Bulletin de la Classe des sciences

Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique complètement régulière

Lucien Godeaux

Résumé
On considère une variété algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis et sur cette variété un système linéaire d'hypersurfaces contenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution. L'un de ces systèmes est privé de points-base. On démontre que les autres ont la même dimension.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique complètement régulière

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — On considère une variété algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis et sur cette variété un système linéaire d'hypersurfaces contenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution. L'un de ces systèmes est privé de points-base. On démontre que les autres ont la même dimension.

Dans nos recherches sur les involutions cycliques dont la période est un nombre premier p et qui n'ont qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique, nous avons pris comme modèle projectif de celle-ci une surface F sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie cyclique de l'espace ambiant ([1]). Le système $|C|$ des sections hyperplanes de F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution. L'un, $|C_0|$, est privé de points-base, les autres $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{p-1}|$ ont pour points-base les points unis de l'involution. Nous nous sommes surtout attaché à déterminer la structure des points unis de l'involution et celle des points de diramation de la surface image de l'involution. Dans les nombreux cas particuliers que nous avons examiné en vue des applications de notre théorie, les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{p-1}|$ avaient la même dimension. Nous nous sommes naturellement proposé de voir si cette propriété était générale.

([1]) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Edizioni Cremonese, 1963).

Nous commençons par considérer le cas d'une courbe algébrique contenant une involution cyclique privée de points unis, où le résultat est aisé à obtenir. Passant ensuite au cas d'une surface, nous avons sur une courbe C_0 une involution privée de points unis. Pour pouvoir appliquer le théorème sur les courbes, il faut que la série caractéristique du système $|C|$ sur la courbe C_0 envisagée soit complète. Or, si la surface F a l'irrégularité q, la série caractéristique en question peut avoir le défaut q d'après un théorème classique de Castelnovo. Nous avons donc dû nous limiter aux surfaces régulières, privées d'intégrales de Picard de première espèce.

Le passage aux variétés algébriques ayant un nombre quelconque de dimensions exige également que les variétés considérées soient complètement régulières, c'est-à-dire privées d'intégrales de première espèce analogues aux intégrales de Picard. On peut consulter sur ce point le tome III de la *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica* (Rome, Cremonese) de Severi et surtout l'appendice à ce volume dû à M. Marchionna.

1. Soient C une courbe algébrique contenant une involution cyclique I dépourvue de points unis, d'ordre premier p, et Γ une courbe image de l'involution. Désignons par $\pi > 0$ le genre de la courbe Γ. Le genre de la courbe C est $p(\pi - 1) + 1$.

Le système canonique $|K|$ de C est transformé en lui-même par la transformation birationnelle T de C en soi génératrice de l'involution I. Dans la série $|K|$ il existe un certain nombre h de séries linéaires partielles $|K_0|$, $|K_1|$, ..., $|K_h|$ appartenant à l'involution I. L'une de ces séries, par exemple la première $|K_0|$ est la transformée de la série canonique $|K'_0|$ de la courbe Γ. Soient $|K'_1|$, $|K'_2|$, ..., $|K'_h|$ les séries qui correspondent sur Γ aux autres séries. Ce sont des séries paracanoniques, de dimension $\pi - 2$, de cette courbe. D'après la théorie des homographies, on doit avoir

$$\pi - 1 + (h - 1)(\pi - 2) + h = p(\pi - 1) + 1,$$

d'où $h = p$.

Etant donné une courbe algébrique C contenant une involution cyclique I d'ordre premier p, dépourvue de points unis, la série canonique de la courbe C contient p *séries linéaires partielles appartenant à l'involution I. A ces séries correspondent sur la courbe Γ image de l'involution, la série canonique et p — 1 séries paracanoniques.*

2. Considérons maintenant sur la courbe Γ une série linéaire $|G'_0|$ d'ordre n et d'indice de spécialité i_0. La série $|G'_0|$ a donc la dimension $n - \pi + i$.A $|G'_0|$ correspond sur C une série $|G_0|$ d'ordre pn appartenant à une série complète $|G|$. A un groupe canonique de C contenant le groupe G_0 homologue. Mais l'indice de spécialité i de $|G|$ peut être supérieur à i_0 car il peut exister un groupe canonique de Γ contenant un groupe de la série $|G'_0|$ correspond un groupe canonique de C contenant un groupe G_0 auquel correspond sur Γ un groupe paracanonique de cette courbe. Les conditions pour qu'une des séries partielles $|K_1|$, $|K|_2$, ..., $|K_{p-1}|$ contienne un groupe de $|G_0|$ sont évidemment les mêmes et nous désignerons par i_1 le nombre de groupes de la série $|K_j|$ linéairement indépendants contenant un groupe G_0 de sorte que l'indice de spécialité de G sera

$$i = i_0 + (p - 1)i_1.$$

Sur la courbe C, la série $|G|$ a l'ordre pn et la dimension $pn - p(\pi - 1) - 1 + i$. Elle contient outre $|G_0|$, $p - 1$ séries linéaires partielles $|G_1|$, $|G_2|$, —, $|G_{p-1}|$ appartenant à l'involution I, auxquelles correspondent sur Γ, $p - 1$ séries linéaires complètes

$$|G'_1| = |K'_1 - K'_0 + G'_0|, |G'_2| = |K'_2 - K'_0 + G'_0|, \ldots,$$
$$|G'_{p-1}| = |K'_{p-1} - K'_0 + G'_0|.$$

Les séries $|G'_1|$, $|G'_2|$, ..., $|G'_{p-1}|$ peuvent être spéciales, un groupe canonique de Γ contenant un groupe de $|G'_1|$ par exemple ne pouvant contenir un groupe de $|G'_0|$. Les groupes de la série canonique de Γ ne contenant pas un groupe de $|G'_0|$ forment une série de dimension $\pi - i_0 - 1$ et les conditions pour qu'un groupe de cette série contienne un groupe G'_1 ou G'_2, ..., ou G'_{1-p} sont évidemment les mêmes. Nous désignerons par i'_i l'indice de spécialité des séries $|G'_1|$, $|G'_2|$, ..., $|G'_{p-1}|$.

Par la théorie des homographies on a, sur la courbe C,

$$\pi + i_0 + (p - 1)(\pi + i'_1) = p(\pi - 1) + i,$$

d'où

$$i_0 + (p - 1)i'_1 = i.$$

On a donc $i_1 = i'_i$ et les séries partielles $|K_j - G_0|$ et $|K'_0 - G'_j|$ ont par suite la même dimension.

Observons que l'involution I étant dépourvue de points unis, on a

$$pK'_0 \equiv pK'_1 \equiv \cdots \equiv pK'_{p-1},$$

$$pG'_0 \equiv pG'_1 \equiv \cdots \equiv pG'_{p-1}$$

d'où, par exemple,

$$p(K'_1 - G'_0) \equiv p(K'_0 - G'_1).$$

Etant donné une courbe algébrique C contenant une involution cyclique privée de points unis et d'ordre premier p, *une série linéaire* |G| *de C contient* p *séries linéaires partielles appartenant à l'involution et* p − 1 *de ces séries ont la même dimension.*

3. Considérons une surface algébrique régulière F contenant une involution cyclique I d'ordre premier p n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Soit Φ une surface image de cette involution.

Nous avons démontré que l'on peut prendre comme modèle projectif de la surface F une surface appartenant à un espace S_r à r dimensions sur laquelle l'involution I est déterminée par une homographie H de période p possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont le premier seul rencontre la surface (aux points unis de l'involution).

Le système |C| des sections hyperplancs de la surface F contient donc p systémes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à l'involution, le premier étant dépourvu de points-base et les autres ayant pour points-base les points unis de l'involution. Soient r_0, r_1, ..., r_{p-1} les dimensions respectives de ces systèmes.

Désignons par Γ_0 les courbes qui correspondent sur la surface Φ aux courbes C_0. Soient n le degré du système $|\Gamma_0|$ et π son genre. La surface F a l'ordre pn et ses sections hyperplanes C ont le genre $p(\pi - 1) + 1$.

Sur une courbe $\overline{C}_0$ du système $|C_0|$ ne passant par aucun des points unis de l'involution, l'involution I détermine une involution cyclique d'ordre p et les systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ des séries linéaires partielles

$$|(\overline{C}_0, C_0,)|, |(\overline{C}_0, C_1)|, \ldots, |(\overline{C}_0, C_{p-1})|$$

appartenant à l'involution et à la série linéaire complète, puisque la surface F est régulière, $|(\overline{C}_0, C)|$. On peut appliquer le théorème précédant. La série $|(\overline{C}_0, C_0)|$ a la dimension $r_0 - 1$ et les autres la même dimension r_1. On a donc

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_{p-1}.$$

On peut observer que si la surface Φ possède un système canonique, il en est de même de la surface F et la série $|(\overline{C}_0, C)|$ est spéciale.

Etant donné une surface algébrique F régulière contenant une involution cyclique de période p *premier et n'ayant qu'un nombre fini de points unis, on peut construire sur la surface un système linéaire contenant* p *systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution dont l'un est dépourvu de points-base et les autres ont pour points-base les points unis de l'involution et la même dimension.*

4. Nous avons démontré que la surface F étant régulière et l'involution I privée de points unis, le système canonique de la surface contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution, l'un, transformé du système canonique de Φ a la dimension $p_a - 1$, les autres la dimension p_a, p_a étant le genre arithmétique de Φ (¹).

Supposons que $|C|$ soit le système canonique de F. On a alors $r_0 = p_a - 1$, $r_1 = p_a$. Nous allons montrer que le système bicanonique de F contient p systèmes linéaires partiels de même dimension appartenant à l'involution I.

Rappelons que le genre arithmétique p_a de F est égal à $p(p'_a + 1) - 1$. Par conséquent le bigenre de F est

$$P_2 = p(p' + 1) - 1 + p(\pi - 1) + 1 = pP'_2,$$

P'_2 étant le bigenre de la surface Φ.

Le système bicanonique $|2C|$ de F contient p systèmes linéaires partiels composés avec I que l'on peut représenter par

$$|2C_0|, |C_0 + C_1|, \ldots, |C_0 + C_{p-1}|.$$

Si nous désignons par $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_{p-1}|$ les systèmes linéaires complets qui correspondent sur Φ aux systèmes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$, aux systèmes compris dans $|2C|$ correspondent les systèmes $|2\Gamma_0|$, $|\Gamma_0 + \Gamma_1|, \ldots, |\Gamma_0 + \Gamma_{p-1}|$. Tous ces systèmes ont le même degré

(¹) *Loc. cit.*, pp. 127-130. *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique régulière* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1932, pp. 1015-1025).

et le même genre. Le premier a la dimension $P'_2 - 1$, les autres, d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension au moins égale à

$$p'_a + 4(\pi - 1) - 3(\pi - 1) - 1 + 1 = P'_2 - 1.$$

Comme $|2C|$ a la dimension $P_2 - 1$, on voit que l'égalité doit avoir lieu, puisque $P_2 = pP'_2$.

Etant donné une surface algébrique régulière F *possédant une involution cyclique d'ordre premier p, privée de points unis, on peut construire sur cette surface un système linéaire contenant* p *systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution et ayant la même dimension.*

5. Avant d'aller plus loin, examinons deux cas particuliers.

Supposons que la surface F possède une courbe canonique d'ordre zéro, c'est-à-dire que tout système soit son propre adjoint. Le degré de $|C|$ est égal à $2p(\pi - 1)$.

Aux séries composées avec l'involution et découpées sur la courbe $\overline{C}_0$ par les systèmes $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$ correspondent sur la courbe $\bar{\Gamma}_0$ la série canonique et des séries paracanoniques de dimension $\pi - 2$. On a donc

$$r_0 = \pi, r_2 = \pi - 2 = r_0 - 2.$$

On sait d'ailleurs que l'on a $p = 2,3,5$ ou 7. Nous avons étudié autrefois ces involutions [1].

Si la surface F ne possède pas de courbe canonique mais possède une courbe bicanonique d'ordre zéro, on a encore $n = 2(\pi - 1)$. La série $|(\overline{C}_0, C_0)|$ est une série paracanonique de $\overline{C}_0$ et les séries découpées sur cette courbe par les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ sont paracanoniques. On a donc

$$r_0 = \pi - 1, r_1 = \pi - 2, = r_0 - 1.$$

On sait que l'on a $p = 2$ ou 3. Nous avons étudié autrefois ces involutions [2].

(1) *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (Annales de l'École Normale Supérieure, 1914, pp. 289-312), *Sur l'ordre des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1935, pp. 345-353).

(2) *Sur les involutions appartenant à une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1913, pp. 178-194). *Mémoire sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un* (Idem, 1915, pp. 89-117).

6. Soit V une variété algébrique à trois dimensions complètement régulière, contenant une involution cyclique I d'ordre premier p n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous prendrons comme modèle projectif de la variété V une variété appartenant à un espace S_r à r dimensions sur laquelle l'involution I est déterminée par une homographie H de période p possédant p axes ponctuels σ_0, σ_1, ..., σ_{p-1} dont le premier seul rencontre la variété (aux points unis de l'involution).

Dans le système des sections hyperplanes $|F|$ de V il existe p systèmes linéaires partiels $|F_0|$, $|F_1|$, ..., $|F_{p-1}|$ appartenant à l'involution I. Le premier est dépourvu de points-base, les autres ont pour points-base les points unis de I. Soient r_0, r_1, ..., r_{p-1} les dimensions de ces systèmes.

Un hyperplan passant par σ_1, σ_2, ..., σ_{p-1} coupe V suivant une surface $\overline{F}_0$ de $|F_0|$ sur laquelle H détermine une involution cyclique d'ordre p, privée de points unis. Sur $\overline{F}_0$, nous avons p systèmes linéaires $|(\overline{F}_0, F_0)|$ de dimensions $r_0 - 1$, $|(\overline{F}_0, F_1)|$, ..., $|(\overline{F}_0, F_{p-1})|$ de dimensions r_1, ..., r_{p-1} et d'après le théorème établi pour les surfaces, ces dernières dimensions sont égales.

Etant donné une variété algébrique à trois dimensions complètement régulière contenant une involution cyclique d'ordre premier p *n'ayant qu'un nombre fini de points unis, on peut construire sur cette variété un système linéaire de surfaces contenant* p *systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, dont* p − 1 *ont la même dimension.*

7. Cet énoncé laisse prévoir que l'on a plus généralement le théorème suivant:

Etant donné une variété algébrique à m *dimensions, complètement régulière, possédant une involution cyclique d'ordre premier* p *n'ayant qu'un nombre fini de points unis, on peut construire sur cette variété un système linéaire d'hypersurfaces contenant* p *systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution dont* p − 1 *ont la même dimension.*

Supposons ce théorème vrai pour les variétés à $m - 1$ dimensions et reprenons les notations du n° précédent en remplaçant trois par m.

Une hypersurface $\overline{F}_0$ de $|F_0|$ contient une involution cyclique dépourvue de points unis et par hypothèse, les systèmes $|(\overline{F}_0, F_1)|$,

$|(\bar{F}_0, F_2)|, \ldots, |(\bar{F}_0, F_{p-1})|$ ont la même dimension. Il en est donc de même pour les systèmes $|F_1|, |F_2|, \ldots, |F_{p-1}|$.

Si le théorème est vrai pour les variétés à $m - 1$ dimensions, il est donc vrai pour les variétés à m dimensions. Or, il est vrai pour $m = 2, 3$, donc il est vrai quel que soit m.

Liège, le 16 juin 1969.