Bulletin de la Classe des sciences

Sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique (seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une variété algébrique à trois dimensions contenant une involution cyclique du troisième ordre ayant des points unis de première et de seconde espèces.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

(seconde note)

Résumé. — Construction d'une variété algébrique à trois dimensions contenant une involution cyclique du troisième ordre ayant des points unis de première et de seconde espèces.

Dans notre première note (1) nous nous étions demandé si une involution cyclique d'ordre trois appartenant à une variété algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis, pouvait avoir des points unis des deux espèces (c'est-à-dire lorsque l'involution détermine dans la gerbe des tangentes à la variété en un point uni l'identité ou une homologie). Nous avons réussi à construire un exemple où l'involution possède 18 points unis, 9 de première espèce et 9 de seconde espèce. L'exemple peut être généralisé aux involutions d'ordre quelconque appartenant à des variétés algébriques à un nombre quelconque de dimensions.

Indiquons rapidement cette construction. Nous considérons dans un espace $S_{2\nu+2}$ à $2\nu + 2$ dimensions, une homographie H de période trois ayant un point uni 0 et deux espaces à ν dimensions σ_1, σ_2 unis. Parmi les hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par H, il y a trois familles. L'une est dépourvue de points-base et les deux autres ont comme base les axes ponctuels de l'homographie. Sur la variété V à $\nu + 1$ dimensions intersection de ν hypersurfaces de la première famille et d'une hypersurface d'une des deux autres

(1) La première note est parue dans le Bulletin de l'Académie, 1969, pp. 404-410.

familles, l'homographie H détermine une involution I cyclique du troisième ordre. Cette involution possède 3^ν points unis dans σ_1 et 3^ν points unis dans σ_2, les uns de première espèce, les autres de seconde espèce.

Nous considérons ici les cas $\nu = 1$ et $\nu = 2$. Lorsque $\nu = 1$, nous obtenons une surface contenant une involution ayant trois points unis de première espèce et trois points unis de seconde espèce. Rappelons que un point uni dans ce cas est de première espèce si H détermine dans le faisceau des tangentes à la surface en ce point uni, l'identité; de seconde espèce dans le cas contraire (1).

Dans le cas $\nu = 2$, la variété V a trois dimensions et l'involution possède 9 points unis de première espèce et 9 de seconde espèce.

Dans le cas $\nu > 2$, l'étude se conduit de la même manière que dans les cas précédents.

Observons que dans le cas d'une surface, aux courbes canoniques de l'image de l'involution correspondent sur la surface des courbes canoniques passant par les points unis de première espèce mais non par les points unis de seconde espèce (2). Au contraire, dans le cas d'une variété à trois dimensions, aux surfaces canoniques de l'image de l'involution correspondent des variétés canoniques passant par les points unis de seconde espèce mais non par les points unis de première espèce. Rappelons d'ailleurs que nous avons construit une variété algébrique à trois dimensions contenant une involution cyclique d'ordre trois ne possédant que des points unis de première espèce telle qu'aux surfaces canoniques de l'image de l'involution correspondent des surfaces canoniques ne passant pas par les points unis (3).

I

1. Considérons dans un espace S_4 à quatre dimensions l'homographie H de période trois d'équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^2 x_4,$$

(1) Voir notre ouvrage sur la *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Edizioni Cremonese, 1963), § 2.

(2) *Théorie des involutions*..., loc. cit., § 3.

(3) *Variétés algébriques contenant une involution cyclique n'ayant que des points unis de première espèce*, Deuxième note (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1969, pp. 108-116). Voir n° 5.

où ε est une racine primitive cubique de l'unité. En désignant par $0_0, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4$ les sommets de la pyramide de référence, on voit que les axes ponctuels de l'homographie H sont le point 0_0 et les droites $0_1 0_2$ et $0_3 0_4$.

Considérons ensuite les hypersurfaces cubiques représentées par les équations

$$x_0^3 + \varphi_3(x_1,x_2) + \varphi'_3(x_3,x_4) + x_0 \varphi_{11}(x_1,x_2;x_3,x_4) = 0, \tag{1}$$

$$x_0^2 \varphi_1(x_1,x_2) + x_0 \varphi_2(x_3,x_4) + \varphi_{12}(x_3,x_4;x_1,x_2) = 0, \tag{2}$$

où φ_i représente une forme algébrique de degré i de ses arguments et φ_{ik} une forme algébrique de degré i par rapport aux deux premières variables dont les coefficients sont des formes de degré k par rapport aux deux secondes.

Ces hypersurfaces sont transformées en elles-mêmes par l'homographie H et ont en commun une surface F d'ordre neuf sur laquelle l'homographie H engendre une involution I du troisième ordre. La surface F rencontre chacune des droites $0_1 0_2$ et $0_3 0_4$ en trois points qui sont unis pour l'involution.

2. Commençons par déterminer la structure des points unis appartenant à la droite $0_1 0_2$. On peut supposer sans restriction que l'un de ces points est 0_1, ce qui revient à supposer que l'on a

$$\varphi_3(x_1,x_2) = x_2 \psi_2(x_1,x_2).$$

Les espaces tangents en 0_1 aux hypersurfaces (1) et (2) ont pour équations

$$x_2 = 0, \varphi_{12}(x_3,x_4;1,0) = 0.$$

La première représente l'espace $0_0 0_1 0_3 0_4$ et la seconde un espace à 3 dimensions passant par les points $0_0 0_1 0_2$ et par un point 0_{34} de la droite $0_3 0_4$.

Il en résulte que dans le plan tangent à F en 0_1, seules les droites $0_1 0_0, 0_1 0_{34}$ sont unies pour l'homographie H et que le point est uni de seconde espèce.

Les points unis de l'involution situés sur la droite $0_1 0_2$ *sont unis de seconde espèce.*

3. Déterminons maintenant la structure des points unis situés sur la droite $0_3 0_4$.

Supposons sans restriction qu'un de ces points soit 0_3 en posant

$$\varphi'_3(x_3,x_4) = x_4\varphi'_2(x_3,x_4).$$

Les espaces tangents au point 0_3 aux hypersurfaces (1) et (2) sont

$$x_4 = 0, x_0 = 0.$$

Donc le plan tangent à la surface F en 0_3 est le plan $0_3 0_1 0_2$ et le point 0_3 est uni de première espèce.

Les points unis de l'involution situés sur la droite $0_3 0_4$ *sont unis de première espèce.*

4. L'involution I possède trois points unis de première espèce et trois points unis de seconde espèce. D'autre part, la surface F est régulière et son système canonique coïncide avec celui de ses sections hyperplanes. Son genre arithmétique est donc égal à 5.

Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a d'une surface Φ image de l'involution I, on a la relation [1]

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 3.4 - 3.8,$$

d'ou $p'_a = 2$.

On sait que les courbes transformées des courbes canoniques de la surface Φ passent une fois par les points unis de première espèce, mais ne passent pas par ceux de seconde espèce. Ces transformées sont donc découpées sur F par les ∞^1 hyperplans passant par la droite $0_3 0_4$, transformés en eux-mêmes par H, c'est-à-dire par les hyperplans

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0.$$

Ces sections sont de genre 10 et par conséquent par la formule de Zeuthen, les courbes canoniques de Φ ont le genre trois.

La surface Φ *image de l'involution* I *a les genres* $p_a = 2$, $p^{(1)} = 3$.

Le bigenre de Φ est égal à $p_a + p^{(1)}$, c'est-à-dire à cinq. Aux courbes bicanoniques de Φ correspondent sur F des courbes bicanoniques découpées par des hyperquadriques formant un système transformé en lui-même par H et dont l'équation contient les termes du second degré en x_1,x_2. Ce système a pour équation

---

(1) *Théorie des involutions...*, loc. cit. n° 72.

$$\lambda_0 x_1^2 + \lambda_1 x_1 x_2 + \lambda_2 x_2^2 + x_0(\lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4) = 0.$$

et on retrouve bien la valeur du bigenre $P_2 = 5$.

5. Pour obtenir un modèle projectif de la surface Φ, considérons dans S_4 le système $|V_0|$ des hypersurfaces cubiques dont l'équation est l'équation (1) où les coefficients sont variables. Le système $|V_0|$ a la dimension 12 et si nous rapportons projectivement ses hypersurfaces aux hyperplans d'un espace S_{12} à 12 dimensions, il correspond aux groupes de trois points de l'involution engendrée par H dans S_4 les points d'une variété W à quatre dimensions et d'ordre 27.

A l'hypersurface (2) correspond sur W une variété à trois dimensions W_1, d'ordre 27, le long de laquelle une hypersurface cubique de S_{12} oscule la variété W.

A l'hypersurface (1) correspond un hyperplan de S_{12} coupant la variété W_1 suivant une image de la surface Φ. Ce modèle projectif de Φ est donc situé dans un espace S_{11} à onze dimensions.

A la droite $0_1 0_2$ correspond sur la variété W une cubique gauche K_1 et à la droite $0_3 0_4$ une cubique gauche K_2. Les sections de ces cubiques gauches par l'espace S_{11} sont les points de diramation de la surface Φ.

Les trois points situés sur K_1 sont doubles biplanaires et ceux situés sur K_2 sont triples à cône tangent rationnel. Notons qu'on peut en déduire les singularités des cubiques K_1, K_2 pour la variété W. La variété W_1 passe par les cubiques gauches en question.

Aux sections de la surface F par les hyperplans passant par le plan $0_0 0_3 0_4$ correspondent sur la surface des courbes du neuvième ordre et de genre trois, passant par les points de diramation situés sur la cubique K_2. Ce sont les courbes canoniques de la surface Φ. Elles appartiennent à des espaces linnéaires à 9 dimensions.

II

6. L'homographie H de période trois de l'espace S_6 à 6 dimensions, d'équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 : x'_6 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_4 : \varepsilon^2 x_5 : \varepsilon^2 x_6.$$

possède comme axes ponctuels le point 0_0 et les plans $0_1 0_2 0_3$ et $0_4 0_5 0_6$, les points $0_0, 0_1, \ldots, 0_6$ étant les sommets de la pyramide de référence et ε étant une racine primitive du troisième ordre de l'unité.

Considérons la variété V à trois dimensions intersection des hypersurfaces cubiques

$$x_0^3 + \varphi_3(x_1,x_2,x_3) + \psi_3(x_4,x_5,x_6) + x_0\varphi_{11}(x_1,x_2,x_3;x_4,x_5,x_6) = 0, \quad (1)$$

$$x_0^3 + \varphi_3'(x_1,x_2,x_3) + \psi_3'(x_4,x_5,x_6) + x_0\varphi_{11}'(x_1,x_2,x_3;x_4,x_5,x_6) = 0, \quad (2)$$

$$x_0^2\varphi_1(x_1,x_2,x_3) + x_0\psi_2(x_4,x_5,x_6) + \varphi_{21}(x_1,x_2,x_3;x_4,x_5,x_6) = 0 \quad (3)$$

qui sont transformées en elles-mêmes par H.

Les deux premières ne passent pas par les axes ponctuels de l'homographie H mais la troisième contient ces axes.

Sur la variété V l'homographie H détermine une involution cyclique I qui possède neuf points unis dans le plan $0_1 0_2 0_3$ et neuf points unis dans le plan $0_4 0_5 0_6$.

7. Pour examiner la structure des points unis situés dans le plan $0_1 0_2 0_3$, on peut supposer sans restriction que l'un d'eux est le point 0_1. Cela revient à poser

$$\varphi_3 \equiv x_1^2\xi_1(x_2,x_3) + x_1\xi_2(x_2,x_3) + \xi_3(x_2,x_3),$$

$$\varphi_3' \equiv x_1^2\xi_1'(x_2,x_3) + x_1\xi_2(x_2,x_3) + \xi_3'(x_2,x_3).$$

L'espace tangent ω à la variété V en 0_1 est l'intersection des hyperplans

$$\xi_1(x_2,x_3) = 0, \xi_1'(x_2,x_3) = 0, \varphi_{21}(1,0,0;x_4,x_5,x_6) = 0.$$

Les deux premières équations représentent deux hyperplans passant par l'espace à quatre dimensions $0_0 0_1 0_4 0_5 0_6$. La dernière équation représente un hyperplan passant par $0_0, 0_1, 0_2, 0_3$ et par une droite a du plan $0_4 0_5 0_6$. Il en résulte que dans l'espace ω et dans la gerbe de rayons de sommet 0_1, l'homographie H détermine une homologie de centre $0_1 0_0$ dont le plan projette de 0_1 la droite a.

Les neufs points unis de l'involution I *appartenant au plan* $0_1 0_2 0_3$ *sont des points unis de seconde espèce.*

8. Supposons de même que 0_4 soit un point uni, ce qui revient à poser

$$\psi_3 \equiv x_4^2\eta_1(x_5,x_6) + x_4\eta_2(x_5,x_6) + \eta_3(x_5,x_6),$$

$$\psi_3' \equiv x_4^2\eta_1'(x_5,x_6) + x_4\eta_2'(x_5,x_6) + \eta_3'(x_5,x_6).$$

L'espace à trois dimensions ω tangent à V en 0_4 est l'intersection des hyperplans

$$\eta_1(x_5,x_6) = 0, \eta'_2(x_5,x_6) = 0, x_0 = 0,$$

c'est-à-dire l'espace projetant de 0_4 le plan $0_1 0_2 0_3$. Dans la gerbe de sommet 0_4 dans l'espace ω, H détermine donc l'identité.

Les neuf points unis de l'involution I *situés dans le plan* $0_4 0_5 0_6$ *sont des points unis de première espèce.*

En résumé, *l'involution* I *possède 18 points unis, 9 de première espèce et 9 de seconde espèce.*

9. Désignons par F les surfaces sections hyperplanes de V. Le système canonique de la variété V, qui est complètement régulière, est découpé par les hyperquadriques et est donc le système $|2F|$. Il en résulte que le système $|F'|$ adjoint au système $|F|$ est le système $|3F|$, découpé par les hypersurfaces cubiques de S_6.

Nous désignerons par F_0 la section de V par l'hyperplan $x_0 = 0$ et par F_1, F_2 les sections de V par les hyperplans

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0, \lambda_4 x_4 + \lambda_5 x_5 + \lambda_6 x_6 = 0$$

Dans le système canonique $| 2F |$ de V, il y a trois systèmes linéaires composés avec l'involution I; nous les désignerons par $| (2F)_0 |$, $| (2F)_1 |$, $| (2F)_2 |$. Ils sont respectivement découpés par les hyperquadriques

$$x_0^2 + \varphi_{11}(x_1,x_2.x_3;x_4,x_5,x_6) = 0$$

$$x_0\varphi_1(x_1,x_2,x_3) + \psi_2(x_4,x_5,x_6) = 0$$

$$x_0\psi_1(x_4,x_5,x_6) + \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = 0$$

et leurs dimensions sont égales à 9,8 et 8.

Dans le système $| (3F) |$, il y a trois systèmes linéaires composés avec I, nous les désignerons par $| (3F_0) |$, $| (3F)_1 |$, $| (3F)_2 |$. Le premier, $| (3F)_0 |$, est découpé sur V par les hypersurfaces cybiques ayant pour équation l'équation (1) ou (2) dont les coefficients sont variables. Comme deux de ces hypersurfaces contiennent V, ce système a la dimension 27. Le second système $| (3F)_1 |$ est découpé par les hypersurfaces cubiques d'équation (3) où les coefficients sont supposés variables. Comme une de ces variétés contient V, il a la dimension 26. Le troisième $|(3F)_2|$ est découpé par les hypersurfaces d'équation

$$x_0^2\psi_1(x_4,x_5,x_6) + x_0\varphi_2(x_1,x_2,x_3) + \varphi_{12}(x_1,x_2,x_3;x_4,x_5,x_6) = 0$$

et a la dimension 27.

Soient Ω une variété à trois dimensions image de l'involution I et Φ_0, Φ_1, Φ_2 les surfaces qui correspondent aux surfaces F_0,F_1,F_2. Aux points unis de I correspondent sur Ω des points de diramation qui sont équivalents au point de vue des tranformations birationnelles, à des surfaces rationnelles. D'autre part, à une surface F de $|F|$ correspond sur Ω une surface Φ appartenant totalement à un système linéaire. Lorsque la surface F tend vers la surface F_0, ou vers une surface F_1, ou vers une surface F_2, la surface Φ tend vers une surface $3\Phi_0 + \Delta_0$, ou $3\Phi_1 + \Delta_1$, ou vers $3\Phi_2 + \Delta_2$, Δ_0, Δ_1, Δ_2 étant certaines combinaisons linéaires des composantes rationnelles des points de diramation. On a donc

$$3\Phi_0 + \Delta_0 \equiv 3\Phi_1 + \Delta_1 \equiv 3\Phi_2 + \Delta_2.$$

10. Considérons une surface F_2. On peut supposer sans restriction, quitte à faire un changement de coordonnées, qu'elle est découpée sur V par l'hyperplan $x_6 = 0$. Elle a pour équations

$$x_0^3 + \varphi_3(x_1,x_2,x_3) + \psi_3(x_4,x_5,0) + x_0\varphi_{11}(x_1,x_2,x_3;x_4,x_5,0) = 0,$$
$$x_0^3 + \varphi_3'(x_1,x_2,x_3) + \psi_3'(x_4,x_5,0) + x_0\varphi_{11}'(x_1,x_2,x_3;x_4,x_5,0) = 0,$$
$$x_0^2\varphi_1(x_1,x_2,x_3) + x_0\psi_2(x_4,x_5,0) + \varphi_{21}(x_1,x_2,x_3;x_4,x_5,0) = 0,$$

Dans cet hyperplan, l'homographie H engendre une homographie qui a pour axes ponctuels le point 0_0, le plan $0_1 0_2 0_3$ et la droite $0_4 0_5$. La surface F_2 considérée ne passe pas par le point 0_0 et ne rencontre pas la droite $0_4 0_5$. Par contre, elle rencontre le plan $0_1 0_2 0_3$ aux neuf points unis

$$\varphi_3 = 0, \varphi_3' = 0.$$

Supposons que 0_1 soit un de ces points. Le plan tangent à F_2 en 0_1 est donné, en reprenant les notations du n° 7, par les équations.

$$\xi_1(x_2,x_3) = 0, \xi_1'(x_2,x_3) = 0, \varphi_{21}(1,0,0;x_4,x_5,0) = 0.$$

Ce plan passe par 0_0 et par le point de rencontre de la droite a avec le plan $x_6 = 0$. C'est donc un point uni de première espèce.

Cela étant, le système canonique de la surface F_2 ne passe par aucun des points unis de l'involution I et est donc découpé par des surfaces du système $|(3F)|$ composé avec I ne passant pas par les points unis de I, c'est-à-dire par le système $|(3F)_0|$.

Au système $|(3F)_0|$ correspond sur Ω un système privé de points-base que nous désignerons par $|(3\Phi)_0|$.

Observons que la surface $F_0 + F_1 + F_2$ est une surface (3F) qui passe par les axes de l'homographie H et qui appartient au système découpé sur V par les hypersurfaces

$$x_0\varphi_{11}(x_1,x_2,x_3;x_4,x_5,x_6) = 0.$$

On en déduit que l'on a

$$(3\Phi)_0 \equiv \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Delta,$$

Δ étant une certaine somme linéaire des composantes des points de diramation.

On a de plus

$$3\Phi_0 + \Delta_0 \equiv 3\Phi_1 + \Delta_1 \equiv 3\Phi_2 + \Delta_2 \equiv (3\Phi)_0 - \Delta.$$

On a établi que

$$\Phi'_2 \equiv (3\Phi)_0.$$

On en déduit successivement

$$\Phi'_0 + 2\Phi_0 + \Delta_0 \equiv \Phi'_2 + 2\Phi_2 + \Delta_2,$$

$$\Phi_0 + 2\Phi_0 + \Delta_0 \equiv 2\Phi_2 + (3\Phi)_0 + \Delta_2,$$

$$\Phi'_0 + 2\Phi_0 + \Delta_0 \equiv 2\Phi_2 + 3\Phi_0 + \Delta_0 + \Delta + \Delta_2,$$

$$\Phi'_0 \equiv \Phi_0 + 2\Phi_2 + \Delta + \Delta_2.$$

Le système canonique de Ω est $|2\Phi_2 + \Delta^1|$, où $\Delta' = \Delta + \Delta_2$ est une combinaison linéaire des composantes des points de diramation de Ω.

11. Parmi les surfaces du système complet $|\Phi_2|$ il en existe qui correspondent à des surfaces F_2 intersection de V avec un hyperplan

$$\lambda_4x_4 + \lambda_5x_5 + \lambda_6x_6 = 0.$$

Par conséquent à certaines surfaces du système $|2\Phi_2 + \Delta'|$ correspondent des sections de la variété V par l'hyperquadrique

$$(\lambda_4 x_4 + \lambda_5 x_5 + \lambda_6 x_6)^2 = 0$$

qui appartient au système découpé par l'hyperquadrique

$$\psi_2(x_4, x_5, x_6) = 0.$$

On en conclut qu'au système $|2\Phi_2 + \Delta'|$ de Ω correspond sur V le système $|(2F)_1|$ découpé par les hyperquadriques

$$x_0 \varphi_1(x_1, x_2, x_3) + \psi_2(x_4, x_5, x_6) = 0 \tag{4}$$

Le genre géométrique de la variété V est $P_g = 9$.

Les hyperquadriques (4) contiennent le plan $0_1 0_2 0_3$ et par conséquent les points unis de seconde espèce de I, mais elles rencontrent le plan $0_4 0_5 0_6$ suivant des coniques et ne contiennent donc pas les points unis de première espèce de I. Il en résulte que les transformées des surfaces canoniques de Ω passent par les points unis de seconde espèce et que Δ' est une combinaison linéaire des composantes des points de diramation correspondants.

Les surfaces canoniques de la variété Ω passent simplement par les points unis de seconde espèce mais ne passent pas par ceux de première espèce.

Observons que le plan tangent à une surface $(2F)_1$ en un point uni du plan $0_1 0_2 0_3$ est situé dans l'hyperplan $x_0 = 0$ de sorte que ce plan tangent coïncide avec la projection du point uni considéré de la droite a du n° 7. Les points unis de l'involution déterminée par I sur une surface $(2F)_1$ sont de première espèce.

12. Entre le genre arithmétique P_a de la variété V, le genre arithmétique ω_2 d'une surface canonique de V, le genre ω_1 de la courbe intersection de deux surfaces canoniques et le degré ω_0 du système canonique, on a la relation

$$2P_a = \omega_0 - \omega_1 + \omega_2 + 4$$

Nous allons vérifier que cette relation est satisfaite pour la variété Ω.

La variété Ω est comme la variété V complètement régulière et son genre arithmétique est $P_a = P_g = 9$.

Le système canonique d'une surface (2F) est découpé par les hypersurfaces du quatrième ordre. Il faut défalquer de celles-ci celles qui contiennent les trois hypersurfaces cubiques contenant V et l'hyperquadrique découpant sur V la surface envisagée. On trouve que les genres de (2F) et par suite de $(2F)_1$ sont $p_a = p_g = 161$. L'involution I détermine sur une surface $(2F)_1$ une involution possédant 9 points unis de première espèce. Entre le genre arithmétique p_a de cette surface et celui ω_2 de la surface canonique homologue sur Ω, on a la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(\omega_2 + 1) - 9.4,$$

d'où $\omega_2 = 54$.

La série canonique de la courbe commune à deux surfaces (2F) est découpée par les hypersurfaces du sixième ordre et le genre de cette courbe est donc 325. Deux surfaces $(2F)_1$ se touchent en chacun des points unis leur appartenant, donc la courbe qu'elles ont en commun possède neuf points doubles et son genre est donc 316. L'involution déterminée sur cette courbe par I possède 18 points unis, donc d'après la formule de Zeuthen, le genre de la courbe correspondante sur Ω est $\omega_1 = 100$.

Le degré du système $|(2F)_1|$ est 180, donc on a $\omega_0 = 60$.

L'expression $2.9 = 60 - 100 + 54 + 4$ est une identité.

13. Pour obtenir une image de la variété Ω, considérons le système d'hypersurfaces cubiques représentées par l'équation (1) où les coefficients sont supposés variables. Il a la dimension 29. Rapportons projectivement ces hypersurfaces aux hyperplans d'un espace S_{29} à 29 dimensions. Aux groupes de l'involution engendrée dans S_6 par l'homographie H correspondent les points d'une variété W à six dimensions, d'ordre 3^5.

A l'hypersurface (3) correspond sur W une variété W', à cinq dimensions, d'ordre 3^5, le long de laquelle il existe une hypersurface cubique de S_{29} osculant la variété W.

Aux hypersurfaces (1) et (2) correspondent dans S_{29} deux hyperplans ayant en commun un espace S_{27} à 27 dimensions coupant la variété W' suivant une variété Ω d'ordre 3^5 image de l'involution I.

Aux points du plan $0_1 0_2 0_3$ correspondent les points d'une surface K_1 de Veronese généralisée, d'ordre 9, appartenant à un espace à

9 dimensions. Aux points du plan $0_4 0_5 0_6$ correspondent de même les points d'une surface de Veronese généralisée K_2, d'ordre 9, située dans un espace à 9 dimensions. L'espace S_{27} coupe les surfaces K_1,K_2 suivant des groupes de neuf points qui sont les points de diramation de Ω.

Les 9 premiers points, qui correspondent aux points unis de seconde espèce de l'involution, sont des points doubles biplanaires de Ω. Ainsi que nous l'avons établi dans notre première note, le cône tangent à Ω en un de ces points se scinde en deux espaces linéaires à trois dimensions ayant en commun un plan.

Aux neuf points de diramation qui correspondent aux points unis du plan $0_4 0_5 0_6$ la variété Ω a des points multiples d'ordre neuf, le cône tangent en un de ces points ayant pour sections hyperplanes des surfaces de Veronese généralisées.

Aux surfaces F_0,F_1,F_2 correspondent des surfaces Φ_0, Φ_1, Φ_2 d'ordre 3^4. La surface Φ_0 passe par les 18 points de diramation. Les surfaces Φ_1 passent par les points de diramation de seconde espèce et les surfaces Φ_2 par les points de diramation de première espèce.

Les surfaces canoniques de Ω, qui correspondent aux variétés (4) passent simplement par les points de diramation homologues des points unis de plan $0_1 0_2 0_3$.