Bulletin de la Classe des sciences

Une involution cyclique ayant des points unis des deux espèces appartenant à une surface algébrique

Lucien Godeaux

Résumé
Étude des adjointes et des polaires d'une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre *p* ayant deux points unis de première espèce et *p* + 2 points unis de seconde espèce.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Une involution cyclique ayant des points unis des deux espèces appartenant à une surface algébrique

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude des adjointes et des polaires d'une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre p ayant deux points unis de première espèce et $p + 2$ points unis de seconde espèce.

Dans nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique (1), nous avons partagé les points unis en deux catégories suivant que dans le domaine du premier ordre d'un tel point, tous les points sont unis ou qu'il y en a seulement deux. En d'autres termes, si la transformation birationnelle de la surface en soi génératrice de l'involution donne l'identité dans le domaine du premier ordre d'un point uni, celui-ci est de première espèce, si au contraire la transformation détermine une involution binaire, le point uni est de seconde espèce. Nous avons construit un exemple où l'involution présente des points unis des deux espèces (2). En voulant étendre cette construc-

(1) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Éditions Cremonese, 1963).

(2) *Loc. cit.*, p. 121, § 78. L'équation de la surface est moins complète dans cet ouvrage que dans cette note, les termes écrits dans le premier cas suffisant à notre but. Dès 1916, nous avions construit cet exemple dans le cas $p = 3$. Voir *Étude d'une involution cyclique douée d'un nombre fini de points de coïncidence* (Revista de la Sociedad Matematica Española, 1917, pp. 7-14).

tion aux involutions appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, nous avons été conduit à réexaminer l'exemple en question et obtenu certaines propriétés sur les adjointes et les polaires de la surface qui nous paraissent intéressantes. Nous les exposons dans cette note.

1. Soit H une homographie cyclique dont la période est un nombre premier $p = 2\nu + 1$, dont les équations sont

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^{p-1} x_4.$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

La surface F d'ordre $p + 2$ et d'équation

$$a x_3^{p+1} x_4 + b x_4^{p+4} x_3 + (x_3 x_4)^{\nu+1} \varphi_1(x_1,x_2) + (x_3 x_4)^{\nu} \varphi_3(x_4,x_2) + \dots$$
$$+ x_3 x_4 \varphi_{2\nu+1}(x_1,x_2) + \varphi_{2\nu+3}(x_1,x_2) + x_3^p \varphi_2'(x_1,x_2) + x_4^p \varphi_2''(x_1,x_2) = 0,$$

où $\varphi_i(x_1, x_2)$ désigne une forme algébrique de degré i en x_1, x_2, est transformée en elle-même par H. Sur cette surface, cette homographie détermine une involution I d'ordre p possédant $p + 4$ points unis:

1° Les points $0_3(0,0,1,0)$ et $0_4(0,0,0,1)$ qui sont unis de première espèce, H déterminant dans chacun des plans $x_4 = 0$, $x_3 = 0$ une homologie de centre respectivement 0_3, 0_4;

2° Les $p + 2$ points de rencontre de la surface F avec la droite $x_3 = x_4 = 0$. Soit A un de ces points. Dans le plan tangent à F en A, H détermine une homographie non homologique dont les points unis sont $A, 0_3, 0_4$. Le point A est donc uni de seconde espèce. La symétrie de l'équation F en x_3, x_4 montre que le point A est un point uni symétrique. Il en est de même des autres points du groupe considéré. Nous désignerons dans la suite ce groupe par groupe O.

La surface F étant dépourvue de points singuliers, son système adjoint est constitué par le système complet des surfaces d'ordre $p - 2$. La surface F étant régulière, on a

$$p_g = p_a = \binom{p+1}{3},\ p^{(1)} - 1 = (p + 2)(p - 2)^2$$

Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p_a' d'une surface Φ image de l'involution I, on a la relation

$$12(p_a + 1) = 12p(p_a' + 1) + 2(p - 1)(p - 5) - (p + 2)(p^2 - 1),$$

ce qui donne $p_a' = (p^2 - 1) : 4$.

Entre le genre linéaire $p^{(1)}$ de F et celui $\pi^{(1)}$ de Φ, on a la relation

$$p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1) + 2(p - 2)^2,$$

d'où $\pi^{(1)} = (p - 2)^2 + 1$.

La surface Φ image de l'involution I a les genres

$$p_a = p_g = \frac{1}{4}(p^2 - 1), \pi^{(1)} = (p - 2)^2 + 1.$$

2. Les courbes canoniques de F transformées des courbes canoniques de Φ doivent passer $p - 2$ fois par les points $0_3, 0_4$. Lorsque dans l'équation des adjointes à F passant par ces courbes, on fait $x_3 = 0$ ou $x_4 = 0$, elle doit se réduire à un polynome homogène de degré $p - 2$ en x_1, x_2. Il en résulte que si l'on opère l'homographie H sur cette équation, elle se reproduit exactement. Cela étant, cette équation est

$$(x_3x_4)^{\nu-1}f_1(x_1,x_2) + (x_3x_4)^{\nu-2}f_3(x_1,x_2) + \ldots$$
$$+ x_3x_4f_{p-4}(x_1,x_2) + f_{p-2}(x_1,x_2) = 0.$$

où $f_1, f_3, \ldots, f_{p-2}$ sont des formes algébriques en x_1, x_2 dont les degrés sont indiqués par les indices et dont les coefficients sont variables.

Nous désignerons ces surfaces par F' et par $|\Gamma|$ le système qu'elles découpent sur F.

Les surfaces F' sont transformées en elles-mêmes non seulement par l'homographie H mais aussi par l'homologie H' d'équations

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : x_4 : x_3,$$

de centre $x_1 = x_2 = x_3 + x_4 = 0$ et de plan $x_3 - x_4 = 0$.

L'homologie H' transforme F en une surface d'équation

$$ax_4^{p+1}x_3 + bx_3^{p+1}x_4 + (x_3x_4)^{\nu+1}\varphi_1 + \ldots + \varphi_{p+2} \cdots = 0,$$

de sorte que la surface F n'est transformée en elle-même par H' que si $a = b$ et $\varphi_2' \equiv \varphi_2''$.

Dans le cas opposé, la nouvelle surface a le même système adjoint que F.

Observons que l'équation de F' contient $(p^2 - 1) : 4$ termes, ce qui correspond à la valeur trouvée pour p_a'.

3. Considérons la quadrique Q d'équation

$$x_3x_4 + \psi(x_1,x_2) = 0,$$

où ψ est une forme du second degré.

La quadrique Q est transformée en soi par H et par H'; deux quadriques Q ont en commun deux coniques γ dont les plans passent par la droite 0_30_4 et qui touchent le plan $x_4 = 0$ en 0_3 et le plan $x_3 = 0$ en 0_4.

Les points $0_3,0_4$ sont multiples d'ordre ν pour les surfaces F', le cône tangent en 0_3 par exemple se composant du plan $x_4 = 0$ compté $\nu - 1$ fois et du plan $f_1(x_1,x_2) = 0$. Une conique γ rencontre une surface F' en dehors de $0_3,0_4$ en $2(p - 2) - 2(\nu + \nu - 1) = 0$ points. Les coniques γ forment une congruence linéaire G et le système | F' | est composé au moyen de cette congruence.

Rapportons projectivement les surfaces F' aux hyperplans d'un espace S_r à $r \leqslant p'_a - 1$ ou $r \leqslant \nu(\nu + 1) - 1$.

Les surfaces F' passant par un point d'une conique γ contiennent cette conique et par conséquent à cette conique correspond un point de S_r. Soit Ψ la surface lieu de ce point, surface représentant donc la congruence G.

Les coniques γ situées dans un plan passant par la droite 0_30_4 forment un faisceau et une surface F' contient une seule conique de ce faisceau, donc aux coniques du faisceau correspondent sur Ψ les points d'une droite. La surface Ψ est donc réglée.

Une surface F' contient une infinité de coniques γ formant un faisceau linéaire, donc les sections hyperplanes de Ψ sont rationnelles et la surface Ψ est une réglée rationnelle.

Deux surfaces F' ont en commun en dehors de la droite 0_30_4 une courbe d'ordre

$$(p - 2)^2 - 1 = 4\nu(\nu - 1)$$

formée de $2\nu(\nu - 1)$ coniques γ. Il semble donc que la surface Ψ est d'ordre $2\nu(\nu - 1)$. Mais on sait qu'une réglée rationnelle appartenant à un espace à r dimensions a au plus l'ordre $r - 1$. On doit donc avoir

$$2\nu(\nu - 1) \leqslant \nu(\nu + 1) - 2,$$

c'est-à-dire $(\nu - 1)(\nu - 2) \leqslant 0$. Cela est impossible pour $\nu > 2$.

Pour déterminer l'ordre de la surface Ψ, observons que dans le faisceau de coniques γ situées dans un plan passant par $0_3 0_4$, il y en a deux dégénérées. L'une est formée de la droite $0_3 0_4$ comptée deux fois, l'autre est formée des deux droites situées dans les plans $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Si s est la droite qui représente sur Ψ les coniques du faisceau, à ces coniques dégénérées correspondent deux points P_1, P_2 de cette droite. Toutes les surfaces F' passent par la droite $0_3 0_4$ donc le lieu du point P_1 est une droite a. Toutes les surfaces F' rencontrant la droite $x_3 = x_4 = 0$ en $p - 2$ points, le lieu du point P_2 est une courbe rationnelle normale α d'ordre $p - 2$ située dans un espace à $p - 2$ dimensions.

La droite a et la courbe α sont des directrices de la surface réglée Ψ et celle-ci est donc d'ordre $p - 1$ et appartient à une espace S_p à p dimensions.

A $p - 1$ points de Ψ, appartenant à un faisceau d'hyperplans de S_r correspondent $p - 1$ coniques γ appartenant à un faisceau de surfaces F'. Or ce faisceau a pour base (en dehors de $0_3 0_4$) $2\nu(\nu - 1)$ coniques γ. On en conclut que les surfaces F' passant par $p - 1 = 2\nu$ coniques γ passent en conséquence par $2\nu(\nu - 2)$ autres coniques γ. On en conclut qu'*entre la surface Ψ et la congruence G il y a une correspondance* $(1, \nu - 1)$.

Une conique γ rencontre la surface F en $2p$ points variables. A un point de Ψ correspondent donc $2(\nu - 1)p$ points de F. Ces points ne sont formés de groupes de l'involution I que si F est transformée en elle-même par H', c'est-à-dire si $a = b$ et $\varphi'_2 \equiv \varphi''_2$.

4. Signalons une dernière propriété de la surface F.

La polaire du point 0_3 par rapport à F se compose du plan $x_4 = 0$ et de la surface

$$(p + 1)ax_3^p + bx_4^p + (x_3 x_4)^{\alpha - 1}\varphi_1 + \ldots + \varphi_p = 0. \qquad (1)$$

De même, la polaire du point 0_4 se compose du plan $x_3 = 0$ et de la surface

$$ax_3^p + (p + 1)bx_4^p + (x_3 x_4)^{\alpha - 1}\varphi_1 + \ldots + \varphi_p = 0. \qquad (2)$$

Ces deux surfaces sont transformées en elles-mêmes par l'homographie H mais les involutions que cette homographie engendre sur chacune des surfaces possédant p points unis symétriques sur la droite $0_3 0_4$.

Les adjointes aux surfaces (1) et (2) sont des surfaces d'ordre $p - 4$ et par conséquent elles ont les caractères

$$p_a = (p-1)(p-2)(p-3):6, \qquad p^{(1)} = p(p-4)^2.$$

Le genre arithmétique p'_a des surfaces images de ces involutions est donné par

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) - p(p^2 - 1),$$

d'où $p'_a = (p^2 - 4p + 3) : 4 = (p - 1)(p - 3) : 4$.

Le genre linéaire des images des involutions est $\pi^{(1)} - 1 = (p - 4)$

Observons que les surfaces (1) et (2) se rencontrent suivant p sections planes faites par les plans

$$ax_3^p - bx_4^p = 0.$$

Liège, le 23 mai 1969.