Bulletin de la Classe des sciences

Sur les variétés algébriques à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro

Lucien Godeaux

Résumé
Etude des variétés algébriques complètement régulières possédant une surface canonique d'ordre zéro et construction de modèles projectifs de ces variétés.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les variétés algébriques à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Etude des variétés algébriques complètement régulières possédant une surface canonique d'ordre zéro et construction de modèles projectifs de ces variétés.

Les surfaces algébriques possédant une courbe canonique d'ordre zéro se partagent en deux catégories. Sur une surface de la première catégorie une courbe de genre π appartient à un système linéaire de degré $2\pi - 2$ et de dimension π. Sur une surface de la seconde catégorie, une courbe de genre π appartient à un système linéaire de degré $2\pi - 2$ et de dimension $\pi - 2$, système linéaire appartenant à un système continu ∞^2 de systèmes linéaires analogues; ce sont les surfaces de Picard. Peut-on obtenir un résultat analogue pour les variétés algébriques à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro ? La réponse est négative, car déjà dans un espace à cinq dimensions, il existe deux modèles projectifs distincts de ces variétés.

Dans cette note nous considérons les variétés complètement régulières, c'est-à-dire que nous supposons que la variété V a ses genres géométrique et arithmétique égaux et que les surfaces tracées sur V sont régulières. Dans ces conditions, le système adjoint $| F' |$ à un système de surfaces $| F |$ découpe, sur une surface F, le système canonique complet (1). Le système $| F' |$ coïncide d'ailleurs avec le système $| F |$ puisque V possède une surface canonique d'ordre zéro.

(1) Voir SEVERI, *Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2e sem. 1099).

Nous construisons des modèles projectifs de la variété V dans des espaces à 4, 5 et 6 dimensions, après avoir établi quelques propriétés générales des variétés en question.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions, complètement régulière, possédant une surface canonique d'ordre zéro. Tout système linéaire de surfaces tracé sur V est son propre adjoint et on peut trouver sur V système linéaire | F |, complet et simple. Soit n sa dimension. Rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace linéaire S_n à n dimensions. A la variété V correspond une variété que nous continuerons à désigner par V. Ses sections hyperplanes seront désignées par F.

Le système des sections hyperplanes | F | de V étant son propre adjoint, le genre-géométrique d'une surface F est $p_g = n$.

Désignons par C les sections hyperplanes des surfaces F, c'est-à-dire les sections de la variété V par des espaces linéaires à $n - 2$ dimensions.

L'adjoint | C' | au système | C | sur une surface F déterminée est le système bicanonique de la surface, c'est-à-dire le système découpé sur la surface par les hyperquadriques, puisque le système canonique est découpé par les hyperplans. Si π est le genre des courbes C, les hyperquadriques coupent une courbe C suivant des groupes canoniques d'ordre $2\pi - 2$, donc les hyperplans rencontrent les courbes C en $\pi - 1$ points. Il en résulte que la variété V est d'ordre $\pi - 1$.

Si π est le genre des courbes découpées sur la variété V par les espaces à $n - 2$ dimensions, la variété V est d'ordre $\pi - 1$.

2. Le sytème bicanonique d'une surface F a la dimension $p^{(1)} + p_a - 1 = P_2 - 1$ donc, puisque $p^{(1)} = \pi$, $p_a = n$, $P_2 = n + \pi$. Il existe donc $n + \pi$ hyperquadriques linéairement indépendantes ne contenant pas F donc ne contenant pas V. Parmi les hyperquadriques de S_n il y en a $n + 1$ linéairement indépendante formées de l'hyperplan contenant la surface F et d'un hyperplan quelconque. Par conséquent, il y a

$$A = \binom{n+2}{2} - (n+1) - (n+\pi) = \frac{1}{2}n(n-1) - \pi$$

hyperquadriques contenant la variété V.

La variété V appartient à $(n^2 - n - 2\pi)$: 2 *hyperquadriques linéairement indépendantes.*

Les courbes C ne peuvent être hyperelliptiques, sans quoi le système | F | ne serait pas simple. Par conséquent, suivant un résultat dû à Castelnuovo [1], on a, pour une surface F,

$$p^{(1)} \geqslant 3p_g - 6$$

et comme F est régulière, $p_g = p_a = n$,

$$\pi \geqslant 3n - 6$$

On a d'autre part, $\pi = \frac{1}{2}\ n(n - 1) - \mathrm{R}$, d'où

$$\mathrm{R} \leqslant \frac{1}{2}(n - 3)(n - 4) - \pi.$$

3. On doit à Fano [2] le résultat suivant:

Le genre maximum d'une courbe d'ordre m dans un espace S_ρ à ρ dimensions, appartenant à

$$\frac{1}{2}(\rho - 1)(\rho - 2) - \delta$$

hyperquadriques linéairement indépendantes est plus égal à

$$\chi\left[m - \frac{\rho + 1}{2} - \chi\frac{\rho - 1}{2}\right] - (\chi - 1)\delta$$

où χ est le plus petit entier supérieur à $\dfrac{m - \rho - \delta}{\rho - 1}$

Actuellement, on a $\rho = n - 2$, $m = \pi - 1$ et

$$\frac{1}{2}(n - 3)(n - 4) - \delta = \frac{1}{2}n(n - 1) - \pi$$

c'est-à-dire $\delta \leqslant \pi - 3\ (n - 2)$.

On en déduit $\chi = 3$ et que le genre maximum de C est π.

---

(1) Castelnuovo, *Osservazioni intorno alla Geometria sopra una superficie algebrica* (Rendiconti del Istituto Lombardo, 1891). *Memorie scelte*, (Bologna, 1937), Mem. XVIII.

(2) Fano, *Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque* (Memorie della Accademia di Torino, 1893).

Le genre π de la courbe C est le genre maximum d'une courbe appartenant à un espace à n — 2 dimensions et à R hyperquadriques linéairement indépendantes de cet espace.

On observera que la courbe C appartient à deux hyperplans ξ_1, ξ_2. Les courbes bicanoniques de la surface F située dans ξ_1 sont découpées par les R hyperquadriques contenant V mais dont P_a contiennent l'espace (ξ_1, ξ_2).

3. La plus petite valeur de n est quatre et la seule valeur possible pour π est six. L'hypersurface V du cinquième ordre dans un espace S_4 possède une surface canonique d'ordre zéro et on a $\pi = 6$ et $p_a = 4$.

Supposons $n = 5$. La variété V appartient à $10 - \pi$ hyperquadriques linéairement indépendantes et comme la courbe C est située dans un espace à trois dimensions, on a $\pi = 10$ ou $\pi = 9$.

Supposons $\pi = 10$. Une courbe C est située dans un espace à trois dimensions et est d'ordre 9. Les courbes d'ordre 9 et de genre 10 forment deux familles, déterminées par Halphen (1). Les courbes d'une famille sont les intersections de deux surfaces cubiques et celles de la seconde famille sont les intersections d'une quadrique et d'une surface du sixième ordre complétée par trois droites. Il est clair que les courbes C appartiennent à la première famille.

La variété V est l'intersection de deux hypersurfaces cubiques de S_5.

Lorsque $\pi = 9$, la courbe C, d'ordre huit, est l'intersection d'une quadrique et d'une surface du quatrième ordre donc:

La variété V est l'intersection d'une hyperquadrique et d'une hypersurface du quatrième ordre de S_5.

On voit donc que dans un espace à cinq dimensions, il y a deux familles de variétés à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro.

5. Supposons $n = 6$. La variété V appartient à $15 - \pi$ hyperquadriques et d'autre part on a $\pi \geqslant 12$. Quatre cas peuvent donc se présenter: $\pi = 12, 13, 14$ ou 15.

(1) Halphen, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* (Journal de l'École Polytechnique, 1882). *Œuvres de G.-H. Halphen* (Paris, 1921), tome III.

Dans le premier cas, $\pi = 12$, la variété V appartient à trois hyperquadriques et comme trois hyperquadriques de S_6 ont en général en commun une variété à trois dimensions d'ordre huit, il faut qu'elles aient en commun une variété d'ordre trois à quatre dimensions.

La section de V par un espace S_4 est une courbe C d'ordre 11 située sur la surface cubique commune à trois hyperquadriques de S_4. Une telle surface est représentée sur un plan σ par les coniques γ passant par un point 0. Un calcul simple montre qu'à la courbe C correspond dans σ une courbe du septième ordre passant trois fois par 0. Cette courbe, jointe à trois droites passant par 0 a pour homologue sur la surface cubique la section de celle-ci par une hypersurface du cinquième ordre contenant trois droites de la surface.

On en conclut que *dans le cas* $\pi = 12$, *la variété V, d'ordre* 11, *est l'intersection d'une variété cubique à trois dimensions commune à trois hyperquadriques et d'une hypersurface du cinquième ordre contenant trois espaces à trois dimensions de la variété cubique.*

Dans le cas $\pi = 13$, la variété V est d'ordre 12 et appartient à deux hyperquadriques.

Une courbe C, d'ordre 12 et de genre 13 appartient, dans un espace S_4, à la surface commune à deux hyperquadriques. Une telle surface est rationnelle et représentées sur un plan σ par les cubiques γ passant par cinq points. A la courbe C correspond une courbe d'ordre 9 passant trois fois par les cinq points-base de $|\ \gamma\ |$. La courbe C est donc l'intersection de deux hyperquadriques et d'un hypersurface cubique de S_4.

Dans le cas $\pi = 13$, *la variété V d'ordre* 12, *est l'intersection de deux hyperquadriques et d'une hypersurface cubique de* S_6,

6. Supposons $\pi = 14$ et considérons une courbe C, d'ordre 13, dans un espace S_4 à quatre dimensions. Elle appartient à une hyperquadrique V_3^2 et les autres hyperquadriques découpent sur la courbe la série canonique.

Les hypersurfaces cubiques V_3^3 découpent sur C une série linéaire d'ordre 39 et de dimension 25. Les hypersurfaces V_3^3 de S_4 ne comprenant pas l'hyperquadrique V_3^2 comme partie dépendent de 29 paramètres. Il y a donc ∞^3 hypersurfaces cubiques contenant la courbe C.

Deux de ces hypersurfaces cubiques ont en commun une surface

V_2^9 dont le système canonique coïncide avec le système des sections hyperplanes.

L'hyperquadrique V_3^2 passant par C rencontre encore la surface V_2^9 suivant une quintique Γ.

Les hypersurfaces cubiques passant par C mais non par la surface V_2^9 découpent sur Γ la série canonique. Si p est le genre de Γ et ν le nombre des points de rencontre des courbes C et Γ, on a donc

$$2p - 2 + \gamma = 15.$$

D'autre part, la courbe $C + \Gamma$ ayant le genre 28, on a

$$14 + p + \nu - 1 = 28.$$

On en déduit $p = 2$ et $\nu = 13$. La quintique Γ ayant le genre 2 appartient à un espace à trois dimensions σ. Elle est l'intersection d'une quadrique Q et d'une surface cubique contenant une génératrice rectiligne de Q. Cette quadrique est déterminée sur σ par l'hyperquadrique V_3^2 contenant C et les ∞^1 hypersurfaces cubiques passant par la surfave V_2^9 déterminent ∞^1 surfaces cubiques rencontrant Q suivant une droite variable.

L'hyperplan σ coupe la surface V_2^9 suivant une quartique Γ_0 qui est elliptique[1].

Envisageons maintenant une surface F section de V par un espace S_5 à cinq dimensions. Cette surface est l'intersection de deux hypersurfaces cubiques V_4^3 et d'une hyperquadrique V_4^2 ayant encore en commun une surface Φ du cinquième ordre appartenant à un espace σ' à quatre dimensions, à sections hyperplanes de genre deux.

La surface Φ est située sur l'hyperquadrique V_4^2 passant par F et sur des hypersurfaces cubiques passant par F et ayant encore en commun avec l'hyperquadrique un plan variable. Il en résulte que l'hyperquadrique est un cône.

La variété V est l'intersection de deux hypersurfaces cubiques V_5^3 *ayant en commun une variété* V_4^9 *et d'une hyperquadrique* V_5^2 *ayant*

---

(1) Représentons sur un plan $\overline{\omega}$ une des surfaces cubiques passant par Γ, par les cubiques passant par six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Si la droite homologue de A_1 appartient à la quadrique passant par Γ, à cette courbe correspond une sextique ayant un point triple en A_1 et des points doubles aux autres points A. A une seconde surface cubique passant par Γ correspond une courbe du neuvième ordre passant trois fois par les points A. A la courbe Γ_0 correspond donc la cubique passant par les points $A_2, A_3, \ldots, A_6$

encore en commun une variété Ω d'ordre cinq située dans un espace Σ à cinq dimensions.

Dans l'espace Σ la variété Ω est l'intersection de l'hyperquadrique V_4^2 et d'une variété V_4^3 ayant encore en commun un espace à trois dimensions variable avec l'hypersurface cubique. Il en résulte que l'hyperquadrique V_5^2 est un cône ayant pour sommet une droite. Elle est obtenue en projetant d'une droite une quadrique située dans un espace à trois dimensions.

7. Supposons enfin $\pi = 15$, la variété V étant d'ordre 14. Sur une courbe C, les hyperquadriques de l'espace S_4 contenant la courbe découpent la série canonique.

Les hypersurfaces cubiques de l'espace S_4 découpent sur la courbe C une série linéaire d'ordre 42 et de dimension 27. Il en résulte qu'il y a ∞^6 hypersurfaces cubiques contenant la courbe C. Deux de ces hypersurfaces ont en commun une surface V_2^9 et les hypersurfaces cubiques passant par C mais non par cette surface découpent sur cette surface une courbe Γ d'ordre $27 - 14 = 13$. Les hypersurfaces du quatrième ordre passant par C découpent sur Γ la série canonique. Si p est le genre de Γ et ν le nombre des points communs aux courbes C et Γ, nous avons

$$2p - 2 + \nu = 42.$$

D'autre part, la courbe $C + \Gamma$ est de genre 45 et on a

$$15 + p + \nu - 1 = 45.$$

On en déduit $p = 13$ et $\nu = 18$.

Les hyperquadriques découpent sur la courbe Γ une série d'ordre 26 et de genre 13. Il en résulte que la courbe Γ appartient à une hyperquadrique V_3^2. Cette hyperquadrique rencontre encore la surface V_2^9 suivant une courbe Γ_0 d'ordre cinq.

Les hypersurfaces cubiques passant par Γ_0 découpent sur Γ la série canonique. On en déduit que les courbes Γ et Γ_0 se rencontrent en 15 points. Les hypersurfaces cubiques passant par Γ découpent la série canonique sur Γ_0, donc cette courbe est elliptique.

Passons à l'étude de la surface F section de V par un espace à cinq dimensions S_5. Cette surface forme, avec une certaine surface Φ l'intersection de trois hypersurfaces cubiques. La surface Φ est d'ordre

13 et ses sections hyperplanes ont le genre 13, elle coupe la surface F suivant une courbe d'ordre 18, La surface Φ forme, avec une surface Φ_0 d'ordre cinq, l'intersection de deux hypersurfaces cubiques et d'une hyperquadrique. Les sections hyperplanes de la surface Φ_0 sont elliptiques et elle rencontre la surface Φ suivant une courbe d'ordre 15.

La variété V forme, avec une variété à trois dimensions Ω, l'intersection de trois hypersurfaces cubiques. La variété Ω d'ordre 13 *forme, avec une variété Ω_0 à trois dimensions, d'ordre cinq, l'intersection de deux hypersurfaces cubiques et d'une hyperquadrique. Les sections de la variété Ω_0 par des espaces à quatre dimensions sont elliptiques.*

La variété Ω_0 a été rencontrée par Enriques ([1]). Elle est rationnelle et ses sections hyperplanes correspondent aux surfaces cubiques d'un espace à trois dimensions passant par une biquadratique gauche de seconde espèce.

Notons en passant que les surfaces F rencontrées sont des surfaces projectivement canoniques.

Liège, le 18 décembre 1968.

ERRATUM: Bulletin, 1968, page 915, ligne 3, lire « variété bicanonique d'ordre zéro » au lieu de « variété canonique d'ordre zéro ».

([1]) ENRIQUES, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche* (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 1e sem. 1894), *Memorie scelte*, (Bologna, 1956) tome I. Voir aussi G. SCORZA, *Le carietà a curve sezioni ellittiche* (Annali di Matematica, série 3, tome XV, 1908), *Opere Sscelte*, (Roma, 1960), tome I.