vis-à-vis de l'approche cinématique :

> *J'étais tenté de choisir l'exemple de mécanique ou de physique qui consiste à définir la vitesse moyenne comme le quotient entre la distance parcourue et le temps mis à la parcourir, puis la vitesse instantanée comme la limite de la vitesse moyenne. Mais je n'étais pas sûr que tous les élèves aient appris et compris tous les concepts impliqués dans cette définition.*
> *PR-5*

Dans le cas suivant, l'argument portant sur le savoir est en quelque sorte « encadré » par deux assertions du niveau S_3 :

> *Une situation problème s'inspirant d'un cas de la vie réelle serait idéale pour introduire la notion de dérivée. De cette manière, les élèves ne sont pas submergés dès le début par de la théorie.*
> *Le cas physique est celui qui vient immédiatement à l'esprit.*
> *Cependant il serait préférable de ne pas s'aventurer dans une analyse compliquée.*
> *PR-1*

Cette réserve nous donne à voir une forme de paradoxe dans les discours sur la vitesse dans la mesure où les étudiants cités ci-dessus pensent que l'approche cinématique va nécessiter un travail « trop compliqué » sur les notions en jeu, tandis que d'autres considèrent au contraire que ce sont des notions connues, au même titre que la tangente d'ailleurs :

> *Comme les élèves connaissent déjà la notion de vitesse et de tangente, ce serait intéressant de commencer par cela.*
> *PR-3*

Ce paradoxe nous paraît directement lié au fait qu'ils parlent tantôt de l'objet mental ou de la grandeur et tantôt de l'objet « mathématisé » sans toujours les distinguer. Au sujet de la tangente, nous allons rencontrer l'absence de questionnement :

> *Rappel : une tangente en un point A d'une courbe est la position limite d'une sécante quelconque issue de A lorsque le second point d'intersection tend à se confondre avec A.*
> *PR-4*

Mais nous allons aussi pour la première fois trouver un début de questionnement sur la définition :

> *Cette partie est importante car c'est ici que les notions de limite et dérivée sont abordées pour la première fois. Comment faire comprendre correctement aux élèves la notion de tangente de sorte qu'ils puissent voir le lien et s'en inspirer pour proposer une solution au problème…*
> *D'où la difficulté de donner une définition pour la tangente.*
> *PR-1*

Ce questionnement semble, dans un premier temps, l'amener à adopter la conception géométrique d'une droite possédant avec la courbe deux points d'intersection confondus :

> *Si les points A et B sont confondus, la tangente devient tangente à la courbe. C'est ce qui arrive notamment lorsque A reste fixe et que B se déplace sur la courbe vers A jusqu'à être confondu avec A.*
> *Une tangente à une courbe est une droite qui coupe cette courbe en deux points confondus.*
> *PR-1*

Mais il ne parvient pas à en déduire la nécessité d'un calcul de limite pour arriver à la dérivée. Il va ensuite écrire en parallèle :

> *1) est-il judicieux de faire intervenir une notion de limite pour des droites ?*
> *PR-1*

et

> *2) une tangente à une courbe est donc la limite de la sécante lorsque l'un des deux points d'intersection de la courbe et de la sécante se rapproche de l'autre jusqu'à être confondu avec lui.*
> *PR-1*

C'est pourtant cette définition qui sera choisie car elle lui permet d'en déduire le calcul (ou l'écriture ?) du coefficient angulaire de la tangente. On voit donc bien ici que c'est l'élève-professeur lui-même qui « tombe » dans l'obstacle géométrique de la limite :

> *Il résulte de cette définition que le coefficient angulaire de la tangente à une courbe C en un point est la limite du coefficient angulaire d'une sécante s comprenant le point A lorsque le point B tend vers A*
> *[..]*
> *Remarque : une tangente à une courbe peut couper celle-ci en un ou plusieurs points*
> *PR-1*

A partir de là, le discours de niveau 2bis devient la seule échappatoire au questionnement mathématique et le parcours vers ce discours va être appuyé par des arguments de niveau 0 palliant l'absence de rationalité mais qui sont de niveau S_3 sur le plan du milieu de l'élève-professeur : « il faut que l'élève voie bien. »

Ce type d'argument peut concerner le choix de la fonction, choix qui ne sera pas motivé par le fait qu'une fonction du second degré permettra d'autres validations du calcul, mais parce que « on voit mieux » :

> *Pour la tangente, nous voulions étudier une fonction usuelle de manière à réutiliser cette fonction dans la suite du cours. La fonction constante et la fonction identité n'étaient pas intéressantes car les élèves n'auraient pas pu observer le mouvement de cette droite, caractéristique de la tangente en un point d'une courbe. La fonction* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x^2$ *nous semblait appropriée. Cependant son graphique ne permettait pas de distinguer clairement l'évolution de la droite AB lorsque le point B se rapproche du point A. Nous avons donc opté pour la fonction* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto \frac{x^2}{4}$.
> *PR-4*

Ce type d'argument se retrouve encore dans le recours au registre graphique dont les élèves-professeurs pensent qu'il permet une autonomie dans la construction du savoir, autonomie qui n'est en fait ici qu'artificielle puisqu'elle repose sur une observation des courbes et non sur une lecture raisonnée :

> *Nous essayerons de faire deviner graphiquement aux élèves comment ils peuvent déterminer si une fonction est dérivable ou non en ce point.*
> *PR-4*

> *J'aimerais que les élèves découvrent l'énoncé (du théorème sur la croissance) par eux-mêmes. Je tracerai le graphique de $f(x)=x^2$ au tableau ainsi que quelques tangentes de chaque côté de l'axe de symétrie [..] Je pense que les élèves seront capables d'observer que la pente de la tangente est négative lorsque la fonction est décroissante et positive lorsqu'elle est croissante.*
> *PR-6*

6.2.3.2 Exemple d'un changement radical vers le discours 2bis

Attardons-nous ici sur le cas révélateur d'une étudiante racontant sa préparation de leçon sur « dérivée et variation ». Alors qu'au départ elle n'imagine pas utiliser la tangente, dont d'ailleurs elle ne se souvient même plus, elle va finir par en faire l'objet premier de sa leçon sur le critère de croissance, et ce avec un discours du type 2bis. Essayons de reconstituer le cheminement de cette étudiante que par ailleurs nous remercions d'avoir joué le jeu. Rappelons qu'il s'agit d'une production écrite et d'un seul tenant.

L'étudiante commence par affirmer :

> *Pour moi, la dérivée est la mesure d'une variation. Vingt ans après, c'est l'idée que j'en garde [et] quelque part dans ce premier cours, je ferai passer cette idée : une dérivée est la mesure d'une variation.*
> *[..]*
> *Je pourrai faire un bref rappel sur les concepts de variation, croissance, …*
> *[..]*
> *Calculer la dérivée d'une fonction, si cela est possible, nous permettra de mesurer la variation de cette fonction.*
> *PR-7*

Après lecture des programmes et recommandations sur les compétences :

> *Je retrouve les points que je comptais couvrir dans l'introduction : l'interprétation géométrique et physique. Pour la vérification de la plausibilité des résultats, je ne vois pas clairement en quoi consistent l'aspect numérique et l'aspect algébrique.*
> *[..]*
> *Par contre j'avais oublié la notion de tangente même si visuellement (dans ma tête), elle était bien là.*
> *Du coup je me rappelle une des présentations où la tangente à une courbe était vue comme la limite d'une sécante à une courbe lorsque un des deux points d'intersection*

> *tend vers l'autre et je me dis qu'il faudrait peut-être commencer par là. Mais que faire avec mon rappel sur les variations d'une fonction ?*
>
> *Au niveau de la matière, tout me parait clair, sauf la notion de nombre dérivé : je ne vois pas de quoi il s'agit. Et je sais que je dois faire attention à propos de la dérivabilité sur un intervalle : ouvert ou fermé ?*
> *PR-7*

Après recherche sur les potentialités de calculatrice et lecture des manuels, elle estime que :

> *[Actimaths propose trop d'activités avant d'arriver à un résultat et que la question des deux notations est embêtante et]*
> *La définition de la fonction dérivée vient seulement après l'interprétation géométrique par la pente en un point .*
> *[..]*
> *Il faut attendre la page 191 pour que le lien soit fait avec la croissance. Je pense que j'en parlerai plus tôt lors de la discussion sur la pente de la tangente.*
> *[..]*
> *Espace maths : une activité de calcul numérique avec approximation (ici je retrouve un point des compétences que je n'avais pas compris) et finalement une application physique (la vitesse).*
> *[.]*
> *L'interprétation géométrique vient plus tard et donc trop tard pour moi. Je ne suis pas d'accord avec l'idée de traiter l'interprétation géométrique sur le même plan que l'interprétation physique et économique car elle me semble plus générale, elle s'applique d'ailleurs par exemple au graphe de la fonction qui représente l'évolution du déplacement.*
> *PR-7*

Après consultation de son cours du secondaire

> *L'ennui c'est que ce professeur avait tendance à proposer des calculs à rallonge et sur les conseils de M. N, j'éviterai ce genre de calculs qui n'apportent rien au niveau des principes mis en œuvre et qui sont source de découragement pour les élèves.*
> *[..]*
> *C'est la troisième source qui sépare l'étude des variations de la fonction de la dérivée. C'est sans doute pour cela qu'il y avait deux titres possibles [..] Mais je ne renonce pas à faire le lien entre le signe de la pente de la tangente et la croissance ou décroissance de la fonction.*
> *PR-7*

Après lecture du cours de didactique spéciale,

> *On nous a dit que la variation de fonction est un sujet difficile, à préparer en détails, il faut éviter les pièges (dérivabilité sur un intervalle ouvert et non fermé) sans toutefois en parler aux élèves.*
> *PR-7*

Puis elle propose un projet consistant à

-Construire le graphe de $f(x) = -x^2 + 4$ (facilite les calculs et la visualisation)

-Déterminer (visuellement)les zones de croissance et décroissance

-Tracer une droite d passant par deux points donnés (sécante) et une droite d'équation donnée (qui s'avérera être la tangente)

-comparer les coefficients des droites d et t

-tracer d'autres sécantes d', d'', … et répondre aux questions

> *La droite d, d', ou d'' est-elle plus proche de la droite t ?*
> *Comment qualifier la position de t par rapport à la courbe ?*
> *PR-7*

-puis énoncer

> *La droite d se rapproche de plus en plus de la droite t. la droite t est appelée la tangente à la courbe f(x) au point a. une définition formelle sera donnée plus tard.*
> *[..]*
> *L'évolution des pentes des droites est 5, 6 ,7 et pour t, la pente est 8, ce qui confirme que les droites se rapprochent de plus en plus de la droite t.*
> *[..]*
> *Peux-tu établir un lien entre la pente de la tangente à la courbe en un point et la croissance ou décroissance de la fonction sur un « morceau de courbe « autour de ce point ?*
> *PR-7*

Après avoir établi au moyen d'un tableau de valeurs ce qui n'est finalement que la condition nécessaire, elle propose une série d'énoncés faisant référence à la tangente, pourtant toujours non définie :

> *Lorsque le point b se rapproche du point a, $h = \Delta x$ se rapproche de 0 et ${}^{\Delta f(x)}/_{\Delta x}$ se rapproche de la pente de la tangente t au point a.*
> *Traduisons en termes de limites lorsque x0 tend vers xa, c'est-à-dire h tend vers 0, ${}^{\Delta f(x)}/_{\Delta x}$ tend vers la pente de la tangente en a. Si on appelle m la pente de la tangente t au point a, en utilisant l'écriture des limites, on a*
> $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta f(x)}{h}$
> *[..]*
> *La pente de la tangente en un point de la courbe est donc la mesure (locale) de la variation de la courbe autour de ce point.*
> *PR-7*

6.2.4 Conclusions sur les travaux libres

L'analyse d'un premier groupe de travaux constitué de préparations de leçons et des discours correspondants nous montre la préférence spontanée des élèves-professeurs pour une définition de la dérivée à partir de la tangente supposée connue, puis pour la praxéologie à trous lorsqu'il s'agit d'établir le critère de croissance.

Cette préférence semble s'expliquer par la coexistence de deux phénomènes. Tout d'abord, nous observons une sorte de « fuite » devant toute forme de rationalité autre que la théorie mais aussi devant tout questionnement des concepts. De plus, la situation de préparation de leçon amène à justifier les choix effectués par des arguments de nature idéologique et non en termes du savoir mathématique visé.

Pourtant, il apparaît bien que les élèves-professeurs sont vite déconcertés dès que nous tentons de remettre en question ce qui leur paraît naturel.

Enfin, nous devons constater que la mise en œuvre effective d'une rationalité de type I, par exemple lors de la mise en situation du vase conique, n'a apparemment pas d'impact sur les pratiques et discours ultérieurs, ce qui constitue en soi une question pour la formation initiale et la recherche sur cette formation.

6.3 Dans les travaux guidés

Si les « travaux libres » permettaient d'observer la posture a priori des élèves-professeurs, une deuxième catégorie de travaux va consister à les confronter volontairement avec un projet d'enseignement relevant d'un autre niveau de rationalité.

6.3.1 Première expérimentation avec la brochure

6.3.1.1 Contexte et objectifs

La brochure dans sa version initiale et sans les commentaires a été proposée à des étudiants de l'ULg en octobre 2005. Ils ont pu l'étudier pendant environ 1h avant de répondre aux questions[263] :

[263] Précisons que d'autres questions étaient posées le même jour, dont une demandant l'explication de la résolution d'une équation du premier degré.

> *Lisez attentivement (et traitez) les situations présentées dans le document « étude d'un mouvement ».*
> *1) quel discours ce document vous inspire-t-il ?*
> *2) pouvez-vous imaginer de l'exploiter pour élaborer une leçon ? Pourquoi ?*

Bien sûr le court délai de cette première expérimentation ne visait pas le travail à plus long terme qui sera recherché dans les expérimentations ultérieures, travail qui s'avère effectivement nécessaire pour appréhender les enjeux, limites et potentialités du projet. De plus, cela a été volontairement proposé à des étudiants au début de la formation. Les informations ainsi recueillies vont en effet nous permettre d'identifier à quel point un tel projet est « orthogonal » à ce que les étudiants ont déjà comme représentation de l'enseignement des dérivées, représentations qui peuvent alors provenir de leur propre vécu scolaire, de leurs études universitaires ou de leur expérience d'enseignement quand il en ont une. Indépendamment de convictions individuelles, ces représentations sont certainement le résultat, et donc le reflet, de la déconnexion existant entre une praxéologie portant sur les grandeurs et une praxéologie portant sur les objets de l'analyse réelle proprement dite, comme le montre notre analyse du thème mathématique dans le Chapitre 4. Signalons aussi que le public était assez hétérogène au niveau des âges et des formations de base (mathématiques, physique, ingénieur).

Par rapport à l'étude plus « clinique » des préparations d'étudiants où nous pouvions comparer le nombre d'étudiants adoptant une organisation plutôt qu'une autre, nous chercherons plutôt ici à mettre en évidence comment les propos de chacun peuvent révéler la complexité du rapport au savoir. Nous proposons de regrouper leurs réponses selon diverses problématiques comme suit. Même si les problématiques sont entrecroisées (la difficulté à gérer mathématiquement des situations physiques est liée au fait de concevoir la physique comme une application), nous avons séparé deux axes : 1) les réactions spontanées au fait de proposer des situations hybrides mathématiques et physique et 2) comment les élèves-professeurs envisagent le rôle d'utiliser les dérivées.

6.3.1.2 Une approche orthogonale

Rappelons que les situations proposées l'étaient de manière « brute », c'est-à-dire sans les commentaires proprement didactiques, mais aussi sans les rattacher d'emblée à un sujet ou un thème précis comme c'est le cas dans les projets d'enseignement classiquement proposés par les manuels. Seule la mention « mouvement » pouvait être significative.

Nous verrons tout d'abord comment est perçu le mélange mathématiques et physique. Parmi ces propos, nous signalerons déjà la tendance à identifier dans le graphique proposé un phénomène physique connu, à savoir le MRU ou MRUA alors que les équations ne sont pas disponibles. Au-delà d'une erreur, cette identification permet alors souvent de justifier le discours par les lois physiques supposées établies.

Nous allons ensuite proposer les réponses des étudiants ayant perçu le lien des activités avec la notion de dérivée, mais le plus souvent sous forme d'application. Parmi les propos tenus, nous accorderons un intérêt particulier à ceux qui révèlent une absence de lien entre la notion de dérivée et la notion d'approximation.

6.3.1.2.1 Association mathématiques et physique

La nature du milieu est reconnue comme physique, alors que finalement seuls des arguments cinématiques sont nécessaires, et parfois même est accordée au discours qui pourra être tenu :

> *C'est un discours physique.*
> *2005-8*

Un avis courant sur une telle association de disciplines est de penser que la physique « concrétisera » des notions mathématiques. On n'est alors pas vraiment dans un choix d'organisation visant à élaborer des objets mathématiques pour modéliser des problèmes de physique, mais plutôt dans une forme d'idéologie pensant que « c'est le concret qui donne du sens ».

> *Ce sont tous des exemples qui concrétisent les maths, souvent considérées abstraites.*
> *2005-4*

> *Oui, dans le cadre des dérivées afin d'illustrer une notion mathématique qui peut sembler à certains abstraite, par des exemples concrets (MRU-MRUA-optimisation).*
> *2005-22*

D'ailleurs cette utilité de concrétiser n'est effectivement pas si unanime que cala :

> *Je pense que l'intérêt d'un tel document serait de justifier l'utilité des études de fonctions, de montrer à l'élève que ça peut être utile en physique, dans des problèmes concrets. Cependant je me souviens de mes premiers cours de mécanique en candidature*

> *et l'étude d'un mouvement me paraissait très compliquée. Je n'utiliserais donc pas ce document comme introduction d'une leçon. Mais peut-être est-il intéressant d'appliquer la théorie grâce à ces exercices ? je pense tout de même qu'ils s'adressent à des étudiants d'un bon niveau en mathématique.*
> *Je reste quand même perplexe en fait parce que je n'ai pas l'impression que ces exercices rendraient plus concrètes des notions telles que les graphiques, les variables dépendantes et indépendantes. Cela me semble trop compliqué. Je conserverais peut-être tout de même les exercices I et VI.*
> *2005-17*

Enfin, on trouve aussi l'avis assez courant, que la combinaison des disciplines crée une complexité :

> *Tout d'abord le choix des exercices et leur application à la physique complexifie, à mon avis, la matière*
> *2005-28*

Le premier propos cité parlait directement d'un discours physique, mais la nature pseudo-physique[264] du milieu va poser le problème du type de connaissances et d'arguments qui pourront être utilisés :

> *Il s'agit d'un curieux mélange entre une approche physique et une approche mathématique, aucun des deux n'étant poussé suffisamment loin pour soit se rattacher au sens physique, soit se rattacher à des bases mathématiques.*
> *2005-3*

ou

> *Les documents tels qu'ils sont fournis me laissent un peu perplexe. En effet, sans une bonne dose de physique pour introduire théoriquement la notion d'étude d'un mouvement, les exercices sont nettement au-dessus du niveau d'élèves du secondaire.*
> *2005-13*

On trouve parfois plus clairement l'idée que les mathématiques seront un outil pour des problèmes physiques, mais on y perçoit qu'il s'agira plutôt d'utiliser une pièce issue de la théorie et non de chercher un modèle mathématique de la vitesse :

> *On a des représentations graphiques de problèmes physiques. Ce qui est bien c'est que ces représentations graphiques peuvent être décrites par des formules mathématiques. Par après, et c'est certainement la partie la plus intéressante, on pourra interpréter physiquement les résultats de nos calculs.*
> *2005-14*

[264] Il n'est en effet pas demandé de traiter les problèmes de manière « complètement physique » en faisant intervenir les forces en présence.

> *L'explication de phénomènes naturels passe par la physique mais aussi par les mathématiques. Dans le cas présent, observer la position d'un corps en fonction du temps. Si cette fonction peut se traduire de manière mathématique, les outils mathématiques (dérivation) permettent facilement d'en tirer la vitesse et l'accélération.*
> *2005-19*

> *Je vois plus ce document comme une application physique au chapitre sur les équations/fonctions.*
> *2005-7*

La manière dont physique et mathématiques peuvent interagir est toutefois assez clairement perçu par certains :

> *La première partie des notes me fait vraiment penser à un début de cours de physique où on apprend ce qu'est la position, la vitesse et l'accélération d'un mobile avec tous les graphiques qui s'y rapportent. Ensuite, on essaie de caractériser ces mouvements par des équations mathématiques qui permettront de trouver des intersections, des zéros…..notions qui pourront alors être interprétées physiquement.*
> *2005-24*

Déjà présente dans le propos 13, la délégation à la physique de la définition des objets que l'on pourra manipuler est assez vite formulée:

> *Ces documents m'inspirent les cours de physique de 1ère candi math. [..] J'introduirais par exemple la lecture d'un graphique lors de l'étude des fonctions. [.. Iintroduire la notion de variable dépendante et indépendante[265] me semble aussi important. En ce qui concerne le reste je laisse cela au prof de physique… voire aux études supérieures.*
> *2005-20*

Se manifeste alors une possibilité de séparer ce qui est physique et ce qui est mathématique :

> *On ne voit pas de rapport direct entre les exercices (sauf ceux 1->5). Ceux-ci adoptent un point de vue plus physique (trajectoire, vitesse,…) Les 2 exercices suivants apportent un caractère plus mathématique. Ainsi dans ces 2 derniers cas, on voit apparaître plus clairement la notion d'optimisation et de dérivées.*
> *2005-25*

Il apparaît donc que la nature même du milieu pose rapidement le problème de l'argumentation qui sera possible et les élèves-professeurs vont très vite manifester une tendance à immédiatement interpréter les courbes proposées comme représentatives de mouvements spécifiques, en particulier à parler d'un MRUA dès que la représentation n'est

[265] Notons que cette référence aux notions de variable dépendante et indépendant est revenue très fréquemment, alors qu'elle n'apparaît jamais dans les manuels.

plus une droite, mais une courbe « croissante » dont la concavité est tournée vers le haut. Il ne s'agit pas ici pour nous de souligner une défaillance dans leurs connaissances, mais plutôt de réaliser, comme nous le verrons ultérieurement, que cela va leur permettre de tenir un discours (sur la vitesse et sur l'accélération) sur base des formules du MRUA. En quelque sorte, c'est comme si ces formules de physique pouvaient alors devenir le fondement du discours mathématique, ou plutôt le seul lien à gérer avec les grandeurs en jeu :

> *De la page 1 à 6 ce document m'inspire un cours d'introduction aux dérivées avec des exemples physiques (MRU-MRUA).*
> *2005-11*

> *Dans la partie II, je trouve la figure 5 très utile pour montrer la différence entre un mouvement rectiligne uniforme et un mouvement rectiligne uniformément accéléré.*
> *2005-22*

Bien sûr, on trouve aussi, et parfois chez le même étudiant, qu'il faut bien faire attention à l'allure de la courbe

> *A la question « décrire… » : identifier le type de courbe : linéaire ?quadratique ?cubique ?...*
> *2005-22*

Dans un premier temps, l'articulation entre mathématiques et physique est vue comme une possibilité de concrétiser, ou d'appliquer des objets mathématiques à des problèmes, et est bien perçu, sans doute sous l'influence du niveau S_3 des croyances et valeurs sur l'enseignement.

Mais cette articulation soulève rapidement une difficulté qui va résider dans une répartition des rôles respectifs. Qui définit quoi ?

Cette difficulté va s'exprimer dans les remarques sur la définition de la vitesse :

> *Nécessite un bon soutien du discours du professeur, notamment pour la notion de vitesse peu explicite.*
> *2005-10*

Il est souvent évoqué l'existence d'une formule sur la vitesse, sans préciser qui la définit. Par exemple l'étudiante 27 annote le document avec les commentaires suivants :

> *Figure 5 : [il faut] donner formule de la vitesse*
> *IV : Pour « accélère » et « vitesse instantanée » elle écrit « pas défini avant ».*
> *2005-27*

Si ces annotations évoquent à la fois l'existence d'une formule et la possibilité de définir des notions, on trouve aussi que parler de la vitesse instantanée comme étant la dérivée de la vitesse moyenne semble un fait acquis, voire la définition de cette vitesse.

> *Rappeler aux élèves que v=dp/dt et a= dv/dt*
> *Et que la dérivée* $p'_1|_{x=x0} = m_{\text{tgte à P1}}$
> *Ceci étant dit, les laisser résoudre l'exercice*
> *[..]*
> *V il s'agit de calculs analytiques simples si l'élève sait dériver une fonction et qu'il connaît la définition de la vitesse, le tour est joué.*
> *2005-22*

C'est un peu comme si le cercle vicieux définition de la dérivée/définition de la tangente pouvait aussi s'observer avec définition de la dérivée/définition de la vitesse instantanée.

C'est sans doute cette interdiction implicite de définir soi-même la vitesse instantanée dans une organisation mathématique qui renforce la tendance à considérer que ce type de problèmes sera une application des dérivées. Nous allons voir dans la section suivante comment se formule cette tendance, de même que les propos montrant que certains élèves-professeurs envisagent aussi d'utiliser les problèmes comme introduction mais sans bien préciser comment. Par exemple l'étudiant 26 propose une séquence dans laquelle le « en introduisant la dérivée » semble plutôt traduire, d'après notre expérience et l'analyse des transpositions, que la définition de la dérivée sera seulement retardée :

> *Une liaison entre ces sujets peut être résolue en introduisant la dérivée qui permet de solutionner les 3 problèmes. On peut donc imaginer introduire un cours sur les dérivées en commençant par présenter ces 3 cas concrets plutôt que de débuter brutalement avec la notion de dérivées.*
> *On pourrait présenter les différents problèmes et demander d'envisager la manière d'y trouver une solution. Ensuite, on pourrait expliquer que tous ces problèmes peuvent se résoudre grâce aux dérivées.*
> *2005-26*

Ce propos nous indique déjà qu'une articulation entre une réflexion sur la notion de vitesse et la construction du concept de dérivée ne fait pas partie des organisations didactiques envisageables. Même si ils ont évoqué la complexité suscitée par ce milieu « mixte », cette complexité n'est visiblement pas acceptée comme partie intégrante du savoir mathématique. Le fait de proposer des situations proches de la physique semble alors plutôt induire une attitude consistant à faire comme si c'était simple, du type : « je fournis les dérivées, je dis que ça s'applique à la vitesse et les élèves font les exercices », avec éventuellement une étape préliminaire « je montre des problèmes ».

La section suivante va reprendre les propos indiquant quelles organisations les élèves-professeurs imaginent.

6.3.1.2.2 Les dérivées

Parmi les étudiants associant les exercices à la notion de dérivée, une partie va proposer d'en faire des exercices d'application, d'autres vont parler de les utiliser comme introduction, mais nous les verrons surtout formuler le fait que l'exercice VII (approximation) n'a rien à voir avec le thème.

6.3.1.2.2.1 En application

Les propos cités précédemment montraient bien que, pour ces élèves-professeurs, la vitesse, la vitesse instantanée et l'accélération nécessitaient soit une définition soit une formule (cf. 10 et 27). C'est alors bien un des écueils à ce changement de cadre de rationalité : soit on travaille dans le cadre défini par l'analyse formalisée et on peut définir la vitesse instantanée comme la dérivée de la position, soit on doit définir la vitesse instantanée si on veut disposer d'un discours permettant d'utiliser les techniques de calcul.

Dans le Chapitre 4, nous avons repris les propos de Y. Chevallard montrant comment le développement de la théorie de l'analyse formalisée aboutit en effet à une inversion de l'articulation entre tâches et techniques : les tâches génétiques nécessitant la mise en place de techniques et des discours associés deviennent alors des applications des mêmes techniques maintenant légitimées par la théorie. De plus, l'adéquation de l'application de ces techniques aux tâches est elle-même légitimée par la théorie : c'est en définissant la vitesse instantanée comme « dérivée de la position» (cf le 22) que j'aurai le droit d'appliquer mes formules.

Nous présentons ci-dessous quelques-uns des propos montrant l'adoption spontanée d'une stratégie d'application.

> *Ce sera l'application des dérivées à l'étude du mouvement rectiligne uniforme et accéléré, à l'optimisation de fonctions et à l'approximation de fonctions».*
> *2005-1*

> *Je vois bien utiliser quelques-uns de ces exercices après avoir vu comme matière « étude complète d'une fonction » Mais uniquement comme exercices supplémentaires pour montrer à quoi peut servir l'étude d'une fonction. J'utiliserai plus ces exercices comme exercices d'application après avoir vu la matière.*
> *2005-16*

> *Pour les exercices 6 et 7 je pourrais par exemple les utiliser comme illustration/ application de la dérivée.*
> *2005-20*

> *Au premier abord, ce document me parait très confus, les exercices sont amenés les uns après les autres, sans lien apparents entre eux, les questions sont complexes et demandent un certain bagage pour y répondre.*
> *Le titre « étude d'un mouvement me semble approprié pour les exercices I à V, les 2 derniers n'ont pas grand-chose à voir avec l'étude d'un mouvement.*
> *La notion commune à tous ces exercices est la notion de dérivée d'une fonction.*
> *J'utiliserais ce document pour expliquer les diverses applications de la dérivée, 3 applications ressortent ici :*
> *1)) dans l'étude d'un mouvement, calcul de vitesse (I à v)*
> *2) optimisation (VI)*
> *3) approximation d'une fonction par une fonction du premier degré (VII).*
> *2005-27*

> *Situations intéressantes à traiter dans le cadre d'étude d'un graphique et d'utilisation de la dérivée.*
> *2005-29*

> *Pris indépendamment, certains exercices sont intéressants à exploiter, mais pas à introductif de la matière. Ils permettraient une représentation possible de la matière qui a été vue.*
> *2005-28*

6.3.1.2.2.2 En introduction

Il y a finalement autant d'étudiants qui se placent dans une perspective d'introduction[266] aux dérivées, comme :

> *Je trouve que l'on peut facilement l'utiliser pour élaborer une leçon. En effet c'est un très bon moyen d'introduire les dérivées, surtout que cela montre aux élèves l'utilité de celles-ci.*
> *2005-11*

[266] Plus vraisemblablement sur le modèle d'exemples préliminaires « résolus » par la donnée de la dérivée.

C'est parmi ces étudiants que l'on trouve la difficulté à faire le lien avec la dimension d'approximation :

> *Éventuellement dans le cadre d'une introduction à la notion de dérivée. Mais certains exercices ne me paraissent alors pas pertinents (tels que IV et VII).*
> *2005-8*

ou

> *De la page 1 à 6 ce document m'inspire un cours d'introduction aux dérivées avec des exemples physiques (MRU-MRUA). De la page 7 à 8 cela ne m'inspire pas.*
> *2005-11*

C'est bien dans la perspective d'une utilisation comme introduction aux dérivées se manifeste le conflit potentiel entre les deux types de rationalité. Par exemple, l'étudiant 21 propose « un exemple introductif » et dira quelques lignes plus loin « on connaît la position, on veut connaître la vitesse ->on dérive [267]». Sans connaître ce qu'il aurait fait, nous ne pouvons alors que souligner l'ambiguïté de l'expression « introduire les dérivées ».

> *Si je devais construire une leçon à partir de ces exercices, je procéderais de la manière suivante :*
> *I) les dérivées - je donnerais les pages 1 à 4 aux élèves en guise d'exemple introductif pour une leçon sur les dérivées. Le premier exercice me permettrait d'introduire une fonction particulière : la position (en fonction du temps). Ainsi je ne dirai pas simplement par la suite maintenant, on va dériver des fonctions. En effet, cette fonction particulière permet d'introduire la notion de dérivée plus naturellement. On connaît la position d'un mobile, on veut connaître sa vitesse->on dérive. Cela me semble être un bon moyen d'introduire les dérivées.*
> *II)les extréma - L'exercice 6 me permettrait d'introduire la notion d'extrema de manière, à nouveau, naturelle.*
> *2005-21*

L'étudiant 23 va nous tenir un discours un peu plus enchevêtré, mêlant aussi les rationalités possibles :

> *Je pense qu'on peut les utiliser pour calculer les pentes (tracer un segment de droite tangent pour déterminer le Δx et le Δy). Je pourrais introduire les dérivées en expliquant que $v(t) = \dot{x}(t)$.*
> *23*

[267] Nous avons en général corrigé les fautes d'orthographe mais laissé les signes (comme le ->) tels qu'ils apparaissent dans les écrits.

6.3.1.2.2.3 Difficultés avec la dimension d'approximation

Nous avons mentionné ci-dessus que la perspective d'utiliser les situations proposées comme introduction aux dérivées amenait à écarter les exercices VI (optimisation) mais surtout VII (approximation affine). Rappelons que, dans l'ingénierie, ces exercices vont amener à proposer d'interpréter tout graphique de fonction comme la représentation d'une loi de mouvement. Même si l'exploitation pour l'approximation reste difficile, ce remplacement de la continuité géométrique par la continuité cinématique permet par exemple de valider le critère de croissance. C'est un des ressorts de l'ingénierie dont nous verrons qu'il reste « non appropriable » par les étudiants.

Reprenons ci-dessous quelques propos confirmant la difficulté *a priori* à établir un lien entre un discours basé sur le mouvement et les tâches d'optimisation et d'approximation :

> *Je laisserais tomber les exercices VI et VII car ils n'ont rien à voir avec l'étude du mouvement.*
> *2005-18*

> *Le titre « étude d'un mouvement me semble approprié pour les exercices I à V, les 2 derniers n'ont pas grand-chose à voir avec l'étude d'un mouvement.*
> *La notion commune à tous ces exercices est la notion de dérivée d'une fonction.*
> *2005-27*

La difficulté semble plus marquée pour l'approximation :

> *Par contre je ne vois pas vraiment le lien entre l'exercice 7 et les autres.*
> *2005-21*

ou

> *Je ne me rappelle pas d'avoir rencontré l'exercice VII quelque part. je ne vois donc pas ce que je pourrais en tirer.*
> *2005-23*

6.3.1.2.3 Autres

Nous reprendrons enfin les quelques propos montrant que, lorsqu'elles sont proposées ainsi, ces activités peuvent aussi ne rien suggérer du tout, ou bien attirer l'attention sur une technique particulière plutôt que sur la recherche d'une démarche globale.

> *Avec ces petites mises en situation, on pourrait envisager des leçons sur l'étude de graphique (I et II), sur la méthode de Horner (V), le second degré (VI). Pour être franc, cela ne m'inspire pas grand-chose. Ce sont des thèmes différents.*
> *2005-6*

> *II et III, non je ne vois pas à quoi cela va servir.*
> *IV je leur demanderai de construire un graphique, un long énoncé fatigue.*
> *V autre leçon : zéro d'une fonction.*
> *2005-12*

voire le cas particulier suivant :

> *Par contre, la figure 3, je l'utiliserais plutôt pour introduire la multiplication d'un vecteur par un réel…*
> *2005-16*

6.3.2 Deuxième expérimentation avec la brochure

Si la première expérimentation avait surtout pour objectif de montrer quelles pouvaient être les réactions « premières » à la présentation d'un tel projet d'enseignement, la suivante poursuivait plusieurs objectifs :

1) mettre en place une démarche de « préparation sous contrainte » se distinguant des préparations de leçons plus habituelles, ce qui constituait une première manière de modifier le milieu des étudiants ;

2) faire travailler les élèves-professeurs dans ce que G. Cirade (2007) appelait des « *élaborations transpositives intermédiaires* » ;

3) identifier l'impact de la formation sur les pratiques effectives. En effet, les étudiants ayant participé à ce travail avaient suivi une formation de didactique des mathématiques incluant entre autres le travail sur le problème du vase conique et une présentation des travaux de M. Schneider (1991) sur l'obstacle géométrique de la limite. De plus ils avaient déjà pris part à des entretiens suivant leur premier travail « libre » consistant à sélectionner et présenter deux approches contrastées de la dérivée.

Après cet enseignement, les étudiants ont reçu la version non commentée de la brochure « dérivées » ainsi que plusieurs stratégies proposées par des élèves pour répondre à la question II. Répartis en groupes de 2 ou 3, sauf deux étudiants ayant travaillé seuls, ils disposaient d'environ deux mois et demi pour répondre par écrit à la question :

> *Voici une suite de questions à partir desquelles on peut introduire la théorie des dérivées, ainsi que des réponses d'élèves à la question II.*
> *A partir de ce matériau, rédigez un discours qui justifie et rend intelligible les techniques utilisées pour répondre aux questions : celles qui sont fournies en annexe ou celles que vous pouvez imaginer mises en œuvre par les élèves. En quoi votre discours permet-il de déboucher sur les résultats classiques de la théorie ? En quoi s'écarte-t-il de la présentation traditionnelle ?*

Enfin, leur travail écrit faisait l'objet d'un entretien.

Nous allons chercher dans leurs réponses, écrites et orales, comment ils font face au changement de rationalité qui leur est implicitement demandé. En effet, le projet est conçu pour fonctionner selon ce que nous avons appelé le premier type de rationalité, c'est-à-dire dans une praxéologie visant

1) à valider des techniques de calcul de manière à résoudre des questions portant sur des grandeurs,

2) à définir les concepts associés à cette mathématisation des objets mentaux présents.

A la suite de notre analyse *a priori* de ce projet d'enseignement, nous allons en particulier voir dans quelle mesure ils prennent conscience du milieu proposé par la succession des situations, et quels sont les raisonnements, discours ou même notations spécifiques qui leur permettent de travailler dans ce milieu.

Nous allons d'abord proposer une analyse des pratiques et discours adoptés par les élèves-professeurs en suivant la structure des tâches proposées de manière à voir les différentes formes que peut prendre le manque de discours rationnel[268]. Nous verrons que, si le changement de posture d'une rationalité à l'autre ne se fait pas de la manière souhaitée, c'est-à-dire du discours 2 vers un discours 1, on observe par contre de multiples allers-retours entre les niveaux de discours qui permettent aux élèves-professeurs de maintenir une sorte d'équilibre entre les contraintes sous lesquelles ils travaillent.

Dans un deuxième temps, nous chercherons comment ces contraintes proviennent de leurs conceptions d'un discours technologique et de leur absence de perception du milieu effectif proposé aux élèves.

[268] Même s'il reste difficile de mettre en évidence ce qui manque.

6.3.2.1 Analyse des discours

6.3.2.1.1 Tâche 1 : 9 étudiants sur 13 choisissent la rationalité de la théorie

Rappelons que la première situation consiste à mettre en place les techniques de lecture d'un graphique de manière à utiliser ce graphique de manière effective pour en déduire de nouvelles informations et non plus « voir » les informations sur le graphique. Nous avons parlé (Chapitre 5) de lecture raisonnée par opposition à une lecture d'observation. C'est alors une opportunité pour

1) distinguer la courbe-trajectoire de la courbe-loi de position ;

2) institutionnaliser la notion de vitesse moyenne avec laquelle on va travailler et les techniques de lecture de cette vitesse sur le graphique ;

3) parler de l'augmentation, puis de la diminution, des vitesses moyennes en comparant les parties concave et convexe de la courbe et les écarts de position sur des intervalles de temps égaux.

Plutôt destinée à « fixer les règles du jeu », cette tâche ne demande donc *a priori* pas d'introduire la vitesse instantanée sous une forme plus développée que « la vitesse n'est pas la même tout le temps » ou « la vitesse change en fait tout le temps », éventuellement en donnant déjà un nom à la vitesse du mobile à l'instant t.

Pourtant 9 étudiants sur 13 vont introduire la vitesse instantanée sous forme de limite dès cette activité, et donc transformer cette activité en passage vers la rationalité connue ; 4 étudiants vont adopter un mode de fonctionnement plus proche de celui recherché par cette ingénierie.

6.3.2.1.1.1 Retour à la rationalité de type II

Parmi les 9 étudiants qui ne vont pas percevoir l'enjeu de l'ingénierie, 3 étudiants travaillant dans le même groupe ont considéré que les notions de MRU, MRUA et vitesse instantanée étaient des pré-requis. A l'écrit ils vont proposer comme discours :

> *…montrer le lien entre la pente du graphique de la position en fonction du temps et la vitesse.*
> *Méthode : le professeur trace la pente de la courbe en différents moments sans introduire le terme tangente et compare cette pente à la valeur de la vitesse en ces mêmes moments.*
> *2006-1&4*

Remarquons que la vitesse serait alors calculée grâce aux formules de physique et que ce lien entre pente et vitesse sera « montré » par la seule comparaison des valeurs numériques sur cette seule courbe, la comparaison de valeurs dans un tableau constituant pour eux un discours technologique suffisant. Ainsi « montrée », cette relation sera ensuite systématiquement utilisée comme argument, y compris dans le cas d'autres courbes, sous la forme :

> *La pente de la courbe en un point définit la vitesse.*
> *2006-1&4*

Les autres groupes parviennent toujours à parler de

> *Deux types de vitesse.*
> *2006-6*

Pour cela, ils font souvent référence à la notion de précision dans la description du mouvement, alors que cette précision ne répond à aucune question sauf une éventuelle question du professeur. Dans un cas pourtant, la question est assez directe et se réfère plus ou moins explicitement à une connaissance antérieure acquise en physique :

> *Professeur : connaissez-vous plusieurs types de vitesse et pouvez-vous me dire comment les calculer ? Exercez-vous sur différents intervalles de temps du problème.*
> *2006-6*

Les étudiants considèrent alors que leur rôle est de

> *Raviver les souvenirs [et] rappeler les formules.*
> *2006-6*

On trouve également comment le fait de pouvoir s'appuyer sur ces connaissances antérieures « des deux vitesses » va leur permettre de s'orienter ensuite vers leur but qui est d'écrire très rapidement la définition du taux d'accroissement d'une fonction :

> *A partir de cet exercice, et grâce en particulier à la subdivision en sous-intervalles, le professeur peut rappeler la définition de coefficient angulaire et émettre celle du taux d'accroissement : le coefficient angulaire d'une droite se note* $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. *Il s'agit du taux d'accroissement de f lorsque x passe de la valeur a à la valeur a+h.*
> *Le professeur aurait ainsi fait le lien avec la vitesse moyenne, mais il aurait pu demander aux élèves d'être plus précis en utilisant la vitesse instantanée.*
> *L'idée sera ensuite de développer la notion de sécante.*
> *La subdivision en sous-intervalles locaux donnera aux élèves la motivation d'être encore plus précis dans la découpe, d'où l'introduction de limites : les sécantes peuvent avoir*

> *différentes pentes mais par passage à la limite (h tend vers 0) il n'y en a plus qu'une seule et la droite dotée de cette pente s'appelle la tangente.*
> *2006-6*

On peut donc remarquer qu'ici le duo vitesse moyenne/vitesse instantanée, dont la définition reste d'ailleurs très implicite, va être transposé en un duo sécante/tangente, la tangente étant alors définie comme la droite dont le coefficient directeur est la limite des coefficients des sécantes[269]. Le lien avec les vitesses semble donc reposer essentiellement sur une analogie à chercher dans le fait que les duos ont la même structure.

Dans un autre groupe, la notion de passage à la limite est aussi mentionnée dès cette activité sous la forme d'une question du professeur :

> *Pour conclure cette discussion, la question suivante sera posée : sur quel paramètre peut-on jouer afin de rendre la description encore plus précise. Nous attendons la réponse : réduire l'intervalle de temps. La précision absolue serait donc obtenue lorsqu'on fait tendre la variation des temps vers zéro. D'où la réapparition de la notion de limite.*
> *2006-5*

Le but semblait donc bien de « placer » assez vite la limite, même si on ne sait pas très bien ici sur quoi la limite va porter. Pourtant nous pouvons remarquer que ces mêmes étudiants vont ensuite déterminer la vitesse instantanée par un calcul incluant la simplification par Δt puis l'annulation du même Δt, technique pour laquelle ils n'avaient pas besoin de parler auparavant de limite.

Enfin, un dernier groupe va effectivement définir la vitesse instantanée dès le début après l'utilisation d'arguments relativement classiques concernant la vitesse moyenne sur un trajet et une durée connus : « je n'ai pas pu rouler à cette vitesse tout le temps » et « je ne suis pas passée de 0 à 120 instantanément ». Alors

> *Le professeur peut dire qu'il est possible de connaître la vitesse à chaque instant, expliquer la notion de vitesse instantanée et en voir la formule.[.]*
> *Pour de longs intervalles de temps, on risque d'avoir de grandes variations de la vitesse. Lorsqu'on prend des intervalles de temps très courts, les variations de vitesse deviennent petites. La vitesse mesurée à n'importe quel moment sur un de ces*

[269] Pourtant les mêmes étudiants vont ensuite parler aussi de limite de sécantes lorsque la sécante est en fait la droite p2 que l'on déplace, et que l'on travaille donc « à pente donnée ».

> *intervalles de temps est alors proche de la vitesse moyenne sur l'intervalle considéré. Si l'on souhaite avoir la vitesse à un instant t, il suffit de faire tendre l'intervalle de temps sur lequel on mesure la vitesse moyenne vers 0.*
> $$v(t) = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{\Delta_e}{\Delta_t} = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{e(t+\Delta_t) - e(t)}{\Delta_t}$$
> *Le professeur pourrait alors dire que la pente de la droite qui colle à la courbe à un endroit donné correspond à la vitesse à cet endroit. Il pourrait alors expliquer la notion de tangente au moyen d'un schéma et de sécantes.*
> *2006-2*

Remarquons que le passage à la limite est donc considéré comme allant de soi à double titre : 1) la connaissance de la notion de limite est nécessaire et 2) le fait que ce calcul donne bien ce que l'on pense être la vitesse instantanée n'est pas mis en doute. Une telle approche est finalement peu différente de celle considérant que le cours de physique a déjà fourni les formules.

De plus, le passage à la limite est fait sans utiliser d'expression de la fonction. Ce souci de présenter d'emblée un résultat possédant une caractéristique de généralité avait déjà été rencontré dans les préparations de leçons.

Dans le travail de ces étudiantes, nous pouvons aussi relever une particularité concernant l'utilisation de notations fonctionnelles. Elles développent d'abord une argumentation spécifique pour pouvoir utiliser une notation fonctionnelle e(t) pour désigner la position:

> *La particule ne parcourait pas la même distance au cours d'un intervalle de temps.*
> *2006-6*

Puis, elles imaginent un dialogue pour passer de l'écriture non fonctionnelle $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ (formule de la vitesse moyenne comme étant la distance parcourue divisée par le temps), supposée vue en physique, à une écriture hybride $v = \frac{e(t+\Delta t) - e(t)}{\Delta t}$ dans laquelle la position est une fonction du temps mais pas la vitesse. Comme cette écriture ne présente pas la vitesse moyenne comme une fonction du temps, elles vont à nouveau insister et demander à l'élève de ne pas oublier que « Δt est un temps ». Enfin le passage à la limite de cette même vitesse moyenne v « non fonctionnelle » produit une vitesse instantanée « fonctionnelle » que l'on note v(t)[270].

De plus, si leur démarche relève aussi d'un « retournement » dans une rationalité de type II, puisque à la fin de cette activité tous les objets sont « donnés » pour pouvoir traiter les tâches suivantes sous forme d'applications, elles en produisent une forme de justification :

> *Ce discours nous permettrait ainsi d'expliquer les réponses fournies à la deuxième question de l'activité suivante.*
> *[..]*
> *Les élèves se servent de la notion de vitesse instantanée ou de la notion de tangente sans toutefois utiliser ce mot.*
> *2006-2*

Constituant en quelque sorte un discours technologique de leur organisation didactique, ce propos pourrait indiquer que, pour certains élèves-professeurs, le seul fait de donner un nom ou d'écrire une formule donnera une existence à une notion que l'élève manipule instinctivement. En nous plaçant dans une perspective de dialectique outil-objet, il semble donc bien que pour eux cette dialectique « n'existe pas » puisque la transformation d'un outil en objet se fait de manière immédiate par l'attribution d'un nom ou d'une formule, comme si l'étiquetage faisait conceptualisation.

6.3.2.1.1.2 Acceptation de la rationalité de type I

Etudions maintenant comment procèdent les 4 autres étudiants[271]. Un premier groupe de deux étudiants va effectivement éviter de donner rapidement une définition-formule de la vitesse instantanée mais va alors « tomber » dans un autre piège caractéristique de l'analyse et de son enseignement. Partant de la même problématique de précision dans la description du mouvement, ils supposent que pour l'élève :

> *Le plus complètement possible est pour lui de citer tous les points.*
> *2006-3*

Ils imaginent ensuite que le professeur pose une autre question qui pourrait amener à utiliser la vitesse:

[270] En général les notations de la vitesse moyenne et de la vitesse instantanée utilisées dans les manuels présentent cette caractéristique. La vitesse moyenne étant calculée, comment en prendre la limite « d'après t » pour obtenir une fonction de t ?
[271] Notons que parmi eux se trouvent un groupe de deux et les deux seuls étudiants ayant travaillé « en monôme ».

> *…donnez les points dont vous êtes vraiment sûrs.*
> *Et entre ces points, décrivez comment la particule se déplace.*
> *2006-3*

Pourtant, eux-mêmes vont remplacer les notions de vitesse moyenne et instantanée par celles de croissance d'une courbe puis croissance en un point, notions qu'ils ne peuvent alors exprimer que d'après la concavité :

> *Plus la courbe croît vite, plus la vitesse augmente, plus la courbe décroît, plus la vitesse diminue (en fait elle augmente mais dans le sens négatif).*
> *[..]*
> *Lorsque la croissance d'une courbe augmente , elle est concave, lorsque la croissance diminue, elle est convexe.*
> *2006-3*

Ils vont ensuite travailler très longtemps avec une argumentation basée sur la concavité de la courbe qui reste cependant dans leur travail une caractéristique strictement visuelle.

Une étudiante va par contre supposer que les élèves pourraient ne pas penser à parler de vitesse pour décrire le mouvement et imagine en conséquence une situation de communication où un élève devrait tracer le graphique représentant un mouvement dont un autre élève lui donne les indications. Le point intéressant est qu'une telle situation constituerait une motivation de la « précision » demandée dans les cas cités précédemment. Pourtant son discours passe à ce moment très vite de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée :

> *Cette activité permet donc d'introduire la vitesse moyenne dont le professeur rappellera la définition (* $v_m = {}^{\Delta p}\!/_{\Delta t}$ *). Celle-ci ne suffisant pas, il sera nécessaire de mesurer une différence de position sur des intervalles de temps de plus en plus petits, ce qui conduit à l'idée d'une vitesse instantanée.*
> *2006-8*

Enfin, un seul étudiant va réaliser cette première tâche exactement dans les limites du projet. Remarquons déjà que cet étudiant parviendra à proposer un travail complet et bien rédigé sans jamais employer les mots de dérivée ni tangente, excepté dans une phase finale d'institutionnalisation.

6.3.2.1.1.3 Evocation allusive d'un cours de physique comme seul discours technologique

La première expérimentation nous avait montré la facilité avec laquelle les élèves-professeurs utilisent les formules vues en physique. En effet, si le professeur de physique a déjà défini la vitesse instantanée comme limite de vitesse(s) moyenne(s), il ne reste alors plus qu'à faire l'analogie au niveau des écritures de cette limite et de la limite du quotient différentiel associé à une fonction f pour « montrer » que c'est la même chose.

N'en déduisons pourtant pas que c'est un signe de « paresse » de la part de ces élèves-professeurs. Comme le suggérait la notion de cadre de rationalité, un concept et les propriétés que l'on peut lui attacher peuvent rester liées au cadre ayant fourni la validation de cette propriété en ce sens que la seule évocation de ce cadre suffira à mobiliser l'entièreté de la validation. C'est par exemple ce que l'on retrouve dans l'argument utilisé par un étudiant, pourtant un des rares à avoir identifié les enjeux du projet. Face à la droite représentant la loi de position de la particule, il affirme

> *La courbe est une droite, donc comme nous l'enseigne la physique, le déplacement de la particule est rectiligne uniforme, donc la vitesse est constante.*
> *2006-7*

Lorsque nous lui demandons si on avait besoin de passer par une référence à la physique pour en déduire que la vitesse est la pente de la droite, l'étudiant répond

> *Oui, ici comme on est en physique, j'ai pensé à me servir de la physique, comme en plus c'est un truc qu'ils ont déjà vu.*
> *Mais je me suis posé la question de savoir, sans la physique, comment est-ce que je le ferais passer ?*
> *2006-7*

Puis, comme nous insistons : « oui, mais en physique ça vient d'où ? Ils ont bien du l'expliquer à leurs élèves, les physiciens ? », il peut répondre

> *Oui je me rappelle plus en fait. Comment est-ce qu'on explique ça encore ?*
> *Donc on a une accélération nulle, on a une vitesse constante. Ben oui c'est une histoire de proportions évidemment. Sur un même intervalle de temps, on va parcourir la même distance donc forcément la vitesse est la même partout. Cette vitesse on va la trouver en comparant les deux espaces parcourus sur les intervalles de temps. Et donc, le coefficient de la droite c'est la vitesse. C'est vrai qu'on aurait pu le voir comme ça.*
> *2006-7*

Nous pouvons alors supposer que c'est le même processus de référence à un autre cadre de validation, mais alors erroné, qui amène d'autres étudiants à interpréter directement la courbe comme représentative d'un MRUA. Dans un premier temps, les étudiants expliquent cela par le fait d'être eux-mêmes physiciens de formation (2006-1&4), ou parce que

> *Ce qui est dérivées, c'est en 5ème et tout ce qui est mouvement ils voient ça en 4ème, en physique.*
> *[..] C'est une façon de voir les choses en fait. En essayant de trouver toutes les solutions possibles, et ça c'en était une, dont la solution physique qui est quand même quelque chose qu'ils ont déjà vu l'année précédente.*
> *2006-1*

Bien sur, cela permettrait alors aux élèves de *« se raccrocher à quelque chose de déjà vu »*, argument du niveau S_3 des croyances, mais c'est surtout une manière de ne pas avoir à élaborer de discours technologique spécifique. En supposant que les notions sont déjà acquises par ailleurs, l'utilisation d'une activité liée à la vitesse va permettre de procéder ensuite par analogie de formules pour exhiber un objet commun :

> *Ca permet de faire, enfin, le discours technologique. Le discours de physique, enfin ce qu'ils ont vu en physique, permet de faire le discours technologique de ce que nous on a fait et donc de voir le quotient différentiel……*
> *[..]*
> *autrement que dans le cas d'une fonction quelconque. De le rapprocher avec ce qu'ils ont vu avec la fonction vitesse.*
> *2006-2*

Pourtant les élèves-professeurs ne sont eux-mêmes pas toujours sûrs qu'il y a eu un discours en physique, mais ce doute ne semble donc pas suffire à les amener à modifier leur posture.

> *Ben moi je me souviens, quand j'ai vu en secondaire les MRU, MTUA, le professeur de physique nous avait donné la définition de la vitesse instantanée en introduisant déjà une limite. Il nous avait dit : vous inquiétez pas, je vous donnerai jamais ça comme exercice parce que vous n'avez pas encore vu. Et donc, on s'est dit qu'ils en auraient peut-être déjà entendu parler. C'est pour ça qu'on a différencié les cas après, les élèves qui en auraient déjà entendu parler et ceux qui ne la connaissent pas.*
> *Et ceux qui la connaissent à mon avis, le professeur leur aura donné la formule. Ce sera vraiment plaqué.*
> *2006-6*

Enfin, rappelons que le projet propose une démarche se voulant globale. Or cette globalité n'est pas toujours perçue (seule une étudiante la formulera explicitement en introduction de son travail écrit). Il semble que les élèves-professeurs regardent les situations presque « isolément » comme des exercices indépendants. En particulier, la tâche III (et III bis) fera intervenir une fonction du second degré pour laquelle la procédure dite de l'écart maximal servira de validation à d'autres techniques, dont la technique « simplifier Δt puis l'annuler », tandis que la fonction de troisième degré contraindra à accepter cette technique de calcul comme plus opérationnelle. Or le fait de rattacher toute courbe « ayant l'allure d'une parabole » à un MRUA va à l'encontre de cette démarche et amène les étudiants à passer d'emblée à côté du caractère fondamental recherché par le projet.

6.3.2.1.2 Tâche II : des allers-retours entre les niveaux de discours

Rappelons que la tâche II propose deux lois de positions dont l'une est représentée par une droite (particule p_2) et l'autre par une courbe (particule p_1). Les deux courbes possèdent un point d'intersection en plus de l'origine. Il est demandé de décrire les mouvements, puis de répondre à la question sur l'existence d'un ou plusieurs moments auxquels les particules peuvent avoir même vitesse, en justifiant la réponse. C'est pour cette dernière question que des stratégies d'élèves ont été proposées aux étudiants et la manière dont ils les prennent en compte sera aussi révélatrice du cadre de rationalité dans lequel ils se situent spontanément.
Rappelons que ces stratégies sont

1) les particules ont même vitesse quand « l'écart » (ou différence d'ordonnées en valeur absolue) entre leurs positions est maximal ;

2) chercher en quelle valeur de t une droite parallèle à p_2[272] rencontre la courbe en un seul point ;

3) tracer des droites collant à la courbe et chercher en quelle valeur de t la droite est parallèle à p_2. ;

4) découper des triangles rectangles dont l'hypoténuse est parallèle à p_2 et translater ces triangles pour faire coïncider les extrémités de l'hypoténuse avec deux points de la courbe. L'instant cherché étant entre ces deux points, on prend alors des triangles plus petits ;

5) dessiner des escaliers correspondant à des intervalles de temps identiques. Regarder là où les contremarches sont à peu près les mêmes pour les deux courbes, puis continuer avec des intervalles de temps de plus en plus petits.

[272] Dans « parallèle à p_2 » il faut lire « parallèle à la droite représentant la loi horaire de p_2 ».

Si les 4 dernières peuvent être rattachées à la notion de pente de droite (2 et 3) ou à une étude des accroissements (4 et 5), la première est plus surprenante. Nous avons déjà constaté que la recherche d'extrema, pourtant première chez Fermat, n'est envisagée comme introduction aux dérivées ni dans les transpositions ni dans les travaux libres, les étudiants envisageant même d'en faire deux chapitres clairement séparés. Il est donc vraisemblable que cette stratégie, qui a pourtant un rôle dans la démarche globale du projet, va provoquer des réactions chez les étudiants.

6.3.2.1.2.1 Un vocabulaire presque de niveau 1

De manière générale, cette situation amène certains étudiants à utiliser des expressions non conventionnelles comme

> *Quantifier la croissance d'une courbe grâce à la pente d'une droite.*
> *[..]*
> *Introduire l'idée de croissance en un point*
> *2006-3*

ou

> *La courbe devrait avoir, entre guillemets, le même coefficient angulaire que la droite.*
> *2006-5*

> *La pente de la courbe en un point (définit la vitesse).*
> *2006-1&4*

A première vue, ces expressions pourraient favoriser un travail non formel, et donc nous faire penser que les étudiants rentrent dans un discours de niveau 1, même si nous pouvons aussi réaliser que la dernière est, en fait, parfois utilisée pour ne pas prononcer le mot tangente, ce qui pourrait ici relever d'un effet de contrat [273] de formation :

> *On a voulu essayer de respecter, mais c'était pas évident dans la succession des tâches. On a voulu essayer de respecter ceci, donc ne pas parler de tangente avant de parler de limite de quotient différentiel, et donc on a parlé de pente de la courbe jusqu'à la tâche III.*
> *2006-4*

De même, l'expression « droite qui colle à la courbe », figurant dans l'énoncé d'une des stratégies d'élèves, est reprise par une grande partie des étudiants mais avec l'intention plus

[273] Le fait d'avoir présenté aux étudiants l'obstacle géométrique de la limite peut aussi se traduire simplement par un « je ne vais pas dire le mot tangente et elles seront contentes ».

ou moins explicite de définir la tangente, et ce sans questionnement de l'objet mental mais plutôt par étiquetage. Comme c'était le cas pour la vitesse dans la tâche I, il semble ici aussi que le seul fait donner un autre nom à l'objet mental suffira à le transformer en concept mathématique[274]. Regardons en effet comment ils pensent passer de la conception des élèves à la leur :

> *E2 : Mais on se servait quand même donc des idées qu'ils avaient eu.*
> *[..]*
> *E2 : Et puis le fait qu'au départ, on parlait de droite qui colle à la courbe, et après on définit grâce à cet exercice, clairement la tangente.*
> *[Oui, c'est à la suite de ceci que ça vient ? Vraiment ?]*
> *E2 : Ben dans le point 2.2 ils parlent de droite qui colle à la courbe et nous à la fin du point 2.3 on définit la tangente.*
> *[Mais entre droite qui colle à la courbe et donner la définition de la tangente, il y a une marge]*
> *E1/E2 : C'est eux qui utilisent le terme droite qui colle à la courbe.*
> *E2 : Dans le premier point, on avait parlé de tangente d'une manière intuitive, mais on donne le mot et on explique ; Tandis que eux ils ne retiennent que droite qui colle à la courbe.*
> *E1 : Ou alors ils utilisent peut-être le mot tangente mais en pensant à une droite qui colle à la courbe.*
> *2006-2*

A partir de maintenant, seuls deux étudiants (ayant travaillé indépendamment) travaillent avec un discours de niveau 1 en utilisant les expressions disponibles dans le milieu proposé, c'est-à-dire en parlant uniquement de vitesse moyenne et pente de la droite. L'expression « vitesse de la particule » est pourtant utilisée dès le début mais de manière « naturelle » dans son acception de grandeur sans chercher à la mathématiser trop tôt. Nous mentionnons ci-dessous leurs discours respectifs pour montrer que, même si ils ne travaillent pas avec la même conception de la vitesse instantanée, la construction d'une argumentation spécifique amène à légitimer l'association entre le calcul effectué et leur conception naturelle de la vitesse instantanée, et c'est peut-être ce qui leur permet de demeurer dans le même type de rationalité au long du travail.

Leur discours repose alors soit sur l'établissement d'une relation entre la vitesse moyenne et la vitesse instantanée qui permet à l'étudiant de « passer de l'une à l'autre » (exemple 1), soit

[274] Remarquons que lorsque ce projet est proposé à des professeurs ayant plus d'expérience, ceux-ci voient aussi cet exercice comme une opportunité de définir la tangente, quitte alors à parler des sécantes tendant vers la tangente.

sur l'établissement précoce d'une relation entre la pente de la droite cherchée et la vitesse instantanée (exemple 2).

Exemple 1 : de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée

> *… que ce soit n'importe quel intervalle que je prends, de deux points, les points d'intersection de la droite parallèle avec la droite, chaque fois la vitesse moyenne est la même, et qui est justement la vitesse qu'on cherche. Je réduis l'intervalle de plus en plus petit et il se ramène à un point. Comme dans tous les intervalles il y a la même vitesse, forcément c'est ce point-là qui aura la même vitesse.*
> *2006-7*

Ici le discours joue sur le fait que la vitesse moyenne des deux particules est la même sur l'intervalle constitué des deux points d'intersection, et qu'elle est de plus égale à la vitesse cherchée, mais cette fois-ci le même mot « vitesse » fait référence à la vitesse instantanée de la première et à la vitesse moyenne de la deuxième. Comme la vitesse moyenne de la deuxième est aussi la vitesse instantanée de la deuxième, le transfert se fait presque naturellement. La suite du travail montre que cet étudiant manipule une conception de la vitesse instantanée qui ne fait pas intervenir l'idée de limite. La vitesse instantanée est plutôt vue comme une « copie » de la vitesse moyenne sur un intervalle, lorsque l'intervalle se réduit à un point.

Exemple 2 : de la vitesse instantanée à la pente de la droite

> *Nous remarquerons que dans ce cas, vitesse moyenne et vitesse instantanée se confondent. En effet la vitesse ne varie pas, elle est en chaque instant la même. Le professeur pourra conclure que la vitesse instantanée d'un mouvement représenté par une droite correspond à la pente de cette droite.*
> *[..]*
> *Les techniques basées sur l'idée de tangente peuvent s'expliquer par le souhait de reproduire le mouvement uniforme de la particule p_2 sur l'autre. N'y a-t-il pas un moment où la particule p_1 est lancée « de la même manière » ?*
> *2006-8*

Remarquons que nous avons déjà utilisé une formulation à peu près équivalente dans l'analyse *a priori* en parlant de la tangente en un point comme de la droite représentant le mouvement qu'aurait la particule si elle avait, à partir de cet instant, une vitesse constante. En parlant d'une similarité pour les mouvements, cette formulation inclut également l'idée que la droite va « ressembler » à la courbe pendant un certain moment[275].

[275] Il y a malgré tout des hypothèses implicites sur la continuité et la dérivabilité de la fonction-vitesse.

Ici, il est particulièrement intéressant de remarquer que l'étudiante parvient à articuler le discours « savant », de niveau 2, et le discours technologique, de niveau 1, en parvenant à les faire cohabiter sans les confondre. Elle parle « pour nous » de techniques basées sur l'idée de tangente, tout en cherchant pour les élèves une explication pour relier cette droite à la vitesse. Tout en correspondant à des cadres de rationalité différents, les discours de niveau 1 et de niveau 2 pourraient donc ne pas être incompatibles et donc ne pas se concurrencer.
Nous allons maintenant regarder comment les étudiants exploitent les stratégies proposées par els élèves.

6.3.2.1.2.2 Stratégie 1 : le discours cinématique accessible pour 2 étudiants

Seul un étudiant parmi les 13 va traiter la stratégie d'élève basée sur l'optimisation de l'écart entre les positions, en justifiant aussi bien l'existence d'un instant que le moyen de l'obtenir. Nous y ajouterons le cas d'une étudiante qui interprète d'abord cette stratégie comme relevant d'une mauvaise conception de la vitesse, puis, fortement aidée à l'oral, développe l'argumentation et prend aussitôt conscience qu'on pourra faire ensuite le calcul pour une fonction du second degré mais pas au-delà.
Toutefois, les manières de ne pas la prendre en compte varient. Certains écrivent franchement

> *Non, car*
> $Max[p_2(t)-p_1(t)] \Leftrightarrow p'_2(t)-p'_1(t)=0$ *]*
> *2006-1&4*

De plus, ils ne peuvent pas changer de rationalité, même aidés à l'oral:

> *E1 : Ben oui, on fait comme ça parce qu'on s'est dit que c'était pas vraiment d'actualité. Enfin, on s'est dit que c'était certainement un élève qui recommençait, ou alors il aurait vraiment eu une super bonne idée, là comme ça.*
> *E2 : Ca nous paraissait un peu étrange que l'élève propose cette solution comme ça directement. Sans avoir eu le cours (correspondant) l'année précédente. C'était un doubleur ou il avait certainement vu quelque chose.*
> *[Si c'était un doubleur, il aurait vu quoi en plus]*
> *E2 : Un doubleur ? Il l'aurait vu.*
> *[Vu quoi ?]*
> *E1/E2 : Ben l'optimisation.*
> *[L'optimisation ? Est-ce qu'on peut, est-ce que le mot « maximal » n'apparaît pas dans le langage français ? Est-ce qu'il faut avoir vu des problèmes d'optimisation pour pouvoir dire « je veux que ce soit maximal ou minimal »]*
> *E1 : Non, mais pour plus tard.*
> *E2 : Pour en arriver à une dérivée euh nulle.*

> *E1 : Voilà c'est ça pour faire le rapport entre…*
> *E2 : Il faut déjà aller bien loin dans l'optimisation.*
> *E1 : oui.*
> *E2 : C'est vrai que minimal ou maximal ça fait partie du vocabulaire mais ça n'implique pas directement que l'élève sait que la dérivée euh est nulle.*
> *2006-1*

L'un d'eux, parvenant à se dire que la réponse est correcte, précise ensuite que pente de la tangente et outil d'optimisation/approximation sont deux facettes de la dérivée qui, pour lui sont séparées :

> *Oui. J'ai vérifié, j'ai retourné la situation un petit peu dans tous les sens. C'est correct. On part d'une approximation affine ici, parce on fait la différence entre deux fonctions qui va partir de 0 qui va repasser par 0, hein, donc si on fait P2 moins P1. [..]*
> *La question pour moi est de savoir comment cet élève a pu construire ce raisonnement-là.*
> *En se disant, en voyant, bon , en pensant déjà à la pente et en se disant « ça va être quelque part ici ». Et ce « quelque part ici », je dois chercher une distance qui est maximal. Mais il donne une réponse qui est précise :* $\sqrt{3}$ *je crois. [..]*
> *Moi je me posais la question de savoir, pour moi il est déjà dans la résolution numérique de la dérivée pour donner une valeur précise comme ça.*
> *Maintenant, son raisonnement à notre niveau nous a posé problème dans le sens où il ne fait pas, enfin il brûle une série d'étapes, et à ce niveau-ci, en tout cas dans notre parcours technologique, on ne sait pas l'expliquer, on ne sait pas encore.*
> *On est en train de parler d'équation, de pente de la courbe mais on ne parle pas encore d'approximation affine à ce moment-ci.*
> *Si l'élève répond comme ça je pense que soit c'est, enfin c'est un élève qui connaît déjà la suite du cours ou alors on est fort embêté. Parce qu'alors ça veut dire que tout le discours technologique qu'on avait prévu pour la suite ben tombe un peu à l'eau.*
> *2006-4*

Il s'avère alors que l'optimisation avant d'avoir défini la dérivée n'est de toute façon pas envisagée :

> *Oui ça va resservir, parce que si il fait un raisonnement comme ça et qu'il sait, disons le retranscrire dans d'autres cas de figure, comme par exemple le euh à la tâche VI ou VII, c'est VII, je pense, non VI avec le volume.*
> *Donc si il sait le retranscrire à la tâche VI, l'objectif est atteint.*
> *[Ça veut dire quoi « le retranscrire à la tâche VI »]*
> *Oui on est dans le même cas de figure je vais dire .*
> *Pareil on cherche la dérivée, valant zéro.*
> *[C'est quoi ça comme type de fonction]*
> *Ça c'est un premier degré, ça c'est un second, la différence des deux, C'est un second.*
> *Est-ce qu'il y a besoin du calcul des dérivées pour avoir le maximum d'une fonction du second degré ?]*
> *Je ne vois pas d'autre technique que le calcul de la limite ou….*
> *2006-4*

D'autres n'acceptent pas la stratégie de l'écart maximal parce qu'ils pensent que l'élève procèdera par mesure à la règle graduée (2006-3), ce qui pourrait laisser entendre qu'ils considèrent la stratégie comme légitime mais ils ne peuvent nous produire qu'une argumentation basée sur la concavité de la courbe.

> *Lorsque p1 est concave, il existe un moment unique où la courbe p1 a la même croissance que la courbe p2, c'est au moment où l'écart est maximal. Si p1 n'est pas concave sur l'intervalle étudié, on peut quand même dire qu'un écart maximum entre les courbes existe, mais il n'est pas forcément unique.*
> *2006-3*

Un cas intéressant concerne le comportement adopté par deux étudiants qui hésitent autant à cause de leur incapacité à comprendre quel raisonnement aurait pu amener cette réponse qu'à cause de la lecture graphique de la solution (il se trouve en effet que l'instant cherché va se trouver exactement au milieu des points d'intersection). On remarque de plus un déplacement des préoccupations : l'essentiel n'étant pas de chercher eux-mêmes l'explication plausible, mais plutôt qu'elle puisse trouver une place dans leur propre organisation.
Un étudiant exprime qu'il ne peut attacher à cette réponse un cadre théorique :

> *On s'est dit « comment peut-on répondre ? » ; « quelle théorie va-t-on aller mettre là derrière ?» enfin « Comment va-t-on reformuler sa réponse ? »*
> *2006-4*

Un autre groupe élude la question en essayant quand même de rester pédagogiquement correct :

> *Cette réponse est étonnante. Il a du procéder comme suit : écart maximal, donc dérivée de la différence égale à zéro, etc.*
> *[..] On a mis : ou bien c'est au pif, ou bien l'élève fournit une explication plausible comme amorce de la théorie des dérivées. Donc le professeur félicite l'élève et lui dit que sa réponse va être utile dans la suite du cours. Attention à ne pas oublier d'y faire allusion dans la suite du cours.*
> *2006-6*

Aidés oralement, ils peuvent développer l'argumentation et explicitent

> *E2 : Nous c'est vrai que on a pensé directement à l'optimisation.*
> *[..]*
> *E2 : C'est parce que nous on était partis sur cette idée-là, donc c'est vrai que c'est difficile de l'imaginer autrement à partir du moment où on a déjà vu la théorie.*
> *[..]*
> *E1 : enfin, nous on a le biais quand même de notre connaissance. Donc c'est pas évident de se mettre non plus…*
> *2006-6*

Enfin, un groupe de deux étudiants va interpréter la proposition des élèves comme si ces élèves posaient un postulat (« Ils posent »), qui serait ensuite légitimé par la théorie de l'optimisation :

> *Les élèves font une différence d'ordonnées pour un temps fixé. Ils posent que la première particule possède la même vitesse que la deuxième lorsque cette différence est maximale.*
> *[..]*
> *Celle-là ça me paraissait bizarre que c'était de l'optimisation en fait.*
> *2006-6*

Les mêmes étudiants vont d'ailleurs très vite énoncer les critères sur la croissance et la détermination des extrema de manière à transformer les tâches suivantes en illustrations de la théorie.

6.3.2.1.2.3 Stratégies basées sur la tangente : discours 2bis pour 11 étudiants

6.3.2.1.2.3.1 Stratégie adoptée malgré l'absence de lien entre pente et vitesse

Un groupe de 2 étudiants va expliciter le fait que, dans la stratégie 2, la tangente n'est pas utilisée comme d'habitude :

> *On ne demande pas aux élèves de trouver la pente de la tangente ou bien la tangente elle-même, mais plutôt de trouver le point auquel la tangente a une certaine pente, ou plus précisément de prouver l'existence de ce point.*
> *2006-3*

Cela nous semble représenter un changement de point de vue dans leur propre savoir, mais qui reste malheureusement inexploité puisque, chez eux, le lien entre la droite et la vitesse n'est pas formulé. Ils ne vont donc pas produire d'explication de ces stratégies et les juger hasardeuses puisqu'elles reposent sur la recherche visuelle de parallèles. Leur propos manifeste en fait un paradoxe permanent dans la mesure où ils vont refuser tout raisonnement des élèves qu'ils pensent fondé sur du visuel (ce qui n'est pas le cas) alors qu'eux-mêmes ne peuvent produire qu'une argumentation utilisant la concavité de la courbe.

Un autre groupe va proposer un discours cumulant les chassés-croisés entre les deux rationalités. Tout d'abord, ils identifient une difficulté propre à la rationalité I et posent même une question qui pourrait être une question d'élève:

> *Cela revient à utiliser la tangente comme objet premier.*
> *[..]*
> *Les élèves savent-ils que la pente de la tangente vaut la vitesse en un point donné ?*
> *2006-5*

Pour la résoudre, ils vont repasser en rationalité II dans laquelle le lien vitesse-pente est connu :

> *La vitesse de la deuxième particule est simplement le coefficient angulaire (pente) de la droite* $p_2(t)$. *Le moment où* $v_1 = v_2$ *est donc donné par l'abscisse du point d'intersection de* $p_1(t)$ *et d'une droite tracée parallèlement à* $p_2(t)$.
> *2006-5*

Questionnés sur l'utilisation du « donc » dans l'extrait ci-dessus, ils ne parviennent effectivement pas à répondre à la question d'élève qu'ils avaient imaginée:

> *E2 : On aurait du tourner la phrase autrement. Dire qu'elles devraient avoir, pour la même vitesse, en fait à cet endroit-là exactement, la courbe devrait avoir entre guillemets le même coefficient angulaire que la droite. Donc à ce moment-là approcher la courbe par une droite.*
> *E1 : Et cette droite ça doit être la même que l'autre. Etant donné que la vitesse c'est la pente de la droite.*
> *[Et qu'est-ce qui pourrait justifier que la vitesse est donnée par la pente de la courbe ?]*
> *E1 : En fait ici, on travaillerait avec le triangle.*
> Δp *, ben une variation de position c'est une variation d'origines ; Sur la variation des abscisses.*
> *Donc on travaille sur, dans le triangle rectangle, et ils ont vu la notion de pente-tangente.*
> *Ils doivent avoir vu la tangente dans un triangle.*
> *E1/E2 : Oui, la tangente trigonométrique à ce moment là*
> *E1 : Et puis faire le rapport avec la pente, ben de la droite oblique quoi, enfin du côté.*
> *2006-5*

6.3.2.1.2.3.2 Incompréhension des stratégies

On peut ici citer deux étudiants qui avaient déjà défini la vitesse instantanée et la tangente dans l'activité I par des passages à la limite. Nous avions déjà signalé qu'ils définissaient la tangente en partant d'une sécante et en procédant à un passage à la limite « à pente donnée », donc en fait strictement visuel. Ici ils vont égaler les vitesses moyennes des particules et en déduire que les vitesses instantanées, c'est-à-dire les limites, seront égales quand la sécante (support visuel de la vitesse moyenne) sera à sa limite c'est-à-dire la tangente :

> p_2 *représenterait la sécante à la courbe et il s'agirait de prendre la limite de cette sécante, soit en d'autres termes la tangente qui serait parallèle à* p_2 *et n'intersecterait la courbe qu'en un point.*
> *2006-6*

Remarquons que l'unicité du point d'intersection, propre à la tangente géométrique, n'a pas été argumentée auparavant par ces étudiants et semble simplement résulter du fait que la droite ait été appelée « tangente ».

Ces étudiants vont ensuite considérer que la troisième stratégie est « similaire » et conseiller

> *De ré-orienter l'élève vers la stratégie précédente.*
> *2006-6*

Ces étudiants ne semblent pas avoir perçu ce qui appartenait à la rationalité I, mais transfèrent des connaissances de type II en croyant les adapter à la situation et à l'élève. En conséquence, leur discours repose finalement plus sur des implicites visuels que la stratégie proposée par l'élève. De plus, la suite de leurs propos montre que finalement c'est l'organisation du cours qui prévaut :

> *Oui on avait mis ici qu'on avait besoin des bonnes solutions, la solution 2 et la solution 4.*
> *On avait mis qu'on avait surtout besoin de la 2 et de la 4 parce que ça nous permettait de commencer la théorie. Et finalement la 1 c'est parce qu'on l'avait pas très bien comprise, mais sinon la 3 se rapportait plutôt à la 2 et la 5 plutôt à la 4.*
> *Maintenant avec la 1 en plus, il y aurait peut-être moyen de retomber sur la même théorie directement aussi.*
> *Parce que la 2 ils parlent de tangente, enfin ils parlent implicitement de tangente.*
> *La 4 aussi on l'avait interprété comme ça.*
> *Maintenant la 1, c'est un peu différent.*
> *On pourrait essayer de regrouper déjà ces trois types là :la 1, la 2 et la 3 ensemble, la 4 et la 5 ensemble et voir comment à partir de chaque réponse on pourrait arriver à la théorie.*
> *Mais il faudrait alors s'arranger pour qu'ils fassent l'exercice presque en fin d'heure je vais dire pour que nous on puisse faire la suite : adapter la théorie sur leurs réponses.*
> *2006-6*

6.3.2.1.2.3.3 Compréhension et discours adapté

Encore une fois, nous ne trouvons que deux étudiants parvenant à formuler un discours sur l'existence de l'instant et sur la technique proposée, qui ne fasse intervenir que des arguments de type I. Le premier, travaillant avec une vitesse instantanée égale à la vitesse moyenne sur un intervalle réduit à un point, peut énoncer :

> *[tant qu'une parallèle à p2 coupe la courbe en deux points]*
> *Ces deux points déterminent un intervalle de temps sur lequel la vitesse moyenne de* p_1 *est égale à la vitesse constante de* p_2*. Cet intervalle contient donc le point où les vitesses sont égales. Si on déplace cette droite vers la droite, cet intervalle devient de plus en plus petit pour finalement se réduire à un point. Ce point est celui que l'on cherche.*
> *2006-7*

La deuxième (étudiante 8) avait proposé de chercher un instant auquel la première particule aurait la même vitesse que si elle avait été lancée de la même manière que l'autre.

Remarquons aussi que le fait que la droite « colle à la courbe » est laissé à l'état de remarque par le premier, mais sans explication, tandis que dans le discours de la deuxième, cette proximité est plus ou moins incluse dans la référence à un mouvement similaire. Cette caractéristique de « coller à la courbe » reste donc bien difficile à aborder, ce qui nous est confirmé par le fait qu'aucun étudiant ne traite la stratégie 3 proposant de tracer des « petites droites collant à la courbe » jusqu'à en trouver une parallèle à p_2.

6.3.2.1.2.4 Stratégies avec les accroissements : aucun discours 1

Nous regarderons ici comment les étudiants ont traité les stratégies basées soit sur les triangles, soit sur les marches / contremarches. Même si celle sur les triangles pouvait aussi relever d'un raisonnement analogue à celui consistant à chercher le point où la courbe est coupée par une droite parallèle à la droite représentant le mouvement uniforme, elle est en effet ici plutôt utilisée dans une démarche « infinitésimale » puisqu'il est parlé de « triangles de plus en plus petits ».

Comme nous l'avons développé dans le Chapitre 5, ces deux techniques mathématiques pourraient être utilisées comme des techniques didactiques pour arriver à la définition de la vitesse instantanée comme limite des vitesses moyennes, ce qui est en général fait beaucoup plus rapidement en disant « on prend Δt de plus en plus petit, cela revient à prendre la limite… »

Or cette même expression, à savoir « prendre de plus en plus petit, c'est-à-dire prendre la limite », utilisée à propos des triangles ou des marches rend curieusement ces procédures « douteuses, » ce que l'on retrouve dans les propos de 3 étudiants.

Le premier est le seul à avoir traité la procédure de l'écart maximal parce qu'il avait tout de suite compris quel rôle joue cette stratégie dans le milieu :

> *[..] pour avoir en fait plusieurs méthodes possibles et ainsi entre guillemets pouvoir justifier la plus grande utilité, la plus grande praticabilité de celle que je vais utiliser, après.*
> *Bon je montre que dans le premier j'arrive à l'appliquer. Pour le deuxième on arrive déjà à des équations plus compliquées. Donc cette méthode-là va marcher mais sans doute sur des cas très particuliers et que, si on veut quelque chose de plus général, ce ne sera peut-être pas la méthode à utiliser.*
> *2006-7*

Ayant utilisé la procédure de l'écart maximal pour valider son raisonnement avec la stratégie 2 sur la tangente, il se trouve donc déjà dans une démarche de recherche de la technique ayant la plus grande portée, ce qui l'amène à ne pas prendre en compte les stratégies plus « infinitésimales » :

> *Ben les autres, en fait, ne me plaisaient pas parce que je les trouvais trop approximatives si je puis dire, et très difficiles à appliquer par calcul après. Donc je ne voyais pas l'utilité de m'embarquer dans ces méthodes-là.*
> *2006-7*

Or ces stratégies sont parfaitement « calculables » au même titre que celles utilisant la tangente (voir Chapitre 5).

L'autre groupe de deux étudiants va surtout identifier dans les réponses des élèves le fait qu'il y ait une limite implicite mais, en analysant eux-mêmes les obstacles sous-jacents, ils s'empêchent d'essayer de les exploiter :

> *Nous pensons que les élèves ayant cette logique ont étudié la notion de tangente dans l'outil médiateur, le triangle rectangle. Les élèves diminuent les dimensions du triangle, ils utilisent donc la limite involontairement. Le souci est que le triangle va se réduire visuellement en un point. Comment peuvent-ils donc dire que l'hypoténuse du triangle final (le point) est parallèle à la droite correspondant à* $p_2(t)$ *. Un point ne peut pas servir de médiateur entre une droite et sa pente. Cela nous fait donc penser à la conception géométrique de la notion de limite (cours). Nous sommes en présence d'un obstacle épistémologique.*
> *2006-5*

Etant donné que la question du triangle médiateur avait été présentée au cours, on peut ici aussi penser à un effet de contrat, ou bien à une sorte de sur-utilisation de connaissances didactiques.

Si ce groupe pense que le triangle va se réduire à un point, un autre groupe de 2 étudiants va (se) poser la question « d'un plus petit triangle » :

> *L'existence d'un plus petit triangle est impossible : on pourrait montrer qu'à l'intérieur de chaque triangle, il en existe un plus petit qui réponde aux exigences de la méthode.*
> *2006-3*

Il parviendra ensuite à utiliser celle des marches pour effectivement proposer un discours présentant le passage de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée. Mais regardons comment il imagine que le professeur « repassera » à la limite pour terminer le raisonnement des élèves :

> *[équation de la vitesse pour une marche] :* $V = \dfrac{p_1(t'+h) - p_1(t')}{h}$ *et* $t' < t_0 < t'+h$
> *Professeur : l'auteur invite à prendre des intervalles de temps de plus en plus petits. Qu'est-ce que cela implique pour h et pour la dernière relation ?*
> *Elève : h tend vers 0 et la relation devient* $t' = t_0$ *quand* $h \to 0$ *et on a trouvé* t_0
> *Professeur : vous dites qu'on a trouvé* t_0*. Mais alors qu'en est-il pour l'équation de la vitesse ? Elle devient* $\dfrac{p_1(t_0+h) - p_1(t_0)}{h}$ *quand* $h \to 0$ *et on ne peut pas simplifier plus (enlever les h). Sinon on tombe sur un cas indéterminé de calcul de la limite.*
> *On la note* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{p_1(t_0+h) - p_1(t_0)}{h}$*. C'est la vitesse de p1 en* t_0*.*
> *2006-3*

Ce qui est intéressant pour nous ici réside dans le fait que l'étudiant a fonctionné en rationalité I jusqu'à la dernière étape à laquelle il repasse dans la rationalité II en parlant d'un cas général où la simplification ne serait pas possible. Nous pouvons par ailleurs rappeler que cet étudiant avait posé une question préalable sur « l'existence d'un plus petit triangle ». Est-ce la question qui l'amène à reprendre un niveau plus théorique, niveau auquel cette question est résolue ? Ou est-ce la connaissance du niveau II qui lui fait poser la question ?

Il va ensuite revenir en rationalité I en utilisant l'argumentation cinématique pour valider son résultat

> *Existe-t-elle ?*
> *Oui puisque en t_0, la vitesse de p_1 est celle de p_2.*
> *2006-3*

Un groupe de 3 étudiants va utiliser ces stratégies comme illustration des définitions données auparavant. Mais regardons à quel point il leur est difficile de produire un discours cohérent :

> *Utilité des triangles : calcul de la pente.*
> *Coefficient angulaire de l'hypoténuse du triangle à l'instant a cherché : =* $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$
> *La pente de la courbe en un point définit la vitesse.*
> *En un instant donné, si les coefficients angulaires des pentes de deux courbes sont identiques, alors les vitesses des particules sont identiques.*
> *Plus les triangles sont petits, plus t se rapproche de a et plus l'intervalle dans lequel se trouve la valeur de a est petit.*
> $\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ *=coefficient angulaire de la pente en a de la courbe*
> *2006-1&4*

Précisons que le discours sera exactement le même pour la stratégie suivante, qu'ils ont d'ailleurs ramenée à la construction de triangles.

Pour eux, il est déjà établi (sur base d'un tableau de valeurs) que « la pente définit la vitesse », mais l'expression $\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ a déjà utilisée dans l'activité précédente. Il s'agit donc seulement ici de prouver que les triangles et les escaliers vont bien permettre une écriture ayant la même forme que précédemment. Le passage à la limite est encore considéré comme allant de soi.

Un groupe de 2 étudiantes va également utiliser ces stratégies comme illustrations du discours qu'elles ont déjà tenu dans l'activité précédente en définissant la vitesse instantanée comme limite :

> *A partir de cette activité, le professeur pourrait reprendre les réponses des élèves et les justifier à partir de la théorie qu'il aura amenée à la première activité.*
> *2006-2*

Il semble donc que leur conception du discours technologique est que le professeur fournisse les éléments de théorie tels que les réponses des élèves n'en soient plus qu'une illustration.

Elles vont ensuite s'en servir pour aboutir aux deux formulations du nombre dérivé en écrivant les accroissements et leur rapport de deux manières différentes. En définissant le taux d'accroissement d'une fonction et en écrivant $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$, elles pensent par ailleurs que par l'élève écrira, sans doute par analogie, $v(t) = e'(t)$ et que le professeur dira

> *La vitesse instantanée est égale au nombre dérivé de l'espace parcouru par rapport au temps t.*
> *2006-2*

Enfin, un groupe va commencer par interpréter la stratégie des triangles en termes de sécantes et tangente, ce qui signifie en fait qu'ils les regardent directement pour le rapport des accroissements.

> *L'idée de tangente peut aussi avoir été envisagée*
> *Les triangles peuvent faire allusion aux sécantes*
> *L'hypoténuse du triangle central montre une sorte de limite de p_2 considérée comme la sécante. Cette idée est d'autant plus appuyée si nous prenons des Δt de plus en plus petits.*
> *2006-6*

Ensuite, ils voient les triangles comme une illustration de la définition qu'ils ont donnée dans la première activité :

> *Néanmoins, cette résolution pourrait également diverger des trois précédentes par l'utilisation de la vitesse instantanée. En effet, la réduction progressive des triangles entraînerait des intervalles de temps Δt, et par conséquent des Δp, de plus en plus petits, ce qui rejoindrait la définition de vitesse instantanée abordée dans le problème I.*
> *2006-6*

Outre le fait qu'il n'y ait pas eu de définition de la vitesse instantanée dans la question précédente, il semble donc que la notion de vitesse instantanée soit finalement plus liée à la limite du rapport des accroissements qu'à la vitesse moyenne.

Pourtant ces mêmes étudiants vont conclure

> *Nous pensons que la deuxième, la troisième ainsi que la quatrième ont un avenir plus prometteur que les autres. En effet, la deuxième et la troisième semblent spontanées et rapides tandis que la quatrième, néanmoins plus longue, reste très intéressante pour introduire la définition formelle de la dérivée puisque les limites sont mises en avant par le passage à la vitesse instantanée.*
> *2006-6*

Nous voyons bien dans leur remarque que la notion de vitesse déjà définie est seulement un artifice pour définir la dérivée : puisqu'on passe à la limite pour obtenir la vitesse instantanée, en passant à la limite dans un autre taux d'accroissement on obtiendra la dérivée. Mais ce passage à la limite a surtout un rôle par son écriture. On retrouve par exemple dans leur synthèse la tournure « ajouter la limite à l'expression » :

> *La tangente est une droite dont l'équation est f(x)=ax+b. Essayez d'exprimer le coefficient angulaire a en fonction de f et sans le faire dépendre de l'ordonnée à l'origine b. Pensez à la façon dont vous calculez a d'habitude. Réponse* $a = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.
> *Vous savez que le signe Δ symbolise une variation. Nous allons donc choisir deux abscisses différentes a et x par exemple et ré-exprimer la formule ci-dessus* $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$*. Nous appellerons cette dernière taux d'accroissement de f en a. on peut également l'exprimer d'une autre façon* $\frac{f(x+a)-f(x)}{a}$*. En ajoutant la limite à l'expression 1 on va enfin pouvoir définir le nombre dérivé et si la fonction f représente un espace parcouru au cours du temps, on retombe sur la définition de la vitesse instantanée.*
> *Le nombre dérivé est donc le coefficient angulaire de la tangente et une généralisation de la vitesse instantanée.*
> *2006-6*

Une étudiante va par contre effectivement se servir de ces stratégies pour définir (au cours de l'activité suivante, quand le calcul est possible) la vitesse instantanée comme « limite de suite de vitesses moyennes[276]» (2006-8). Elle est par ailleurs la seule à parler de « deux »approches de la vitesse instantanée, en discernant l'approche par la pente et l'approche par les accroissements. Toutefois, alors que l'élève gère en fait séparément les accroissements de temps et les écarts de position, elle considère directement le rapport des accroissements et

> *[Je me demandais dans quelle mesure il était nécessaire de régler la question de l'activité III à la page 12 et 13 en termes de rapport. Enfin oui, oui, parce que vous dites « un autre groupe d'élèves exploitera l'idée de vitesse moyenne en réduisant systématiquement l'intervalle de temps, ils apporteront une contribution numérique etc. »]*
> *C'est les triangles, donc c'est l'idée de rapport qui apparaît, et dans l'escalier aussi je me suis dit que ceux qui pensaient à ça, enfin ils voient quelque chose qu'on avance suivant le temps et puis une différence de position par rapport à cet intervalle de temps. Donc c'est à cause de cette…*

[276] Remarquons l'utilisation plus généralisée de « limite de la vitesse moyenne » ou « limite de vitesse moyennes » .

> *[celui d'après par exemple, est-ce que c'est nécessaire de parler en termes de rapport ? Parce que il y a quelque chose de très particulier dans ces triangles, hein]*
> *Oui ils prennent des intervalles de temps identiques.*
> *[Oui, voilà c'est ça.et donc ils vont jouer sur des écarts de position, ils jouent sur des écarts de position, et on peut]*
> *Oui mais quand même à la fin et c'est ça qui m'a fait.*
> *On peut continuer les intervalles de temps de plus en plus petits.*
> *[Oui mais toujours égaux. On n'est pas obligés de calculer vraiment un taux d'accroissement. On peut calculer l'expression des écarts de position où Δt va apparaître et puis Δt nul. Donc ce n'est pas dans un rapport. Ce n'est pas dans un calcul qui a la forme d'un rapport que ça va se passer. C'est possible]*
> *Ah oui, ils fixent le temps et puis voilà.*
> *[Oui voilà, comme le Δt est le même partout, finalement ça n'a pas d'importance]*
> *Oui c'est ça que en fait j'avais cru que les deux se rapprochaient avec l'idée…*
> *2006-8*

6.3.2.1.3 Tâches III et III bis

La première question est ici de déterminer l'instant auquel les deux mobiles ont la même vitesse lorsque les lois sont données par $p_1(t)=t^2$ et $p_2(t)=\sqrt{3}\cdot t$ (III) puis $p_1(t)=t^3$ et $p_2(t)=2\cdot t$ (III bis). Une seconde question lui répondant sera de déterminer la vitesse du premier mobile en t=1.

Il est également demandé de décrire l'avantage de disposer des expressions analytiques. On peut donc associer plusieurs enjeux à cette tâche, associés aux expressions analytiques proposées, ainsi qu'à l'ordre des questions posées.

Concernant le fait de connaître les expressions analytiques des fonctions, cela permettra de réutiliser les stratégies de l'exercice précédent en effectuant les calculs. La comparaison des résultats numériques obtenus permettra alors de confirmer que toutes ces stratégies, même si elles ne reposent pas toujours sur la même conception de la vitesse, en proposent un modèle cohérent. Les techniques de calcul mises en place pour répondre à la première question vont alors pouvoir bénéficier d'une certaine légitimité puisque le résultat obtenu par un calcul « nouveau » (manipulation de Δt) est identique au résultat obtenu par un calcul connu (maximisation du second degré).

Concernant l'ordre des questions, le fait de poser en premier la question de déterminer un instant avant de déterminer la vitesse en un instant donné peut éviter de s'orienter trop vite vers une définition plus ou moins formelle de la vitesse instantanée, permettant ainsi de rester dans le discours de niveau 1. De plus, la légitimité acquise précédemment pourra alors

« profiter » également au calcul utilisé pour répondre à la deuxième question. En effet, si on avait d'abord posé la question sur la vitesse, il aurait fallu « donner une formule » dont rien n'aurait garanti qu'elle produise bien ce qui correspond à notre conception de la vitesse instantanée.

Enfin, le fait de proposer une fonction du second degré puis une fonction de degré 3 a pour but de donner à la technique « calcul en simplifiant et annulant » une plus grande portée que les autres, puisque la stratégie de l'écart maximal donnera des calculs faciles pour $p_1(t) = t^2$ mais moins évidents pour $p_1(t) = t^3$. De même la recherche d'un seul point d'intersection entre la courbe et une droite parallèle à p_2 sera plus difficile.

Nous pouvons distinguer ici trois types de posture :

- 2 étudiants produisent un discours de niveau 1;
- un groupe de 2 étudiants est entre deux niveaux de discours. Tout en ayant rangé l'activité sous un titre « applications », ils se posent en même temps la question « les élèves associent-ils le coefficient angulaire de la droite approximant la courbe à la vitesse instantanée du mobile » (2006-5) ce qui les amène à travailler comme « entre deux chaises » ;
- les 9 autres étudiants vont adopter un discours 2 en faisant des exercices d'application des formules fournies précédemment et parfois même considérer que la question sur $p_1(t) = t^3$ est seulement un exercice supplémentaire pour s'exercer. Toutefois, leur réalisation de cet exercice repose sur un discours de niveau 2bis, voire 0 quand il y a seulement comparaison de valeurs, dans les tâches antérieures.

6.3.2.1.3.1 Quatre manières d'articuler les niveaux 1 et 2

Parmi les deux premiers étudiants, on peut identifier deux stratégies. Le premier, qui avait négligé de traiter les procédures liées aux accroissements, va travailler en termes de vitesse moyenne. Il va d'abord utiliser la stratégie de l'écart maximal et faire les calculs correspondants, puis vérifier qu'il trouve la même chose avec la stratégie d'une droite parallèle en cherchant l'intersection d'une droite d'équation $d(t) = \sqrt{3} \cdot t + b$ avec la courbe. Ayant obtenu une équation du second degré, la résolution fournit deux valeurs entre lesquelles il calcule la vitesse moyenne pour vérifier que c'est bien toujours $\sqrt{3}$ indépendamment du terme constant b. Comme cet étudiant travaille avec une vitesse instantanée conçue comme la vitesse moyenne sur un intervalle réduit à un point, il va alors réduire l'intervalle obtenu à un point en se plaçant dans le cas d'une racine double, donc de l'annulation du discriminant.

Ce n'est donc que pour la question suivante qu'il va devoir parler de vitesse instantanée :

> *Pour trouver la vitesse de p1 en 1, prenons un intervalle du type [1,1+h] et calculons la vitesse moyenne de p1 sur cet intervalle*
> $$v_m = \frac{espaceparcouru}{temps} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \ldots = h+2$$
> *Comme on l'a fait précédemment, rendons l'intervalle de plus en plus petit en faisant tendre la deuxième borne vers la première, c'est-à-dire en faisant tendre h vers 0 pour que l'intervalle se réduise à un seul point : celui qui nous intéresse. Dans ce cas, la vitesse devient*
> $$v_m = \lim_{h\to 0} h+2 = 2$$
> *2006-7*

Le calcul « simplifier par Δt puis annuler Δt » que l'on rencontre dans les stratégies 4 et 5 est présent ici sous la forme « simplifier par h puis annuler h », ce qu'il appelle « faire tendre h vers 0 ». Remarquons qu'il simplifie par h dès le calcul de la vitesse moyenne.

Pour la question IIIbis, il repère d'abord que la physique ne dit rien sur les lois cubiques, puis que les deux premières techniques ne fonctionnent pas. Voici alors comment il propose d'utiliser la technique précédente :

> *La vitesse de p_2 est constante et vaut 2. Donc, trouver le ou les points où les deux particules ont la même vitesse revient à trouver l'instant t où la vitesse de la première particule vaut 2. Dans la situation III, on a calculé la vitesse de la première particule à l'instant t=1 en calculant la vitesse moyenne sur un intervalle [1,1+h].*
> *Soit t_0 l'instant cherché, cherchons la vitesse de p_1 à cet instant, dans ce but calculons la vitesse moyenne de P1 sur l'intervalle $[t_0, t_0+h]$*
> $$v_m = \frac{espaceparcouru}{temps} = \frac{(t_0+h)^3 - t_0^{\,3}}{h} = \ldots = 3\cdot t_0^{\,2} + 3\cdot h\cdot t_0 + h^2 .$$
> *Maintenant, comme dans la situation III, rendons l'intervalle de plus en plus petit en faisant tendre h vers 0. La vitesse devient*
> $$v_m(t_0) = \lim_{h\to 0} 3\cdot t_0^{\,2} + 3\cdot h\cdot t_0 + h^2 = 3\cdot t_0^{\,2}$$
> *donc l'instant qui nous intéresse est tel que $3\cdot t_0^{\,2} = 2$.*
> *2006-7*

Nous pouvons remarquer ici que le discours repose sur le fait de revenir à chaque fois à la notion de vitesse moyenne sur un intervalle qui ne devient vitesse instantanée qu'au dernier moment, y compris dans les notations utilisées lorsque v_m devient $v_m(t_0)$. Tout en étant majoritairement de niveau 1, le discours emprunte des éléments au niveau 2, par exemple en utilisant l'expression « faire tendre h vers 0 » alors qu'il l'annule, et dans le fait d'utiliser une écriture avec une limite qui n'est finalement pas nécessaire.

L'autre étudiante propose un discours quelque peu différent et plus vite d'ordre numérique. Etant donné que cette étudiante n'a pas compris la stratégie de l'écart maximal, elle ne peut donc l'utiliser ici. Parlant directement de la recherche d'une droite ayant un seul point commun avec la courbe, elle va écrire l'équation du second degré, la résoudre et directement ne prendre que le cas d'une racine double. Ce calcul peut être confronté avec une approche basée sur la vitesse moyenne consistant à chercher un intervalle $[t_{0,}t_0+\Delta t]$ sur lequel la vitesse moyenne soit $\sqrt{3}$. Mais, pour cela, elle procède en calculant la vitesse moyenne pour plusieurs valeurs de Δt : 0,1 ; 0,01 ; …. Elle va en fait obtenir plusieurs intervalles à l'intersection desquels doit se trouver l'instant cherché[277] sans pouvoir en donner une valeur exacte. Ne pouvant alors être complètement dans un discours de niveau 1, elle va devoir reprendre les argumentations de la tâche précédente pour s'autoriser à dire, même avec des approches différentes :

> *Les élèves ont touché du doigt un même concept.*
> *2006-8*

C'est ce qui va l'amener à définir la vitesse instantanée comme

> *Limite d'une suite de vitesses moyennes*
> $$v_i(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t_0+\Delta t)-p(t_0)}{\Delta t}$$
> *2006-8*

[277] Les raisonnements sur les intervalles de temps aboutissent le plus souvent à une telle situation, sans que personne ne doute qu'il y ait bien un nombre à l'intersection des intervalles ainsi construits.

Nous avions déjà signalé l'ambiguïté de la formule « limite de vitesse moyenne » ou limite « de vitesses moyennes », donc cette expression parlant d'une suite de vitesses moyennes parait assez nouvelle.

Notons toutefois que le discours de cette étudiante semble nécessiter quand même la connaissance de la notion de limite et des écritures associées. En effet, le calcul de la vitesse en 1 revient alors pour elle à une application de la formule de calcul donnée précédemment.

La manière dont son discours combine le niveau 1 et le niveau 2 est différente par rapport au précédent. L'étudiant précédent n'avait pas besoin des expressions de niveau 2 qu'il reprend, tandis que cette étudiante doit faire appel au niveau 2 lorsqu'elle n'avance pas dans le niveau 1. Toutefois, cette articulation permet un discours qui reste cohérent et rationnel, contrairement à ce que nous avons appelé le 2bis.

En ce qui concerne nos deux étudiants « entre deux chaises », leur discours va alterner les deux cadres, sans vraiment les articuler. Ils ont posé une question en termes de vitesse instantanée puis raisonnent (sans le dire) en termes de vitesse moyenne :

> *Nous pouvons donc écrire*
> $$\frac{p_2(t+\Delta t)-p_2(t)}{\Delta t}=\sqrt{3}$$
> $\Leftrightarrow \ldots$
> $\Leftrightarrow \Delta t + 2\cdot t = \sqrt{3}$
> *2006-5*

Ils écrivent ensuite :

> *(* $\Delta t \to 0$ *) pour avoir le plus de précision possible*
> $$\Rightarrow t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
> *2006-5*

Le « $\Delta t \to 0$ » semble alors une écriture intermédiaire entre les deux niveaux de rationalité. N'osant pas dire « on a fait Δt =0 après avoir simplifié » , qui serait du discours de niveau 1, ni l'écrire avec une limite, c'est-à-dire avec un discours de niveau 2, cette mystérieuse écriture remplace en quelque sorte les emprunts que le premier étudiant faisait plus explicitement aux deux cadres. Ensuite, ils vont la réutiliser comme définition pour calculer la vitesse à l'instant 1 :

> $v_1(t) = \dfrac{p_1(t+\Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = 2 \cdot t + \Delta t$
> *par définition* $\Delta t \to 0 \Rightarrow v_1(t) == 2 \cdot t$
> *2006-5*

Ces étudiants restent d'abord proches du discours de niveau 1 en faisant ensuite le même calcul, c'est-à-dire qu'ils égalent la vitesse moyenne du premier à la vitesse moyenne du deuxième, puis ils annulent Δt. Ils semblent qu'ils acceptent d'utiliser pratiquement une technique de calcul de niveau 1 mais que sa formulation leur soit plus difficile.
Ils vont d'ailleurs ensuite « bifurquer » immédiatement dans la rationalité de type II en considérant que la tâche III bis est une répétition pour exercer la définition, et profiter de cette activité pour donner une série de définitions : taux d'accroissement, dérivée, propriétés, formulaires, etc., qui seront alors les objets pour les questions suivantes. Concernant la problématique de la nature des nombres, nous pouvons noter que tous leurs énoncés vont contenir une expression encore peu rencontrée :

> *Le réel* Δx *tel que a+* Δx *appartienne à l'intervalle I*
> *2006-5*

6.3.2.1.3.2 9 étudiants adoptent le discours de niveau 2 ou 2bis

Quant aux 9 autres étudiants, ils ont en général déjà défini la dérivée et donc la vitesse instantanée, soit comme limite de la vitesse moyenne, soit directement comme dérivée de la position. Ils vont donc résoudre ces questions à titre d'application, et poser l'égalité des vitesses instantanées sans toujours exprimer qu'une des deux vitesses est constante. En effet, aucun ne reprend la stratégie de la recherche d'une droite de même pente, ni celle de l'écart maximal.
Quant au choix des expressions analytiques, la majorité l'interprète comme une opportunité de développer ensuite la théorie sur les dérivées de fonctions puissances, soit avec la généralisation de la formule, soit avec un début de démonstration.

> *Technologie du discours*
> *Au terme de cette activité, le professeur pourrait demander aux élèves de comparer les fonctions dérivées des activités III et III bis*
>
> | *f(t)* | *f'(t)* |
> |---|---|
> | $\sqrt{3} \cdot t$ | $\sqrt{3}$ |

> $2 \cdot t$ $\quad$ 2
> t^2 $\quad$ $2 \cdot t$
> t^3 $\quad$ $3 \cdot t^2$
> *A partir de ce tableau le professeur demandera ensuite aux élèves si ils ont une intuition de ce que pourrait être la dérivée de* $f(t) = t^4$.
> *[..]*
> *Après cela nous jugeons important de démontrer que* $(t^n)' = n \cdot t^{n-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{Q}$.
> *Le professeur est alors en mesure de montrer aux élèves quelles sont les dérivées des fonctions constante, identité, racine carrée positive et racine cubique et d'en donner le domaine de dérivabilité.*
> *2006-2*

En ce sens, les étudiants détournent en quelque sorte les tâches pour les faire rentrer dans l'organisation théorique et donc un discours de niveau 2. Pourtant leurs productions dans les tâches I et II nous amènent à les présenter aussi comme les exemples typiques des cas où ce discours de niveau 2 est en fait « soutenu » par du 2bis. Par exemple, la relation entre la pente et la vitesse avait été obtenue par comparaison des valeurs d'un tableau et la tangente avait été définie comme limite de sécantes sans que cela se justifie dans ce contexte cinématique.

6.3.2.1.4 Tâche IV : 11 discours mêlant le niveau 0 et 2

Il s'agissait ici de tracer le plus précisément possible la courbe représentant la loi de position d'un mobile dont on connaît la vitesse instantanée à certains instants, ainsi que les périodes d'accélération ou de décélération entre des positions données. L'objectif est ici d'utiliser les informations sur l'accélération pour en déduire l'allure de la courbe (ce que nous appelons la concavité)) qui est formulable en termes d'écarts de position croissants ; d'utiliser les droites mises en évidence dans les activités précédentes comme étant des droites dont la pente est la vitesse instantanée et qui vont devenir des « droites-guides ». C'est aussi l'occasion d'interpréter les notions de vitesse positive et vitesse négative : si la vitesse négative n'a guère de sens physiquement, le fait de garder le même objet mathématique constitue par contre un début de construction théorique, notamment vers une argumentation unique (en Δx et Δt) du critère de croissance. Notons enfin que la courbe obtenue correspondra à l'expression de la fonction utilisée dans un autre contexte pour la tâche suivante.

Ici encore, seuls 2 étudiants auront traité la situation dans un cadre de rationalité d'ordre I, les 11 autres tenant soit un discours peu clair (basé sur la caractérisation visuelle de la concavité, il pourrait presque être qualifié d'ordre 0), soit un discours déjà d'ordre 2 puisque ils ont fourni auparavant les définitions et résultats théoriques.

Remarquons toutefois que, dans le discours des 2 étudiants cités, il reste difficile d'expliquer pourquoi la droite ayant la vitesse instantanée pour pente va « coller » à la courbe. Par exemple, l'un utilise un énoncé qu'il a donné à la fin de l'activité précédente mais qui n'est finalement qu'un constat :

> *On a pu constater que quand la vitesse d'une particule vaut v_0 à un instant t_0, alors la courbe représentant son déplacement longe une droite de coefficient angulaire à cette vitesse au point $(t_{0,} p(t_0))$.*
> *2006-7*

L'autre étudiante avait par contre évoqué un argument relevant plus du niveau 1:

> *[c'est comme si on avait] lancé le mobile de la même manière*
> *(2006-8)*

Parmi les 11 autres, la plupart avaient déjà défini la tangente même si, encore une fois, ni la définition comme position limite de sécantes, ni la définition par le coefficient[278] n'explique le rôle de « guide ». Cela va les amener à utiliser des arguments comme ci-dessous, sans que le « car » ne soit justifié :

> *La pente de la tangente vaut 2 car la vitesse vaut 2.*
> *2006-1&4*

Cela va surtout les amener à utiliser la forme de la courbe pour énoncer le critère de croissance, qui leur servira ensuite de justification dans les tâches suivantes. En résumé, le critère de croissance se trouve donc dans ce cas justifié visuellement sur un exemple sans argumentation supplémentaire. Au niveau du texte, l'on peut réaliser la juxtaposition avec l'énoncé et solution sans discours, immédiatement suivi de

[278] En termes strictement cinématiques, on doit ici admettre que la variation de vitesse est « gentille », ou encore contrôlée par une accélération .

> *Discours technologique*
> *Les fonctions dérivées nous facilitent la tâche dans la représentation graphique de la fonction de base*
> *-si f est dérivable, f est strictement croissante, alors en tout x de [a,b], f'(x) >0. et inversement*
> *(schéma)*
> *2006-1&4*

Un groupe va même considérer l'énoncé comme

> *Un récapitulatif graphique*
> *(2006-6)*

Si cet extrait suggérait déjà l'utilisation du niveau S_3 : « les élèves verront bien toutes les notions sur un schéma », attardons-nous sur les propos suivants du même groupe, montrant comment le niveau S_3 des valeurs et croyances sur l'enseignement justifie en quelque sorte la faiblesse du discours sur le plan rationnel.

Ils précisent que le professeur pourra :

> *Faire remarquer le lien entre fonction dérivée et croissance ou décroissance d'une courbe, qui sera de toute façon repris sous forme de propriété dans la suite.*
> *2006-6*

Il y a donc ici une juxtaposition des niveau 0 et 2, en même temps qu'une répartition des rôles : les élèves constatent et le professeur donne la propriété qui est censée expliquer ce qu'ils voient. Mais qui était là avant l'autre : la propriété mathématique ou le phénomène ? Heureusement, le professeur peut avoir la conscience tranquille puisqu'il aura pris soin de

> *[…] laisser libre cours à la réflexion des élèves sur le rapport entre la dérivée d'une fonction et ses extrema.*
> *2006-6*

Ne sommes-nous pas complètement dans l'ostension déguisée ?

Un autre groupe de deux étudiantes va éviter de s'engager et se réfugier derrière les tangentes, mais arriver à la même juxtaposition entre niveau 0 et niveau 2, également justifiée par le fait que le professeur aura amené les élèves à établir les résultats. Dès le début, la question de vitesse négative est résolue en disant qu'en fait c'est la pente de la droite qui donne la vitesse et que si la pente est négative, alors la vitesse est négative. Ensuite, elles utilisent l'exercice pour amener le plan d'étude d'une fonction, à l'aide du discours ci-dessous. Ici, le niveau 0 (« observer les pentes ») ne sera articulé au niveau 2 (les résultats auxquels il doit arriver) que par un « lien entre la pente de la tangente et la dérivée » que les élèves sont supposés pouvoir faire par eux-mêmes, puisqu'il sont « ainsi amenés » :

> *Pour aboutir à la notion de croissance et de décroissance en utilisant la dérivée, le professeur peut demander aux élèves de se référer au graphique représentant les variations de position du mobile réalisé dans l'activité et leur suggérer d'observer les pentes « avant et après le maximum ». Ils seront ainsi amenés, une fois de plus, à refaire le lien entre la pente de la tangente à la courbe et la dérivée.*
> *Sans entrer dans le détail des explications du professeur, notons les résultats auxquels ils doit arriver :…..*
> *2006-2*

Enfin, attardons-nous sur un discours alternant en permanence les différents ordres de rationalité présents. D'abord est énoncé un résultat théorique, de niveau 2, qui est a priori illustré par un graphique. Cependant, aucune argumentation de niveau 1 ou 2 n'étant fournie, c'est le graphique qui risque d'en prendre la place, ramenant ainsi le discours au niveau 0….

> *Nous savons qu'une courbe peut être approximée par une droite en un point donné comme montré par le graphique ci-dessous.*
> *2006-5*

En effet, la seule argumentation consiste en une reconnaissance de formules :

> *La pente d'une droite est définie comme* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t}$*, dans laquelle on peut reconnaître la définition du nombre dérivé* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$.
> *2006-5*

On pourrait y inclure un discours sur la structure des formules du type : quotient de deux différences avec un numérateur valant l'écart entre deux valeurs de la fonction et un dénominateur valant l'écart entre les abscisses », mais la suite de leur discours insiste sur une analogie de formules qui doit provoquer l'assimilation :

> *Si nous identifions cette définition à ce que nous avons vu précédemment :*
> *Nombre dérivé :* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
> $$\left\{\begin{array}{l} a \to t \\ f(t) = p(t) \\ \Delta x = \Delta t \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

> *donc la vitesse est égale à la pente de la droite frôlant au mieux la courbe*
> *2006-5*

Ce groupe nous montre également la difficulté à rester dans le niveau 1. En effet, ils n'avaient pas défini la vitesse instantanée comme cela mais selon la technique de calcul simplifier/annuler. Ils en modifient ici la définition pour pouvoir procéder à l'analogie et pouvoir écrire :

> *Par analogie à la définition du nombre dérivé nous constatons que la vitesse est en fait le nombre dérivé de la fonction position.*
> *2006-5*

Alors, ils seront revenus au niveau 2, ce qui va leur permettre d'énoncer des résultats sur la dérivée et de les appliquer à la vitesse.

Mais ils ne sont arrivés au niveau 2 qu'en passant par le niveau 0 ! Remarquons en effet que l'analogie demandée ne porte alors que sur la forme de l'écriture puisque, à ce stade, la dérivée ne peut en fait rien signifier d'autre que la vitesse. Il nous parait donc révélateur que les étudiants définissent « un autre objet » qu'ils appellent dérivée (passage en rationalité II) et demandent ensuite de procéder à cette fausse analogie (rationalité 0) pour pouvoir résoudre l'exercice comme application de la théorie (rationalité II).

Il nous parait également intéressant de noter que ce qu'ils laissent à l'état d'implicite contient en fait l'explication de la propriété de « frôlement » vue dans le Chapitre 4 : la pente d'une droite représentant la loi de position est $\frac{\Delta p}{\Delta t}$. Or la droite étudiée a pour pente la limite d'une telle pente, et c'est bien la signification de la limite qui est en jeu ici, comme nous l'avons vu avec la définition de Chilov. Il semble donc que les étudiants ne rentrent pas complètement dans un discours de niveau 2.

Pour terminer, signalons que, si ces étudiants donnent d'abord une définition non ambiguë de la tangente (comme droite dont la pente est le nombre dérivé), elle prend dans la rubrique « définition » une forme curieusement mixte où les conditions préalables portent de plus sur la tangente :

> *Le coefficient angulaire de la tangente au point (a,f(a)) du graphe cartésien de la fonction* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto f(x)$ *est égale au nombre dérivé de f en a pour autant que cette tangente ne soit pas verticale.*

> *Une équation de la tangente au point (a,f(a)) du graphe cartésien de la fonction* $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto f(x)$ *est* $y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$ *pour autant que cette tangente ne soit pas verticale.*
> *2006-5*

6.3.2.1.5 Tâche V :

Cette situation demande de déterminer par calcul les(s) instant(s) au(x)quel(s) la vitesse d'un mobile est nulle, lorsque sa loi est donnée par une fonction polynôme de degré3.

Ici encore 11 étudiants sur 13 vont effectuer cette tâche en tant qu'application des éléments de théorie (définition, formules) qui auront été fournies précédemment. Pour la plupart, la dérivée a été définie, puis la vitesse a été définie comme dérivée de la position, puisque la vitesse instantanée est la limite de la vitesse moyenne.

Parmi eux, nous avons remarqué un groupe qui va distinguer deux manières de procéder selon que les élèves connaissent ou non les formules de dérivation de somme et produit ainsi que les dérivées des fonctions usuelles. Dans le cas où ces résultats ne seraient pas connus, ils proposent le calcul suivant qui utilise curieusement la notation de limite et des symboles d'équivalence dès le début

> *Si la vitesse st nulle, on a*
>
> $$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=0$$
>
> $$\Leftrightarrow \lim_{t\to a}\frac{4\cdot t^3-100\cdot t^2+600\cdot t-4\cdot a^3+100\cdot a^2-600\cdot a}{t-a}=0$$
>
> $$\Leftrightarrow \lim_{t\to a}\frac{4\cdot(t^3-a^3)-100\cdot(t^2-a^2)+600\cdot(t-a)}{t-a}=0$$
>
> $$\Leftrightarrow \lim_{t\to a}\left\{4\cdot(t^2+a^2+a\cdot t)-100\cdot(t+a)+600\ \right\}=0$$
>
> $$\Leftrightarrow 12\cdot a^2-200\cdot a+600=0$$
>
> *2006-1&4*

Au niveau des enjeux de la tâche proposée, il s'agit d'augmenter la portée de la technique de calcul de la vitesse instantanée à partir de la vitesse moyenne en simplifiant et en annulant les termes appropriés, en la mettent en œuvre pour des fonctions polynomiales. Un groupe de deux étudiants va pourtant explicitement interpréter cet exercice à un niveau plus théorique comme une opportunité de mettre en évidence la linéarité de la dérivée et donc d'amener les formules de sommes et de produits. (2006-2)

Parmi les 2 autres, nous reprendrons ci-dessous leurs discours dans la mesure où cela peut nous suggérer des adaptations pour l'ingénierie, en révélant certaines stratégies (donc des difficultés) qui n'étaient peut-être pas *a priori* envisagées.

Un étudiant continue à travailler avec une vitesse instantanée qui est « une copie » de la vitesse moyenne sur un intervalle lorsque l'intervalle est réduit à un point. Il peut donc calculer la vitesse moyenne sur un intervalle $[t_0, t_0 + h]$

> $v_m = 12 \cdot {t_0}^2 + (12 \cdot h - 200) \cdot t_0 + h^2 - 100 \cdot h + 600$
> *Maintenant rendons l'intervalle de plus en plus petit en faisant tendre h vers 0, la vitesse devient*
> $v_m(t_0) = \lim_{h \to 0}(12 \cdot {t_0}^2 + (12 \cdot h - 200) \cdot t_0 + h^2 - 100 \cdot h + 600)$
> $= 12 \cdot {t_0}^2 + (12 \cdot 0 - 200) \cdot t_0 + 0^2 - 100 \cdot 0 + 600)$
> $= 12 \cdot {t_0}^2 - 200 \cdot t_0 + 600$
> *Cette vitesse que nous venons de trouver est la vitesse instantanée du mobile à l'instant t=t0. Donc les instants où la vitesse est nulle, …*
> *2006-7*

Cette conception nous parait intéressante en particulier au niveau des notations qui l'accompagnent : l'étudiant écrit v_m pour la vitesse moyenne[279] , et reprend la même notation sous une forme $v_m(t_0)$ pour la vitesse instantanée en t_0.

Enfin, une étudiante propose de se servir de ce calcul pour mettre en évidence la linéarité en écrivant le calcul sous la forme suivante

> $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{4 \cdot (t + \Delta t)^3 - 100 \cdot (t + \Delta t)^2 + 600 \cdot (t + \Delta t) \ - 4 \cdot t^3 + 100 \cdot t^2 - 600 \cdot t}{\Delta t}$
> $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4 \cdot (t + \Delta t)^3 - 4 \cdot t^3}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-100 \cdot (t + \Delta t)^2 100 \cdot t^2}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{600 \cdot (t + \Delta t) - 600 \cdot t}{\Delta t}$
> *2006-8*

279 Nous avons déjà remarqué dans les transpositions que la vitesse moyenne n'est jamais présentée avec une notation fonctionnelle. Il se trouve que le seul manuel proposant une notation fonctionnelle pour la vitesse moyenne (Fractale) est aussi le seul qui expliquait que la vitesse instantanée était obtenue par un calcul du type « simplifier puis annuler ».

6.3.2.1.6 Tâche VI

Rappelons que cette situation consiste en la recherche d'un volume maximal. La fonction donnant le volume de la boîte en fonction de la dimension du morceau découpé x a la même expression que celle utilisée dans les situations précédentes pour décrire un mouvement et pour chercher quand la vitesse est nulle. Cette situation avait conduit à établir que, tant que la vitesse du mobile est positive (resp. négative), la distance à l'origine augmente (resp. diminue) et que, lorsque la vitesse s'annule, le mobile « fait demi-tour » et donc la distance cesse d'augmenter pour diminuer, la courbe présentant alors un maximum. L'enjeu est donc de procéder « au même raisonnement » sur des grandeurs comme la longueur découpée et le volume, et donc sur une variable x qui n'est plus le temps. En fait, il s'agit ici de proposer d'accepter le critère de croissance pour une fonction réelle, en identifiant toute fonction à une loi de mouvement pour laquelle un raisonnement en termes de vitesses est disponible[280].

Seuls 4 étudiants (sur 13) vont repérer que c'est la même fonction et qu'on est donc dans cette démarche de transfert, démarche que seulement 2 vont oser effectivement, les 2 autres parlant plutôt d'une méthode que l'on peut appliquer à différents contextes.

Les 9 autres vont se situer plus ou moins explicitement dans une posture consistant

1) soit à appliquer un énoncé qu'ils auraient précisément énoncé auparavant avec toutefois une variante puisque certains l'auraient énoncé dès la tâche III (2006-2) et d'autres lors de la tâche IV (2006-1&4). Parfois la tâche reçoit même un nouveau titre comme « applications des dérivées » (2006-1&4), ou est regroupée avec les IV et V dans une catégorie « exercices récapitulatifs » (2006-5)

2) soit à utiliser la situation pour justifier la nécessité d'un nouveau résultat théorique.

Dans ce deuxième cas, un groupe propose une stratégie et un discours intermédiaires nous montrant qu'ils n'envisagent pas qu'une résolution soit possible sans connaître le résultat théorique. Ne souhaitant pas pour autant donner le résultat directement (sans doute un argument du niveau S_3), ils en arrivent encore à un résultat établi par constat visuel (niveau de discours 0). Encore une fois, la faiblesse sur le plan rationnel est justifiée par un argument du niveau S_3 du milieu : le professeur les a « laissés réfléchir » et il « conclut avec eux ».

280 En particulier, il y a une hypothèse implicite de continuité et dérivabilité.

> *Si les élèves n'ont jamais fait le lien entre les extrema d'une fonction et la dérivée, il serait judicieux de la part du professeur de leur faire tracer le graphe de la fonction et de leur demander : comment pourrions-nous relier la notion de maximum et minimum à celle de dérivée ?*
> *Après les avoir laissés réfléchir, le professeur pourrait conclure avec eux qu'une dérivée nulle entraîne un extremum.*
> *Il suffira alors de les laisser terminer le problème seuls.*
> $V'(x) = 600 - 200 \cdot x + 12 \cdot x^2$
> *et donc comme on l'a fait dans l'exercice précédent*
> $600 - 200 \cdot x + 12 \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3,9237 ou x = 12,7429$
> *2006-6*

En effet, dans leur stratégie, rien ne dit quels seraient les éléments et le discours permettant de conclure. De plus, le « comme dans l'exercice précédent » se réfère à une démarche en fait complètement différente. Dans l'exercice précédent, il était normal de poser v(t)=0 puisque on demandait les valeurs pour lesquelles la vitesse est nulle, tandis qu'ici l'annulation de V'(x) est une application de l'énoncé qui viendrait d'être « conclu » sur base de l'observation du graphique.
Cette confusion se confirme lorsqu'ils font suivre l'énoncé de la propriété correspondant à la condition nécessaire (si la fonction admet un extremum, alors f' s'annule) alors qu'ils viennent de demander aux élèves de voir et d'utiliser naturellement la condition suffisante (si la dérivée s'annule, en changeant de signe, la fonction admet un extremum).

Parmi les 4 autres, un groupe de deux étudiants va en fait regrouper les tâches V et VI et écrivent

> *En leur présentant la courbe comme loi de position d'un mobile sur un axe, puis comme loi de variation d'un volume en fonction d'un paramètre.*
> *Leur montrer qu'en changeant de contexte, la méthode peut rester la même et sera applicable à toute fonction continue.*
> *2006-3*

Le problème est ici que « la méthode » n'est pas explicitée. En fait, le discours de niveau 1 est presque là : les étudiants parlent bien de présenter une courbe comme une loi de position ou une loi de variation de volume. Mais ils ne parviennent pas à utiliser cet argument pour en déduire le critère et, au contraire, vont présenter la tâche comme deux exemples d'une propriété (déjà ?) existante.

Une étudiante précise l'enjeu de l'activité :

> *Nous pouvons observer que nous avons pu mettre en place un certain nombre de concepts de la théorie des dérivées tout en gardant une terminologie cinématique.*
> *Nous allons maintenant aborder un problème d'optimisation, ce qui permettra de faire un certain nombre de parallélismes et justifiera l'élaboration d'une théorie plus générale.*
> *2006-8*

Pour cela ,

> *Le professeur pourra faire prendre conscience de la similarité des représentations graphiques.*
> *2006-8*

Pour préciser ce qui autorise à « transférer le raisonnement », elle proposera un tableau pour

> *Présenter clairement le parallélisme des termes*
> *Position en fonction du temps → fonction d'une variable quelconque x*
> *Vitesse moyenne → taux d'accroissement*
> *Vitesse instantanée en t0 → nombre dérivé en a*
> *Dp/dt → f'*
> *Fonction vitesse instantanée → fonction dérivée*
> *Demi-tour → changement de croissance*
> *Accélération/décélération → dérivée seconde f''*
> *2006-8*

Ici, son tableau s'inscrit dans un discours de niveau 1 puisqu'il y a expérience de pensée et pas seulement analogie de formes.

Enfin, un étudiant commence par justifier le recours à une autre technique de recherche de maximum puisqu'on ne sait pas trouver les extrema d'une fonction du troisième degré. Ensuite, il développe le discours

> *Ensuite, on a tracé une courbe qui avait un maximum en (6,10) : le mobile avait une vitesse positive qui allait décroissante pour arriver en ce point. Ensuite la particule faisait demi-tour et repartait dans l'autre sens ce qui se caractérisait par le fait que sa vitesse devenait négative. Donc sa vitesse est positive juste avant le maximum et négative juste après. Donc si la fonction V(x) représentait un déplacement, trouver ses extrema reviendrait à trouver les points où la vitesse des particules ayant ce déplacement est nulle.*
> *2006-8*

Il résout le problème dans la tâche V (raisonnement en instants et vitesses) et conclut

> *La fonction qui nous intéresse dans notre problème de boîte est identique à celle que nous venons d'étudier sauf qu'elle est exprimée avec des x plutôt qu'avec des t ; Donc son maximum sera en x=…*
> *2006-8*

Remarquons qu'il demande directement d'assimiler la fonction V à un déplacement sans interpréter cette assimilation par rapport au problème de départ.

Le conflit entre les deux formes de rationalité, et l'impact éventuel de la formation, peut se retrouver dans les propos d'un étudiant, qui ayant pourtant fermement considéré cette tâche comme application, dira spontanément à l'oral :

> *La question VI sur le volume est très intéressante, ça me fait penser au vase conique en fait, c'était le même style d'exercice que le vase conique.*
> *Enfin je veux dire partir seulement avec cet exemple-là, ils re-balayeraient de toute façon tout et ils retomberaient dans les obstacles.*
> *[Et pourquoi est-ce qu'il est du même style]*
> *Parce qu'on peut déjà le résoudre plus ou moins de la même façon hein, numériquement et graphiquement aussi et alors ils retombent dans les obstacles en fait, les obstacles épistémologiques.*
> *(cherche)*
> *Donc le trouver par un problème d'optimisation et on arrive quand même de toute façon avec un irrationnel et c'est tout le problème du* Δx *en fait qu'on va faire tendre vers 0 et on va se retrouver avec un volume.*
> *[.]*
> *Dans ce sens-là pour moi c'est deux problèmes qui se ressemblent fort et avec le même type d'obstacle et ici ils seraient bien identifiés si ils n'ont pas de prérequis d'avant.*
> *Non ça c'est le genre d'exercice qui est intéressant peut-être à mettre au début.*
> *2006-4*

6.3.2.1.7 Tâche VII

Nous avons vu auparavant, dans l'analyse du thème et de ses transpositions, ainsi que dans les résultats de la première expérimentation, que la dimension d'approximation est un point délicat. En effet, il s'agit à ce moment de travailler en même temps l'aspect « ponctuel » selon lequel le nombre dérivé peut être la vitesse instantanée, « la pente » d'une courbe en un point ou encore « la croissance d'une courbe » en un point, avec un aspect plus « local » dans lequel la droite ayant ce nombre comme coefficient directeur va posséder une propriété intéressante sur un intervalle.

Cette propriété possède de plus l'inconvénient de « bien se voir ». Rappelons que, jusqu'à présent, il n'a pas été fourni d'explication sur le fait que la tangente « colle à la courbe ». C'est d'ailleurs ce qui explique sans doute qu'aucun étudiant n'ait cherché à commenter la stratégie 3 qui consistait à « tracer des petites droites collant à la courbe ». C'est en utilisant la stratégie 2, consistant à tracer une droite de pente donnée ne passant que par un point de la courbe que l'on remarquait sa position particulière, qui amenait à la qualifier de « droite-guide ». Le fait que cette stratégie puisse être validée, par exemple par celle de l'écart maximal, autorise ensuite à l'utiliser comme telle.

Mais pourquoi cette droite possède-t-elle la propriété de « frôler la courbe » ? C'est en fait à cette question que s'attaque la dernière situation de l'ingénierie. Nous avons déjà signalé que la présentation de la tangente comme « meilleure approximation » est souvent considérée comme transparente dans les transpositions mais reste problématique comme le montre M.-J. Perrin (). Sans aller jusqu'à la question de la nature de la convergence utilisée implicitement, nous nous intéresserons ici à la manière dont les élèves-professeurs envisagent de valider la propriété : tableau de valeurs, ou raisonnement ?

Seuls 4 étudiants (dont deux travaillant ensemble) vont traiter la question de la précision de l'approximation. Parmi eux un groupe va proposer un discours presque numérique mais validé par un constat visuel tandis que 2 vont rester au niveau cinématique. Les 9 autres vont proposer un tableau contenant les valeurs obtenues par la fonction originale et par la fonction de remplacement. Ensuite

> *Les élèves constatent que plus ils prennent des valeurs proches de 1 et 9, plus leurs images dans les fonctions remplaçantes se rapprochent de celles des fonctions initiales.*
> *2006-2*

La convergence doit donc souvent être constatée par la seule comparaison des valeurs et est formulée sous la forme « plus les valeurs sont proches de .., plus les images sont proches de… », ce qui est une formulation très fréquente pour « montrer » la limite ou la continuité alors qu'elle ne suffit pas à en donner le sens.

Le fait que la fonction de remplacement corresponde à la tangente doit lui aussi être observé :

> *On observe que la fonction de remplacement correspond à la tangente de f(x) au point x=1.*
> *Le nombre dérivé de f(x) en 1 est égal au coefficient angulaire de la tangente au point (1,f(1)) et vaut dans ce cas-ci -1.*
> *2006-1&4*

Après le constat, et donc le discours de niveau 0, le professeur donne directement l'énoncé théorique, la combinaison formant donc encore un discours 2bis :

> *L'enseignant dira qu'au voisinage d'un point (a,f(a)) la tangente au graphe en ce point est une bonne approximation du graphe de la fonction.*
> *2006-2*

Comme nous l'avons déjà dit dans les travaux libres, ces énoncés se situent dans un contexte où la tangente n'est pas définie, ni la notion de bonne approximation dans le cas cité. La validation de cet énoncé consistera à vérifier que les fonctions de remplacement correspondent bien à l'équation des tangentes, équation donnée dans l'énoncé !
Un groupe de 2 étudiants pense que l'activité vise à

> *Introduire et faire utiliser aux élèves la méthode pour trouver l'équation de la tangente à une courbe en un point connaissant l'expression analytique de la courbe.*
> *2006-3*

Pour cela, ils proposent de faire remplir un tableau de valeurs et

> *En constatant que le tableau mesure différents écarts entre la courbe et la droite, on s'attend à ce que les élèves se ramènent à la méthode qui nous a servi à déterminer la pente de la tangente en 1*
> *[..]*
> *On arrive à la définition de la tangente la droite de pente f'(x) passant par (x,f(x)).*
> *2006-3*

Ils semblent donc supposer que les élèves vont par eux-mêmes associer les fonctions de remplacement avec les « droites-guides », ou tangentes, calculer les pentes des droites-guides et vérifier que leurs équations coïncident plus ou moins avec les fonctions, mais sans aucune garantie de généralisation à d'autres fonctions.

Dans un autre cas, l'étudiante va en quelque sorte « osciller » entre deux discours. Elle fait d'abord remarquer que la précision de l'approximation varie :

> *Plus la valeur du x se rapproche du x considéré et plus l'approximation est bonne. Cependant plus la valeur est du x s'éloigne de la valeur du x considéré et plus l'approximation est mauvaise. Cela illustre bien l'aspect local de l'approximation.*
> *2006-8*

Mais elle recourt quand même à la représentation graphique pour « faire passer » le fait que ce soit la tangente :

> *Les fonctions de remplacement sont le semblable des tangentes à la courbe représentant un mouvement.*
> *2006-8*

Malgré ce début de discours, l'étudiante propose alors directement une généralisation

> *Le professeur pourra alors généraliser la notion de tangente en un point (x0,f(x0)) à une courbe f(x) comme étant la droite de pente f'(x0) et passant par le ….*
> *2006-8*

Alors, elle fait vérifier par calculs que les pentes des droites (coefficients des fonctions affines) correspondent effectivement aux dérivées telles qu'elles ont été calculées auparavant.

On trouve un autre discours partant également de la variation de la précision :

> *La fonction et sa remplaçante ont la même image pour le point autour duquel on fait le remplacement.*
> *Plus on est près du point autour duquel on fait le remplacement et plus les images de la fonction et de sa remplaçante sont proches. Quand on est très proche de ce point, les images sont pratiquement les mêmes. Mais quand on s'éloigne de ce point, l'écart entre la fonction et sa remplaçante grandit.*
> *La remplaçante de la fonction $\sqrt{x}$ donne l'impression d'être meilleure que celle de 1/x car les écarts sont plus petits et ont l'air de grandir moins vite que les autres.*
> *2006-7*

L'étudiant fait alors le lien avec les droites-guides et reprend le discours de nature cinématique :

> *Les remplaçantes sont des fonctions du premier degré, leurs graphes seront des droites. Or dans les situations précédentes on a rencontré des droites qui avaient le même comportement qu'une courbe autour d'un point. Ces courbes représentant le déplacement d'une particule le long d'un axe. On avait trouvé ces droites en cherchant une droite passant par ce point et dont le coefficient angulaire était la vitesse de la particule en ce point.*
> *Considérons la fonction 1/x comme décrivant le déplacement d'une particule le long d'un axe, et, comme nous voulons trouver une remplaçante autour de x=1, cherchons la vitesse de la particule à l'instant t=1.*
> *2006-7*

L'étudiant utilise ensuite « sa » technique de calcul en déterminant la vitesse moyenne sur un intervalle [1,1+h], en « prenant la limite » et obtient bien d'abord le coefficient -1, puis l'ordonnée à l'origine. Remarquons toutefois que, si le discours permet une cohérence, cela n'explique toujours pas le fait que la précision de l'approximation dépende de h.

Nous reproduisons ci-dessous le travail d'un groupe qui part également du problème de la précision de l'approximation.

> *[..] constater que dans le premier cas (1/x) la différence devient rapidement grande alors que dans le deuxième cas elle reste relativement petite.*
> *2006-6*

Ils partent donc d'un constat puis, pour le calcul des fonctions de remplacement, ils proposent de partir de la formule de calcul du nombre dérivé : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{-1}{x^2}$, soit en remplaçant : $\dfrac{-1}{a^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$.

Ils proposent ensuite de remplacer « lim » par une « presque égalité » (qu'ils appellent équivalence) avec un développement qui va effectivement aboutir à l'écriture d'un développement d'ordre un et qui pourrait servir d'explication au constat visuel. Or, leur discours va curieusement inverser la démarche, puisque le début est en fait validé par le constat visuel de départ.

> $\dfrac{-1}{a^2}\approx\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$
> *lorsque x est très proche de a l'égalité est de mise mais, si x s'en éloigne, ie quand on regarde un intervalle un peu plus grand puisqu'on ne pourra jamais atteindre la limite et donc l'égalité, un signe d'équivalence est plus correct. Et comme on cherche à approximer f(x) par une fonction, il faut l'isoler*
> $\dfrac{1}{x}\approx\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}\cdot(x-a)$
> *2006-6*

et ils font vérifier que pour a=1 on obtient $\dfrac{1}{x}\approx -x+2$. La généralisation est alors rapide

$f(x)\approx f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$

et concluent

> *au voisinage immédiat d'un point, la courbe se confond à peu près avec la droite d'équation* $y=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$ *désormais appelée sa tangente*
> *2006-6*

Ce discours nous semble en fait refléter la difficulté à mettre en évidence un enchaînement d'ordre rationnel entre les différents faits et calculs qui sont exposés.

Compte tenu du fait que la plupart des étudiants s'attendaient à ce que les élèves fassent spontanément le lien entre les fonctions de remplacement et les droites-guides (ou tangentes), et se contentaient du constat visuel comme validation, nous avons essayé de sensibiliser un étudiant à cette question lors de l'entretien oral :

> *[Parce que bon ici je reviens à la page 28. Donc on a le tracé de 1/x on a le tracé de –x+2 et l'élève dit « ben voilà », moi j'observe que la fonction de remplacement c'est la tangente, voilà j'ai fini »*
> *Vous êtes content ?. ou pas ?]*
> *Si il ne me répond que ça, ça ne va pas. Parce que c'est pas ce qui est , Enfin c'est pas l'objectif atteint, c'est l'approximation en un point donné qui va être représentée par sa tangente.*
> *[Oui bon c'est moi qui ai été trop vite. L'approximation en un point donné, localement enfin bon, je l'obtiens en traçant la tangente et puis ça se voit je fais le dessin et c'est fini. Je fais quoi ?*
> *Je suis contente comme prof quand l'élève me dit ça ?]*
> *Il aura déjà la notion de tangente, c'est un… C'est un point. Maintenant, euh.*
> *[Est-ce qu'on peut lui répondre « t'es bien sûr que c'est la tangente », alors ?.*
> *Parce que moi je peux en tracer une, Ça pourrait être une autre droite qui est juste.., Qui longerait bien aussi hein, mais qui serait un peu différente]*
> *Oui. Ici on repart véritablement, parce que je veux dire il y a 6 tâches avant, on repart quand même avec un bagage technologique qui n'est pas à négliger non plus.*
> *Je pense qu'ici l'équation de la tangente a été trouvée numériquement, le coefficient angulaire a été trouvé numériquement. Donc si ils le redessinent sur la fonction en disant ben voilà la tangente a un coefficient angulaire d'autant donc voilà je peux dessiner sur le graphe cette fonction tangente, enfin cette droite tangente, oui je pense que l'objectif est atteint. On repasse du domaine numérique au domaine géométrique et il peut être, enfin pour moi avec la technologie qu'il y a avant.*
> *[Donc il faut passer par l'équation. C'est l'équation qui fait foi]*
> *C'est l'équation qui fait foi. Donc, j'avais remis un petit point en plus où c'est le calcul de la limite hein pour trouver ce coefficient angulaire. Ça c'est une technique et une technologie qu'ils ont vu avant dans les étapes précédentes.*
> *[Parce que là on a proposé une fonction et il se trouve que c'est la tangente. Mais si je cherchais une fonction de remplacement ailleurs, qu'est-ce qui me garantit que ça va encore être la tangente par exemple]*
> *Oui effectivement.*
> *2006-4*

6.3.2.2 Conceptions du discours et perception du milieu

Les deux premières expérimentations avec la brochure « un mouvement générique » laissent donc voir une difficulté des élèves-professeurs à construire pour ce type de projet d'enseignement un discours à la fois rationnel et cohérent, en fait un discours technologique.

Si la section précédente cherchait à montrer des manifestations de cette difficulté dans la réalisation des différentes tâches, nous allons maintenant tenter de mettre en évidence des éléments d'explication.

Dans un premier temps, nous allons présenter ci-dessous qu'une des explications réside dans leurs conceptions de ce que peut être un tel discours : se refusant la théorie, mais cherchant à en montrer les signes extérieurs, les élèves-professeurs se retrouvent dans un discours de niveau 2bis.

Ensuite, nous verrons plus précisément que, contrairement à ce que voudrait la structuration du milieu, le milieu de l'élève ne fait pas vraiment partie du milieu de l'élève-professeur. En particulier, nous montrerons que les élèves-professeurs ne perçoivent pas les éléments du milieu de l'élève lui permettant de travailler dans une rationalité d'ordre I. Nous verrons aussi qu'ils utilisent au contraire les notions de didactique pour « refuser » ce milieu.

Enfin, nous reviendrons à la question du critère de croissance dont la validation dans le projet est très spécifique.

6.3.2.2.1 Conceptions du discours technologique

Les étudiants conçoivent souvent le discours comme étant l'énoncé donné par le professeur qui doit conclure l'activité de l'élève :

> *E2 : Donc on a une tâche, après cette tâche on a le discours technologique. On a une tâche suivante. Dans notre colonne, ce qu'on voulait mettre c'est « est-ce qu'ils ont tenu compte du discours de la tâche précédente ».*
> *[Et les élèves, seraient-ils capables d'un discours technologique propre ?]*
> *E2 : Non, c'est le prof qui doit le faire.*
> *[Est-ce qu'ils sont capables de dire bah voilà j'utilise telle technique pour répondre à la tâche mais je le fais parce que j'ai tel et tel argument pour le faire. C'est impensable ou…]*
> *E2 : Non c'est pas impensable. Mais je travaillerais dans le sens où l'élève a une technique et puis en fonction de cette technique nous on adopte un discours technologique. Et puis, on a une nouvelle tâche. Il a sa technique. Maintenant est-ce qu'elle dépend ou pas de ce qu'on a vu comme discours technologique ou pas. Ben là c'est à nous à … à le déterminer et alors éventuellement à adapter notre discours technologique à la suite de cette tâche-là en fonction de ce qui a été assimilé ou non par eux.*
> *E1 : Oui, c'est ce qu'on a fait ici en fait. On a séparé chaque solution séparément pour le discours technologique qu'on fait. Donc là on a chaque solution séparément.*
> *Et puis après on a refait une synthèse de tout.*
> *[Je vois ici pour la solution 2 à la page 12, il est dit « oui mais notion de pente reste intuitive ». Mais ça reste intuitif, c'est dans sa tête ou dans le discours technologique qui a précédé.]*

> *E2 :E1 : Dans sa tête.*
> *E2 : Parce qu'on part du principe que le discours technologique est chaque fois celui donné par le professeur. Donc l'élève reçoit ce discours. C'est pas lui qui est l'auteur du discours.*
> *[Et votre notion du… Finalement quand amenez la pente de la courbe, est-ce que pour vous c'est intuitif ou c'est vraiment de l'ordre du discours technologique un peu plus élaboré ? Parce que vous dites « c'est dans sa tête » ça ne l'est pas dans le discours technologique. 9a suppose qu'un discours technologique c'est pas intuitif]*
> *E1 : Non, on n'a vraiment pas un discours technologique avec ça.*
> *A la 1ère tâche, à la page 7, 7 et 8*
> *E2 : Donc on le représente finalement ce discours en parlant de la pente.*
> *E1 : Avec les deux graphiques.*
> *E2 : Est-ce qu'ils l'ont assimilé ou pas et c'est pour ça que pour la tâche suivante. Pour certains ça va être bien assimilé tandis que pour d'autres ça restera un peu intuitif et c'est pour ça qu'il faudra remettre un petit peu les… Repréciser.*
> *[Oui, je vois discours technologique, mais je vois 3 lignes pas plus]*
> *E2 : Oui mais là on n'a pas détaillé, mais nous allons montrer le lien entre la pente du graphique mais de nouveau là on ne rentre pas dans les détails encore.*
> *[Parce que la vitesse avant ils la calculent…enfin vous leur demandez de la calculer avec les formules]*
> *E1 : de MRUA.*
> *E2 : de physique.*
> *[Les formules du MRUA, formules de physique]*
> *E2 : oui.*
> *[Donc on a un tableau avec le graphique des vitesses et avec les valeurs des vitesses et c'est ces deux tableaux que vous faites correspondre, c'est ça en fait pour montrer que…]*
> *E2 : oui.*
> *[..]*
> *E2 : Enfin pour nous on l'a pas détaillé. C'est pas à ce moment là qu'on commence déjà à rentrer dans les dans les formules. Donc pour nous, on veut qu'ils aient une allure, et puis,…*
> *[Ah oui. Ben est-ce que le discours technologique suppose formules ?]*
> *E2 : Ben je pense que discours technologique veut quand même dire quelque chose de relativement précis et ici on voudrait qu'ils aient une bonne idée, on va dire, du rapport entre les deux. Et puis on reprécise alors avec les tâches suivantes. C'est vraiment aborder le problème, sans aller trop loin.*
> *Parce que pour nous à ce stade-ci c'était trop tôt pour entrer dans les détails. On attendait pour ça la tâche III avec les différentes solutions qui sont proposées.*
> *2006-1*

L'extrait ci-dessus mentionne l'utilisation d'un tableau de valeurs pour « amener » l'énoncé. A plusieurs reprises en effet, le discours technologique consiste en fait en un tableau de valeurs : pour « déduire » que la pente de la droite est la vitesse instantanée, ou pour « déduire » que la fonction de remplacement est la droite-guide, ou encore pour « montrer » une limite. Il semble, comme dans l'extrait –ci-dessous, que le principe du tableau suffise à « créer un lien »entre deux objets, en particulier par comparaison:

> *[Ah oui. Parce que je vois aussi « comment fait-on le lien entre la pente du graphique de la position et la vitesse ». donc « montrer le lien entre » ; discours technologique : « il faut montrer le lien entre la pente du graphique de la position et la vitesse »]*
> *E : oui.*
> *[on le montre comment parce que vous avez l'air de dire « il faut le montrer ».*
> *J'ai vu 3 lignes et je me dis ben je ne le vois pas]*
> *E : C'est le point ben c'est le seul point où on a un petit peu bloqué dans le sens où on n'a pas su dévoluer la question à l'élève.*
> *Donc on met ici « le professeur trace la pente de la courbe en différents moments, »*
> *Donc on joue sur l'aspect.*
> *[Oui mais même si on ne dévolue pas à l'élève. Si on avait un discours, on aurait lequel ? Même sans dévoluer aux élèves, on pourrait avoir soi-même un discours en disant « ben voilà, je vais vous montrer que la pente du graphique de la position et la vitesse, c'est la même chose ». On ferait un exposé, ce serait quoi cet exposé]*
> *E : Oui. Comparaison de deux graphiques : position en fonction du temps et vitesse en fonction du temps, qu'ils ont tracés, on leur a demandé.*
> *On peut reprendre ponctuellement des données, hein.*
> *Bon il y a des endroits où la vitesse est nulle, c'est relativement facile à comprendre.*
> *[Oui d'accord]*
> *E : La pente sur le graphique, sur ce graphique-ci est nulle, ça je pense que c'est facilement acceptable pour les élèves.*
> *Euh, et puis on, comment, euh, je crois que la notion de pente de la courbe, sans parler de tangente, est relativement intuitive au niveau des élèves, parce que ici la pente augmente progressivement, puis va rediminuer progressivement . Et on voit sur le graphique de la vitesse que ces valeurs, qui seraient censées représenter le coefficient angulaire de la pente, vont augmenter puis rediminuer jusqu'au point 6.*
> *Jouer sur la comparaison des deux.*
> *Qualitativement en tout cas, ça se comporte d'une manière équivalente, quoi.*
> *Quand ça augmente d'un côté ça augmente de l'autre.*
> *Quand c'est positif d'un côté c'est positif de l'autre .*
> *2006-4*

Proche de la comparaison, on trouve l'analogie de formules, parfois même à mauvais escient :

> *Le but ici est de faire le lien entre nombre dérivé et pente de la tangente.*
> *Réponse attendue :*
> *nous savons que la vitesse instantanée est donnée par la limite deltap sur deltat.*
> *Par analogie avec la définition du nombre dérivé, nous constatons que la vitesse est en fait le nombre dérivé de la fonction position.*
> *2006-5*

Or, dans le travail de ces étudiants, il n'y eu qu'une contextualisation, et donc la dérivée ne peut en fait être que la vitesse !

Le discours technologique proposé par les élèves-professeurs laisse en général beaucoup de place à des arguments de nature visuelle qui peuvent parfois porter sur les notations :

> *[Et vous arrivez à la définition équivalente de la définition du nombre dérivé enfin avec des notations différentes*
> *« là encore, il est indispensable de s'appuyer sur des schémas pour offrir un support visuel »*
> *« l'enseignant doit expliquer que selon les notations choisies,on obtient deux formulations, nous ne détaillerons pas ici les explications, nous donnons les expressions finales »*
> *et c'est tout ce qu'ils ont comme dessin dans le discours technologique*
> *qu'est-ce que ?]*
> *[Pourquoi est-ce que c'est important de montrer que c'est bien la même limite qu'on obtient dans les deux cas ?*
> *Et quelles seraient les explications qui iraient avec ?*
> *Un support visuel ?]*
> *E : Le support visuel c'est justement ça de voir que Δx c'est cette différence là, c'est aussi celle là.*
> *Δx c'est x-a donc c'est aussi h et ça permet de voir que cette définition c'est la même que celle là.*
> *2006-2*

Ici, le fait de montrer les tangentes sur la courbe est même mentionné comme étant un raisonnement sur les pentes :

> *[Oui je me demandais comment vous expliqueriez le lien vers le critère de croissance. Il y a écrit « sans entrer dans le détail des explications ». Et serait quoi le détail à ce moment-là ? C'est-à-dire, comment est-ce qu'on pourrait passer de ce graphique avec des vitesses et des mobiles qui bougent au critère de croissance]*
> *E1 : Ben par..*
> *E2 : par la tangente, encore.*
> *E1 : oui.*
> *E2 : Là on constate que la tangente est horizontale.*
> *Là elle est comme ça.*
> *Et elle se redresse de plus en plus.*
> *Donc qu'est ce que ça implique ?*
> *Que c'est croissant.*
> *Et puis là on a de nouveau la même chose.*
> *C'est de nouveau par un raisonnement sur les…,sur les pentes*
> *2006-2*

6.3.2.2.2 Perception du milieu de l'élève

Nous avons évoqué dans cette introduction comment notre question pouvait aussi se poser en termes de milieu. En particulier, l'élève posera des questions relatives au milieu qui lui est proposé mais le professeur ne pourra y répondre avec le même niveau de rationalité que si il est conscient des caractéristiques du milieu de l'élève, ou encore si le milieu de l'élève est effectivement un élément de son milieu de professeur. Les difficultés à élaborer un discours cohérent pourraient donc être dues au fait que l'élève-professeur ne perçoit le milieu de l'élève qu'au travers du filtre de ses propres connaissances.

Un premier exemple de cette absence de perception du milieu est donné par la réponse de 3 étudiants sur l'avantage de donner les expressions des fonctions :

> *Le seul avantage des expressions analytiques est de pouvoir tracer les graphiques.*
> *2006-1&4*

Comme nous l'avons déjà vu dans la première expérimentation, ces mêmes étudiants pensent d'ailleurs que les exercices ne seront réalisables que si on donne les formules de physique :

> *Les résolutions 2 et 3 ne sont possibles que si le mouvement de l'une des particules est décrit par une équation du premier degré….*
> *Le troisième résolution avec les formules du MRUA exige que le mouvement de la seconde particule soit décrit par une équation du second degré.*
> *2006-1&4*

Il nous parait important de signaler que c'est dans l'analyse du milieu que les étudiants utilisent les concepts de didactique mais « à mauvais escient »

Ils vont par exemple interpréter comme « un obstacle méthodologique (2006-1&4) » le fait de demander aux élèves de résoudre un problème sans avoir auparavant fourni « la méthode », en fait la théorie.

La même objection est utilisée pour qualifier certains ingrédients du milieu comme étant susceptibles de mettre l'élève en difficulté. Citons par exemple, les problèmes liés à la formule du volume, à l'abondance de calculs, à la vitesse négative, etc.

Par contre les étudiants mentionnent régulièrement les facettes dites sociales du milieu, s'attachant donc plus au milieu perçu selon le niveau S_3, comme « on a fait réfléchir les élèves », on a fait parler les élèves », « on leur donne du concret », etc.

Un deuxième exemple de la non perception du milieu construit pour l'élève concerne le rôle joué par la fonction du second degré à faire suivre par une fonction du troisième degré. L'enchaînement de ces deux fonctions reste majoritairement incompris, même lors de l'entretien oral :

> *[donc on passe à deux autres mobiles, un dont la loi de position c'est t^3 et .. c'est quoi ça c'est un exercice de plus ou ?]*
> *E2 : Oui, en fait c'est la deuxième application. Donc le premier c'était avec t^2 et $\sqrt{3}\cdot t$. Et ensuite le suivant qui était dans le questionnaire, donc c'était la IIIbis dans le questionnaire. On l'a mis automatiquement après dans le cours non modifié. Comme ça c'est une deuxième application pour eux. Comme ça au lieu d'avoir le t^2 et le $\sqrt{3}\cdot t$, ils ont le t^3 et le 2*
> *[..]*
> *E2/E1 : Et là en fait on les a remis ensemble, vu que c'était. En fait on a fait deux applications de ces points-là.*
> *E2 : Et c'est à ce moment-là que ça faisait revenir, je pense.*
> *Il y avait le développement au cube d'un côté et de l'autre il y avait pas.*
> *[Ah oui je vois. Avec ou sans formulaire de dérivée]*
> *E2/E1 : Oui. C'était pour les forcer entre guillemets, à force d'appliquer donc des variations, ils vont quand même, ils vont retenir la définition à force de l'appliquer.*
> *(2006-5)*

Le fait de proposer plusieurs stratégies, correspondant à plusieurs conceptions de la vitesse instantanée, est également mal perçu. On constate même que les étudiants cherchent d'emblée à intégrer les stratégies dans leur projet de théorie. Si nous reprenons les niveaux de C. Margolinas, il y a ici un refus du niveau S_{-1} (travail des élèves)que l'on force à rentrer dans le niveau S_0 (leçon) sans essayer d'interpréter ces formulations d'un point de vue épistémologique, ce qui aurait pu se faire en remontant au niveau S_2.

> *[Oui c'est ça. Et alors donc c'est marrant parce que l'élève, donc cet élève donc il trouve la bonne réponse d'une manière je dirais qui semble irréfutable pour les autres. Et il n'utilise pas la dérivée. Ben c'est embêtant quand même. Mais est-ce que ça peut quand même jouer un rôle dans la classe ? Y en a d'autres, bon qui font autrement, hein. Vous avez d'autres façons de faire, d'autres interprétations, et]*
> *E2 : Donc en fait ils vont peut-être se dire tous oh bah on va toujours faire comme ça alors, c'est ça le problème.*
> *[Peut-être, mais avant d'aller jusque-là, est-ce que ça peut jouer un rôle ? Bon les autres vont faire le coup des tangentes, des petits triangles, etc. Bon c'est des procédures qui*

leur semblent hasardeuses, c'est nouveau, ils vont se demander est-ce que c'est bon ? Dans une classe comme ça, qu'est-ce qu'on peut imaginer comme type de comportement ?]
E2 : Je crois que je comprends pas bien la question.
[Ben euh ils ont des procédures différentes et en principe elles sont toutes bonnes, elles produisent toutes la bonne réponse, que faire avec ça ?]
[C'est que chacun va vous demander est-ce que c'est moi qui ai bon ? Pourquoi est-ce que lui ça marche et moi aussi ? etc]
E1 : Ah, oui, oui, oui.
(Réflexion)
[Ou je pose la question autrement. Mais je pose la question au niveau analytique, hein je vais plus loin. Il y en a qui, avec la procédure des petites contremarches là, vont dire oh Δt je balance, c'est nul. Et les autres vont dire non c'est pas possible, enfin non on peut pas faire ça etc. Donc c'est une procédure qui conduit à une réponse mais dont on doute quand même]
E1 : oui.
(Réflexion)
E2 : Oui on avait mis ici qu'on avait besoin des bonnes solutions, la solution 2 et la solution 4.
On avait mis qu'on avait surtout besoin de la 2 et de la 4 parce que ça nous permettait de commencer la théorie. Et finalement la 1 c'est parce qu'on l'avait pas très bien comprise, mais sinon la 3 se rapportait plutôt à la 2 et la 5 plutôt à la 4.
Maintenant avec la 1 en plus, il y aurait peut-être moyen de retomber sur la même théorie directement aussi.
Parce que la 2 ils parlent de tangente, enfin ils parlent implicitement de tangente.
La 4 aussi on l'avait interprété comme ça.
Maintenant la 1, c'est un peu différent.
On pourrait essayer de regrouper déjà ces trois types là :la 1, la 2 et la 3 ensemble, la 4 et la 5 ensemble et voir comment à partir de chaque réponse on pourrait arriver à la théorie.
Mais il faudrait alors s'arranger pour qu'ils fassent l'exercice presque en fin d'heure je vais dire pour que nous on puisse faire la suite : adapter la théorie sur leurs réponses.
Ben sur la première, est-ce qu'on peut pas leur demander de même je vais dire à main levée, sans unité, de tracer plus ou moins une courbe qui correspondrait à la vitesse des deux mobiles et de voir, je vais dire la tangente dans les deux cas. Enfin voir, à ce moment-là le prof reprendrait je vais dire.
Mais puisque à ce moment là la vitesse est constante donc la tang…, la dér…, la part…, la position de la particule est constante donc la vitesse sera nulle donc la tangente sera nulle aussi. Et dans l'autre elle diminue et puis d'un coup elle augmente, donc à un moment donné il y aura une tangente qui sera la même chose, et ça ce sera peut-être au prof à faire le lien et dans ces cas-là je veux dire le premier exemple le 2 et le 4 on aurait à chaque fois une notion de tangente dans tous les cas et le professeur pourrait donc engendrer cette notion de.
[Mais il y a pas besoin de la tangente pour la première]
E1 : Non non, mais je veux dire.
E2 : Pour faire le lien avec les autres.
E1 : Oui c'est ça pour faire le lien entre les différents cas pour voir qu'ils se ramènent tous à la même chose. Puisque de toute façon, dans tous les cas, on peut quand même générer f(x)-f(a)/x-a, donc euh
Enfin je sais pas d'un point de vue théorie…
(2006-6)

Citons cependant le seul cas de l'étudiant ayant perçu le rôle du second degré :

> *[Ben je vais dire, après vous allez utiliser des procédures où on utilise le concept de limite, ce qui est quand même un peu plus délicat, puisque on peut évoquer cet obstacle tiens on a un espace parcouru sur un temps et on fait tendre l'intervalle de temps vers zéro. Avec d'éventuels doutes des élèves là-dessus, hein sur le fait que en supprimant des h qui tendent vers 0, on va obtenir la réponse exacte. Est-ce que les autres procédures peuvent jouer un rôle à ce moment-là ?]*
> *L'autre procédure qu'on a obtenue, celle justement par l'écart maximum, elle n'a pas ce piège-là si je puis dire. On parle de vitesse positive puis négative, enfin de vitesse plus petite et vitesse plus grande donc forcément elle va passer par la vitesse égale, et il n y a plus de problème de d'intervalle qui va se réduire. Donc effectivement, ça permettra de le justifier d'une autre façon.*
> *[Oui, d'une autre façon, effectivement. C'est-à-dire que vous avez des méthodes pour la fonction t^2 et puis vous en avez d'autres pour. t^3 Mais ce serait intéressant de les avoir toutes, enfin quand je dis toutes, c'est pas forcément toutes pour t^2 parce que là finalement il y a une forme de contrôle de l'une par l'autre. Bon évidemment ce n'est que dans des circonstances bien particulières mais malgré tout ça joue un certain rôle, hein.*
> *Dans l'histoire des maths après tout on a retrouvé des résultats connus depuis l'antiquité au XVIIème siècle pour être bien sûr que ce que l'on faisait n'était pas idiot]*
> *[..]*
> *[Et le rôle qu'a joué le fait que la fonction qui intervient pour le problème d'optimisation et la fonction dans le problème précédent c'est la même. Qu'est-ce que vous pensez du rôle que ça joue ?]*
> *Euh je pense que ça peut jouer un rôle de, j'ai envie de dire de décontextualisation de ce qu'on trouve.*
> *Une conclusion qu'on va tirer dans un truc de vitesse, on va le tirer aussi dans un autre exemple d'optimisation.*
> *On aura entre guillemets, un maximum des deux côtés.*
> *Maintenant je suis pas sûr que ça va être facile de faire passer auprès des élèves de parler de maximum d'un côté où on parle de vitesse et de l'autre côté.*
> *Je pense qu'il va falloir le faire calmement.*
> *2006-7*

Comme nous l'avons vu dans notre analyse a priori, le discours de niveau 1 de nature cinématique peut mettre en œuvre le théorème des accroissements finis dans une forme « théorème en acte » (Vergnaud, 1980). En particulier, le TAF pourrait aussi expliquer que même si la vitesse instantanée en un instant est calculée par une limite, il y a toujours un moment où elle vaut la vitesse moyenne sur un intervalle dans lequel se trouve cet instant.

Le milieu proposé permet donc l'accès à une certaine forme du théorème et une validation de niveau 1 du critère de croissance qui consiste à considérer toute fonction comme une loi de position d'un mouvement (continu) autorisant un raisonnement sur la vitesse.

Pourtant les étudiants vont le plus souvent énoncer le théorème avant de réaliser la tâche qui mènerait à cette validation. S'appuyant sur le visuel pour énoncer le théorème, ils rentrent alors dans le discours de niveau 2bis.

Voici comment ils s'en expliquent :

> *[Et euh, à un moment vous mettez les propriétés donc minimum et maximum d'une fonction avec les définitions de max et min et les propriétés du critère de variation d'une fonction. Ça vous paraissait important de les mettre à ce moment-là ? et est-ce qu'il y a moyen de les justifier]*
> *E1 : Ah ben ….oui.*
> *[Moi je suis posé aussi « la place de cette, de ce développement … par rapport à la situation qui suit, par exemple. Est-ce que ça c'est un exercice]*
> *[Auquel cas le VII est une application]*
> *E2 : Oui parce que dans la partie modifiée, on s'est re-servi hein du VII à ce moment-là. En fait, on a mis le minimum et maximum d'une fonction comme une application de la dérivée par après. Et on a mis aussi par après dans la partie modifiée le problème d'optimisation, qui était une application de la dérivée. Mais c'était aussi pour leur montrer avec le minimum/maximum que on pouvait faire la comparaison avec tout ce qu'ils avaient vu avant. Parce que minimum/maximum ça déjà en 4ème ils savent dire si c'est un minimum ou un maximum. Ça, ça m'a étonné en stage, ça. J'aurais jamais pensé qu'ils sortent minimum ou maximum et pourtant ils me l'ont sorti sur les paraboles.*
> *[Ah oui sur les paraboles, oui]*
> *E1 : En fait on l'a mis à ce moment-là parce que justement on vient de parler de la notion de tangente et que là on voit bien quand une tangente est croissante. Enfin, oui quand la dérivée sera positive, la tangente sera croissante, par définition de la pente et on l'a mis à ce moment-là parce que justement si on fait la dérivée en tel point, si on obtient quelque chose de positif, soit c'est croissant soit c'est décroissant, ou alors c'est égal à zéro et alors c'est en plat, et alors c'est pour ça qu'on l'a mis à ce moment là. Justement parce qu'on venait de parler de tangente. Pour qu'ils se représentent graphiquement ce qu'il se passait. Et donc d'ailleurs on a fait un tableau de signes là pour bien leur montrer.*
> *[Et donc en fait, là dans la partie modifiée, vous n'avez pas, vous avez conservé ce qui était dans la partie première, c'est à dire de donner ce qui est critère de croissance et l'existence]*
> *E2/E1 : oui. [Pour faire l'exercice VII comme application. Même si il est un petit peu abordé avant.*
> *[Vous écrivez : La solution est identique au point vII.2 de l'exercice précédent cad que j'annule la dérivée]*
> *E1/E2 : oui.*
> *[Donc vous conserveriez cette partie critère de croissance/décroissance]*
> *E2 : Oui, je laisserais le problème d'optimisation en dernier, en dessert, on va dire ça comme ça*
> *E1 : Oui, en quelque sorte.*
> *[Et les critères, il y a moyen de les justifier avec ce qui a été fait avant, ou on est obligé de les introduire comme ça]*
> *Oui, il y a moyen de les justifier avec ce qu'on avait fait avec les vitesses, hein.*
> *E2 : Dans le devoir, qu'on leur demande. Il y a déjà moyen de donner une idée.*
> *2006-5*

Un autre groupe d'étudiants va aussi considérer que résoudre la situation sans le théorème consiste en un obstacle didactique ou méthodologique :

> *[Et euh alors j'avais une question pour la place du théorème de la croissance]*
> *E2 : Tâche V et IV.*
> *[Oui, je ne voyais pas le lien entre la situation et le théorème]*
> *E2 : Et le discours.*
> *[Oui c'est ça et le discours. Enfin je vois le lien mais je veux dire est-ce que la situation est censée amener le théorème ? Est-ce qu'on peut résoudre la situation sans le théorème ?]*
> *E1 : On peut résoudre la situation sans puisque nous on l'a fait sans le théorème.*
> *E2 : oui.*
> *E1 : Et à partir de là on s'est dit on va introduire la croissance /décroissance pour pouvoir étudier la variation d'une fonction par la suite. Si c'était nécessaire.*
> *[Ben, où le théorème devient-il vraiment nécessaire alors ?]*
> *E2 : Pour la tâche n°VI, avec justement l'optimisation.*
> *E1 : Le volume de la boîte.*
> *[Pour le VI. Pas avant]*
> *E1 : Non c'est ça. ; Euh peut-être déjà ici à la V.*
> *E2 : La V déjà aussi ?*
> *E1 : On veut une vitesse égale à 0 donc on veut un minimum.*
> *E2 : Oui mais là on a pu la résoudre aussi avec un calcul de limites. Donc c'est pas obligatoire.Mais euh…*
> *E1 : Non, la VI.*
> *E2 : Réellement dans la VI mais ça peut les aider pour résoudre la IV , la V également. Si ils ont vu le théorème, ben ils peuvent partir sur le calcul des dérivées.*
> *[Oui. Quand vous dites par calcul de limites, c'est parce que vous ne vous autorisez pas le calcul des dérivées. Sinon quand on connaît le calcul des dérivées, ben ce calcul là effectivement on l'annule]*
> *E2 : Mais pour résoudre l'exercice, ils sont pas obligés de l'avoir vu.*
> *[A la page 25, vous dites « le lien entre vitesse nulle et fonction dérivée =0 : obstacle didactique ».*
> *En quel sens didactique ?]*
> *E1 : J'ai rajouté « ou méthodologique ».*
> *E2 : Oui, on le dit plus après.*
> *[En quel sens méthodologique alors ?]*
> *E1 : Parce qu'il faut qu'ils voient que ici la vitesse nulle ça correspond justement à dérivée égale 0]*
> *E2 : Théorème du max et du min. Si ils l'ont pas vu…*
> *E1 : Oui, il faut qu'ils pensent aussi que c'est ça.*
> *2006-1*

Plus proche du savoir visé, un groupe va expliciter que la difficulté réside dans le passage entre la croissance sur un intervalle et la croissance en un point :

> *[Et là je vois que vous avez écrit « l'obstacle psychologique de la variation d'une croissance est gommé par l'utilisation d'une notion analogue mais naturelle : la*

> *variation d'une vitesse ». Donc est-ce qu'on pourrait avec ça parler du critère de la variation d'une fonction.]*
> *E1 : euh, non.*
> *[Parce que l'obstacle psychologique, auquel faites-vous référence ?]*
> *E1 : C'est euh c'est la vitesse instantanée en fait. Donc ici je pense que la vitesse instantanée …*
> *La toute première solution où on mesurait les écarts, c'est faire un flash sur une vitesse, et là je pense que les élèves ils s'en rendent compte mais dès qu'on leur dit bah la courbe croit en un point ça va plus, il y a quelque chose qui manque.*
> *Et en fait on s'est servi du flash et d'en déduire toutes les propriétés et arriver naturellement à la notion qui ben … et sa croissance c'est la dérivée.*
> *2006-3*

Une étudiante formule la validation de niveau 1, même si elle avait énoncé le résultat sous sa forme de niveau 2 :

> *[À la fin, bon en même temps tu donnes bien la motivation, c'est pour répondre aux objectifs du programme et pour compléter, tu écris le théorème des AF. Mais enfin est-ce qu'il a un intérêt ici ?]*
> *Ben justement, je l'ai. Enfin oui la motivation c'était surtout pour répondre au programme, je l'ai gardé, mais je me disais aussi dans un sens, après l'avoir rajouté à cet endroit-là, vu qu'on a vu maintenant on a défini la notion de tangente, mais dans la théorie vraiment abstraite, on peu la compléter, se poser des questions ah oui on a une sécante, enfin une vitesse qui correspondait à notre vitesse moyenne, on a la vitesse instantanée et je vais dire c'est un résultat qui pourrait découler de ces observations et de compléter vraiment la théorie.*
> *[Oui mais là on le voit comme un aboutissement mais est-ce qu'il a une opérationnalité, ici ?, une utilité]*
> *Dans le projet ?*
> *[et en maths tout court ? indépendamment, de ça. Dans le secondaire]*
> *Ah il y a certainement des utilités mais…*
> *[Tu vois qu'il est mis dans le programme à ce moment-là]*
> *[Faut aller voir dans son syllabus alors ?]*
> *Non mais c'est vrai que ça a certainement son utilité mais je ne saurais pas vous répondre comme ça.*
> *C'est vrai que parfois on voit des résultats comme ça et on ne se pose finalement plus le..*
> *[Et, si quand même une question. Puisque on a défini les dérivées, est-ce qu'on aurait avec ce qui a été fait, de quoi justifier le critère de variation, de croissance]*
> *Ben ça revient avec le concept de mouvement ; on voit que le mobile va aller, se déplacera dans le sens des positions positives ou négatives, et donc il y a des accroches aussi.*
> *C'est ça l'usage, en fait l'utilité de la présentation là de partir de choses concrètes, ça permet de voir si ils ont bien compris le concept d'un point de vue cinématique, si ils accrochent avec ça, après la théorie abstraite leur paraîtra plus logique, je vais dire. Ils pourront toujours dire ah oui mais ça vient de ça. Enfin, la dérivée, oui c'est pas un concept si abstrait que ça, je peux l'appliquer et dans ce cas-là ce sera la vitesse instantanée.*
> *2006-8*

Enfin, un étudiant met en évidence qu'il existe « un trou » à ce sujet dans les transpositions :

> *[Et alors à la page 25, tout à coup on a le théorème sur le critère de croissance. Donc on a déjà fait un saut en fait hein. C'est-à-dire que dans une première étape on a donné un nom aux choses qu'on a manipulées et puis maintenant ben on rentre dans de la théorie, on a un théorème. Je vais le laisser comme ça, ou je vais essayer de la justifier ou]*
> *Ici on pourrait éventuellement faire une démonstration mais en fait j'ai essayé de regarder pas mal de manuels, et même de cours que moi j'ai eus et j'ai remarque que 95% du temps, elle était pas démontrée cette propriété-là.*
> *J'ai réfléchi sur la démonstration et il y a moyen de la faire sans trop de difficultés. Enfin il y a un sens qui va bien je crois ; parce que j'y ai réfléchi et je me suis dit est-ce que je la mets, est-ce que je la mets pas ?*
> *Parce que j'en avais vu une , dans quel sens oui alors c'est dérivée alors croissance je la mets pas dans l'autre sens ?*
> *[Et donc dans l'autre sens, ça vous..]*
> *Ah non c'est un si et seulement si.*
> *En fait j'ai remarqué que dans un sens j'arrive à faire la démonstration. Le sens sur lequel j'arrive à faire la démonstration c'était lequel. Il y un sens dans lequel j'arrive à faire la démonstration, l'autre j'arrivais pas.*
> *[Et vous n'avez rien trouvé dans les manuels qui]*
> *Non parce que j'ai regardé tous les manuels et chaque fois, c'était passé. J'ai regardé dans actimaths, c'était passé.*
> *J'ai regardé dans un cours que j'avais eu de maths 8, c'était passé. Donc je n'ai pas trouvé.*
> *[Et en cherchant ailleurs ?]*
> *[Ou, est-ce qu'il y avait quelque chose dans les exercices qui.. puisque en même temps vous le dites, on a des constatations sur la vitesse]*
> *À mon avis, c'est des constatations. Bon bah ceci c'est court évidemment quand je le fais en classe je ré-expliciterais plus . Par exemple dans la courbe qu'on avait dessinée, on voyait bien qu'on avait une vitesse positive et on avait un maximum, puis une vitesse négative. Donc j'ai de quoi l'illustrer dans les exemples.*
> *[On pourrait développer une argumentation ?]*
> *Oui/. C'est pour ça que je le mets.*
> *Par contre le dernier théorème, là j'ai pas trop trouvé d'exemple qui permettrait de l'illustrer.*
> *[Bon moi je me dis théorème 2.2, là j'ai mais pourquoi ? Pour l'avoir ? Parce qu'il est classique ?]*
> *Oui j'ai l'impression que c'est un théorème qui revient partout, enfin qui revient souvent.*
> *[oui c'est vrai]*
> *Je me suis posé la question de l'inclure dedans, mais bon. Mais je me dis que c'est un truc sur lequel on peut poser beaucoup de questions.*
> *J'ai regardé des manuels et beaucoup de choses et il apparaît régulièrement mais on le démontre pas de nouveau .*
> *Sauf dans mon cours de maths 8, là j'ai regardé la démonstration et elle y est . Mais le problème que j'avais vis-à-vis de ce truc-là c'est que effectivement dans les exemples que je développe avant, rien sur lequel je pourrais m'appuyer pour l'illustrer.*
> *2006-7*

6.3.2.15 Conclusions sur la deuxième expérimentation

Plusieurs enseignements peuvent être dégagés de cette deuxième expérimentation avec la brochure. Nous allons les résumer brièvement.

Tout d'abord, les élèves-professeurs se servent du milieu physique, non pour développer le discours de niveau 1 auquel il pourrait inciter, mais pour retourner en rationalité II en déléguant au cours de physique le discours qui pourrait appartenir à une rationalité de niveau I. Cette posture se manifeste dès le début pour 9 étudiants sur 13.

Toutefois un gros travail est fait sur l'organisation didactique, soutenu par des arguments relevant plutôt du niveau des valeurs et croyances : se raccrocher à du déjà vu ; bien faire voir ; questionner les élèves, etc. Or cette organisation va finalement les amener à un autre changement de rationalité puisqu'ils vont adopter un discours de type 2bis, en essayant de définir la dérivée par des analogies de forme ou par des comparaisons de nombres, et non par une technique de calcul. Nous n'avons pas repris ici toutes les difficultés liées à la définition de la tangente, mais elles sont toujours largement présentes. Par contre, le fait de beaucoup questionner les élèves-professeurs au sujet des définitions données a pour effet de les faire douter de leurs certitudes.

Enfin, le travail de deux étudiants met en évidence qu'il est possible d'articuler les discours de niveau 1 et de niveau 2 qui, tout en correspondant à des cadres de rationalité différents, pourraient donc ne pas être incompatibles et ne pas se concurrencer. Il semble vraisemblable que c'est alors plutôt l'excès de visibilité du discours 2bis qui empêche l'accès à l'un des deux niveaux de rationalité.

Ayant constaté leur difficulté à assumer l'une ou l'autre des rationalités, en grande partie du fait que le discours de niveau 1 n'est pas reconnu, nous avons alors envisagé la troisième expérience dans laquelle le discours de niveau 1 leur sera fourni.

6.3.3 Troisième expérimentation avec la brochure

A la suite de ces deux premières expériences, il apparaît donc plusieurs enseignements à tirer, aussi bien sur le plan de notre recherche que sur le plan de la formation. Confrontés à cette ingénierie, les étudiants manifestent bien une difficulté certaine à choisir un cadre de rationalité dans lequel les discours et techniques soient cohérents entre eux, mais également une tendance à utiliser sous une forme presque prescriptive les concepts de didactique qui leur ont été enseignés.

Sur le plan de la rationalité, il apparaît qu'ils sont amenés à mettre en œuvre un discours de type 2bis, du fait qu'ils cherchent quand même à utiliser les activités proposées alors qu'ils n'en reconnaissent pas les enjeux. Ne pouvant « pratiquer » un discours de niveau 1, ils cherchent à lire les activités au travers du filtre que constituent leurs connaissances théoriques tout en ne pouvant pas non plus utiliser le discours de niveau 2 qui y correspondrait. Parmi ces connaissances théoriques, sont alors sélectionnées celles qui semblent pouvoir décrire les phénomènes observés avec « un minimum » de théorie, le reste étant remplacé par un discours visant plus à l'ajustement qu'à l'explication.

Nous avons ensuite cherché à voir comment contribuer à une autre perception du milieu effectif de l'élève par l'explicitation des enjeux et la demande d'une analyse qui ne soit pas mêlée à l'élaboration d'une leçon. En ce sens, nous modifions dans cet exercice le milieu de l'élève-professeur : pas de niveau S_0 (situation de classe) ni de niveau S_1 (situation de conception du projet) mais uniquement le niveau S_{+2} du thème mathématique par la proposition de plusieurs projets correspondant aux différents cadres pour favoriser un décloisonnement des cadres I et II, et le niveau S_{-1}, que nous assimilerons ici au milieu de l'élève avec ses questions, ses stratégies, etc. De plus, le fait de ne poser que des questions demandant une réponse précise , soit d'ordre mathématique, soit d'ordre didactique, empêche l'utilisation d'arguments du niveau S_{+3} des valeurs et croyances générales.

La description de l'expérimentation ayant été faite au Chapitre 5, nous allons ci-dessous en proposer une synthèse, l'essentiel de notre travail consistant dans la mise en évidence du phénomène analysé dans les étapes précédentes.

6.3.3.1 Rôle et institutionnalisation pour la dérivée et la tangente

La majorité des étudiants exprime plus ou moins clairement que l'activité sur la tangente, telle que libellée dans Espace Maths, relève de l'ostension déguisée. Ayant eu le cours correspondant, ils parlent en général de l'obstacle géométrique et en déduisent qu'une telle introduction fonctionnera par effet de contrat.

Quelques-uns formulent plus explicitement que cette introduction comporte un risque de cercle vicieux entre les définitions des deux notions, et certains en arrivent à se poser la question des raisons d'être de la tangente.
On trouve aussi des étudiants qui attribuent le choix de la tangente à son caractère visuel, et quelques-uns écrivent clairement que la tangente ne joue en fait qu'un rôle d'outil didactique.
Dans la mesure où l'objectif est de « dé-naturaliser » cette approche en en montrant les limites, nous pouvons considérer positivement ces réponses. Toutefois, nous ne sommes pas à l'abri d'un effet de contrat, les étudiants ayant pu fournir des réponses correspondant à nos attentes supposées, et l'impact de cette prise de conscience sur les pratiques effectives ultérieures reste à étudier : devenus professeurs, ces étudiants vont-ils utiliser tout de même cette approche sans la questionner plus profondément ? Vont-ils au contraire simplement se l'interdire ? Vont-ils plutôt chercher à l'adapter ? En effet, un doute peut subsister puisque aucun étudiant ne cherchera à proposer une autre démarche ou une autre définition de la tangente en réponse à cette question.

6.3.3.2 Questions sur la croissance

A la question d'élève : « est-ce que les tangentes montent parce que la fonction est croissante, ou est-ce que la fonction est croissante parce que les tangentes montent », les étudiants répondent qu'il s'agit des deux implications : dans un cas la positivité de la dérivée est la condition nécessaire et dans l'autre, c'est la condition suffisante.
Nous avions en fait repris cette question pour insister sur l'ambiguïté du schéma illustrant le lien entre la croissance de la fonction et la positivité de la dérivée (voir au Chapitre 4), et il nous paraît que nous devrions en modifier l'énoncé pour le faire porter sur le schéma en question. Ici aussi, un doute peut subsister et nous signalons à ce sujet la réponse d'une étudiante qui pense que la réponse va dépendre de l'institution, en différenciant les mathématiciens des ingénieurs. Sa réponse peut seulement nous indiquer que ce résultat n'est pas si transparent que cela :

> *En mathématiques, tous les théorèmes sur la croissance comptent sur la dérivée strictement positive parmi les hypothèses et aboutissent à la thèse de la croissance. Dans ce cas, je dirai que c'est croissant parce que les tangentes montent. Le rôle de la tangente est alors un rôle d'outil tandis que celui de la croissance est un rôle d'objet.*

> *Les ingénieurs par contre testeront des choses et travailleront sur les informations récoltées. Le milieu matériel sera donc fort important (graphiques). A ce moment, ils pourront dire que les tangentes montent parce que c'est croissant : tangente =objet et croissance =outil.*
> *ULg-2007-10*

6.3.3.3 Validation du critère de croissance

Dans la mesure où les enjeux du milieu ont ici été communiqués, la brochure contient explicitement la phrase énonçant le critère de croissance :

> *Autre résultat important :*
> *Le signe de la dérivée en un point indique si la fonction est croissante ou décroissante en ce point, c'est-à-dire si la pente à la courbe « monte » ou « descend »*
> *[..]*
> *Ce résultat est acquis pour les raisons suivantes :*
> *1) nous avons vu à la section 1 que toute fonction peut être interprétée comme le mouvement d'un mobile en fonction du temps*
> *2) de plus, à la section 3, nous avons vu que lorsque la vitesse d'un mobile, la dérivée de sa loi de position) est positive (négative) c'est que sa loi de position est croissant (décroissante)*

Nous allons donc surtout chercher à savoir si les élèves-professeurs acceptent ou non cette validation pragmatique.

Rappelons que nous leur proposons trois validations : 1) dans le projet une validation pragmatique basée sur une assimilation des fonctions, dans les cas qui s'y prêtent, à des lois de position ; 2) dans A.H.A une démonstration strictement numérique faisant intervenir l'axiomatisation de $\mathbb{R}$; 3) dans Espace Maths la démonstration consistant en la donnée de deux théorèmes d'analyse et de leur illustration géométrique.

Un grand nombre d'étudiants se contentent en fait de décrire les démarches sans chercher à les situer l'une par rapport à l'autre. Dans ce cas, nous pensons que l'identification des différents niveaux de rationalité n'est pas complètement faite.

Lorsqu'ils dépassent le stade descriptif, on trouve assez souvent le fait que *« ce serait trop compliqué de parler des intervalles emboîtés dans le secondaire* [281]».

[281] Remarque déjà entendue lors d'entretiens, qui nous laisse à penser que le rapport à la théorie est quand même ambigu : les étudiants acceptent d'en reprendre des théorèmes « isolés » parlant des réels mais pensent que l'évocation des axiomes de construction des mêmes réels sera inaccessible.

Nous trouvons par contre un étudiant (ULg-2007-2) qui cherche à identifier plus précisément quels objets, quels résultats et quelles constructions elles mettent en oeuvre. Tout en parvenant à les distinguer quant à leur utilisation de la théorie, il fait aussi l'effort de chercher à les articuler entre elles, par exemple en exprimant que les théorèmes sont en fait « mis en acte» dans le projet et qu'il est donc possible de faire cohabiter le niveau de rationalité II avec le niveau I.

Dans la même perspective, une autre étudiante (ULg-200-10) va plutôt proposer les lois de position utilisées dans le projet pour « aider à admettre le théorème de Lagrange ».

Enfin une étudiante (ULg-2007-7) tente de traduire le théorème des accroissements finis en termes d'accroissements du type Δx et Δy. Même si elle ne parvient pas tout à fait à son but, cela nous semble aussi manifester une volonté de concilier les cadres I et II sans passer par le visuel.

On a donc à l'ULg 3 étudiants sur 10 qui parviennent à faire une distinction entre les niveaux de rationalité présents, et qui cherchent plus à les articuler qu'à les juxtaposer.

La question a été posée de manière légèrement différente aux étudiants des FUNDP pour les amener à dépasser le niveau descriptif. On constate alors des réticences à accepter la validation « par le mouvement ».

Par exemple, un étudiant (FUNDP-2007-3) n'identifie pas du tout la validation faite dans le projet et pense qu'elle passera nécessairement par l'observation graphique ou par la tangente. Un autre ne semble pas discerner à quels moments s'expriment les deux rationalités présentes :

> *Le lien est donné en français après avoir donné ce qu'est une fonction dérivée. [..]On en donne la définition sans indiquer à quoi cela sert (tableau de valeurs).. [..] On étudie des mouvements par le biais de fonctions du temps et le signe de la dérivée permet de voir comment varie le mobile.*
> *FUNDP-2007-6*

Beaucoup citent le fait que l'énoncé soit fait en langue naturelle comme étant un obstacle à lui conférer un statut. Ils lui accordent plus de sens que « la fausse démonstration » mais en diminuent parfois la portée :

> *Acquis pour deux raisons basées sur des constations préalables.*
> *Ici pas de théorème ou de semblant de preuve.*

> *On donne du sens à l'aide de la vitesse dans un monde physique et en décontextualisant avec le problème de la boîte. [..] La validation se fait dans un monde observable, physique.*
> *Le fait qu'il n'y ait pas de preuve choque moins que de fausses démonstrations.*
> *FUNDP-2007-9*

Ou même

> *Le critère est juste présenté de façon empirique par rapport à ce qui a été vu précédemment.*
> *FUNDP-2007-16*

De manière générale, les étudiants vont fournir, de manière plus ou moins regroupée, deux types d'objection à la validation proposée.

Une première catégorie d'objections témoigne d'une assimilation de cette validation pragmatique à une généralisation sur base d'exemples, non admissible en mathématiques.

Un étudiant (FUNDP-2007-2) parle effectivement de « *discours cinématique* » mais pense que la validation est « *basée sur des exemples* », et un autre va écrire :

> *Le critère de croissance n'est pas démontré rigoureusement puisqu'il n'est que cité sous forme de remarque supplémentaire et n'est nullement énoncé sous forme de propriété ou théorème*
> *Il n'y a aucune preuve théorique mais des preuves basées sur des exemples, or cela n'est jamais suffisant de valider sur base d'exemples*
> *FUNDP-2007-4*

Par contre, une étudiante (FUNDP-2007-5) va d'abord faire les mêmes objections sur la forme de l'énoncé, puis distinguer entre « *valider par des explications* » et « *valider par une preuve théorique* », ce qui pourrait constituer un début de distinction entre théorie et discours technologique. Mais il reste difficile de discerner la portée des explications fournies et de ne pas les limiter à l'exemplification :

> *Il n'est pas énoncé sous forme de propriété ou de théorème. Sa validation fait appel à un discours cinématique et les explications données se réfèrent aux exemples ; donc on se contente de l'intuition. Cette preuve empirique n'est qu'une illustration mais ne suffit pas comme preuve mathématique.*
> *FUNDP-2007-10*

Même lors de l'entretien, le mode d'argumentation n'est pas compris :

> *[Bon et alors, vous dites que dans le premier document la démonstration donc l'intuition prime hein pour le critère. « On ne se base pas sur une preuve théorique, on accepte les résultats, étant donnés les exemples mais mathématiquement parlant un*

> *exemple ne suffit pas comme preuve mathématique ». Est-ce que le seul ressort c'est le ressort de l'exemple ?*
> *Oui, ils se basent sur les exemples qu'on avait fait juste avant avec la vitesse et…*
> *[Il n'y pas plus que ça comme type de comme mode d'argumentation ? que les exemples ?]*
> *Ben ils se basent, oui, sur le mouvement du mobile en fonction du temps. Sur les exemples physiques qui sont décrits avant.*
> *[Et ça veut dire quoi « ils se basent » ?]*
> *Ben, ils ont fait toute une implication ici, et alors ils reprennent sur l'exemple les moments où la dérivée qu'ils ont calculée est positiv, et à ce moment-là ils disent que la fonction est croissante, et inversement. Il y a pas de preuve, je vais dire mathématique, comme dans les autres. Ils reprennent les exemples qu'ils ont décrits avant et alors ils en tirent des conclusions…*
> *[C'est une généralisation alors ?]*
> *Oui. C'est pas spécialement mieux que la démonstration, mais…..*
> *[Mais c'est l'idée d'exemple que je voudrais que vous précisiez]*
> *[Est-ce que je dis : j'affirme que cette propriété est vraie ; Exemple 1 c'est vrai quand $f(t)=t^2$; Exemple 2 c'est vrai quand $f(t)=t^3$ et hop on va faire que ce soit vrai tout le temps ? Ou bien est-ce qu'on fournit quelque chose en plus pour que ce soit accepté ?]*
> *Non, je vois pas.*
> *Fundp-2007-13*

Toujours à l'oral, un étudiant ne parvient pas à exprimer le discours technologique :

> *[Alors dans l'ingénierie vous dites « on rassemble des choses déjà vues pour dire que le critère est correct ». Qu'est-ce qu'on fait comme type de validation ? C'est quoi « rassembler des choses déjà vues » ?]*
> *Ben en gros on dit que ça marche parce que on a déjà vu deux points, à savoir que, si c'est les deux points déjà vus, donc on dit déjà qu'on a vu ces deux chose-)là et donc que intuitivement ça marche. Enfin, c'est plus regrouper des, c'est pas des savoirs, c'est des conclusions qu'on a déjà vues et donc en réunissant ces conclusions-là…*
> *[Oui mais ça c'est un discours très général. On pourrait le dire pour des tas de circonstances différentes. Vous devriez expliquer à quelqu'un qui n'a pas vu le projet comment on justifie le critère de croissance dans ce projet-là, vous diriez ça comment ? Parce « rassembler des choses déjà vues » il va pas comprendre… moi c'est l'argument de fond que je veux. C'est quoi, l'argument de fond ?]*
> *Euh, l'argument de fond, alors….On a vu, donc il y avait l'histoire de la croissance…..*
> *Donc c'était avec….Il me semble qu'on avait vu avec les accroissements, les petits accroissements……Et on voyait que quand la pente montait, quand la pente était croissante, donc notre Δt puisque c'était positif il était positif et la position aussi enfin c'est pas que ça grandissait c'est que c'était plus loin.*
> *Fundp-2007-15*

Une deuxième catégorie d'obstacles concerne une difficulté à exploiter la nature du milieu, certains reprochant de procéder à une validation physique tandis que d'autres reconnaissant que le milieu n'est déjà plus uniquement physique. Il y a alors l'impossibilité d'inclure dans l'énoncé le cas d'une dérivée négative, puisque, en physique, les vitesses négatives n'existent pas[282].

Le fait de valider par la physique est en fait parfois confondu avec l'utilisation de graphiques. Les propos ci-dessous nous montrent que l'utilisation de graphiques pour illustrer un théorème est acceptée, mais que l'utilisation de graphiques supportant un raisonnement de nature physique sera considérée comme une « preuve uniquement visuelle » :

> *[Alors pour la deuxième question, pour comparer les différentes manières de présenter et valider le critère de croissance,… alors le critère de croissance est énoncé en français et pas formalisé. Alors qu'est-ce que ça peut faire ça ?]*
> *[Dans EM, on a thm6, thm7, démonstration, thm de Lagrange qui n'est pas démontré. Donc il y a une validation ici ?]*
> *Ben dans un sens oui, vu qu'on fait une preuve. Maintenant on utilise dans la preuve un autre théorème qui n'est pas lui-même démontré mais, bon. Il y a quand même une validation si on admet le théorème de Lagrange, ben oui il y a une validation*
> *[Et qu'est-ce qui peut aider à l'admettre le théorème de Lagrange ? Sinon je peux faire admettre n'importe quoi ?]*
> *Je sais pas ; c'était écrit dans les feuilles, on l'admet donc on ne se pose pas la question.*
> *[Alors, on parle de valider sur base d'exemples et de valider grâce au monde physique et pas grâce aux maths. Est-ce que vous pouvez développer un petit peu ?]*
> *Oui quand je dis pas grâce aux maths, c'est-à-dire que il n'y pas de démonstration telle quelle, tac tac tac on fait ça. Et valider grâce au monde physique, ben on le voit sur le dessin, si on a les pentes qui font comme ça on voit visuellement que c'est démontré, mais maintenant c'est pas parce qu'on le voit que c'est nécessairement vrai non plus.*
> *[Donc dans le mouvement générique, c'est ça qu'on propose comme validation ? C'est parce que ça se voit ?]*
> *Euh, il me semble oui. Oui pour moi il n'y pas de démonstration formelle telle quelle donc il n'y avait pas de vraie preuve mathématique.*
> *[Donc la seule raison de l'accepter c'est parce que ça se voit ?]*
> *Ben oui je pense.*
> *Fundp-2007-8*

Une étudiante (FUNDP-2007-1) énonce bien l'analogie avec le mouvement mais écrit ensuite que *« la validation se fait uniquement par le graphique [.] ou par la physique »*. Elle objecte de plus que l'on ne peut pas valider puisque la vitesse négative n'existe pas.

[282] Le même phénomène se produit pour l'accélération. Pour pouvoir mettre en place une systématisation, en fait une ébauche de théorie via un cadre commun, on parlera d'accélération négative et plus de décélération. Ici, les étudiants n'imaginent pas qu'on puisse définir une vitesse négative correspondant à une diminution de la position lorsque l'accroissement en temps est positif.

Un autre exprime ainsi la difficulté à utiliser le milieu :

> *Il n'y a pas de validation. Le lien est expliqué en français lors d'une courte institutionnalisation mais n'est pas démontré. On le montre dans un contexte physique [..] qui est quelque peu imaginaire, non observable, car dans la vie courante on n'utilise jamais de vitesse négative.*
> *FUNDP-2007-14*

Le discours ci-dessous nous semble refléter les hésitations et tiraillements entre deux disciplines, mais surtout entre deux rationalités, la difficulté étant d'en assumer les limites :

> *Le critère de croissance est en français et pas formalisé [comme dans les autres].*
> *Ceci est acquis pour deux raisons : toute fonction peut être interprété comme le mouvement d'un mobile en fonction du temps et dès que la vitesse d'un mobile est positive, la loi de position est croissante.*
> *On énonce en français le critère de croissance que l'on a acquis grâce aux exemples précédents.*
> *Mais on ne le valide pas en général.*
> *On le valide sur base d'exemples.*
> *Il n'y a pas de démonstrations ni de théorie, il n'y a que des graphiques.*
> *On le valide grâce au monde physique mais pas grâce aux maths !*
> *FUNDP-2007-8*

En fait, les deux types d'obstacles nous semblent relever de la même difficulté à exploiter les ressorts du milieu. Concernant l'obstacle lié à « l'utilisation d'exemples », une explication pourrait être que l'utilisation de la continuité cinématique à la place de la continuité numérique n'est pas assez explicite. En effet, seuls quelques étudiants font le lien entre le discours cinématique du projet et le discours numérique qui le « mathématise » dans A.H.A. A ce sujet, ils cherchent en général plus à opposer le projet à l'approche du manuel mais rarement à l'articuler avec la théorisation déjà présente dans A.HA.

Concernant les deux autres objections sur la nature du milieu, entre physique et mathématique, on pourrait dire que, vis-à-vis du milieu particulier associé à l'ingénierie, les étudiants réagissent d'une manière inversée par rapport à la démarche des concepteurs : lorsqu'il serait nécessaire de s'attacher à la dimension pragmatique pour utiliser une argumentation de niveau 1 basée sur des accroissements, des rapports, des vitesses, etc., les étudiants vont utiliser les objets mathématiques de la théorie ; lorsqu'il serait nécessaire de se détacher des contraintes physiques pour rentrer dans une démarche de systématisation, par exemple en proposant de définir une vitesse négative, ils utilisent alors ces contraintes comme obstacles à la création d'un modèle mathématique.

Par exemple, les propos repris ci-dessous expriment que le travail de modélisation n'a pas été compris. Si le point de départ de l'ingénierie est effectivement la vitesse instantanée comme objet mental, c'est bien avec le modèle qui en a été construit, et que l'on va appeler dérivée, que l'ingénierie propose le critère de croissance. Mais l'étudiante continue de confondre les deux :

> *[Donc le problème de validation dans l'ingénierie didactique avec les vitesses. Alors vous dites : « dans la vie courante, la vitesse affichée, c'est jamais tout à fait la vitesse. Nous ne pouvons pas parler dans la vie courante de vitesse instantanée mais on s'en sert pour valider ». Est-ce que c'est vraiment un concept de ce type-là, de vitesse instantanée qui est utilisée dans l'ingénierie ?]*
> *Ben, pour la validation vous voulez dire ?*
> *[Oui, ou en général. C'est quoi la vitesse instantanée dans la brochure ? À terme, hein pas forcément au départ]*
> *Ben ce sera, d'abord on va passer par la vitesse moyenne et puis prendre la limite à un moment.*
> *[Oui.et donc est-ce qu'il y a lieu de parler là de vie courante et de vitesse qui n'existe pas tout à fait ?]*
> *Ben pour arriver à la notion de dérivée, enfin quand on reprenait les pages sur les sujets, on en parlait quand même puisque c'était le taux de variation de la vitesse instantanée ; on passait par là, donc euh.*
> *[Mais est-ce que l'argument qui dit « on ne peut pas en parler dans la vie courante » permet de dire qu'il y a un problème parce qu'on s'en sert pour valider ?]*
> *Mais on en parle dans la vie courante ; mais on se la représente difficilement d'un point de vue plus physique on va dire, que …Mais c'est, c'est, enfin moi je voyais là une certaine ambiguïté puisque il y a l'argument Qui est contre, enfin pas contre mais qui précise qu'on en parle pas dans la vie courante et puis d'un autre côté pour arriver à ce concept de limite on l'utilise, alors que pour les autres notions, enfin, euh*
> *[Mais quand on s'en sert pour valider on se sert de la vitesse dans la vie courante ou d'autre chose]*
> *Ben on va prendre le taux de variation de la vitesse instantanée au début de l'institutionnalisation. Et on regardera oui, le Δx quand le Δt va tendre vers 0.*
> *[Et ça c'est la vie courante ?]*
> *Non, non d'accord, mais ce que je voulais dire c'est peut-être pas, c'est peut-être mal exprimé mais qu'il y avait …..on partait de concepts qui ne sont peut-être pas très clairs puisqu'il n' y a pas d'application physique dans la vie courante pour expliquer quelque chose au final d'un point de vue mathématique ; Donc ils ne savent peut-être pas refaire le lien entre…..*
> *[Mais qu'est-ce qui peut être utilisé pour faire le lien ?est-ce que ce n'est pas éclairci à un moment justement. Ou est-ce qu'il y aurait moyen de l'éclaircir]*
> *Mais euh moi, je préfèrerais quand même l'approche moins longue et plus mathématique de passer par les tangentes.*
> *Fundp-2007-1*

Une autre étudiante a par exemple bien pris conscience du fait que l'approche de la tangente comme limite de sécantes présente l'avantage de ne pas avoir à travailler avec les conceptions et objets mentaux susceptibles d'éveiller des questions « *délicates* ». Ses propos nous semblent bien mettre en évidence que le travail de transformation d'un objet mental en objet mathématique n'est identifié dans aucun des cas : 1) la vitesse a par défaut un statut d'objet mental complexe et tout le travail de sa modélisation n'est pas reconnu ; 2) Par contre, la tangente apparaît bien comme déjà mathématisée et la nécessité d'un travail de modélisation n'est pas reconnue non plus.

> *[Donc là vous parlez du fait que les enseignants préfèreraient choisir donc la stratégie avec les tangentes qui convergeraient vers une droite qui serait la tangente, pour éviter des techniques, pour éviter des problèmes plus délicats. Et ça pourrait être quoi, ces questions plus délicates ?]*
> *J'ai pas dit qu'ils allaient vraiment choisir la tangente, enfin ce que je dis c'est que on pratique plus l'ostension à mon avis parce que.. , bah parce que…., je sais pas. Déjà les bouquins sont faits comme ça, et euh, les questions plus délicates, ben je veux dire, le visuel c'est quand même pour ça qu'on montre, euh, on essaie quand même de leur faire voir quelque chose pour qu'ils nous laissent tranquilles entre guillemets, quoi. Qu'ils voient que c'est juste et qu'ils nous posent pas de question plus précise, quoi. Donc là ils ont compris, ils voient enfin je veux dire ces histoires de sécantes, de limites de sécantes entre guillemets, c'est quand même pour leur faire voir que ça avance et que ça se referme, enfin ça se rapproche de cette tangente. Oui, pour qu'ils le <u>voient</u>, et qu'ils nous laissent tranquilles, oui c'est vraiment ça.*
> *[Et euh, est-ce qu'ils le voient vraiment on n'en est pas sûr]*
> *Oui, oui.*
> *[Et les questions, ça pourrait consister en quoi les questions ?]*
> *Si on ne faisait pas comme ça ? Ben euh je ne sais pas.*
> *Prenons, si on prend le projet dérivées là l'ingénierie, euh, je sais pas, il y a des concepts peut-être plus compliqués qu'ils ne parviendraient pas à comprendre. Donc comme ça, rien que la vitesse instantanée, est-ce qu'ils ne pourraient pas arriver clairement en demandant ce que c'est qu'une vitesse instantanée ? Je ne sais pas, il y a moyen de répondre parce que je crois qu'ils voient ce que c'est quand même. Enfin je crois que tout le monde voit ce que c'est, que c'est une vitesse à un moment donné. Je veux dire que des questions comme ça euh un peu précises où là finalement on les laisse se faire leur théorie et parfois ils, enfin on les laisse avancer tout seuls. Donc on les laisse avancer et il y a un moment donné où ils seront persuadés de ce qu'ils ont fait et il va falloir aller leur montrer peut-être l'endroit où ça coince.*
> *Fundp-2007-5*

Il semble donc encore que la rationalité I n'ait, au mieux, de place que pour un travail dans le système, mais que le travail de constitution du modèle reste difficile à identifier. Seule une étudiante (FUNDP-2007-7) identifie clairement que les trois transpositions proposent des discours complémentaires, le discours cinématique du projet (niveau I) pouvant ensuite fournir une entrée dans le niveau II en se demandant à quelles conditions le critère « physiquement naturel » pourra faire partie d'une théorie mathématique.

C'est donc encore la difficulté à identifier les spécificités du milieu qui semble faire obstacle à la compréhension du travail allant du système au modèle. Dans le paragraphe suivant nous allons donc revenir sur cette difficulté en regardant comment est compris l'enchaînement des fonctions t^2 puis t^3, mais aussi en cherchant à interroger plus spécifiquement à l'oral les étudiants des FUNDP sur le rôle des réels dans les différentes validations proposées. Rappelons qu'une seule étudiante de l'ULg avait mentionné que A.H.A faisait d'abord un travail sur les nombres, cette étudiante cherchant d'ailleurs à faire le lien entre les organisations mathématiques en jeu. Quant aux étudiants des FUNDP, ils ont souvent mentionné à l'écrit, mais sans aller plus loin, que A.H.A « faisait une distinction entre rationnels et réels ».

6.3.3.4 Perception du milieu

Une question spécifique sur la description du milieu associé à l'ingénierie était posée aux étudiants des FUNDP. A l'écrit, 6 étudiants sur 16 manifestent explicitement une prise de conscience du rôle joué par l'enchaînement des questions (déterminer un instant puis calculer une vitesse), de même que par le choix et l'enchaînement des fonctions (t^2 puis t^3). Il semble donc que le fait de leur avoir fourni auparavant la brochure, ainsi que le fait de ne pas demander d'emblée la préparation d'une leçon, favorise une meilleure intégration du milieu effectif de l'élève dans le milieu de l'élève-professeur.
De même que l'année précédente, nous avons également questionné les étudiants pour provoquer autrement cette prise de conscience, essentiellement pour ce qui concerne l'utilisation des fonctions t^2 puis t^3. Dans 4 cas, les étudiants vont effectivement exprimer les rôles respectifs de ces deux fonctions mais certains restent convaincus que les fonctions sont choisies pour leur facilité visuelle :

> *[Et ces fonctions sont prises au hasard, ou on aurait pu prendre je sais pas moi $\sqrt{t}$ plutôt que t^2]*
> *Disons que si on prend $\sqrt{t}$, ça va faire, c'est peut-être moins visible. De toute façon pour les élèves, ils verront toujours un problème en disant que au point d'intersection entre les deux droites, le mobile va avoir la même vitesse mais c'est pas forcément la même chose, enfin c'est pas vrai.*
> *Fundp-2007-4*

Et on trouve encore que la deuxième fonction sera juste un exercice d'entraînement de la technique, voire un moyen de généraliser en fournissant un deuxième exemple……

> *[Alors vous dites, oui dans le projet ingénierie on travaille avec t^2 puis t^3. Vous dites « la dévolution est possible parce que le travail qui avait été fait avec t^2, on le refait avec t^3, c'est le même, etc. ». Bon, mais on aurait pu prendre d'autres fonctions, je sais pas. Est-ce que le choix de ces deux-là joue un rôle particulier ?]*
> *Euh non. En fait on a montré d'abord avec t^2 puis le but de montrer avec t^3, ben c'est de généraliser à n'importe quelle fonction ? Et on voit finalement avec t^3, c'est appliquer la première partie, donc c'est quand même pas valider le résultat, donc ici par rapport à la première fonction t^2, on ne parvient pas à valider et finalement on ne parvient pas non plus à généraliser. Donc c'est quand même différent. Si ici j'ai parlé de dévolution c'est parce que dans tout le projet il ne me semblait pas qu'on pouvait dévoluer des choses aux élèves, et donc ici j'ai pensé ben si on a fait une fois le modèle avec t^2, on peut leur dévoluer ici avec t^3, ou une autre fonction.*
> *[Vous dites, on ne peut pas valider avec t^2 ?]*
> *t^2 on peut le valider, c'est d'ailleurs validé deux fois, par deux méthodes différentes. Avec t^3, on y arrive pas parce que là on a des fonctions cubiques qui interviennent et c'est quand même beaucoup plus compliqué. Mais pour moi, c'est pas un problème de dévolution, pour moi c'est une bête application si on demande de faire ça aux élèves.*
> *Donc c'est différent.*
> *FUNDP-2007-6*

Soulignons ici que, excepté lors de la deuxième expérimentation, nous n'avons jamais eu l'occasion d'aborder avec les étudiants les autres ressorts de cette ingénierie, à savoir que la question sur l'instant permettra de valider le calcul fait ensuite pour la question sur la vitesse et que cette question sur la vitesse obligera à exprimer les accroissements sous forme d'un rapport dans les stratégies 4 et 5 qui n'utilisaient pas d'emblée la notion de rapport.

Un autre ressort de l'ingénierie consiste dans l'utilisation de la continuité de type cinématique. Certains étudiants formulent très spontanément cet avantage :

> *[tant qu'on y est, dans l'ingénierie est-ce qu'on parle du fait d'être dans $\mathbb{R}$?]*
> *Ben on en parle, euh oui on en parle parce qu'on prend le temps, donc euh.*
> *[C'est-à-dire ?]*
> *Ben le temps c'est continu donc c'est comme si on prenait $\mathbb{R}$, quoi. Enfin, c'est comme si on prenait $\mathbb{R}$, oui.*
> *FUNDP-2007-5*

ou

> *[Et dans le troisième projet, est-ce qu'on travaille avec des réels ?]*
> *Le troisième, celui-ci ?*

> *Oui, oui parce que on travaille dans le temps, donc il est continu donc ce sont des réels.*
> *FUNDP-2007-10*

D'autres pensent plutôt que c'est l'aspect concret qui est exploité :

> *[Pourquoi on rend des fonctions du temps, d'ailleurs ? enfin pour la cinématique c'est normal, mais pourquoi est-ce qu'on choisit de travailler en cinématique]*
> *Ben euh, je sais pas, mais peut-être que le lien, enfin le concept d'utilisation de la dérivée, qui est différente avec les physiciens ou les mathématiciens porte peut-être à dire ben en essayant d'allier les deux on pourrait de faire comprendre un petit peu mieux ce que c'est que ce concept là et …*
> *[Mais qu'est-ce qui fait qu'on allie les deux en faisant ça]*
> *Enfin, tous les jours le temps avance. Le temps ici dans la vie de tous les jours il joue un rôle important, donc en mettant cette variable-là ça peut peut-être je sais pas, au niveau des…*
> *[Ça a un avantage ? c'est juste qu'on voit tous les jours ou ça a un avantage ?]*
> *Enfin comme ça en réfléchissant, je vois pas comment est-ce qu'on pourrait enfin quelque chose autre que . Là c'est le temps, on pourrait faire autrement.*
> *FUNDP-2007-4*

Une étudiante mentionne de plus que le temps est une variable « facile à annuler » :

> *Ce qui peut aider, c'est que ici on est dans un tout autre contexte, le monde physique autour avec la notion de vitesse autour et le temps quoi. Donc ici c'est le Δt qui joue et c'est plus facile à faire jouer que nos Δx.*
> *[Pourquoi ?]*
> *Parce que pour annuler le temps c'est plus facile quoi. Quand t vaut zéro, t vaut zéro.*
> *Pour moi, je trouve que c'est, on arrive mieux à s'imaginer que de dire : ben à un moment donné le point B il va arriver sur le point A. Enfin ça me semble plus facile de se dire on va prendre des intervalles de temps. En plus ils prennent ici tous égaux. Le Δt est égal à 1. Donc on ne joue plus que sur le Δy.*
> *FUNDP-2007-9*

Par contre, le rôle des réels dans la praxéologie dite « à trous » n'est pas toujours clairement identifié. A part quelques étudiants, il semble donc que la compréhension de la manière dont les organisations mathématiques proposées peuvent être articulées ne soit pas un souci :

> *[Et dans justement, là où on utilise le théorème des AF, où est-ce que ça joue qu'on travaille sur les réels ?]*
> *Donc c'est quand on veut justement montrer le critère de croissance on a besoin du théorème des AF et c'est vrai que là je me rappelle pas comment ça, je me suis pas posé la question, mais je pense pas que ça pose problème d'exiger les réels absolument. En tout cas dans la démonstration qui était donnée dans EM.*
> *FUNDP-2007-6*

ou

> *[Il y a des choses qu'on n'arriverait pas à prouver dans EM, si on n'était pas dans les réels ?]*
> *…*

> *Ben dans le théorème 6, oui on applique le théorème de Lagrange et c'est par Lagrange qu'on sait que, enfin pour les réels….non…..*
> *[Et dans le troisième, l'ingénierie, on ne se préoccupe pas des réels ?]*
> *Non on fait pas la distinction.*
> *[Est-ce que ça marcherait que sur les rationnels, ce qu'on fait]*
> *Ben c'est une très bonne question. Je sais pas.*
> *FUNDP-2007-8*

Seul un étudiant exprimera le rôle de $\mathbb{R}$ dans l'approche du manuel Espace Maths :

> *.. enfin, il y a l'interprétation graphique. On prend une courbe et deux extrémités a et b ; il y a toujours moyen de trouver un point c tel que son nombre dérivé en ce point-là …on peut placer une tangente qui soit parallèle à la droite passant par les points a et b. Graphiquement c'est ça. Maintenant est-ce que ce théorème a besoin de l'hypothèse de continuité ? Je suppose que oui puisque ils l'ont mis, enfin on peut toujours discuter là-dessus.*
> *Enfin c'est vrai que si il y avait discontinuité sur les irrationnels, le point c en question il pourrait être irrationnel et alors il n'y aurait pas de possibilité de placer une tangente en ce point-là. Donc le théorème de Lagrange pourrait poser problème si on s'en tient uniquement aux irrationnels. Moi je ne vois que ça pour justifier l'hypothèse de continuité de la fonction.*
> *FUNDP-2007-14*

L'étudiant ci-dessus mentionnait la continuité numérique, mais d'autres vont par exemple retourner à la continuité géométrique :

> *[Alors à propos de la question 2, on pourrait se poser la question de savoir, donc c'est pour démontrer le critère de croissance, en quoi le fait de travailler sur les réels est indispensable pour les développements ou les démonstrations,…]*
> *Ben c'est quand même cette idée de limite. Enfin moi je reviens toujours avec la notion de vitesse instantanée et qu'on doit quand même faire varier deux points sur toute une courbe. Donc si on prend deux points, et qu'on les rapproche de plus en plus, il faut quand même qu'ils appartiennent toujours à la courbe, donc ils doivent appartenir à* $\mathbb{R}$.
> *[C'est des points, et* $\mathbb{R}$ *c'est des nombres]*
> *Oui d'accord mais c'est des points de la courbe. Pour faire une limite, pour être sûr que, qu'on va tendre vers un point, enfin c'est vrai qu'il y en a un fixe, il faut quand même pouvoir faire passer l'autre point pour avoir cette idée de limite. Il faut quand même que ça appartienne à* $\mathbb{R}$*, si ça appartenait à* $\mathbb{Q}$*, on aurait un graphe à trous, donc euh.*
> *[Et dans la démonstration de AHA, ça intervient formellement le fait qu'on travaille sur les réels ? indépendamment de l'intuition ?]*
> *[Et dans la démonstration elle-même ; ça intervient comment le fait de travailler sur les réels ?]*
> *Ça c'est quand on prend nos intervalles, enfin quand on prend un ensemble borné.*
> *Non ça je…*
> *FUNDP-2007-15*

On trouvera aussi souvent une sorte de « transfert » des propriétés des nombres vers les fonctions. Par exemple, cette étudiante « remplace » la continuité numérique par la continuité de la fonction :

> *[Et finalement qu'est-ce qu'il nous dit le théorème ou axiome des intervalles emboîtés. Il sert à quoi ?]*
> *Oh ça c'est loin !*
> *Ben je vois bien l'image hein. C'est en resserrant de plus en plus, on va arriver à, enfin c'est une convergence vers un point unique, quoi. C'est vraiment l'étau qui se referme et on avance, on avance et on arrive à un point unique quoi.*
> *Maintenant vous dire, c'est des maths que j'ai fait il y a longtemps.*
> *Donc ici ils disent bien qu'on a besoin du théorème des intervalles emboîtés pour pouvoir dépasser les rationnels et aller vers les réels.*
> *[D'accord. Et on ne s'en sert pas du tout dans les autres transpositions ? On ne le fait pas apparaître du tout]*
> *Le théorème des intervalles emboîtés tel que c'est énoncé là moi je ne le vois pas transparaître.*
> *[Ou sous une autre forme ?]*
> *Le seul, enfin la différence moi qui m'a marquée, et l'assertion de départ pour laquelle j'étais pas d'accord avec ce qui est écrit ici, quand on l'écrit ici enfin pour moi on oublie une hypothèse très importante qui est la continuité, tandis que là on le met.*
> *Donc si on suppose que la fonction est dérivable sur son intervalle ici ouvert, enfin quelque part on considère bien tout l'intervalle sur lequel la fonction est dérivable et sous-entendu continue. Tandis que là on parle pas du tout de ça.*
> *D'ailleurs dans AHA moi quand j'ai lu l'explication sur les rationnels je voyais pas pourquoi ça contredisait parce que j'avais en tête cette hypothèse là quoi. Et comme en fait elle y est pas.*
> *FUNDP-2007-9*

Il semble aussi que cette continuité numérique associée aux réels soit associée aussi bien à la complétude, confondue avec la compacité, qu'à la densité. Ci-dessous, une étudiante utilise le mot compacité pour parler de la complétude :

> *Ben ils utilisent les intervalles emboîtés et là derrière il y a la compacité en fait. C'est à cet endroit-là que ils mettent en évidence le fait qu'il faille travailler absolument sur tous les réels.*
> *FUNDP-2007-7*

Une autre va utiliser le mot compacité, en fait de l'intervalle, pour parler de la densité qu'elle associe aux intervalles emboîtés :

> *[Si le critère n'est pas valable quand on travaille dans les rationnels, c'est bien que la démonstration se casse la figure à un moment donné. Où ça ?]*
> *En fait il faut absolument que l'intervalle sur lequel on travaille soit fermé borné. Que la fonction soit continue sur cet intervalle là. Sinon, quand on démontre le critère de croissance dans l'EM par exemple, ils partent sur le théorème de Lagrange, pour celui-là il fait le théorème de Rolle et pour celui-là il faut la compacité, donc euh…*

> *Il faut absolument cette condition-là, alors que…*
> *[Mais moi je parlais dans AHA. C'était pas avec le théorème des AF]*
> *Je vois pas la.. ah dans la démonstration qui est faite dans la fin ?*
> *Ils utilisent les intervalles emboîtés dans cette démonstration. Donc pour utiliser le théorème des intervalles emboîtés, il faut avoir la densité de l'espace réel.*
> *[Oui, vous parliez de la compacité. Vous la définissez comment ?]*
> *Ben, il faut que la fonction soit continue sur un fermé borné.*
> *[Oui mais ça c'est « il faut que… . La compacité, ça se définit comme ça ? C'est la compacité de quoi d'abord ?]*
> *De l'intervalle sur lequel la fonction est définie. L'intervalle [a,b] donc ici.*
> *[Et la densité vous la définissez comment ?]*
> *Ben la densité de l'espace réel, c'est par exemple que on peut encadrer, enfin entre deux rationnels on peut trouver un irrationnel et l'inverse.*
> *FUNDP-2007-13*

Toutefois, la fonction de l'axiome des intervalles emboîtés pour la construction des réels ne semble pas toujours claire, la notion de nombre réel apparaissant comme naturalisée :

> *[Si on travaillait sur les rationnels, la démonstration devrait se casser la gueule. Alors où est-ce que ça se casserait la gueule ? si j'ose dire]*
> *Parce que le théorème qu'ils utilisent avec les intervalles, c'est pas applicable avec les rationnels.*
> *[Non ?]*
> *Non. Si on prend chaque fois des intervalles et qu'ils sont emboîtés, on ne sait pas faire des intervalles que de rationnels.*
> *[Et dans le développement d'EM, est-ce qu'il y a un endroit où on voit qu'on est obligé de travailler sur les réels ? Toujours pour le critère de croissance]*
> *Bah pour moi ils ne considèrent déjà que le cas. On prend des réels, des intervalles de réels, sur lesquels la fonction est continue.*
> *[Oui, mais ça on décide que c'est comme ça, c'est facile. On aurait pu prendre une décision différente. Mais est-ce que ce qui suit tiendrait le coup justement si on n'avait pas travaillé sur les réels ?]*
> *Mais je ne comprends pas ce que vous voulez en fait. Parce que ici j'ai expliqué que ça marche parce que on a un théorème qui marche dans les réels parce que on a l'habitude de travailler dans les réels avec les élèves, c'est plus général. Et voilà, on a notre théorème qui marche tandis que dans l'autre document on voit que dans un autre cas ça ne marcherait pas. Donc ils approfondissent, mais je…*
> *[Et c'est seulement parce que c'est un autre cas que ça ne marche pas dans AHA ?. Et puis ça marche parce que..]*
> *Ben ici on travaille dans les réels.*
> *[Oui, mais pourquoi est-ce qu'on travaille dans les réels]*
> *Parce que sinon ça ne marche pas.*
> *[Pourquoi ça ne marche pas ?]*
> *….*
> *FUNDP-2007-10*

Ou

> *[Ok. Alors pour le critère de croissance et la positivité de la dérivée. Donc vous dite dans le projet AHA l'assertion est invalidée par un contre-exemple ce qui nous pousse à étendre l'assertion aux réels.*
> *Bon il y a bel et bien validation etc., mais on n'aurait pas pu faire la démonstration par l'absurde avec des rationnels ou est-ce que le fait de travailler avec les réels a joué un rôle ?]*
> *Ben en fait, dans la preuve par l'absurde avec les réels, à un moment on utilise le théorème des intervalles emboîtés et ce théorème-là ne peut se faire que dans les réels. Il ne marche pas avec les rationnels, donc si on avait fait la preuve par l'absurde dans les rationnels, on se serait trouvé coincés à un moment…*
> *[Et pourquoi est-ce que ça ne marche pas dans les rationnels ?]*
> *Je ne sais plus exactement comment ça marche. Attendez.*
> *Parce que en fait le théorème des intervalles emboîtés, imaginons qu'on a l'irrationnel* $\sqrt{2}$*, on peut le cibler de plus en plus avec des intervalles emboîtés et en fait l'intersection de tous ces intervalles ne sera jamais un rationnel.*
> *FUNDP-2007-14*

Certains propos laissent également transparaître une conception des réels comme étant des nombres « existant quelque part » et qui de plus vérifient une certaine propriété :

> *[Et pourquoi les réels vérifient l'axiome des intervalles emboîtés ?]*
> *Ça je l'ai pas très bien compris en fait. C'est expliqué dans le projet AHA mais c'est expliqué assez vite.*
> *Ils prennent un irrationnel* $\sqrt{2}$ *qu'ils coincent avec des intervalles emboîtés et l'intersection ne peut pas être un rationnel.*
> *C'est vrai que j'ai un peu de mal à comprendre ce passage-là en fait. Je suppose que l'intersection c'est donc le* $\sqrt{2}$ *en question qui est effectivement un irrationnel. Donc avec le théorème des intervalles emboîtés, , l'intersection est un irrationnel, donc…*
> *Moi il n'y a que ça que je vois qu'il faut effectivement les réels.*
> *Maintenant ils prennent* $\sqrt{2}$*, on pourrait prendre un rationnel qu'on coincerait avec des intervalles emboîtés.*
> *FUNDP-2007-14*

En conclusion de cette troisième expérimentation avec la brochure « dérivées » il nous semble que le fait de confronter les élèves-professeurs à plusieurs organisations du même thème et de leur poser des questions précises indépendamment de tout projet de leçon est susceptible de favoriser le discernement recherché. Toutefois, nous pouvons constater que les résistances sont fortes et qu'elles concernent de plus des questions qui apparaissent également comme des difficultés à la transition secondaire-université, comme la construction des réels et en particulier la notion de complétude[283].

[283] Artigue (2005)

6.4 Observations complémentaires sur les préparations de leçons

Nous allons dans cette dernière question résumer les informations apportées par exemple par les consignes de préparations.

6.4.1 La définition des objectifs

Le travail demandé n'a pas donné de résultats convaincants. Certains ont fait un effort pour distinguer les objectifs pour les élèves ou pour le professeur, mais malgré les consignes différentes, nous avons retrouvé dans les préparations les indications classiques d'objectifs formulés en faisant référence soit aux compétences, c'est-à-dire un texte officiel, soit aux contenus (appelés « matières »).

6.4.2 Travail sur l'articulation des connaissances en jeu

Rappelons que ce travail avait été demandé à titre exploratoire et n'était pas obligatoire. 5 étudiants sur 27 l'ont tenté assez régulièrement. En ce qui concerne les autres, nous signalerons le cas d'un étudiant qui a répondu assez régulièrement « *ne pas voir clairement les notions et outils en jeu* » dans sa leçon, tandis que certains disaient « *ne pas avoir eu le temps* », ou même franchement *« ne pas en avoir l'envie ».*

Les réponses obtenues à cette question nous permettent de faire les constats suivants. Certains fournissent des réponses proches des « pré-requis », avec quelques précisions. Les outils seront « *les notions supposées connues et non rappelées* » qui sont parfois distinguées des « *notions utilisées* » ; les « objets » seront « *ce que nous allons définir* », mais restent assez imprécises : « *notions sur la dérivée* » ; « *notions sur les angles* », et encore souvent en référence aux contenus des textes légaux.

Chez d'autres, on constate plus de précision dans ce qui est effectivement mis en œuvre, dont voici quelques exemples :

« (j'ai utilisé) la continuité (à tel endroit) » ; « (j'ai utilisé) la propriété des triangles : somme des angles = 180° » ; « (j'ai utilisé) l'axiome d'Euclide » ;« calcul vectoriel : si le point P est de coordonnées (a,b) alors le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a pour composantes (a,b) » ;« fractions : mettre au même dénominateur » ;« droites : équation d'une droite » ;

Nous voyons aussi apparaître une prise de conscience du fait que des résultats théoriques restent dépendants des premiers postulats ou axiomes : *« droite réelle » ; « calculs sur les réels » ; etc.* ; ainsi que des types de preuve utilisés *« raisonnement par l'absurde »* ; « généralisation »

Il nous semble donc que l'exercice puisse être proposé à nouveau, en l'associant par exemple aux travaux guidés décrits précédemment, de manière à faire prendre conscience aux élèves-professeurs des connaissances (en termes d'objet, de technique, de type de preuve) qui sont mises en jeu dans un projet, et de quelle manière elles interviennent.

6.4.3 Ouvrages et manuels consultés

Les réponses fournies par les étudiants confirment qu'il utilisent dans l'ordre : les manuels proposés pour le secondaire, essentiellement Espace Maths, Actimaths et Savoir et Savoir-Faire ; les notes de cours de leurs études secondaires (sans préciser si ce sont leurs cahiers ou des documents fournis par les enseignants) ; des documents écrits par des professeurs soit dans l'institution où ils exercent, soit qui leur ont été fournis lors de leurs stages ; leur syllabus ou des traités (d'analyse ou d'algèbre) du niveau universitaire ; exceptionnellement des manuels plus anciens, et c'est en fait dû à leur âge ; encore plus exceptionnellement des ouvrages que nous pouvons supposer être « de vulgarisation » ou d'applications (« A quoi ça sert les mathématiques »).

Nous pouvons donc constater une tendance certaine à ne pas se risquer *« hors des sentiers balisés »*, pour reprendre l'expression d'A. Lenfant, et ce en utilisant des documents qui soient « reconnus » par une des deux institutions fréquentées, avec une préférence pour l'institution secondaire. Rappelons que nous n'avions pas voulu leur indiquer un ouvrage précis, mais qu'ils ont une bibliothèque à leur disposition et que nous leur proposons souvent nos propres manuels, lorsqu'ils viennent nous consulter pour avoir des références.

Chapitre 7

Conclusions et perspectives

Il est temps maintenant de proposer une fin, même provisoire, à cette étude. Ce dernier chapitre a donc pour objectifs d'en rassembler les questions, les démarches et les résultats, mais aussi d'identifier aussi bien les limites que les potentialités du travail effectué, de manière à discerner dans quelles conditions il est possible d'envisager des perspectives.
Nous allons dans un premier temps en retracer le déroulement (7.1), puis nous reviendrons sur les choix effectués quant au thème mathématique et à la méthodologie d'investigation, (7.2) avant de resituer ce travail dans une perspective plus systémique de recherche amenant à soulever d'autres questions connexes (7.3).

7.1 Résumé

7.1.1 De la formation initiale à la problématicité

Nous sommes partie d'un constat sur les pratiques des élèves-professeurs, à savoir le recours spontané à l'ostension déguisée en associant la tangente dont le statut mathématique est ambigu avec des résultats d'un niveau théorique élevé sur la notion de dérivée et le critère de croissance, et avons voulu en éclaircir les motivations.
Un premier degré d'explication des pratiques de professeurs débutants peut généralement être attribué au fait qu'ils sont dans la phase d'apprentissage d'un métier avec, dans ce cas, la difficulté spécifique de devenir professeur après avoir été élève puis étudiant, un peu comme il est vraisemblablement difficile de devenir parent après avoir été enfant. Nous avons montré dans le Chapitre 2 comment certaines études (Lenfant, 2002 ; Ben Breigeat, 2001)

proposent alors des typologies de comportement selon la manière dont les élèves-professeurs manifestent leur adaptation à ce changement.

Il nous semblait pourtant que les pratiques observées allaient au-delà d'une possible « maladresse du débutant » et pouvaient aussi révéler la difficulté plus interindividuelle à travailler au niveau des raisons d'être du savoir mathématique en jeu, qu'il s'agisse des objets à définir ou des techniques dont on voudrait valider l'utilisation. La difficulté serait alors de rester mathématiquement rigoureux sans pouvoir utiliser la théorie alors qu'elle constitue en général l'aboutissement de la recherche de rigueur.

La période de formation initiale est en effet souvent associée à une modification du rapport au savoir qui est réputée nécessaire mais sans toujours pouvoir en cerner les obstacles et mécanismes. A ce sujet, H. Freudenthal (1973) nous a rappelé que les mathématiques pouvaient en elles-mêmes devenir problématiques pour celui qui veut devenir professeur. Ce deuxième niveau d'explication des pratiques observées nous semble trouver ses origines aussi bien dans la nature du savoir mathématique, exprimée par exemple dans la dialectique outil-objet de R. Douady (1984), que dans l'apparente facilité de ses transpositions dont il est alors essentiel de se détacher pour parvenir à prendre le recul nécessaire à l'analyse souhaitée.

En nous appuyant sur les travaux montrant une absence de questionnement de ces transpositions lors de la préparation de leçons (Coppé, 2006) mais aussi une certaine difficulté à exploiter effectivement les caractéristiques de ces transpositions (Margolinas, 2005), nous avons alors cherché à comprendre aussi pourquoi les transpositions proposées ne sont pas questionnées. Il nous a donc paru nécessaire de proposer d'étudier comment les difficultés liées à ce changement de posture d'étudiant à professeur sont composées avec le caractère problématique des mathématiques elles-mêmes. Ce caractère problématique peut par exemple être mis au jour par les questions d'élèves (Legrand, 2002 ; Schneider, 1988) mais il se révèle aussi dans les questions posées par des étudiants en formation (Cirade, 2006).

7.1.2 De la problématicité à la méthodologie

Pourtant la problématicité des mathématiques est dans le même temps absente des discours des professionnels et recherchée dans l'élaboration de projets d'enseignement (Cirade, 2007). C'est en rapprochant cet apparent paradoxe de celui évoqué précédemment quant à la « rigueur » mathématique que nous avons été conduite à proposer de distinguer plusieurs niveaux dans la pratique des mathématiques, chacun abordant une facette de cette problématicité et mettant en oeuvre une forme de rationalité spécifique. Ces niveaux peuvent être décrits en termes de praxéologie de type 1 ou de type 2 (Schneider, 2007) et la rationalité correspondante s'exprimera par des discours caractéristiques. Nous avons alors appelé cadre de rationalité I un premier niveau de rationalité correspondant à un travail sur les objets mentaux ou préconstruits (ici les notions de vitesse et de tangente-objet mental) de manière à en proposer des modèles mathématiques (ici la dérivée et la tangente) et à la validation de techniques de calcul les utilisant pour résoudre des problèmes, ici de vitesse variable, d'optimisation et d'approximation. Correspondant aussi à une « praxéologie » des grandeurs », ce cadre I s'accompagne alors d'argumentations qui peuvent rester liées à la nature des objets, par exemple des arguments cinématiques, composant alors ce que nous avons appelé un discours de niveau 1. Puisqu'il permet de valider l'usage des techniques par rapport aux questions posées, ce discours pourrait constituer ce que Y. Chevallard (1991) appelle discours technologique et il remplit aussi une fonction de modélisation des objets de départ. De même, nous avons appelé cadre de rationalité II la théorie de l'analyse réelle dont les objets sont les nombres réels, les concepts de fonction et de limite de fonction et dont l'objectif est de mettre en place une organisation déductive utilisant ses propres systèmes de preuve. L'utilisation des concepts mathématiques et des propriétés de cette organisation constitue ce que nous avons appelé un discours de niveau 2.

Avant de rechercher les manifestations de ces formes de rationalité et de discours dans les pratiques des élèves-professeurs, il nous a paru nécessaire de procéder à une analyse *a priori* du thème mathématique et de ses difficultés épistémologiques propres, ainsi que de la manière dont ces difficultés sont, ou non, prises en compte dans les transpositions. Cette analyse nous a amenée à étudier les différentes facettes de l'association entre tangente et dérivée dans l'histoire, mais aussi dans les transpositions rencontrées en cherchant à y reconnaître les formes que peuvent prendre ces discours dans les tâches proposées et dans les énoncés les accompagnant.

Comme nous le disions plus haut, cette analyse *a priori* vise aussi à prendre plus de recul par rapport à ces transpositions dans la mesure où elle nous permet d'identifier, non seulement les formes, mais aussi les fonctionnalités de ces différents niveaux de discours par rapport aux obstacles propres au savoir en jeu. L'objectif est ici de dépasser la description des pratiques observées pour en proposer une interprétation à la lumière du savoir mathématique objet de l'enseignement, et non dans le cadre délimité d'une de ses transpositions.

A partir d'une lecture de l'histoire de l'analyse, nous avons alors montré le caractère particulièrement ambigu de la tangente qui est à la fois un objet mental, un objet géométrique recevant une définition dans le cas de la tangente au cercle puis un critère de construction pour la tangente à la parabole, et enfin un objet analytique défini par le biais de son coefficient directeur. En parallèle, nous avons pu repérer différentes étapes dans la construction de la notion de la dérivée qui est d'abord abordée sous un angle qui se veut numérique mais utilise des infinitésimaux, ce qui amènera alors à en développer une autre approche en exprimant la continuité implicitement requise au moyen de la continuité cinématique pour Newton ou géométrique pour Leibniz. Malgré son statut ambigu, la tangente apparaît de manière omniprésente dans les organisations mathématiques et didactiques concernant la dérivée jusqu'à recevoir la définition de « limite de sécantes ». Celle-ci permettra d'en faire une technique didactique ce qui, en contrepartie, prévient tout questionnement de l'objet lui-même, dont la présentation de la tangente comme « meilleure approximation ». La notion de vitesse instantanée dont Newton se sert pour « définir » la limite d'un rapport de deux grandeurs « tendant vers 0 en même temps » va subir un sort différent dans les organisations didactiques et devenir dans la théorie une illustration de la notion de dérivée, ce qui en prévient tout autant le questionnement.

Au long de cette lecture, nous avons ainsi pu identifier l'existence dans l'histoire des deux niveaux de rationalité décrits précédemment et des discours correspondants. Nous avons aussi pu souligner que le passage à la rationalité II nécessita une forme de rupture que nous avons évoquée avec le texte de Bolzano demandant des fondements plus rigoureux à l'analyse, en réaction à la démonstration « visuelle » du théorème des valeurs intermédiaires par Cauchy.

L'étude des transpositions montre alors que, malgré leurs contrastes, celles-ci présentent en général, excepté les ouvrages assumant un travail explicitement dans une rationalité de niveau I, une certaine constance dans l'évitement de questions dites « délicates » comme : qu'est-ce qu'une tangente ?; comment être sûr que la dérivée donne bien la vitesse instantanée ?; Que signifie limite de vitesse(s) moyenne(s) ?; Que veut dire « meilleure approximation » ?; etc.
La dérivée y étant majoritairement définie en recourant aux propriétés visuelles de la tangente, nous avons alors qualifié de discours 2bis le discours composé d'énoncés extraits de la rationalité II, accompagnés d'arguments relevant par exemple de constats visuels et donc de niveau de rationalité 0.
De plus, nous avons mis en évidence la naturalisation, dans les manuels belges, d'une présentation du critère de croissance au moyen de ce que nous avons appelé une « praxéologie à trous », typique du discours 2bis, consistant à valider ce résultat par l'énoncé de deux théorèmes qui peuvent être appuyés par une figure utilisant essentiellement la tangente. Le caractère numérique de ce résultat est alors éludé dans la mesure où cette illustration ne peut correspondre à la condition suffisante d'une dérivée positive en tout point. Soulignons que notre analyse nous a amenée à « mettre à mal » cette transposition, ainsi que la définition comme limite de sécantes, non pour le seul plaisir de la critiquer, mais afin d'insister sur la nécessité d'en connaître les limites.

C'est à partir de cette analyse *a priori* que nous avons alors mis en place une méthodologie visant à analyser conjointement les pratiques déclarées et les pratiques effectives ainsi que les discours associés, en cherchant à observer les réactions d'étudiants en formation initiale lorsqu'ils sont confrontés à des projets d'enseignement cherchant explicitement à « travailler la problématicité » des notions de dérivée, tangente et vitesse.

7.1.3 De la méthodologie aux résultats

Au travers des différentes observations analysées, un constat simple s'impose : les élèves-professeurs, exceptés quelques-uns reconnus comme de « bons mathématiciens » ou encore des « non-mathématiciens très curieux », ne parviennent pas à identifier la possibilité de travailler dans une rationalité autre que celle proposée par la théorie connue d'eux seuls. De plus, cette impossibilité associée à la volonté de proposer des situations « amenant » le savoir, ou de proposer des approches dites intuitives, les amène à adopter majoritairement un discours de type 2bis qui ne relève d'aucun niveau de rationalité. Il leur faudra alors, non pas construire, mais « faire découvrir » le savoir visé en insistant par exemple sur des analogies d'écriture (pour les définitions d'objets comme pour les techniques de calcul), apprentissage plus proche de la reconnaissance de formes que d'un raisonnement.

Pourtant, nous les avons vu travailler et nous pouvons affirmer que cela leur demande en plus un travail conséquent de préparation, mais qui est finalement mal ciblé. Les élèves-professeurs choisissent consciemment dans les manuels les activités et énoncés qui évitent le questionnement et auxquels ils attribuent une transparence certaine : je fais cette activité, puis la théorie et ça va fonctionner tout seul. Ils auraient donc une confiance en la théorie qui devrait « apparaître » naturellement. Dans le même temps, ils manifestent un rapport ambigu à cette même théorie : ils sont parfois conscients que la praxéologie à trous est un semblant de théorie mais ils ne veulent en fait aborder ni la théorie (« ce serait trop compliqué pour les élèves ») ni les questions dites « délicates », comme le disait une étudiante l'an dernier.

Une explication réside alors sans doute dans la vision de l'institution universitaire comme un monde théorique et de l'institution secondaire comme un monde technique, sans autre forme de rationalité possible. Le renforcement de ce clivage concourrait alors à favoriser un apprentissage de type procédural au secondaire dont une conséquence, en quelque sorte par retour de la manivelle, pourrait être l'absence de curiosité pour les aspects théoriques que l'université voudra ensuite développer dans son enseignement.

En complément à cet aspect institutionnel, une deuxième catégorie de résultats concerne la formation initiale elle-même. La confrontation des élèves-professeurs avec une ingénierie relevant du premier niveau de rationalité met en évidence que leurs connaissances constituent un filtre qui les empêche de percevoir le milieu effectif de l'élève, et donc de répondre aux questions que celui-ci pourrait leur poser. C'est, selon nous, le même phénomène qui les amène à « déformer » certains énoncés d'activités proposées dans les manuels. Il semble donc que le travail sur le milieu de l'élève-professeur soit un des enjeux de la formation initiale. On pourrait dire que les étudiants en formation initiale présentent un « petit topos », au sens où ils se donnent une faible marge de manoeuvre quant aux manuels, et un milieu compliqué. Des objectifs seraient alors « élargir le topos » et « simplifier le milieu », les deux objectifs passant par une confrontation avec les mathématiques à enseigner.

Il nous semble également important de rappeler que les stratégies observées se caractérisent souvent par un déni de la définition. Si c'est flagrant lorsqu'on essaie de les faire travailler du système vers le modèle comme dans l'ingénierie, le déni peut se manifester sous d'autres formes, par exemple lorsque les étudiants ne voient pas la nécessité de se donner des définitions ayant un caractère opératoire : citons une étudiante qui ne voyait pas qu'une définition explicite du parallélisme, autre que descriptive, est nécessaire ; une autre qui passait dans son discours de « perpendiculaire à toutes les droites » à « perpendiculaire à deux droites sécantes» sans voir qu'elle avait franchi une étape. D'autres formes de ce déni perdurent à l'université. Citons un professeur disant *« en deuxième licence, ils ne savent pas les définitions des objets du cours »*, le but n'étant pas de savoir réciter une définition mais de relier les constructions théoriques aux concepts qu'elles veulent étudier, ne serait-ce qu'en demandant « *ton argument correspond-il à ta définition ?* ».

Enfin, rappelons que les derniers étudiants interviewés voyaient un peu les réels de manière réductrice comme des nombres existant « quelque part » et qui possèderaient des propriétés intéressantes.

7.2 Sur les choix méthodologiques

Il nous paraît important de rappeler les choix spécifiques effectués pour notre étude de manière à discerner dans quelles conditions les résultats peuvent en être exploités.

7.2.1 Techniques d'investigation

Nous sommes en particulier consciente que nous avons été amenée à être alternativement observateur et acteur de l'étude. Le risque d'être « à la fois juge et partie » nous semble toutefois contrôlé de par le fait d'avoir travaillé en collaboration avec notre promoteur. De plus, notre démarche relève précisément d'une volonté de dépasser les constats habituellement entendus chez les formateurs et de rechercher d'autres formes d'intervention en formation. Conçues dans le cadre de la recherche, ces interventions, dont le questionnement ciblé à partir des travaux guidés, ne peuvent toutefois se faire que lorsque le chercheur a aussi une bonne connaissance des étudiants en tant que formateur. Enfin, il nous semble que c'est aussi cette possibilité qu'a le formateur d'adopter la posture du chercheur qui lui permet de conserver un regard critique sur son propre dispositif de formation. Toutefois, il reste possible d'imaginer une autre méthode d'investigation par un observateur complètement extérieur.

Le fait d'avoir travaillé sur les préparations écrites peut aussi constituer une limite à l'analyse dans la mesure où, d'une part, ce sont des observables à la limite de l'explicitable, pour reprendre les qualificatifs des pratiques enseignantes, et d'autre part, l'activité en elle-même n'est pas la plus propice à provoquer un questionnement sur la transposition puisqu'on demande des leçons « telles qu'en classe ». C'est pourquoi ces travaux « libres » ont été utilisés dans notre travail comme une source d'informations destinée à être croisée avec les autres types d'observations, et en recherchant à leur donner une portée plus réflexive.

Enfin, nous avons adopté un caractère exploratoire visant à mettre en évidence la récurrence des difficultés supposées à la fois au cours des années, dans les différents dispositifs et lors de différentes activités apportant des observations de nature différente, ce qui nous a amenée à exploiter plusieurs « petits » échantillons dont nous regroupons les analyses. Des études plus systématiques complémentaires pourraient être entreprises. Ce caractère de « mise en lumière » se retrouve aussi dans le fait d'avoir exploité des propos sélectionnés parmi les productions écrites et orales des étudiants, non en éliminant ceux qui auraient pu invalider notre hypothèse, mais en recherchant ceux qui en étaient le plus représentatifs. Une autre forme d'investigation pourrait ici aussi être recherchée, et cela peut constituer un objectif de recherche sur les méthodologies d'investigation elles-mêmes dans la mesure où la difficulté essentielle est ici de parvenir à mettre en évidence une absence de discours.

7.2.2 Thème et nature de l'ingénierie utilisée

Une deuxième catégorie de choix concerne le thème mathématique choisi et la spécificité de l'ingénierie avec laquelle nous avons fait travailler les élèves-professeurs.

Le thème faisait partie intégrante de notre question de départ avec à la fois ce curieux mélange de géométrie et d'analyse qui ne semblait pas très contrôlé et cette définition circulaire entre dérivée et tangente. De plus, l'existence de recherches antérieures sur les difficultés d'apprentissage connues nous donnait une motivation supplémentaire à l'étude des pratiques des enseignants sur le sujet. Enfin, le domaine de l'analyse présente de manière assez marquée le phénomène de renversement outil-objet qui nous permettrait d'étudier comment les futurs professeurs gèrent le passage de l'objet à l'outil. Si la question des niveaux de rationalité et des discours associés nous semble pouvoir être posée de manière plus générale, nos résultats restent donc associés au thème étudié et à l'analyse *a priori* ayant permis de caractériser les niveaux de discours correspondants.

Quant à l'utilisation de l'ingénierie cinématique, elle apparaît délibérément « en opposition » à d'autres transpositions, mais en termes de classification par type de démarche et non en termes de classement hiérarchique. C'est le fait qu'elle soit aussi différente des transpositions plus classiques, en étant d'emblée dans un premier niveau de rationalité, qui met en évidence que ce niveau n'est pas identifié par les élèves-professeurs, excepté par quelques-uns. Nous avons souligné que d'autres transpositions offraient également la possibilité de travailler dans ce premier niveau de rationalité, mais à condition que le professeur en ait l'intention, ce qui ne pourrait se faire que si il le reconnaît. Il paraît alors tout à fait envisageable de développer d'autres projets d'enseignement assumant le niveau I ou une association construite entre les niveaux I et II, l'objectif étant finalement de ne pas se faire d'illusion sur la portée du discours 2bis. Enfin, le fait d'avoir choisi une ingénierie cinématique et non géométrique visait aussi à favoriser l'accès à la fonction dérivée, comme nous l'avons expliqué au Chapitre 4.

7.3 Perspectives

7.3.1 Sur le plan mathématique

Nous avons déjà évoqué dans le Chapitre 1 et au début de ce chapitre la possibilité de généraliser les conclusions à d'autres thèmes mathématiques. Il nous semble que si la question de l'adéquation du niveau de discours peut effectivement se poser ailleurs, chaque thème présentera des particularités nécessitant la mise en place d'autres éléments d'analyse. Par exemple, en géométrie, on peut déjà être plus tôt dans une rationalité de type II c'est-à-dire dans une organisation déductive. Toutefois, le phénomène consistant à penser que la modélisation est transparente et va de soi peut subsister, comme le montrent certaines leçons sur les cas de similitude ou sur les angles.

Une autre question concernant les mathématiques réside, nous semble-t-il, dans la place du travail sur le numérique au secondaire, par exemple la construction de $\mathbb{R}$ et les approximations de réels, mais aussi sur le sort qui est fait à des théorèmes comme celui des accroissements finis ou à la présentation presque « visuelle » de la tangente comme « meilleure approximation ».

Enfin, à la récurrence des difficultés observées chez les élèves-professeurs sur ces notions de dérivée et tangente, nous devons ajouter la persistance en citant l'exemple d'une étudiante qui, un an après, a de nouveau parlé de « *la vraie définition de la tangente avec les sécantes* ». Il nous apparaît donc que ce sujet comporte des difficultés particulièrement résistantes et mérite encore beaucoup d'attention.

7.3.2 Sur la formation initiale

S'inscrivant dès le départ comme recherche sur la formation initiale, notre étude pourrait permettre d'envisager en des termes nouveaux à la fois le travail en formation initiale et la recherche en didactique sur la formation initiale.

Nous avons plusieurs fois évoqué le fait que la formation initiale pouvait aussi être vue comme une transition entre institutions, la transition « inverse » étant celle vécue par les étudiants passant du secondaire à l'université. De nombreuses études sur cette transition inverse confirment notamment que les mathématiques de l'université sont un monde différent des mathématiques du secondaire, mais sans parvenir à tirer parti de cette différence. Sur ce sujet, les travaux de M. Bosch et J. Gascon (2004) proposent de considérer que cette transition met surtout en évidence ce qu'ils appellent « *l'incomplétude* » des organisations étudiées au secondaire. Centrées sur le bloc savoir-faire et proposant parfois un bloc savoir, mais avec une faible incidence sur l'activité effective, le caractère ponctuel des organisations mathématiques étudiées au secondaire tendrait à leur conférer une certaine « *rigidité* » ce qui rend alors difficile un travail de « complétion » à l'université qui, selon ces auteurs, propose dès le début de travailler sur des organisations mathématiques régionales déjà concentrées sur la théorie. Nous poursuivrons leur démarche en supposant que les élèves-professeurs sortant de l'université n'ont alors pas établi de lien entre les organisations mathématiques rencontrées lors de leurs études secondaires et les organisations mathématiques étudiées dans leurs études universitaires. Ces deux types d'organisations restant donc complètement « déconnectées », il leur est d'autant plus difficile de proposer en tant que professeurs des organisations dont ils contrôlent tous les éléments.

Il semble donc que, la formation initiale se situant comme une transition entre deux institutions dont chacune « vit sa vie mathématique », il soit alors inévitable que tout travail effectué en formation initiale n'ait qu'un faible impact sur les pratiques effectives dans le secondaire, renforçant ainsi le cloisonnement déjà implicitement admis. Dans une autre perspective, plus systémique, la question de la formation initiale pourrait s'inscrire dans la dynamique d'un système recherchant l'interaction entre les différents types de praxéologies intervenant au fil du cursus, ces interactions pouvant procéder par continuités ou par ruptures. Nous avons par exemple évoqué la rupture nécessaire historiquement au passage de la rationalité I à la rationalité II. Nous avons aussi précisé les difficultés que rencontrera inévitablement l'enseignement universitaire qui cherche à installer une rationalité II sur base d'un enseignement secondaire principalement soutenu par un discours de type 2bis. L'entrée dans la rationalité II recherchée pourrait donc être soutenu par l'aménagement de la confrontation des étudiants avec des situations fondamentales propres à cette autre forme de rationalité, ce qui passe par un travail spécifique de (dé)construction des savoirs en jeu. (Job & Schneider, 2007)).

Concernant le travail en formation initiale, nous avons montré qu'il pouvait porter sur un questionnement des mathématiques à enseigner de manière à favoriser l'identification éventuelle de différents niveaux de rationalité et à développer le discernement nécessaire.

Rappelons qu'un certain nombre des études citées insistait sur la question des manuels en se demandant si la formation initiale devait travailler avec ou contre les manuels. Il est un fait que les manuels sont supposés porter « le modèle de rationalité du secondaire» ce qui pourrait constituer un argument pour ne pas les questionner. C'est pourquoi les objectifs énoncés précédemment, à savoir élargir le topos et simplifier le milieu, pourraient inclure un travail sur les manuels semblable à celui que nous avons proposé sur un projet d'enseignement ce qui, de plus, peut avoir des répercussions sur la conception de projets d'enseignement et sur leur discussion lors de formations continuées. Dans ce cadre, il reste par exemple des obstacles concernant le rejet des textes proposant un discours effectivement développé par opposition à la recherche d'énoncés strictement symboliques.

Rappelons toutefois que l'articulation entre le travail en formation initiale et les pratiques effectives ultérieures nous est aussi apparu comme un enjeu majeur au niveau de la formation comme au niveau de la recherche sur la formation et sur les pratiques enseignantes. A ce sujet, nous avons précédemment soulevé des questions à destination de la recherche sur la formation initiale concernant les méthodologies d'investigation et la place du questionnement du savoir dans les dispositifs de formation.

C'est en examinant une question de formation initiale que nous avons ainsi pu mettre en évidence l'existence sur le thème des dérivées de plusieurs niveaux de rationalité, entre lesquels les possibilités de changements idoines ne sont toutefois pas reconnues, suscitant alors un doute quant à la rationalité effectivement développée. Dans le même temps, nous avons en effet tenté d'expliciter les mécanismes dirigeant d'autres formes de changement de rationalité, jusque-là institutionnellement implicites au risque de devenir implicitement institutionnalisés.

Bibliographie

Abric, J.-C. (1987). *Coopération, compétition et représentations sociales*. Delval.

Aebli, (1966). Didactique psychologique. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

Apéry, R. (1982). Mathématique constructive. In *Penser les mathématiques*. Paris : Seuil.

Aristote. (1964). *Métaphysique.* Paris : Vrin.

Arsac, G. (1996). Un cadre d'étude du raisonnement mathématique. In Grenier, D. (ed). *Séminaire didactique et technologies cognitives en mathématiques.* Grenoble : IMAG.

Arsac, G. (1997). Contribution à la Table ronde « Formalisme et rigueur », XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques.

Artigue, M. (1991). Introduction au débat sur les enseignements de didactique en iufm. *In Formation à l'enseignement des mathématiques ; exemples de pratiques effectives et éléments de réflexion d'un point de vue didactique*. Irem Paris 7.

Artigue, M. (2005). *Le défi de la transition secondaire-supérieur : que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine ?* Conférence au LADIMATH (FUNDP), 05 juillet 2005.

Baire, R. (1904). *Leçons sur les fonctions discontinues*. Paris : Eds J. Gabay.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies Vol.18*, n°2, pp.147-176.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège*. Thèse d'Etat. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Beauzamy, B. (2001). Mathématiques : rigueur ou efficacité ? *Bulletin de l'Union des professeurs de Spéciales.*

Beckers, J. (1998) *Comprendre l'enseignement secondaire. Evolution, organisation, analyse*. De Boek.

Ben Salah Breigeat, C. (2001). *Les connaissances mathématiques des nouveaux enseignants de mathématiques au collège à l'épreuve du feu : une étude de cas*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques. Université Paris 7.

Berkeley, G. (1734). *L'Analyste*.

Berlinski, D. (2001). *La vie rêvée des maths.* Saint-Simon.

Berthelot, Y. & Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans l'enseignement obligatoire*. Thèse de l'Université Bordeaux I, Talence.

Bkouche, R. (2002). Introduction. In *Des grandeurs aux espaces vectoriels*. CREM asbl.

Bloch, I. (2005). *Peut-on analyser la pertinence des réactions mathématiques des professeurs dans leur classe ? Comment travailler cette pertinence, en formation, dans des situations à dimension adidactique ?* Présentation au séminaire de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Borceux, F. (1985). *Initiation à la géométrie*.

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques, Vol 19, n°1*, pp. 77-123.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascon, J. (2004). Effets de l'incomplétude des organisations mathématiques dans les transitions collège-lycée-université. *Recherches en didactique des mathématiques,* La Pensée Sauvage :Grenoble.

Bouvier, A. (1981). *La mystification mathématique*. Hermann.

Boyer, C. (1949). *The history of calculus and its conceptual development*. N.Y. : Dover Publ.

Briand, J. (1998) Conditions d'utilisation et utilisation effective des savoirs didactiques dans la formation des enseignants en mathématiques. *Bulletin de la Société Suisse de Recherche en Didactique des Mathématiques.*

Brousseau, G. (1995). Cours 1 : l'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (éds), *Actes de la VIIIème Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Clermond-Ferrand : IREM.

Brousseau, G. (1995). Cours 2 : les stratégies de l'enseignant et les phénomènes typiques de l'activité didactique. In R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (éds), *Actes de la VIIIème Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Clermond-Ferrand : IREM.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Buekenhout, F. (1992). La spirale des dérivées. In Hauchart, C. & Rouche, N. (Eds). *L'enseignement de l'analyse aux débutants*. Erasme.

Bunge, M. (1983). *Epistémologie*. Paris : Maloine.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 15, n°1, pp. 7-47.

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'Analyse.*

Cavaillès, J. (1981). *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*. Hermann.

Changeux, J.-P. & Connes, A. (1989). *Matière à pensée*. Paris : Odile Jacob.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, n° 19, pp.43-72.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 12, n°1, pp. 73-111.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 17, n°3, pp.17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19/2*, p. 221-266.

Chevallard, Y. (2002) *Recherches en didactique et pratiques de formation d'enseignants*. Conférence donnée au LADIMATH, Namur 05 février 2002.

Chevallard, Y. (2003). Didactique et formation des enseignants. Journées d'études INRP-GEDIAPS.

Chevallard, Y. (2004). *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire*. 3ème université d'été Animath, Saint-Flour, 22-27 août.

Chilov (1973). *Analyse mathématique – Fonction d'une variable.* Ed. Moscou.

Choquet, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie*. Paris : Hermann.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Thèse de doctorat.

Cirade, G. (2007). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Présentation au séminaire ARDM.

Clot, Y. (1999). *La fonction psychologique du travail*. PUF.

Comiti, C., Grenier, D., & Margolinas, C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation des phénomènes didactiques. *Différents types de savoirs et leur articulation.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coppé, S. (2006). *Les connaissances antérieures des professeurs de mathématiques à travers la préparation de séances de classe. Cas de stagiaires en fin de formation initiale*. Présentation au Séminaire National de Didactique des Mathématiques.

Cornu , B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*. Grenoble : Université Joseph Fourier.

CREM (1995). *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à dix-huit ans*. CREM, asbl.

Crahay, M. (1999). *Psychologie de l'éducation*. Paris : PUF.

D'Alembert, J. (1759). *Sur les principes métaphysiques du calcul infinitésimal*.

Dahan-Dalmedico, A. & Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales.* Paris : Ed du Seuil.

Delhez, R. (1994). Bien faire pour laisser dire : quelques repères pour qui s'exerce à mener un entretien de recherche ou d'enquête. *Les cahiers internationaux de psychologie sociale, n° 21*.

Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode.*

Dewey, J. (1938). *Logique : la théorie de l'enquête*. Paris : PUF.

Dieudonné, J. (1984). Préhistoire de la topologie algébrique. *Sans tambour ni trompette, 27*, pp. 9-14. Irem Lyon.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. Thèse d'Etat. Paris : Université Paris 7.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères Irem*, n°6.

Douady, R. (1995). *Didactique des mathématiques*. Article de l'Encyclopaedia Universalis.

Fourez, G. (1997). Qu'entendre par îlot de rationalité ? et par îlot interdisciplinaire de rationalité *? Enseignants et élèves face aux obstacles*, n°25, pp. 217-225. Paris : INRP.

Fregona, (1995). *Les figures planes comme milieu dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques*. Thèse de l'Université Bordeaux I, Bordeaux.

Freudenthal, H. (1963). Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques ? *L'enseignement mathématique, revue de la Commission internationale de l'enseignement mathématique*. IIè série, Tome IX. Genève : imprimerie Kundig.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Kluwer.

Friedelmeyer, J.-P. (2001). Des grandeurs au collège à l'analyse au lycée. *Les revues pédagogiques de la Mission Laïque Française*, n° 43.

Gasquet, S. (1997). *L'illusion des maths à l'école*. Syros.

Gaud, Guichard, Sicre, Chrétien (1998). *Des tangentes aux infiniment petits.* Irem de Poitiers.

Gilbert, T. & Rouche, N. (2001). *La notion d'infini. L'infini mathématique entre mystère et raison. Intuitions, paradoxes, rigueur*. Paris : Ellipses.

Guitard, R. (1999). *La pulsation mathématique*. Paris : L'Harmattan.

Hilbert, D. (1899). *Les fondements de la géométrie*. Trad. française Rossier (1971). Paris : Dunod.

Hilbert, (1952). *La géométrie et l'imagination*. Trad.anglaise P. Nemeyi. New York : Chelsea.

Hilton, P. J. (1987). *Real Maths.* Open Court, LaSalle, Illinois.

Houzel,C., Ovaert,J.-L., Raymond, P. & Sansuc, J.-J. (1976). *Philosophie et calcul de l'infini*. Paris : François Maspero.

ICMI (2004). Discussion Document: The Fifteenth ICMI Study: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The International Commission on Mathematical Instruction. *Educational studies in mathematics, vol 56*, n° 2-3, pp 359-372.

Irem-Collectif (1987). *Mathématiques au fil des âges.* Groupe épistémologie et histoire des sciences. Paris : Gauthier-Villars.

Irem-Collectif (1999). *Aux origines du calcul infinitésimal.* Cercle d'histoire des sciences – Irem de Basse Normandie. Paris : Ellipses.

Jaulin-Mannoni, J. (1975). *Le pourquoi en mathématiques*. ESF.

Job, P & Schneider, M. (2007). *Une situation fondamentale pour le concept de limite ? Question de langage ? Question de culture ? Comment la TAD permet-elle de problématiser cette question ?* Actes du 2ème Colloque sur la Théorie Anthropologique du Didactique. Novembre 2007, Uzès.

Kant , E. (1781). Cr*itique de la raison pure*.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. N.Y : Oxford University Press.

Krysinska, M. & Hauchart, C. (1993). Réflexions épistémologiques à propos du concept de tangente à une courbe. *Actes de la première université d'européenne - Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*. Montpellier, 19-23 juillet 1993. Irem de Montpellier.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations*. Hermann.

Lambert, D. (1996) *Recherches sur la structure et l'efficacité des interactions récentes entre mathématiques et physique.* Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain.

Lebesgue, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. Réed . A. Blanchard.

Legrand, M. (1988). Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 9*, n° 3, pp. 365-406.

Legrand, M. (1989). Rationalité quotidienne et rationalité scientifique face au problème de la preuve en mathématiques. *Actes de la Vème Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Rennes : IRMAR, pp. 31-35.

Legrand, M. (2002). *Nécessité du débat scientifique dans l'enseignement.* Conférence donnée au LADIMATH, Namur 14 mai 2002.

Legrand, M. (2003). *Paradoxes et tensions entre « choix de pertinence en didactique » et « vigilance épistémologique ».* Conférence séminaire DidaTech.

Lerouge, A. (2000). La notion de cadre de rationalité à propos de la droite au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20, n°2, pp. 171-208.

Lombardi, H. (1999). A propos du théorème des accroissements finis. *Repères Irem,* n° 34, pp.55-67.

Mankiewicz, R. (2001). *L'histoire des mathématiques.* Paris : Seuil.

Margolinas, C. & Perrin-Glorian, M.-J. (1997). Des recherches visant à modéliser le rôle de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 17, n°3, pp.7-16.

Margolinas, C. (2005a). La situation du professeur et les connaissances en jeu au cours de l'activité mathématique en classe. In Simmt, E. and Davis, B. (Eds), *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematic Education Study Group*. CMESG/CGEDM : Edmonton, AB, pp. 3-21.

Margolinas, C. (2005b). *La préparation de séance : un élément de travail du professeur*. Conférence Commission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques.

Matheron, Y. (2000a). *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. Quelques exemples*. Thèse de doctorat. Université Aix-Marseille I.

Matheron, Y. (2000b). Analyser les praxéologies. Quelques exemples d'organisations mathématiques. *Petit x.* n° 54. pp. 51-78.

Matheron, Y. & Noirfalise, R. (2005). Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques : quelques exemples d'outils apportés par la théorie anthropologique du didactique. Document de la CII didactique.

Matheron, Y. & Salin, M.-H. (2002). Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante. *Revue Française de Pédagogie*, n° 141, pp.57-66.

Mercier, A. & Sensévy, G (2007).

Montucla, J.-E. (1758). *Histoire des mathématiques – Tome II*.

Morin, E. (1986). *La connaissance de la connaissance*. Paris : Seuil.

Nimier, J. (1976). *Mathématiques et affectivité*. Stock.

Noël, G. (1992). Pourquoi l'analyse n'est pas rationnelle. In Hauchart, C. & Rouche, N. (Eds). *L'enseignement de l'analyse aux débutants*. Erasme.

Noirfalise, R., Chazal, J. & Voldoire, C. (1996). Rigueur mathématique au lycée ? *Bulletin de l'Irem de Clermont-Ferrand*, n° 53.

Not, (1988). *Les pédagogies de la connaissance*. Paris : Privat.

Perrin, D. (1997).Contribution à la Table ronde « Formalisme et rigueur », XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques.

Perrin, M.-J. (1999). La tangente est-elle vraiment la droite qui approxime le mieux la courbe au voisinage d'un point ? *Repères-Irem,* n° 34.

Poincaré, H. (1900). *C.R. 2ème Congrès Int. des math. Paris*, 1900, pp.123-124.

Pressiat, A. (2002) la Théorie Anthropologique du Didactique. Notes de cours du DEA.

Ratsimba-Rajohn, H. (1977). *Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques*. Mémoire de DEA. Irem Bordeaux.

Rescher, N. (1987). *Scientific realism. A critical reappraisal*. Dordrecht : Reidel.

Rey, B. (1996) *Les compétences transversales en question*. Paris : ESF.

Robert, A. & Robinet, J. (1989). *Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement*. Cahiers de Didirem – Université Paris VII.

Robert, A. (1991). *Formation à l'enseignement des mathématiques : exemples de pratiques effectives et éléments de réflexion d'un point de vue didactique*. Irem – Université Paris 7.

Robert, A. (1995). *Professeurs de mathématiques de collège et lycée : formation professionnelle initiale ou comment désaltérer qui n'a pas soif ?* Irem - Université Paris 7.

Robert, A. (2004). *Enseigner les mathématiques, oui mais comment ? Analyse de pratiques professionnelles de professeurs enseignant les mathématiques.* Irem de Paris 7.

Rogalski, M. (1997) Contribution à la Table ronde « Formalisme et rigueur », XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques.

Rouche, N. (1995). *L'enseignement des mathématiques d'hier à demain*. CREM asbl.

Saelens, I. (1995). *Proposition de repères historiques et épistémologiques pour une approche heuristique de l'analyse dans l'enseignement secondaire*. Mémoire de licence. FUNDP-Namur.

Salin, M.-H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique. In G. Lemoyne et F. Conne (éds), *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal, p.327-352.

Salin, M.-H. (2002). Les pratiques ostensives dans l'enseignement des mathématiques comme objet d'analyse du travail du professeur. In O. Venturini, C. Amade-Escot & A. Terrisse (éds). *Etude des pratiques effectives : l'approche des didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, p.71-81.

Sensévy, G. & Mercier, A. (2007). *Agir ensemble*. Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Schmets, J. (). Cours d'analyse. Université de Liège.

Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*. Thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve.

Schneider, M. (1991). Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. *Repères-Irem*, n°5, pp. 65-82.

Schneider, M. (2001). Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limites au secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 21, n° 1.2, pp. 7-56.

Schneider, M. (2007). *Entre recherche et développement : quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire ?* Conférence INRP.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol.6, n° 1, pp. 5-67.

Strodiot, J.-J. (). Syllabus du cours d'analyse. FUNDP.

Tannery, P. (1912). *Mémoires scientifiques.* Paris : J. Gabay. Réed. 1996.

Treffers, (1986). *Three dimensions : a model of theory and goal description in mathematics instruction,, the Wiskolas project*. Dordrecht : Reidel.

Verdier, N. (2000). *Qu'est-ce que les mathématiques ?* Le Pommier-Fayard.

Vergnaud , G. (1985) *L'enfant, les mathématiques et la réalité*. Berne : Peter Lang.

Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10 (2/3)*, 113-170.

Volkert, K. (2006). Faut-il étudier la tératologie ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol 11, pp. 217-228. Irem de Strasbourg.

Vygotski, L. S. (1934). *Pensée et langage.* Paris : Messidor éditons sociales.

Winkin, J. (2004). Cours de topologie. FUNDP Namur.

Annexe

En annexe figure la brochure « dérivées » utilisée pour les trois expérimentations appelées « travaux guidés ».

Nous présentons ici la brochure complète, incluant les commentaires, et dans sa version la plus récente, c'est-à-dire sans inclure d'emblée des vitesses négatives.

Pour la première expérimentation, les étudiants ont reçu les figures et les intitulés des tâches.

Pour la deuxième expérimentation, les étudiants ont reçu les figures, les intitulés des tâches et les stratégies proposées par des élèves pour la tâche II.

Pour la troisième expérimentation, les étudiants ont reçu l'intégralité de la brochure, ainsi que d'autres documents extraits de manuels.