

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE. — LUCIEN GODEAUX, *Recherches sur les surfaces de genres un* (quatrième note). Note présentée par M. HEPITES, M. A. R., dans la séance du 28 janvier 1916.

1. — Considérons une surface algébrique F , de genres un ($p_a = P_4 = 1$) possédant trois transformations birationnelles T_1, T_2, T_3 formant un *groupe trirectangle* (*Vierergruppe* de KLEIN). On a donc :

$$\begin{aligned} T_1 T_2 &= T_3, & T_2 T_3 &= T_1, & T_3 T_1 &= T_2, \\ T_1^2 &= T_2^2 = T_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Dans des notes antérieures ⁽¹⁾, publiées sous le même titre, nous nous sommes occupés des cas où, parmi les involutions d'ordre deux I'_2, I''_2, I'''_2 , engendrées respectivement par T_1, T_2, T_3 , une au moins n'est pas rationnelle. Nous étudierons actuellement le cas où les trois involutions sont rationnelles.

2. — Désignons par D_1, D_2, D_3 les courbes de coïncidence respectives de I'_2, I''_2, I'''_2 et supposons, pour fixer les idées, qu'il existe au moins une partie de la courbe D_1 qui ne soit pas également invariante pour T_2 ou T_3 .

Nous pouvons prendre, pour modèle projectif de F , un plan double

$$z^2 = f(x, y),$$

$f(x, y) = 0$ étant l'équation de la courbe D_1 . La transformation T_1 aura alors les équations ($x' = x, y' = y, z' = z$).

A la transformation T_2 correspond une transformation

⁽¹⁾ Ce *Bulletin*, t. II, III et IV.

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y)$$

de D_1 en elle-même. Cette même transformation correspond également à T_3 . Il en résulte que les transformations T_2, T_3 sont données par les formules

$$(T_2) \quad x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y), \quad z' = z$$

$$(T_3) \quad x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y), \quad z' = -z.$$

Les points invariants pour T_2 , c'est-à-dire les points de D_2 , sont par suite les points invariants pour $x' = \varphi(x, y)$, $y' = \psi(x, y)$. La courbe D_3 sera donc une courbe commune aux courbes D_1, D_2 . En d'autres termes, tous les points invariants pour T_3 le seront pour T_1 et T_2 .

Nous eussions pu faire le même raisonnement en considérant l'involution I_2'' au lieu de I_2' . On aurait alors trouvé que l'une des courbes D_1 ou D_2 est partie de D_3 . On voit donc que D_3 est identique soit à D_1 , soit à D_2 . Cela est absurde, donc les trois involutions engendrées par T_1, T_2, T_3 ne peuvent être toutes rationnelles.

3. — Nous terminerons en dressant un tableau des surfaces de genres un admettant un groupe trirectangle de transformations birationnelles en elles-mêmes.

Surfaces de genres un admettant un groupe trirectangle de transformations birationnelles en elles-mêmes. Tableau des genres des involutions engendrées par les transformations du groupe.		
I	II	III
$pa = P_2 = 0$	$pa = P_2 = 0$	$pa - P_3 = 0, P_4 = 1$
$pa = P_2 = 0$	$pa = P_2 = 0$	$pa = P_4 = 1$
$pa = P_2 = 0$	$pa = P_3 = 0, P_2 = 1$	$pa = P_4 = 1$
$pa = P_3 = 0, P_2 = 1$	$pa = P_3 = 0, P_2 = 1$	$pa = P_4 = 1$
$pa = P_4 = 1$	$pa = P_4 = 1$	$pa = P_4 = 1$