SUR LES INVOLUTIONS DE GENRES UN ET DE SECONDE ESPÈCE, APPARTENANT A UNE SURFACE DE GENRES UN,

par

LUCIEN GODEAUX.

Étant donnée, sur une surface F de genres un ($p_a = P_4 = 1$), une involution I_n, d'ordre n et de genres un ($p_a = P_4 = 1$), M. ENRIQUES a démontré que cette involution est engendrée par un groupe G de n transformations birationnelles de F en elle-même (y compris l'identité) [1]).

Considérons une base du groupe G, c'est-à-dire un ensemble de transformations (T_1, T_2, ..., T_ν) du groupe G tel que: toute transformation du groupe est une combinaison de $T_1, T_2, \ldots T_\nu$; aucune des transformations T_1, T_2, ..., T_ν n'est une combinaison des autres.

Nous distinguerons deux espèces d'involutions I :

Les involutions de première espèce seront les involutions I_n telles que des puissances de deux quelconques des transformations T_1, T_2, ..., T_ν aient quelques points invariants communs.

Les involutions de seconde espèce seront les involutions telles que, parmi les transformations $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$, on puisse en trouver au moins deux n'ayant, de même que leurs puissances, aucun point invariant commun.

---

1). F. ENRIQUES. — Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno. *Rend. R. Accad. Bologna*, 1910.

Dans un Mémoire publié l'an dernier [1]), nous avons démontré que :

Les involutions de genres un et de première espèce, appartenant à une surface de genres un, sont d'ordres 2, 3, 4, 6, 8 *ou* 12.

Dans le travail actuel, nous déterminerons les involutions de seconde espèce. On arrivera ainsi au théorème suivant :

Les involutions de genres un et de seconde espèce, appartenant à une surface de genres un, sont d'ordres 4, 8, 16 *ou* 9.

1. Soient F une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$). I_n, une involution d'ordre n, de genres un et de seconde espèce, appartenant à F, ($T_1, T_2, \ldots, T_\nu$) une base du groupe G générateur de l'involution I_n.

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ les périodes des transformations $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$ respectivement. Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha^\nu$ sont évidemment des diviseurs de n.

Remarquons que si μ est un facteur de n, il existe certainement, dans le groupe G, une transformation de période μ. Cela résulte d'une propriété bien connue des groupes finis de substitutions.

2. Nous allons actuellement établir un théorème qui nous permettra de faire une première classification des involutions étudiées ici.

Soit I_α une involution de première espèce avec laquelle I_n est composée et supposons que $T_1, T_2, \ldots, T_\varepsilon$ étant les transformations génératrices de I_α, aucun point de coïncidence de cette involution ne soit invariant pour une puissance quelconque de $T_{\varepsilon+1}, \ldots, T_\nu$.

Considérons un groupe de I_α formé de $\frac{\alpha}{\beta}$ points de coïncidence β-uple. Les points de ce groupe sont transportés, par les transformations $T_{\varepsilon+1} \ldots, T_\nu$ en $\frac{n-\alpha}{\beta}$ nouveaux points et l'ensemb'e des $\frac{n}{\beta}$ points ainsi obtenus forme un groupe de I_n. Mais I_n étant composée avec I_α, ces $\frac{n}{\beta}$ points se partagent en $\frac{n}{\alpha}$ groupes de $\frac{\alpha}{\beta}$ points, de I_α. Par suite, le nombre des groupes de I_α formés de points de coïncidence β-uple, est divisible par $\frac{n}{\alpha}$.

---

1). L. GODEAUX. — Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres 1. *Annales de l'Ecole Normale Sup.*, 1914.

On a donc ce théorème :

Etant donnée une involution de seconde espèce et de genres un, *d'ordre* n, *appartenant à une surface de genres* un, *et si cette involution est composée avec une involution de première espèce, d'ordre* α, *aucun des points de coïncidence de cette dernière involution n'étant invariant pour une transformation génératrice de* I_n, *non génératrice de* I_α, *le nombre des groupes de* I_α *formés de points de coïncidence d'un même ordre, est divisible par* $\frac{n}{\alpha}$.

3. En nous servant de ce théorème, nous allons déterminer les valeurs possibles de n.

Supposons en premier lieu que l'on ait $\alpha = 2$. Une involution d'ordre *deux* possède 8 points de coïncidence, donc $\frac{n}{2}$ doit diviser 8 et on a, par suite, $n = 4$, 8 ou 16.

Si $\alpha = 3$, $\frac{n}{3}$ doit diviser 6, car une involution d'ordre 3 possède six points de coïncidence. On a par suite, $n = 9$ ou 18.

Si $\alpha = 4$, comme une involution d'ordre 4 possède 2 groupes formés de points de coïncidence double, $\frac{n}{4}$ doit diviser 2. On a donc $n = 8$.

Passons au cas où $\alpha = 6$. Une involution d'ordre 6 possède 2 groupes formés de points de coïncidence double. On a donc $\frac{n}{6}$ diviseur de 2 et par suite, puisque nécessairement $n > 6$, $n = 12$.

Si $\alpha = 8$, deux cas peuvent se présenter, car il y a deux sortes d'involutions d'ordre 8 et de première espèce appartenant à une surface de genres un. L'une possède un groupe formé de points de coïncidence double. Si nous avons affaire à une involution de cette sorte, $\frac{n}{8}$ devra diviser 1 et par suite, on aura $n = 8$, ce qui est absurde.

Une involution de la seconde sorte possède 3 groupes formés de points de coïncidence quadruple et 2 points de coïncidence octuple. Si I_n est composée avec une pareille involution, $\frac{n}{8}$ doit diviser d'une part 2, d'autre part 3. Cela est impossible. On voit donc que l'on ne peut avoir $\alpha = 8$.

Si $\alpha = 12$, une involution d'ordre 12, et de première espèce, possédant un seul groupe de points de coïncidence triple, $\frac{n}{12}$ divise 1. Il s'ensuit $n = 12$, ce qui est absurde.

4. Nous écarterons encore deux des valeurs possibles trouvées pour n.

En premier lieu, nous avons trouvé que si $\alpha = 3$, on peut avoir $n = 18$. Mais dans ce cas, il existe certainement, parmi les transformations génératrices de I_n, une transformation T de période 2.

Si T n'est la puissance d'aucune autre transformation, on a, d'après ce qui a été vu plus haut, $n = 4$, 8 ou 16, ce qui est absurde.

Si au contraire, T est la puissance d'une autre transformation T′, T′ ne peut avoir que la période 6, puisque $n = 18$ ne contient qu'une fois le facteur 2. Mais alors, on a $n = 12$, ce qui est également absurde.

En conclusion, si $\alpha = 3$, on ne peut avoir $n = 18$.

En second lieu, nous avons trouvé que si $\alpha = 6$, $n = 12$. Soient T_1 la transformation génératrice de I_α (qui est, comme on sait, cyclique), T_2 une autre transformation génératrice de I_n, qui ne soit pas une puissance de T_1.

T_2 ne peut avoir l'une des périodes 2, 3, 4, sans quoi on n'aurait pas $n = 12$; par suite, T_2 a la période 6. Mais cela conduit à une absurdité, car T_2 doit engendrer une involution n'ayant aucun point de coïncidence commun avec I_α, et par suite, T_2 et ses puissances transforment un groupe de I_α, formé de 3 points de coïncidence double, en 5 groupes analogues de I_α. Cela est imposible, puisque I_α ne possède que 2 groupes formés de points de coïncidence double. On ne peut donc avoir $\alpha = 6$.

En résumé, nous voyons que trois cas peuvent se présenter, suivant que les transformations du groupe générateur G de I_n sont :

1⁰ toutes de période 2 ; on a $n = 4$, 8 ou 16.

2⁰ toutes de période 3 ; on a $n = 9$.

3⁰ l'une d'elles est de période 4 ; on a $n = 8$.

Nous allons examiner ces trois cas successivement et déterminer chaque fois les singularités d'une surface normale de genres un, image de l'involution étudiée.

5. Considérons une involution I_n, de seconde espèce, dont toutes les transformations génératrices ont la période 2, et soit $(T_1, T_2, \ldots, T_\nu)$ une base du groupe générateur G.

L'ordre de G, égal à l'ordre n de l'involution I_n, est égal à 2^ν; ν peut donc prendre les valeurs 2, 3 ou 4.

La transformation $T_i\, T_k$ a la période 2. On a donc

$$T_i\, T_k = T_k\, T_i,$$

c'est-à-dire que le groupe G est *abélien*.

Les transformations de G sont, l'identité exclue, au nombre de $2^\nu - 1$. Chacune d'elles engendre une involution d'ordre 2 ayant 8 points de coïncidence. L'involution I_n possède donc (chaque groupe de cette involution contenant un point de coïncidence étant formé de $2^{\nu-1}$ pareils points) $2^{4-\nu}\left(2^\nu - 1\right)$ groupes formés de points de coïncidence double.

Soit Φ une surface normale, de genres un, située dans un espace linéaire à π dimensions, S_π, image de I_n. Cette surface a l'ordre $2\pi - 2$ et ses sections hyperplanes sont le genre π.

Dans notre travail dejà cité, nous avons démontré qu'un point de diramation d'ordre 2, de Φ, était un point double ordinaire. A chaque groupe de I_n formé de points de coïncidence double, correspond un point double conique de Φ. Cette surface a donc $2^{4-\nu}\left(2^\nu - 1\right)$ points doubles coniques.

6. Considérons maintenant une involution I_n, d'ordre $n = 9$, dont toutes les transformations génératrices sont de période 3

Soient T_1, T_2 deux transformations génératrices de I_n dont l'une n'est pas une puissance de l'autre. Ces deux transformations forment nécessairement une base du groupe G générateur de I_n, car elles engendrent un groupe d'ordre 9 qui doit se confondre avec G.

Les transformations génératrices de G sont, d'une part

$$\begin{array}{lll} 1 & T_1 & T_1^2 \\ T_2 & T_1\, T_2 & T_1^2\, T_2 \\ T_2^2 & T_1\, T_2 & T_1^2\, T_2^2 \end{array}$$

d'autre part

$$\begin{array}{lll} 1 & T_2 & T_2^2 \\ T_1 & T_2 T_1 & T_2^3\, T_1 \\ T_1 & T_2\, T_1^2 & T_2^2\, T_1^2. \end{array}$$

On doit nécessairement avoir $T_1T_2 = T_2T_1$, $T_1^2T_2^2 = T_2^2T_1^2$, $T_1^2T_2 = T_2T_1^2$, $T_1T_2^2 = T_2^2T_1$, et par suite, le groupe est abélien.

L'involution I_n est composée au moyen de 4 involutions d'ordre trois, engendrées respectivement par les transformations T_1, T_2, T_1T_2, $T_1T_2^2$. L'involution I_n possède donc 24 points de coïncidence se répartissant en 8 groupes de 3 points.

Considérons une surface normale de genres un, Φ, de S_π, image de l'involution I_n. A chaque groupe de I_n correspond un point de Φ et en particulier, à un groupe de I_n composé de 3 points de coïncidence (triple) correspond un point de diramation triple de Φ. En un de ces points, Φ a un point double biplanaire ordinaire (voir mon *Mémoire* cité plus haut), par suite la surface Φ, image de I_n, possède 8 points doubles biplanaires ordinaires.

7. Considérons enfin une involution I_n, de seconde espèce et d'ordre $n = 8$, dont l'une des transformations génératrice, T_1, a la période 4.

Soit T_2 une transformation génératrice I_n qui ne soit pas une puissance de T_1. T_2 ne peut avoir que la période 2 ou 4, car autrement, on n'aurait pas $n = 8$. De plus, si T_2 a la période 4, les transformations

$$\begin{array}{cccc} 1 & T_1 & T_1^2 & T_1^3 \\ T_2 & T_1\,T_2 & T_1^2\,T_2 & T_1^3\,T_2 \\ T_2^2 & — & — & — \\ T_2^3 & — & — & T_1^3\,T_2^3 \end{array}$$

appartiendront toutes au groupe G, générateur de I_n. Mais l'ordre de G est égal à 8, donc on aura nécessairement 8 de ces 16 transformations identiques aux 8 autres. En d'autres termes, puisque T_2 n'est pas une puissance de T_1, on aura

$$T_1^2 = T_2^2.$$

Mais alors, les points de coïncidence pour l'involution d'ordre 2 engendrée par $T_1^2 = T_2^2$ seront invariants pour des puissances de T_1, T_2 et I_n ne sera pas une involution de deuxième espèce. On en conclut que T_2 a la période 2.

Les transformations du groupe G générateur de I_n sont :

$$\begin{array}{cccc} 1 & T_1 & T_1^2 & T_1^3 \\ T_2 & T_1\,T_2 & T_1^2\,T_2 & T_1^3\,T_2, \end{array}$$

(T_1, T_2) formant nécessairement une base du groupe G.

Remarquons tout d'abord que les transformations T_1^2, T_2, de période 2, doivent engendrer une involution d'ordre 4 et de seconde espèce. On a donc

$$T_1^2\, T_2 = T_2\, T_1^2,$$

et la transformation $T_1^2\, T_2$ est de période 2.

Fixons l'attention sur la transformation $T_1\, T_2$. Si elle a la période 4, comme elle n'est pas une puissance de T_1, le raisonnement fait quelques lignes plus haut conduit à l'identité

$$(T_1\, T_2)^2 = T_1^2.$$

L'involution I_n serait alors de première espèce. Par suite, $T_1\, T_2$ et de même $T_1^3\, T_2$, ont la période 2.

L'involution I_n est composée avec une involution d'ordre 4 (engendrée par T_1) et quatre involutions d'ordre 2 engendrées respectivement par T_2, T_1T_2, $T_1^2T_2$, $T_1^3T_2$. Il y a donc, sur F, pour I_n, quatre points de coïncidence quadruple (formant deux groupes de I_n) et $4 \times 8 + 4 = 36$ points de coïncidence formant 9 groupes de I_n.

Une surface normale de genres un, image de I_n, possédera par suite 2 points de diramation quadruple et 9 points de diramation double. Les premiers seront des points doubles biplanaires ayant chacun, dans leur domaine du premier ordre, un point double conique ; les derniers seront des points doubles coniques.

8. On peut résumer ce qui précède par l'énoncé suivant :

Les involutions de genres un *et de seconde espèce, appartenant à une surface de genres* un, *sont de cinq sortes.*

Les involutions des quatre premières sortes sont engendrées par des groupes abeliens de transformations et ont respectivement les ordres 4, 8, 16 *et* 9.

Les involutions de la cinquième sorte engendrées par deux transformations : l'une T_1, *de période* 4, *l'autre* T_2, *de période* 2, *telles que*

$$T_1^2T_2 = T_2T_1^2,$$
$$(T_1T_2)^2 = 1.$$

Elles sont d'ordre 8.

Une surface normale de genres un, *image d'une involution de seconde espèce, possède :*

a) 12, 14 *ou* 15 *points doubles coniques, ou*

b) 8 *points doubles biplanaires ordinaires, ou* *c) 2 points doubles biplanaires ayant chacun, dans leur domaine du premier ordre, un point double conique, et 9 points doubles coniques.*

Nous avons dressé, ci-après, un tableau résumant ce travail ainsi que celui cité au début.

Involutions de genres *un* appartenant à une surface de genres *un*

Ordre	Espèce	Périodes des transformations génératrices				Nombre de groupes formés de points de coïncidence d'ordre						Caractères du groupe générateur
		T_1	T_2	T_3	T_4	2	3	4	6	8	12	
2	1	2	—	—	—	8	—	—	—	—	—	Cyclique
3	1	3	—	—	—	—	6	—	—	—	—	Cyclique
4	1	4	—	—	—	2	—	4	—	—	—	Cyclique
4	2	2	2	—	—	12	—	0	—	—	—	Abélien
6	1	6	—	—	—	2	2	—	2	—	—	Cyclique
8	1	4	4	—	—	1	—	0	—	4	—	$T_1^2 = T_2^2$
8	1	4	4	-	—	0	—	3	—	2	—	$T_1^2 = T_2^2$
8	2	2	2	2	—	14	—	0	—	0	—	Abélien
8	2	4	2	—	—	9	—	2	—	0	—	$T_1^2T_2 = T_2T_1^2$, $T_1T_2 = T_2T_1^3$.
9	2	3	3	—	—	—	8	—	—	—	—	Abélien
12	1	3	4	—	—	0	1	2	0	—	2	$T_2^{-1}\ T_1\ T_2 = T_1^{-1}$
16	2	2	2	2	2	15	—	0	—	0	—	Abélien.

Nieucappelle (Dixmude), 18 Juin 1915.