Sur le Calcul de l'Invariant de Zeuthen-Segre

Note de LUCIEN GODEAUX

Docteur en Sciences Physiques et Mathématiques

Au cours de recherches récentes (pour la plupart non encore publiées), j'ai eu à calculer l'invariant de Zeuthen-Segre d'une surface algébrique connaissant, sur cette surface, un faisceau de courbes dont quelques unes possèdent des singularités assez compliquées. Lorsqu'une courbe du faisceau connu possède un point singulier, il est très facile d'évaluer l'influence de ce point dans le calcul de l'invariant en suivant la méthode de M. Segre (1). Si au contraire il existe, dans le faisceau, une courbe dégénérée en un certain nombre de courbes multiples, on peut calculer l'influence de cette courbe en étendant un raisonnement de MM. Castelnuovo et Enriques (2). C'est ce dernier point que je me propose d'examiner ici. Le même calcul a été fait récemment par M. Jung (3) au moyen de méthodes arithmétiques qui me paraissent beaucoup plus compliquées et moins rapides. Dans ses calculs, M. Jung se borne d'ailleurs au cas d'un faisceau linéaire, je me placerai ici dans le cas plus général d'un faisceau quelconque.

(1) *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varieta superiori algebriche* (Atti di Torino, 1896, XXXI).

(2) *Sopra alcuni questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (Annali di Matematica, 1901 (3), VI). MM. Castelnuovo et Enriques montrent que la présence d'une courbe double équivaut à un nombre positif de courbes à point double.

(3) *Ueber die Zeuthen-Segresche Invariante* (Rend. Circ. Palermo, 1912, XXXIV).

1. — Soit F une surface algébrique sur laquelle on connaît un faisceau $|C|$, de genre $\rho > o$, de courbes C de genre π. Si ρ est supérieur à o, $\}C\{$ est certainement dépourvu de points-base; si $\rho = o$, on peut également, sans nuire à la généralité, supposer que $\}C\{$ ne possède pas de points-base, il suffit de se référer à une transformée bi-rationnelle convenable de F.

Supposons que le faisceau $\}C\{$ contienne une courbe C_0 décomposée en ν courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ comptées respectivement i_1 fois, i_2 fois, ..., i_ν fois et dont les genres sont respectivement $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$.

Proposons-nous de calculer l'invariant de Zeuthen-Segre I de F au moyen du faisceau $\}C\{$. Pour cela, considérons un faisceau linéaire $|C'|$, de genre π' et de degré n, et fixons l'attention sur la courbe T lieu des points de F où une courbe C et une courbe C' se touchent. Cette courbe T comprendra chaque partie de la courbe C_0 comptée plus d'une fois dans cette courbe, et une certaine courbe Γ. D'une manière plus précise, on aura

$$T \equiv (i_1 - 1)\, C_1 + (i_2 - 1)\, C_2 + \ldots. + (i_\nu - 1)\, C_\nu + \Gamma.$$

En effet, un point de rencontre de C_1, par exemple, avec une courbe C' doit être considéré comme un contact i_1 — ponctuel de cette C' avec C_0.

Soit m le nombre de points communs aux courbes C, C'. Les courbes C' découpent sur une courbe C générique une g^1_m. Il y a donc $2(m + \pi - 1)$ courbes C' touchant une courbe C et par conséquent, chaque C rencontre la courbe Γ en $N = 2(m + \pi - 1)$ points.

Les courbes C marquent, sur une courbe C', une γ'_m de genre ρ. Cette série possède $2(\pi' - 1) - 2m(\rho - 1)$ points doubles. Mais parmi ces points doubles, chaque point commun à la courbe C' considérée et à C_1 compte $i_1 - 1$ fois. De même, un point commun à la C' et à C_2, C_3, ..., C_ν compte respectivement $i_2 - 1$, $i_3 - 1$, ..., $i_\nu - 1$ fois. Désignons respectivement par $m_1, m_2, \ldots,$ m_ν les nombres de points communs aux C' et, respectivement, à C_1, C_2, ..., C_ν. On voit alors qu'une courbe C' rencontre Γ en

$$N' = 2(\pi' - 1) - 2m(\rho - 1) - m_1(i_1 - 1) - \dots - m_\nu(i_\nu - 1)$$

points.

2. — Les courbes C découpent, sur la courbe Γ, une série γ'_N d'ordre $N = 2(m + \pi - 1)$ et de genre ρ. Cette série possède donc

$$2(\Pi - 1) - 2N(\rho - 1)$$

points doubles, Π désignant le genre de Γ. Ce groupe de points se compose :

1° des N_1 points communs à Γ et à C_0,

2° des N_2 points où une courbe C et une courbe C' s'osculent,

3° des N_3 points où une courbe C possède un point double (C_0 exclue),

4° des $N_4 = n$ points base de $|C''|$.

Les points communs à Γ et à C_0 sont les points où une courbe C' touche une composante de C_0 et les points communs à deux composantes de C_0.

Les courbes C' découpent, sur la courbe C_k ($k = 1, 2, \dots, \nu$) une série linéaire d'ordre m_k. Cette série possède donc $2(m_k + \pi_k - 1)$ points doubles. Chacun de ces points est mutiple d'ordre i_k pour T; par conséquent, il est simple pour Γ.

Un point commun à la courbe C_k et à la courbe C_l est multiple d'ordre $i_k + i_l$ pour C_0. Il est donc multiple d'ordre $i_k + i_l - 1$ pour T et par conséquent multiple d'ordre $i_k + i_l - 1 - (i_k - 1) - (i_l - 1) = 1$ pour Γ.

La courbe C_0 rencontre donc la courbe Γ en

$$\sum_k 2\, i_k\, (m_k + \pi_k - 1) + \sum_{k,l} (i_k + i_l)\, n_{kl},$$

n_{kl} étant le nombre des points communs à C_k, C_l. Ces points comptent pour

$$N_1 = \sum_k 2\,(i_k - 1)\,(m_k + \pi_k - 1) + \sum_{k,\,l} (i_k + i_l - 1)\, n_{kl}$$
$$(k,\, l = 1, 2, \ldots, \nu,\ k \neq l)$$

points doubles.

Si nous désignons par δ le nombre des courbes C ayant un point double (C_0 exclue), on aura

$$2\,(\Pi - 1) - 2\,N\,(\rho - 1) = N_1 + N_2 + N_3 + N_4,$$

ou

$$[1] \quad \left\{ \begin{aligned} 2\,(\Pi - 1) - 4\,(m + \pi - 1)\,(\rho - 1) = \delta + N_2 \\ + 2 \sum (i_k - 1)\,(m_k + \pi_k - 1) \\ + \sum (i_k + i_l - 1)\, n_{kl} + n. \end{aligned} \right.$$

3. — Les courbes C′ découpent, sur Γ, une $g_{N'}$, d'ordre $N' = 2\,(\pi' - 1) - 2m\,(\rho - 1) - \sum m_k\,(i_k - 1)$, possédant donc

$$2\,(N' + \Pi - 1) = 4\,(\pi' - 1) - 4m\,(\rho - 1)$$
$$- 2 \sum m_k\,(i_k - 1) + 2\,(\Pi - 1 - \Pi\, 1)$$

points doubles.

Si δ' est le nombre des courbes C′ ayant un point double, on a

$$[2] \quad \left\{ \begin{aligned} 4\,(\pi' - 1) - 4m\,(\rho - 1) - 2 \sum m_k\,(i_k - 1) \\ + 2\,(\Pi - 1) = \delta' + N\,. \end{aligned} \right.$$

Les formules [1] et [2] donnent, par soustraction,

$$\delta + 4\,(\pi - 1)\,(\rho - 1) - 4 + 2 \sum (i_k - 1)\,(\pi_k - 1)$$
$$+ \sum (i_k + i_l - 1)\, n_{kl} = \delta' - n - 4\pi'.$$

Par définition, l'invariant I de Zeuthen-Segre est égal à

$$I = \delta' - n - 4\pi'$$

Donc, on a

$$I = \delta + 4\,(\pi - 1)\,(\rho - 1) - 4 + 2 \sum (i_k - 1)\,(\pi_k - 1)$$
$$+ \sum (i_k + i_l - 1)\, n_{kl}.$$

Si la courbe C_0 n'existait pas dans [C], on sait que l'on aurait (1)

$$I = \delta + 4(\pi - 1)(\rho - 1) - 4,$$

donc on peut dire que C_0 équivaut à

$$2 \sum (i_k - 1)(\pi_k - 1) + \sum (i_k + i_l - 1) n_{kl}$$

points doubles.

Si un faisceau contient une courbe formée de ν courbes comptées chacune respectivement $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ fois, cette courbe équivaut, dans le calcul de l'invariant de Zeuthen-Segre, à

$$2 \sum_k (i_k - 1)(\pi_k - 1) + \sum_{k,l} (i_k + i_l - 1) n_{kl}$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots, \nu, k \neq l)$$

points doubles, π_k étant le genre de la k-ième courbe, n_{kl} le nombre des points communs à la k-ième et à la l-ième courbe.

4. — Lorsque l'on a affaire à un faisceau de courbes elliptiques ($\pi = 1$), on a, nécessairement, $\pi_1 = \ldots = \pi_\nu = 1$. Pour que le genre de la courbe C_0 ne soit pas supérieur à 1, on doit de plus avoir $n_{kl} = 0$ et par suite, la présence d'une courbe telle que C_0 n'influe pas sur le calcul de l'invariant de Zeuthen-Segre. C'est ce que M. Enriques avait déjà remarqué (2).

Liége, 15 Juillet 1914.

(1) Castelnuovo-Enriques, loc. cit.

(2) *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$* (Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem. 1914).