GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — Adjutant **Lucien Godeaux**, *Recherches sur les surfaces de genres un* (troisième note). Note présentée par **M. Hepites**, M.A.R., dans la séance du 22 octobre 1915.

Dans deux premières notes publiées sous le même titre [1], j'ai commencé la détermination des surfaces de genres un $(p_a = P_4 = 1)$, possédant trois transformations birationnelles involutives en elle-même. J'ai précisément déterminé les cas où l'une au moins des involutions engendrées par ces trois transformations, est de genres un, et possède par suite 8 points de coïncidence. Dans cette troisième note, je vais considérer le cas où l'une des invo utions, et de genres zéro et de bigenre un $p_a = P_3 = 0$, $IP_2 = 1$.

(1) Ce *Bulletin*, tomes II et III.

*

Une quatrième note sera consacrée au ca où les trois involutions sont rationnelles.

1. — Soit F une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) qui soit transformée en elle-même par trois transformations birationnelles involutives T_1, T_2, T_3. On suppose de plus que ces trois transformations sont telles que

$$T_3 = T_1 T_2 = T_2 T_1 .$$

Les transformations T_1, T_2, T_3 engendrent des involutions d'ordre deux que nous désignerons respectivement par I'_2, I''_2, I'''_2.

Nous supposerons que l'une de ces involutions, I'_2, est de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Nous connaissons déjà deux cas où cela se présente; on a alors I''_2 de genres un et I'''_2 rationnelle, ou I''_2 de genres un et I'''_2 de genres zéro et de bigenre un [1]. Nous aurons donc à considérer trois cas:

1°. I''_2 et I'''_2 sont toutes deux de genres zéro et de bigenre un;

2°. I''_2 de genres zéro et de bigenre un, I'''_2 rationnelle;

3°. I''_2 et I'''_2 toutes deux rationnelles.

2. — Examinons le premier cas, celui où les trois involutions engendrées par T_1, T_2, T_3 sont de genres zéro et de bigenre 1 ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Désignons, comme nous l'avons déjà fait dans nos notes précédentes, par Φ_1, Φ_2, Φ_3 des surfaces (dans le cas présent de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) images respectivement des involutions I'_2, I''_2, I'''_3; par Φ une surface image de l'involution d'ordre 4 engendrée par T_1, T_2 et T_3.

La surface Φ ne peut être que rationnelle ($p_a = P_2 = 0$) ou de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Dans les deux cas, l'involution d'ordre deux existant sur

(1) Voir notre deuxième note.

Φ_1 et dont Φ est une image (par construction), possède des points de coïncidence (une infinité ou quatre suivant les cas). À un de ces points corespondent deux points A_1, A_2 de F, car l'involution I'_2 ne peut avoir de points de coïncidence [1]. T_1 transforme donc A_1 en A_2. Mais, par construction, il faut que l'une des transformations T_2, T_3, T_2 par exemple, change également A_1 en A_2. Mais alors, ces point sont invariants pour T_3, c'est-à-dire que l'involution I'''_2 possède des points de coïncidence. Cela est impossible, donc le premier cas ne peut se présenter.

3. — Le même raisonnement conduit à exclure le deuxième cas, celui où I'_2, I''_2, Φ_1, Φ_2 sont de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, I'''_2, Φ_3 et par suite Φ rationnelles.

Il y a certainement des points de diramation pour la correspondance (1, 2) entre Φ et Φ_3. À un de ces points correspond, sur F, un couple de points. Ces points sont nécessairement invariants pour l'une des transformations T_1, T_2, ce qui est imposible.

4. — Il nous reste à étudier le troisième cas, celui où I''_2, I'''_2, Φ_2, Φ_3 et pour suite Φ sont rationnelles, I'_2 et Φ_1 de genres zéro et de bigenre un.

Le problème posé ici se ramène à un a autre de la manière suivante:

Considérons, dans le plan (x, y), deux courbes,

$$\varphi_1(x,y) = 0, \qquad \varphi_2(x,y) = 0,$$

et les plans doubles

$$z_1^2 = \varphi_1(x,y), \qquad z_2^2 = \varphi_2(x, y), \qquad (1)$$

Sur la surface F', d'equations

$$z_1^2 = \varphi_1, \qquad z_2^2 = \varphi_2,$$

[1] **Enriques et Severi,** *Acta Mathematica*, vol. 32, 1909.

il existe trois involutions d'ordre deux, engendrées respectivement par les transformations

$$(T'_1) \qquad x'=x, \quad y'=y, \quad z'_1=-z_1, \quad z'_2=-z_2.$$
$$(T'_2) \qquad x'=x, \quad y'=y, \quad z'_1=-z_1, \quad z'_2=z_2$$
$$(T'_3) \qquad x'=x, \quad y'=y, \quad z'_1=z_1, \quad z'_2=-z_2.$$

L'involution engendrée par T'_1 a pour image le plan double

$$z^2=\varphi_1(x,y).\ \varphi_2(x,y). \qquad (2)$$

Si les courbes $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ n'ont aucune partie commune, à chaque point commun à ces deux courbes, qui n'est pas de multiplicité paire pour l'une d'elles, correspond, sur F', un point de coïncidence de l'involution engendrée par T'_1.

Dans le cas actuel, c'est-à-dire si F coïncide avec F', la surface (2) doit être de genres $p_a=P_3=0$, $P_2=1$, et les surfaces (1) rationnelles. Par suite, les courbes $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ satisfont aux conditions suivantes:

1°. La courbe $\varphi_1(x, y).\ \varphi_2(x, y)=0$ se compose de deux droites et d'une sextique (décomposée éventuellement) possédant deux couples de points doubles infiniment voisins sur les deux droites et un point double ordinaire à l'intersection de ces droites;

2°. Un point d'intersection des courbes $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ est de multiplicité paire pour l'une d'elles au moins ;

3°. Les courbes $\varphi_1=0$, $\varphi^2=0$ sont des courbes de diramation de plans doubles rationnels.

Un examen de ces conditions conduit à trois couples de courbes $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$:

a. La courbe $\varphi_1=0$ se compose d'une conique C et de deux droites d_1, d_2 tangentes à C en A_1, A_2 respectivement. La courbe $\varphi_2=0$ se compose d'une droite d passant par le point (d_1, d_2) et d'une cubique C' passant par (d_1, d_2), par les points (d, C) et touchant d_1, d_2 en A_1, A_2 respectivement. Par exemple,

$$\varphi_1\ (x,\ y) \equiv x.\ y.\ (xy-1),$$
$$\varphi_2\ (x,\ y) = (x-y)\ (a_1\, x^2 y + a_2\, x\, y^2 + a_3\, x + a_4\, y),$$
$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = o).$$

b. $\varphi_1 = o$ se compose d'une conique C et de deux droites d_1, d_2 la touchant en A_1, A_2, $\varphi_2 = o$ d'une quartique touchant d_1 en A_1, d_2 en A_2 et ayant trois points doubles, l'un en $(d_1,\ d_2)$, les autres sur C.

c. $\varphi_1 = o$ se compose d'une cubique C_1 ayant un point double A_1 et d'une droite d_1 touchant C_1 en B_1. $\varphi_2 = o$ se compose d'une cubique C_2 ayant un point double en un point A_2 de C_1, passant par A_1, touchant d_1 en B_1, et d'une droite d_2 trouchant C_1, C_2 en un même point et rencontrant d_1 ou troisième point commun aux courbes C_1, C_2 et à cette droite.

5. — En résumé: *Si une surface de genres un possède trois transformations birationnelles involutives en elle-même, deux-à-deux permutables, dont l'une engendre une involution de genres zéro et de bigenre un, les deux autres engendrent des involutions rationnelles ou des involutions dont l'une est de genres un.*