Bulletin de la Classe des sciences

Sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination de la structure des points unis isolés d'une involution cyclique du troisième ordre appartenant à une variété algébrique et des points de diramation de la variété image de l'involution.

COMMUNICATIONS D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination de la structure des points unis isolés d'une involution cyclique du troisième ordre appartenant à une variété algébrique et des points de diramation de la variété image de l'involution.

Dans l'étude des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une variété algébrique, on peut prendre comme modèle projectif de celle-ci une variété V appartenant à un espace S_r à r dimensions sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie H de S_r possédant p axes ponctuels dont le premier seul rencontre la variété (aux points unis), p étant l'ordre de l'involution. Dans le cas où la variété V est une surface, nous avons étudié la structure des points unis et celle des points de diramation de la surface image de l'involution (1). Il s'agit de résoudre le même problème dans le cas où la variété a plus de deux dimensions.

Nous avons récemment étudié le cas où les points unis de l'involution sont tous de première espèce, c'est-à-dire dans le cas où l'homographie H détermine l'identité dans la gerbe des tangentes à V en un point uni (2). Nous abordons ici le problème dans le cas où les points unis ne sont plus de première espèce mais dans le cas où

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Éditions Cremonese, 1963).

(2) *Variétés algébriques contenant une involution cyclique n'ayant que des points unis de première espèce* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1968, pp. 1139-1146; 1969, pp. 108-116, 241-248).

l'involution est d'ordre trois. Dans la gerbe de droites dont le sommet est un point uni, H détermine soit une homologie, soit une homographie non homologique. C'est le cas le plus simple et dans le cas général, il serait nécessaire de trouver une notation commode pour désigner les points unis dans le domaine d'un point uni propre, comme nous l'avons fait dans le cas des surfaces.

1. Commençons par rappeler certaines définitions.

Considérons une variété algébrique V à n dimensions contenant une involution cyclique I d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis isolés. On peut prendre comme modèle projectif de V une variété V appartenant à un espace S_r à r dimensions, r étant aussi grand qu'on le veut, sur laquelle l'involution I est déterminée par une homographie H de S_r, possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$, les points unis de l'involution appartenant tous à l'espace σ_0, les espaces $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{p-1}$ ne rencontrant donc pas la variété.

On désignera par $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$ les gerbes d'hyperplans de S_r unis pour l'homographie H, les hyperplans de Σ_i passant par les axes de H sauf par σ_i. Les sections hyperplanes de V seront désignées par F et celles qui sont découpées par les hyperplans de Σ_i par F_i. Le système $|F|$ contient donc p systèmes linéaires $|F_0|, |F_1|, \ldots, |F_{p-1}|$ appartenant à l'involution I. Leurs dimensions seront désignées respectivement par $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$, r_0 pouvant être choisi aussi grand qu'on le veut.

Soit 0 un point uni de I appartenant donc à l'espace σ_0, et ω l'espace linéaire à n dimensions tangent à la variété V en 0 (qui est simple pour la variété). L'espace ω est transformé en soi par H et dans la gerbe G de droites de sommet O, H détermine une homographie h de période p, ayant au plus $p - 1$ axes (espaces linéaires passant par 0).

Le nombre de ces axes est au plus égal à $p - 1$ si $n \geqslant p$ et à n si $n < p$. Dans tous les cas, si k est le nombre de ces axes, nous dirons que le point 0 est uni d'espèce k. Un point uni de première espèce est un point tel que dans la gerbe G de sommet O, h est l'identité ($h = 1$). Un point uni de seconde espèce est un point tel que dans la gerbe G, h est une homologie.

Nous avons déjà considéré le cas où tous les points unis de l'involution I sont de première espèce.

On a nécessairement $r_0 > n$ et en rapportant projectivement les variétés F_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions, il correspond à la variété V une variété à n dimensions Ω image de l'involution I. Aux points unis de cette involution correspondent sur Ω des points de diramation isolés, multiples pour la variété, dont il s'agit de déterminer la structure.

Nous dirons qu'un point de diramation homologue d'un point uni d'espèce i, est d'espèce i.

2. Nous supposerons dans la suite que l'involution est du troisième ordre ($p = 3$). L'homographie H possède dans l'espace S_r trois axes ponctuels σ_0, σ_1, σ_2.

Soient 0 un point uni appartenant donc à l'espace σ_0 et ω l'espace linéaire à n dimensions tangent à V en 0. Cet espace est transformé en soi par l'homographie H et dans cet espace, l'homographie induite par H possède un point uni isolé 0 et au plus deux autres axes. Il en résulte que dans la gerbe de droites G de sommet, 0 il y a au plus deux axes pour l'homographie h.

Trois cas peuvent se présenter:

1° L'homographie h est l'identité et le point 0 est uni de première espèce. L'espace ω rencontre l'un des espaces σ_1, σ_2 suivant un espace à $n - 1$ dimensions.

2° L'homographie h est une homologie. L'espace ω rencontre l'un des espaces σ_1, σ_2 par exemple σ_1, suivant un point et l'espace σ_2 suivant un espace à $n - 2$ dimensions. Le point 0 est un point uni de seconde espèce.

3° L'homographie h possède deux axes unis η_1, η_2 de dimensions respectives $n_1 > 1$, $n_2 > 1$. Ces espaces rencontrent σ_1, σ_2 suivant des espaces ω_1, ω_2 à $n_1 - 1$, $n_2 - 1$ dimensions. Pour fixer les idées, nous supposerons que ω_1 appartient à σ_1 et que ω_2 appartient à σ_2. Nous supposerons en outre $n_1 \leqslant n_2$.

Les espaces ω_1, ω_2 appartiennent à un espace à $n - 1$ dimensions section hyperplane de ω et uni pour H. D'après la théorie des homographies, on a

$$n_1 - 1 + n_2 - 1 + 2 = n - 1 + 1,$$

c'est-à-dire

$$n_1 + n_2 = n.$$

D'autre part, la variété V ne peut rencontrer l'espace σ_0 qu'en un nombre fini de points et on a

$$r_0 + n = r.$$

De

$$r_0 + r_1 + r_2 + 3 = r + 1,$$

on tire

$$r_1 + r_2 = n - 2.$$

Or on a $r_1 \geqslant n_1 - 1, r_2 \geqslant n_2 - 1$, d'où l'on tire

$$r_1 = n_1 - 1,\ r_2 = n_2 - 1.$$

Remarquons que ce raisonnement est aussi applicable lorsque $n_1 = 1, n_2 = n - 1$.

Comme il a été dit plus haut, nous avons déjà étudié les points unis et les points de diramation de première espèce. En un point de diramation de première espèce, la variété Ω a un point multiple d'ordre 3^{n-1}, les sections hyperplanes du cône tangent étant des variétés de Veronese généralisées représentant les variétés cubiques d'un espace à $n - 1$ dimensions.

3. Rappelons tout d'abord les propriétés connues dans le cas où la variété V est une surface $V_2 (n = 2)$. En un point uni 0 de seconde espèce, les espaces η_1, η_2 sont des droites et les espaces ω_1, ω_2 sont des points. Les courbes F_0 passant par le point 0 y acquièrent un point double, les tangentes étant les droites η_1, η_2. Les points de ces droites infiniment voisins du point 0 sont unis de première espèce pour l'involution I.

L'homographie H détermine dans le faisceau de rayon de sommet 0 situé dans le plan tangent ω à V_2 une involution. Sur la droite joignant les points ω_1, ω_2 H détermine une involution dont la précédante est la projection à partir de 0. Les espaces de Σ_0 passant par un point de la droite $\omega_1\omega_2$ la contiennent tout entière et à cette droite correspond donc dans l'espace S' à r_0 dimensions contenant la variété Ω_2 un point $0'_1$.

Le point de diramation 0' homologue de 0 sur la surface Ω_2 est double biplanaire. Aux points unis de I infiniment voisins de 0 sur les droites η_1, η_2 correspondent respectivement les points infiniment voisins de 0' situés dans les plans ω'_1, ω'_2 tangents à Ω_2 en 0'.

Ces plans tangents ont en commun la droite $0'0'_1$ et au point de cette droite infiniment voisin de $0'$ correspondent les groupes de points de V_2 infiniment voisins de 0 formant des groupes de l'involution I.

4. Revenons au cas où n est quelconque supérieur à 2. Supposons que le point 0 soit uni de seconde espèce. Dans ce cas, l'espace η_1 est une droite et l'espace η_2 un espace à $n-1$ dimensions. L'espace ω_1 est un point que nous désignerons par 0_1 et l'espace ω_2 a $n-2$ dimensions.

Considérons $n-2$ hyperplans de Σ_0 linéairement indépendants. Ils déterminent sur V une surface V_2 et si nous supposons que ces hyperplans passent par 0, le plan tangent à V_2 en 0 passe par la droite 00_1 et coupe l'espace η_2 suivant une droite rencontrant ω_2 en un point 0_2.

D'après ce que nous venons de rappeler, les points infiniment voisins de 0 sur les droites 00_1, 00_2 sont unis de première espèce (pour deux dimensions) et aux ternes de points de l'involution I formés de points infiniment voisins de 0 correspond le point de l'espace S' contenant Ω_2 qui correspond à la droite 0_10_2.

Le point de diramation $0'$ homologue de 0 est double biplanaire pour la surface Ω_2 homologue de V_2.

En faisant varier la surface V_2 dans la variété V, on voit que le point infiniment voisin de 0 situé sur la droite 00_1, qui appartient aux plans tangents à toutes les surfaces V_2, est uni de première espèce pour l'involution I. Les points de l'espace η_2 infiniment voisins de 0 sont tous unis pour I.

Aux groupes de I formés de points infiniment voisins de 0 correspondent les points infiniment voisins de $0'$ situés sur l'espace ω' lieu des droites $0'0'_1$, qui est un espace à $n-1$ dimensions.

On voit donc que *le point $0'$ est double biplanaire pour la variété Ω, le cône tangent étant formé de deux espaces ω'_1, ω'_2 à n dimensions passant par l'espace ω'. Les points de ω'_1 infiniment voisins de $0'$ correspondent au point uni de 00_1 infiniment voisin de 0. Les points de ω_2 infiniment voisins de $0'$ correspondent aux points unis de I infiniment voisins de 0 situés dans l'espace η_2.*

5. Supposons maintenant que 0 soit un point uni de troisième sorte.

En considérant comme plus haut les sections de V par $n-2$

hyperplans de Σ_0 passant par 0, on voit que les points des espaces η_1, η_2 infiniment voisins de 0 sont unis pour l'involution I.

Soient 0_1 un point de ω_1 et 0_2 un point de ω_2. La droite $0_1 0_2$ est unie pour H et appartient à $\infty^{r_0 - 1}$ hyperplans de Σ_0. L'homographie H détermine sur cette droite une involution du troisième ordre et en projetant les groupes de cette involution du point 0, on obtient l'involution déterminée par I dans le domaine du premier ordre du point 0, dans le plan $00_1 0_2$.

Les sections de la variété V par les hyperplans de Σ_0 passant par 0 ont un point double en ce point, le cône tangent étant formé des espaces η_1, η_2.

On a $n_1 + n_2 = n$ et les ∞^{n-2} droites $0_1 0_2$ forment un espace linéaire appartenant à $\infty^{r_0 - n + 2}$ hyperplans de Σ_0. Par conséquent, les points de l'espace S' contenant la variété Ω qui correspondent aux droites $0_1 0_2$ forment un espace à $n - 2$ dimensions. La projection de cet espace du point 0' homologue de 0 sur Ω est un espace ω' à $n - 1$ dimensions. Les points de cet espace infiniment voisins de 0' correspondent aux groupes de l'involution I formés de points infiniment voisins de 0.

Le point 0' est double biplanaire pour la variété Ω et les espaces à n dimensions ω'_1, ω'_2 tangents à Ω en 0' passent par l'espace ω'. Aux points de η_1 infiniment voisins de 0 correspondent les points de ω'_1 infiniment voisins de 0' et aux points infiniment voisins de 0 sur η_e correspondent les points infiniment voisins de 0' sur ω'_2.

6. Il est bien clair que tous les points unis de l'involution I sont de même espèce que celui qui vient d'être étudié. Cela peut conduire à une restriction de nos conclusions. Il est en effet possible de construire une surface contenant une involution cyclique du troisième ordre possédant un nombre fini de points unis qui ne sont pas tous de même espèce.

Considérons dans un espace S_3 l'homographie H d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : \varepsilon\, x_3 : \varepsilon^2\, x_4$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité et la surface F d'équation

$$ax_3^4 x_4 + bx_3 x_4^4 + x_3^2 x_4^2 \varphi_1(x_1,x_2) + x_3 x_4 \varphi_3(x_1 x_2) + \varphi_5(x_1,x_2) = 0$$

où φ_1, φ_2, φ_3 sont des formes algébriques dont le degré est indiqué par l'indice.

La surface F est transformée en soi par H et l'involution déterminée par cette homographie sur la surface possède sept points unis: Les points 0_3 (o,o,1,o) et 0_4(o,o,o,1) qui sont de première espèce, Les points $x_3 = x_4 = o$, $\varphi_5 = o$ qui sont unis de seconde espèce.

On ne peut à priori admettre que de tels exemples n'existent pas pour les variétés algébriques à plus de deux dimensions.

Liège, le 22 avril 1969.