Bulletin de la Classe des sciences

Une représentation hyperspatiale des droites de la surface cubique

Lucien Godeaux

Résumé
Étude de la surface cubique considérée comme complexe de ses tangentes. Représentation sur l'hyperquadrique de Klein.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Une représentation hyperspatiale des droites de la surface cubique

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude de la surface cubique considérée comme complexe de ses tangentes. Représentation sur l'hyperquadrique de Klein.

Les 27 droites dela surface cubique ont suscité de nombreux travaux, notamment pour l'étude du groupe de substitution de ces droites. Nous citerons Ernesto Pascal (1) et, plus récemment, M .W. L. Edge (2). Ce dernier a construit une géométrie finie dans un espace à cinq dimensions où aux 27 droites d'une surface cubique correspondent 27 points appartenant à une hyperquadrique. Nous nous sommes demandé s'il était possible d'obtenir une représentation analogue en restant dans la géométrie projective habituelle. La réponse est affirmative et il suffit de considérer la représentation sur l'hyperquadrique de Klein dans un espace à cinq dimensions du complexe des tangentes à la surface cubique.

Nous partons d'une surface cubique générale contenant 27 droites distinctes et par suite dépourvue de points multiples. De plus, nous

---

(1) *Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3 e di genere 4 e loro gruppi di sostituzioni* (Annali di Matematica, 1892, série 2, t. XX, pp. 163-226). *Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3° ordine e sui gruppi ad esso isomorfi* (Idem, 1963, série 2, t. XX, pp. 267-332; 1893, série 2, t. XXI, pp. 85-137).

(2) *Quadrics over CF (2) and their relevance for the cubic surface group* (Canadian Journal of Mathematics, 1959, pp 625-645). Voir aussi H. S. M. COXETER, *Polytopes over CF (2) and their relevance for the cubic surface group* (Idem, pp. 646-650).

supposerons que cette surface ne contient aucun point d'Eckardt, c'est-à-dire de point en lequel le plan tangent à la surface rencontre celle-ci suivant trois droites passant par le point de contact. Nous écartons donc de nos considérations la surface diagonale de Clebsch.

Le complexe des tangentes à une surface cubique générale F est représenté sur l'hyperquadrique Q de Klein d'un espace S_5 à cinq dimensions par une variété V à trois dimensions d'ordre 12. Aux tangentes inflexionnelles de F correspondent sur V les points d'une surface Φ double pour la variété. Aux 27 droites de la surface F correspondent 27 points quadruples pour la variété V. Ces points forment des configurations intéressantes. Par exemple, aux droites de deux sixains formant un double sixain correspondent les sommets de deux hexaèdres inscrits et circonscrits l'un à l'autre.

Une étude approfondie de la configuration des 27 points permettrait de retrouver les substitutions des 27 droites de la surface cubique, qui forment un groupe d'ordre 51840. Tel n'est pas notre dessein, cette recherche ayant déjà été faite par d'autres procédés comme nous l'avons indiqué plus haut. Bornons-nous à remarquer qu'une telle étude reviendrait à rechercher les substitutions conservant une forme $\Omega(X,Y)$ bilinéaire par rapport à deux séries de six variables homogènes lorsque l'on a $\Omega(X,X) = 0$ et $\Omega(Y,Y) = 0$.

1. Soit F une surface cubique générale contenant 27 droites distinctes. La surface F est dépourvue de points d'Eckardt et de points doubles.

Le complexe des tangentes à F est représenté sur l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 par une variété V à trois dimensions. Les tangentes à F en un point forment un faisceau qui est représenté sur Q par une droite. La variété V est donc réglée.

Les tangentes à F appartenant à un complexe linéaire forment une congruence d'ordre six et de classe six car les tangentes à F passant par un point forment un cône du sixième ordre. Par conséquent un hyperplan de S_5 rencontre V suivant une surface d'ordre $6 + 6 = 12$ et la variété V est d'ordre 12.

Le complexe des tangentes à une surface cubique générale est représenté sur l'hyperquadrique Q *de Klein de* S_5 *par une variété réglée* V *à trois dimensions d'ordre 12.*

D'après un théorème de Klein (¹), une variété à trois dimensions appartenant à l'hyperquadrique Q est l'intersection complète de cette dernière avec une hypersurface de S_5. Il existe donc une hypersurface W qui découpe sur Q la variété V. Cette hypersurface est d'ordre six et est réglée.

La variété V est l'intersection de l'hyperquadrique Q *et d'une hypersurface réglée* W *d'ordre six.*

2. Les droites de l'espace S_3 contenant F passant par un point ont pour homologues sur Q les points d'un plan σ. Les plans σ engendrent une variété doublement infinie Σ. Par un point de Q passent ∞^1 plans σ.

Aux droites d'un plan de S_3 correspondent sur Q les points d'un plan σ'. Ces plans forment une variété doublement infinie Σ'. Par un point de Q passent ∞^1 plans σ'.

En général, un plan σ et un plan σ' ne se rencontrent pas, mais s'ils se rencontrent, c'est suivant une droite.

La polaire d'un point P par rapport à F est une quadrique qui rencontre F suivant une courbe γ d'ordre six et de genre quatre. Cette courbe possède six tangentes inflexionnelles passant par P. Les sections planes du cône projetant γ de P sont des courbes du sixième ordre possédant six points doubles de rebroussement. A une de ces sections planes, c'est-à-dire aux tangentes à F aux points de la courbe γ, correspond homographiquement la courbe intersection de V avec le plan σ homologue de P. Cette courbe Γ est donc du sixième ordre et possède six points doubles de rebroussement.

Un plan σ rencontre la variété V suivant une courbe Γ du sixième ordre possédant six points doubles de rebroussement.

Aux tangentes à F situées dans un plan ϖ correspondent dans le plan σ' homologue une courbe Γ' du sixième ordre transformée dualistique de la section de F par le plan ϖ. Aux neuf points d'inflexion de cette courbe correspondent neuf point doubles de rebroussement de la courbe Γ'.

(¹) *Ueber einen liniengeometrischen Satz* (Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. I, Berlin, 1921, pp. 153-159). Ce théorème signifie que l'équation du complexe des tangentes à une surface cubique s'exprime par une seule équation en coordonnées de droites.

Un plan σ' rencontre la variété V suivant une courbe Γ' du sixième ordre contenant neuf points doubles de rebroussement.

3. Considérons un point R non parabolique de F et soit ρ le plan tangent à F en ce point. Le point R est le point de contact de deux tangentes inflexionnelles (ou asymptotiques) r_1, r_2. Au faisceau de droites (R, ρ) correspond sur V une droite r' et aux droites r_1, r_2 deux points R'_1, R'_2 de cette droite.

Le plan ρ coupe la surface F suivant une cubique ayant un point double en R, les tangentes étant r_1, r_2, et possédant trois points d'inflexion. La courbe Γ' qui lui correspond dans le plan σ' homologue de ρ possède une tangente double r' et trois points doubles de rebroussement. Les points de contact de la droite r' avec la courbe Γ' sont précisément les points R'_1, R'_2. On sait que ces points se correspondent dans une transformation de Laplace d'après un théorème de Bompiani et Tzitzeica ([1]).

Les plans passant par r_1 par exemple coupent F suivant des cubiques ayant un point d'inflexion en R, donc les courbes Γ' qui leur correspondent dans les plans σ' homologues possèdent un point double de rebroussement en R'_1.

Le lieu des points doubles de rebroussement des courbes Γ, Γ' est une surface Φ d'ordre quinze. En effet, soit dans S_3 une congruence linéaire de droites d'axes s_1, s_2. Les plans passant par s_1 coupent F suivant des cubiques ayant 9 tangentes d'inflexion. D'autre part par un point de s_1 passent six tangentes d'inflexion. Il en résulte que le lieu des tangentes d'inflexion de F s'appuyant sur s_1 est une réglée d'ordre quinze passant six fois par s_1. Cette réglée rencontre s_2 en quinze points, donc il y a quinze tangentes inflexionnelles appartenant à une congruence linéaire. A celle-ci correspond dans S_5 la section de Q par un espace à trois dimensions et cet espace rencontre Φ en quinze points.

Un point de la surface Φ est double pour les courbes Γ, Γ' situées dans les plans σ, σ' passant par ce point. Nous allons voir qu'il est double pour la variété V.

Un plan τ coupe V en douze points. Aux points d'intersection

([1]) Voir par exemple notre mémoire sur *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1964).

de τ et de Q correspondent dans S_3 les droites t d'une demi-quadrique de support T. Projetons d'un point de la quadrique T la courbe intersection de Q et de T sur un plan τ'. A cette courbe correspond une courbe γ du sixième ordre possédant deux points triples $0_1, 0_2$. Aux droites t correspondent les droites passant par un des points triples, par exemple par 0_1. La polaire de 0_1 par rapport à la courbe γ rencontre cette courbe en douze points en dehors de $0_1, 0_2$, ce qui confirme que V est bien du douzième ordre. Si le plan τ passe par un point de la surface Φ, il correspond à ce point par les opérations précédentes une tangente à la courbe γ passant par 0_1 et rencontrant la courbe en trois points confondus. La polaire de 0_1 par rapport à γ touche cette courbe au point de contact et la tangente compte pour deux. Il en résulte qu'un plan τ passant par un point de la surface Φ ne rencontre plus V qu'en dix points ultérieurs. Ce point est donc double pour la variété V.

La variété V *possède une surface double* Φ *d'ordre quinze représentant les tangentes d'inflexion à la surface* F.

4. Soient a une droite de la surface cubique F et A le point de V qui lui correspond. Le complexe linéaire spécial K lieu des droites s'appuyant sur a contient les tangentes à F aux points de a. Il lui correspond dans S_5 l'hyperplan K' tangent à Q au point A.

Si R est un point de a et ρ un plan passant par a, il correspond au faisceau de droites (R,ρ) une droite r' appartenant à V et passant par A.

Il existe cinq plans ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5 passant par a et coupant F suivant deux droites. Désignons par r_{i1}, r_{i2} les droites de F se trouvant dans ρ_i et par R_i leur point d'intersection. Il est possible de trouver cinq droites parmi les r_{i1}, r_{i2} deux à deux gauches déterminant un complexe linéaire. Considérons les cinq droites $r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{41}, r_{51}$ et supposons qu'elles puissent appartenir à une congruence linéaire. Celle-ci ne peut être la congruence des tangentes à F aux points de a, cette congruence est du second ordre. Si la congruence existe, elle a comme directrices la droite a et une droite s'appuyant sur les cinq droites en question. Cette droite s'appuyant sur les quatre premières droites appartient à F et rencontre le plan ρ_5 en un point qui ne peut être le point R_5, car alors ce point serait double pour F. Ce point appartient à une des droites r_{51}, r_{52}. On peut toujours supposer que c'est la seconde de ces droites et alors il n'existe pas de droite s'appuyant sur les cinq premières droites de chaque couple. Ces droites déterminent un complexe linéaire qui est nécessairement le complexe K.

Les droites de V passant par A appartiennent à l'hypersurface W. On en conclut que l'hypersurface W a comme hyperplan tangent en A le même hyperplan K' que Q. Cela étant, le point A est double pour chacune des hypersurfaces Q et W, donc il est quadruple pour leur intersection V.

Aux 27 droites de la surface cubique F *correspondent 27 points quadruples de la variété* V.

5. Soit R un point de la droite a. La quadrique polaire de R par rapport à F passe par la droite a et rencontre ultérieurement F suivant une courbe γ du cinquième ordre passant par R en y touchant la tangente inflexionnelle distincte de a et rencontrant encore a en deux points R_1, R_2. Le cône projetant γ de R passe deux fois par la droite a.

Le plan σ homologue de R coupe V suivant une quartique γ' ayant un point double en A et suivant les droites r_1', r_2' homologues de R_1, R_2 et qui passent par A. Dans ce plan σ, la courbe $\Gamma = \gamma' + r_1' + r_2'$ a un point quadruple en A.

Soit maintenant un plan ρ passant par a. Il coupe encore la surface F suivant une conique δ rencontrant a en deux points R_1, R_2. Soient r_1, r_2 les tangentes à δ en R_1, R_2. Ce sont des tangentes inflexionnelles de F.

Dans le plan σ' de Q homologue de ρ se trouve une conique δ' correspondant à la conique-enveloppe δ et deux droites r_1', r_2' correspondant à R_1, R_2. Ces droites doivent être comptées deux fois de sorte que l'on a $\Gamma' = \delta' + 2(r_1' + r_2')$. Le point A est quadruple pour cette courbe.

Supposons que ρ soit le plan tangent à F au point R. Les plans σ, σ' homologues de R, ρ ont en commun la droite correspondant au faisceau (R, ρ). La conique δ située dans le plan ρ passe par R et la tangente à cette conique en R est pour fixer les idées r_1. Cette droite appartient donc au cône projetant la courbe γ de R et les plans σ, σ' ont en commun la droite r_1.

Observons que le plan σ' qui correspond au plan ρ_1 par exemple coupe V suivant trois droites qui doivent être comptées deux fois. Soient en effet R_{11}, R_{12} les points de rencontre des droites r_{11}, r_{12}

avec a. Aux droites r_{11}, r_{12} correspondent des points R'_{11}, R'_{12} quadruples pour V. Aux points R, R_{11}, R_{12} correspondent respectivement les droites $R'_{11}R'_{12}$, $R'_1R'_{11}$, $R'_1R'_{12}$. La courbe Γ' du plan σ' est formée de ces droites comptées deux fois. Les sommets du triangle formé par ces droites sont quadruples pour V.

6. Représentons par $\Omega(X,Y) = 0$ la condition pour que deux points X,Y soient conjugués par rapport à Q. La forme $\Omega(X,Y)$ est donc une forme bilinéaire par rapport aux six coordonnées homogènes des points X,Y et l'équation de Q est $\Omega(X,X) = 0$. Observons que la condition nécessaire et suffisante pour que les droites x,y homologues dans S_3 des points X,Y supposés appartenir à Q se rencontrent est $\Omega(X,Y) = 0$ et dans ces conditions, la droite XY appartient à Q.

Soient a_1, a_2, a_3 trois droites deux à deux gauches de F et A_1, A_2, A_3 les points qui les représentent sur V. Ces droites déterminent une quadrique φ qui coupe encore F suivant trois droites deux à deux gauches b_1, b_2, b_3. Soient B_1, B_2, B_3 les points qui leur correspondent sur V.

Aux droites de la quadrique φ de même mode que les droites a correspondent les points d'intersection de Q par le plan α déterminé par les points A. Aux droites de φ de même mode que les b correspondent les points de la section de Q par un plan β conjugué de α par rapport à Q et déterminé par les points B. On a

$$\Omega(A_i,A_j) \neq 0,\ \Omega(B_i,B_j) \neq 0 \text{ pour } i \neq j,\ \Omega(A_i,B_j) = 0.$$

La quadrique φ ne pouvant rencontrer F en dehors des droites a et b, le plan α ne peut rencontrer V en dehors des points A et le plan β ne peut rencontrer V en dehors des points B. Les points A et B sont quadruples pour la variété V.

7. Soient a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 six droites de F deux à deux gauches formant un sixain et A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 les points qui leur correspondent sur Q. Soient b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6 les six droites du sixain associé et B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6 les points qui les représentent sur V. La droite b_i rencontrent les cinq droites a qui portent un indice distinct de i et de même la droite a_i rencontre les cinq droites b d'indice distincts de i. Nous avons

$$\Omega(A_i,A_j) \neq 0,\ \Omega(B_i,B_j) \neq 0 \text{ pour } i \neq j.$$

de plus, nous avons

$$\Omega(A_1, B_1) \neq 0, \ \Omega(A_2, B_1) = 0, \ \Omega(A_3, B_1) = 0, \ldots, \Omega(A_6, B_1) = 0,$$

de sorte que l'hyperplan polaire du point B_1 esr $A_2A_3A_4A_5A_6$. Mais le point B_1 appartient à l'hyperquadrique Q, donc son hyperplan polaire par rapport à Q est tangent à Q en B_1. Donc l'hyperplan $A_1A_3A_4A_5A_6$ contient le point B_1.

Plus généralement, l'hyperplan tangent à Q en B_i contient les cinq points A dont l'indice est différent de i.

On peut intervertir les rôles des points A et B, de sorte que l'hyperplan tangent à Q au point A_i contient ceux des points B dont l'indice est différent de i.

On voit donc que *les points de V qui représentent les droites de deux sixains associés sont les sommets de deux hexaèdres inscrits et circonscrits l'un à l'autre.*

On trouve ainsi une généralisation des tétraèdres de Mœbius [1].

8. L'hyperquadrique Q est la seule hyperquadrique de S_5 contenant V; elle est déterminée par les 27 de V points qui représentent les 27 droites de F. Les substitutions conservant les 27 droites de F ont pour homologues dans S_5 des substitutions conservant les 27 points quadruples de V. Ces substitutions conservent l'hyperquadrique Q et sont donc des substitutions conservant la forme $\Omega(X,Y)$ sous les hypothèses $\Omega(X,X) = 0$ et $\Omega(Y,Y) = 0$ [2].

[1] Nous avons signalé l'existence de ces hexaèdres dans une communication au *Congrès du Groupement des Mathématiciens d'expression latine* (Bucarest, septembre 1969). Nous avons depuis appris qu'ils avaient déjà été signalés par H. F. BAKER, *Principles of Geometry.* (Cambridge, University Press, tome IV, 1940, pp. 59 et 63-64).

[2] Le théorème de Geiser suivant lequel le contour apparent d'une surface cubique vue d'un de ses points est une quartique plane possédant 28 tangentes, lie évidemment le groupe des substitutions portant sur ces bitangentes à celui du groupe des 27 droites d'une surface cubique. Voir sur cet objet une note de E. CARTAN, *Quelques remarques sur les 28 bitangentes d'une quartique plane et les 27 droites d'une surface cubique* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1946, pp. 42-45; *Œuvres Complètes,* Première partie, vol. II, pp. 1353-1356). On peut également consulter le premier mémoire cité d'Ernesto Pascal et une note de M. EDGE, *A setting for the groupe of the bitangentes* (Proceedings of the London Mathematical Society, 1960, t. X, pp. 583-603). Rappelons que l'on peut prendre comme modèle projectif de la surface représentant les couples de points d'une quartique plane de genre trois, un point de la surface correspondant à deux couples de points formant un groupe canonique, une surface d'ordre 12 de l'espace à six dimensions, à sections hyperplanes de genre dix, possédant 28 points doubles coniques homologues des 28 bitangentes.

On sait que l'on peut représenter point par point la surface F sur un plan ξ de telle sorte qu'aux droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ correspondent respectivement les domaines de six points $A'_1, A'_2, \ldots, A'_6$ (non situés sur une même conique et dont trois ne sont pas en ligne droite), les sections planes de F ayant pour homologues les cubiques passant par les points A'. A la droite b_i correspond la conique passant par les points A' sauf par A'_1. Les autres droites de F correspondent aux droites $A'_i A'_k$. Désignons par C_{ik} le point qui représente cette droite sur V. Les points $C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}$ sont conjugués du point A_1 et par conséquent l'hyperplan tangent à Q en A_1 contient non seulement les points B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 mais aussi les points $C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}$. Comme la droite a_1 a été choisie arbitrairement,

L'hyperplan tangent à l'hyperquadrique Q en un point représentant une droite de F contient encore dix points représentant des droites de F.

Liège, le 20 octobre 1969.