Bulletin de la Classe des sciences

Variétés algébriques contenant une involution cyclique n'ayant que des points unis de première espèce (troisième note)

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination des relations fonctionnelles entre les variétés tracées sur l'image de l'involution. Variété canonique de cette image.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques contenant une involution cyclique n'ayant que des points unis de première espèce

(troisième note) (1)

par Lucien GODEAUX

Résumé. — Détermination des relations fonctionnelles entre les variétés tracées sur l'image de l'involution. Variété canonique de cette image.

Nous partons de la variété normale V contenant une involution cyclique I d'ordre premier p dans un espace de dimension aussi grande qu'on le veut, l'involution étant engendrée par une homographie possédant p axes ponctuels, les points unis de l'involution, tous de première espèce, étant situés sur un seul des axes de l'homographie. Le système $|F|$ des sections hyperplanes de V contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I, l'un d'eux, $|F_0|$, étant privé de points-base. Les sections hyperplanes Φ_0 de l'image Ω de l'involution I correspondent aux surfaces F_0. Les autres systèmes appartenant à l'involution I ont pour correspondants sur Ω des systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, ..., $|\Phi_{p-1}|$. Nous déterminons les relations fonctionnelles existant entre ces p systèmes et les variétés rationnelles équivalentes au point de vue des transformations birationnelles aux points de diramation.

Nous nous occupons ensuite des variétés canoniques de la variété Ω. Nous indiquons une méthode de recherche que nous appliquons dans le cas où V est une surface. Dans ce cas, le résultat est connu et a été

(1) Les deux premières notes ont paru dans le *Bulletin de l'Académie*, 1968, pp. 1139-1146, 1969, pp. 108-116.

obtenu par des méthodes différentes [1]. Nous passons ensuite au cas général.

1. Rappelons que dans la première note, nous avons partagé les points unis de l'involution I appartenant à la variété V en $p - 1$ catégories. Un point uni A_i appartient à la i-ième catégorie si l'espace tangent à V en A_i rencontre l'espace σ_i suivant un espace à $n - 1$ dimensions α'_i, n étant la dimension de la variété V. Nous avons démontré que les variétés $\Phi_1, \Phi_2 \ldots, \Phi_{p-1}$ passent p^{n-2} fois respectivement par les points de la première, de la seconde,..., de la $(p - 1)$-ième catégories. Nous allons préciser ce résultat.

Un hyperplan ξ_1 de Σ_1 coupe V suivant une variété F_1 et l'espace α'_1 suivant un espace (ξ_1, α'_1) à $n - 1$ dimensions. L'espace à $n - 1$ dimensions tangent en A_1 à la variété F_1 coupe l'espace (ξ_1, α'_1) suivant un espace à $n - 2$ dimensions et les cônes d'ordre p tangents en A_1 aux variétés F_0 passant par A_1 coupent ce dernier espace suivant des hypersurfaces d'ordre p. Il en résulte que le cône tangent au point de diramation A'_1 à la variété Φ_1 homologue de F_1 est d'ordre p^{n-2}, les sections hyperplanes du cône tangent étant des variétés de Veronese représentant les hypersurfaces d'ordre p d'un espace à $n - 2$ dimensions. Nous désignerons par δ_1 ce cône. Les variétés Φ_1 ont la multiplicité p^{n-2} aux points de diramation de la variété Ω.

Dans la première note, nous avons montré que l'on peut numéroter les espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ de telle sorte que les variétés F_2 passent doublement, les variétés F_3 triplement, ..., les variétés F_{p-1} $p - 1$ fois par les points unis de la première catégorie.

Envisageons une variété F_2. Le cône tangent à cette variété en A'_1 coupe l'espace α'_1 suivant une hyperquadrique Q. Celle-ci est coupée par les cônes d'ordre p tangents en A_1 aux variétés F_0 passant par ce point suivant des variétés d'ordre $2p$. On en déduit que le cône tangent en A'_1 à la variété Φ_2 homologue de F_2 est d'ordre $2.p^{n-2}$, les sections hyperplanes de ce cône représentant les sections de l'hyperquadrique Q par les hypersurfaces d'ordre p. Il est clair que dans la gerbe de sommet A_1, ce cône appartient au système $| 2\delta_1 |$. Les surfaces Φ_2 passent $2.p^{n-2}$ fois par les points de diramation de la première catégorie.

[1] Voir notre ouvrage sur la *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Ediz. Cremonese, 1963), n° 71.

On établit de même que les variétés Φ_3 passent $3.p^{n-2}$ fois par le point A'_1, le cône tangent en ce point à cette variété représentant les sections par les hypersurfaces d'ordre p d'une hypersurface cubique de l'espace α'_1. Le cône tangent appartient au système $|3\delta_1|$.

Et ainsi de suite. On voit que les variétés $\Phi_4, \Phi_5, \ldots, \Phi_{p-1}$ passent respectivement $4.p^{n-2}, 5.p^{n-2}, \ldots, (p-1).p^{n-2}$ fois par le point A'_1. Les cônes tangents à ces variétés au point A'_1 appartiennent respectivement aux systèmes $|4\delta_1|$, $|5\delta_1|$, ..., $|(p-1)\delta_1|$.

Plus généralement, *les variétés $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{p-1}$ rangées dans un certain ordre passent* $\mathrm{p}^{n-2}, 2.\mathrm{p}^{n-2}, \ldots, (\mathrm{p}-1).\mathrm{p}^{n-2}$ *fois par les points de diramation de la variété Ω, image de l'involution.*

2. Deux variétés F_i, F_k ne peuvent avoir la même multiplicité en un point uni, par conséquent une variété F_i passe une fois, deux fois, ..., $p-1$ fois par les points des $p-1$ catégories rangés dans un certain ordre.

On peut, comme nous l'avons déjà fait, numéroter les axes de l'homographie H de telle sorte que les variétés F_1 passent une fois par les points unis de la première catégorie, deux fois par ceux de la seconde catégorie, ..., $p-1$ fois par ceux de la $(p-1)$-ième catégorie.

A une variété F correspond sur la variété Ω une variété Φ qui correspond également aux variétés F transformées de la première par H et ses puissances. La variété F appartenant à un système linéaire, la variété Φ appartient totalement à un système linéaire $|\Phi|$. La variété Φ qui correspond à une variété F possède certaines singularités qui n'appartiennent pas à la variété générique de $|\Phi|$.

Faisons varier d'une manière continue F dans $|F|$ et faisons la tendre vers une variété F_0. La variété Φ varie d'une manière continue dans $|\Phi|$ et tend vers une variété Φ_0 comptée p fois. Faisons au contraire tendre la variété F vers une variété F_1, la variété Φ tend vers une variété Φ_1 comptée p fois, augmentée des points de diramation.

Un point de diramation de Ω est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une variété rationnelle à $n-1$ dimensions. Appelons Δ_1 la somme des variétés rationnelles équivalentes aux points de diramation de la première catégorie, Δ_2 la somme analogue relative aux points de la seconde catégorie, ...,

Δ_{p-1} la somme analogue relative aux points de la $(p-1)$-ième catégorie. Nous avons

$$|p\Phi_0| = |p\Phi_1 + \Delta_1 + 2\Delta_2 + \ldots + (p-1)\Delta_{p-1}|.$$

D'après une propriété établie dans la première note, on a de même

$$|p\Phi_0| = |p\Phi_{p-1} + (p-1)\Delta_1 + (p-2)\Delta_2 + \ldots + 2\Delta_{p-2} + \Delta_{p-1}|.$$

Chaque système de variétés $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$, ..., $|\Phi_{p-1}|$ donne lieu à une relation analogue. On a par exemple

$$|p\Phi_0| = |p\Phi_2 + \Delta_2 + 2\Delta_4 + \ldots + \nu\Delta_{p-1} +$$
$$+ (\nu+1)\Delta_1 + (\nu+2)\Delta_3 + \ldots + (2\nu-1)\Delta_{p-2}|.$$

où nous avons posé $p = 2\nu + 1$.

3. Supposons que la variété Ω possède un système canonique $|\Gamma|$. Dans ces conditions les systèmes

$$|\Phi_0'| = |\Phi_0 + \Gamma|, |\Phi_1'| = |\Phi_1 + \Gamma|, \ldots, |\Phi_{p-1}| = |\Phi_{p-1}' + \Gamma|$$

existent, ils sont respectivement adjoints aux systèmes $|\Phi_0|$, $|\Phi_1|$, ..., $|\Phi_{p-1}|$. Désignons par $|F_0'|$, $|F_1'|$, ..., $|F_{p-1}'|$ les systèmes qui leur correspondent sur V. Ces systèmes appartiennent à l'adjoint $|F'|$ au système $|F|$. On voit que *si la variété Ω possède un système canonique, le système adjoint* $|F'|$ *au système des sections hyperplanes de la variété V, contient* p *systèmes appartenant à l'involution I.*

Mais on ne peut en dire autant du système canonique de V, homologue du système $|\Gamma|$, car le système $|\Phi_0' - \Phi_1|$ pourrait ne pas exister.

Soient ρ la dimension de l'adjoint $|F'|$ et $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{p-1}$ les dimensions des systèmes $|F_0'|$, $|F_1'|$, ..., $|F_{p-1}'|$.

Rapportons projectivement aux hyperplans d'un espace S_ρ à ρ dimensions les variétés F'. Il correspond à la variété V une variété V' à n dimensions et à l'involution I une involution I' engendrée par une homographie H' de période p de S_ρ. Cette homographie H' possède p axes ponctuels $\sigma_0', \sigma_1', \ldots, \sigma_{p-1}'$ de dimensions $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{p-1}$. Désignons par Σ_i' le système d'hyperplans de S_ρ passant par les axes de H' sauf par σ_i'. Au système $|F_i'|$ correspond les sections faites par les hyperplans de Σ_i'.

Aux points unis de l'involution I correspondent les points unis de l'involution I′ distribués dans les espaces σ'_0, σ'_1, ..., σ'_{p-1}. L'espace à n dimensions tangent à V′ en un point uni rencontre suivant un espace à $n-1$ dimensions un des axes de H′ distinct de celui auquel il appartient.

Nous commencerons par considérer le cas où les variétés V et Ω sont de surfaces. On sait, par d'autres méthodes, que les courbes F'_0 passent $p-2$ fois par les points unis et que par conséquent les courbes canoniques de la surface Ω passent $p-2$ fois par les points de diramation.

4. Commençons par considérer le cas $p = 3$. L'involution I possède α_1 points unis de la première catégorie et α_2 points unis de la seconde. On a d'ailleurs $\alpha_1 = \alpha_2$.

Les courbes F_1 passent une fois par les points A_1 de la première catégorie et deux fois par les points A_2 de la seconde. Par conséquent, les adjointes F'_1 passent une fois par les points de la seconde catégorie mais ne passent pas par les points de la première. Dans l'espace S_p, les hyperplans de Σ'_1 contiennent les points de seconde catégorie et ceux de la première appartiennent donc à σ'_1.

Pour la même raison, les points homologues des points A_2 appartiennent à l'espace σ'_2.

Cela étant, les courbes F'_0 découpées sur V par les hyperplans de Σ'_0 passent par les $\alpha_1 + \alpha_2$ points unis de l'involution I. Il en résulte que les courbes $F'_0 - F_0$ passent par les points unis de l'involution et que par conséquent, les courbes canoniques de la surface Ω passent par les points de diramation de cette surface, conformément à ce qui a été rappelé plus haut.

5. Supposons $p > 3$. Pour abréger, appelons A_i un point de la i-ième catégorie.

Les courbes F_1 passent une fois par les points A_1, deux fois par les points A_2, ..., $p-1$ fois par les points A_{p-1}, par conséquent les courbes F'_1 ne passent pas par les points A_1, passent une fois par les points A_2, ..., $p-2$ fois par les points A_{p-1}. On en conclut qu'aux points A_1 correspondent sur la surface V′ des points appartenant à l'espace σ'_1. Nous continuerons à les désigner par A_1.

Les courbes F_{p-1} passent $p-1$ fois par les points A_1, donc les courbes F'_{p-1} passent $p-2$ fois par ces points. Il en résulte que les sections de V' par les hyperplans de Σ'_{p-1} sont des courbes qui ont la multiplicité $p-2$ aux points A_1.

Les courbes F_0 passant par un point A_1 y acquièrent un point multiple d'ordre p, par conséquent les courbes F' adjointes à ces courbes passent $p-1$ fois par le point A_1. Il en est de même des courbes F'_0, par conséquent parmi les sections de V' par des hyperplans de Σ'_0, il en est qui ont la multiplicité $p-1$ en un point A_1. Cela signifie que les tangentes à V' en ce point A_1 s'appuient sur σ'_0.

Le raisonnement qui vient d'être fait pour les points A_1 peut être fait également pour les autres points unis de l'involution. Les points unis de l'involution sont donc multiples d'ordre $p-2$ pour les courbes F'_0 et par conséquent pour les courbes $F'_0 - F_0$. Les courbes canoniques de la surface Ω passent $p-2$ fois par les points de diramation, comme cela a été obtenu par une autre méthode.

6. Retournons au cas général. On peut admettre que les points de diramation de la variété Ω jouent le même rôle vis-à-vis des variétés canoniques et que celles-ci passent le même nombre de fois par ces points. Il en résulte que les points unis de I se distribuent d'une manière symétrique dans les espaces axes de l'homographie H' dans S_p. Deux cas peuvent se présenter:

1° Les variétés $F'_1, F'_2, \ldots, F'_{p-1}$ ne passent pas par tous les points unis de l'involution.

2° Les variétés $F'_1, F'_2, \ldots, F'_{p-1}$ passent par tous les points unis de l'involution I.

Examinons le premier cas. Les variétés F_1 passent simplement par les points A_1 mais plusieurs fois par les points $A_2, A_3, \ldots, A_{p-1}$. Si les variétés F'_1 ne passent par tous les points unis, elles ne passent pas par les points A_1. Il en résulte que les hyperplans de Σ'_1 ne passent pas par les points qui leur correspondent sur V' et que nous continuerons par désigner par le même symbole. Sur V', les points A_1 appartiennent donc à l'espace σ'_1.

Pour la même raison, sur V' les points A_2 appartiennent à l'espace $\sigma'_2, \ldots,$ les points A_{p-1} à l'espace σ'_{p-1}.

Il en résulte que les variétés F'_0 passent par tous les points unis de I avec une certaine multiplicité h.

En reprenant le raisonnement fait plus haut (n° 1), on voit que *les variétés canoniques de la variété Ω ont des points multiples d'ordre* hp^{n-2} *aux points de diramation.*

Dans notre seconde note, nous avons montré que h peut prendre toutes les valeurs de 1 à $p - 1$.

7. Dans le second cas, les hyperplans des gerbes $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \ldots, \Sigma'_{p-1}$ contiennent tous les points unis, ce qui n'est possible que si tous les points unis sur V' appartiennent à l'espace σ'_0. Les hyperplans de Σ'_0 ne passent donc pas par les points unis de l'involution I' et par conséquent les courbes F'_0 ne passent pas par ceux de l'involution I. *Les variétés canoniques de Ω ne passent pas par les points de diramation*

Observons qu'il en résulte que les variétés F'_i passent par les points unis de I avec la même multiplicité que les variétés F_i mais forment un système plus ample.

Dans notre seconde note (n° 5) nous avons construit un exemple d'une variété à trois dimensions représentant une involution cyclique cubique dont les surfaces canoniques ne passent pas par les points de diramation. Nous allons construire un exemple plus général.

8. Considérons dans un espace $S_{2\nu+1}$ à $2\nu + 1$ dimensions, une homographie biaxiale H de période $p = 2\nu + 1$, ayant des axes σ_1, σ_2 à ν dimensions. Désignons par $y_0, y_1, \ldots, y_\nu$ les coordonnées des points de σ_1 et par $z_0, z_1, \ldots, z_\nu$ celles des points de σ_2.

Les équations de l'homographie H sont

$$\rho y'_i = y_i, \rho z'_i = \varepsilon z_i, \qquad (i = 0,1,\ldots,\nu)$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

En employant la notation des formes algébriques, les ν équations de la forme

$$a_y^{\nu+1} + b_z^{\nu+1} = 0$$

linéairement indépendantes, représentent une variété V d'ordre $(\nu + 1)^\nu$, sur laquelle l'homographie H détermine une involution I possédant $(\nu + 1)^\nu$ points unis dans l'espace σ_1 et $(\nu + 1)^\nu$ points unis dans l'espace σ_2.

Les hypersurfaces d'ordre $\nu + 1$ de $S_{2\nu+1}$ découpent sur V un système linéaire sans points-base et contenant $p = \nu + 1$ systèmes linéaires appartenant à l'involution I. Les équations de ces systèmes sont respectivement

$$\lambda_y^{\nu+1} + \lambda_z^{\nu+1} = 0, \lambda_y^{\nu}\lambda_z = 0, \ldots, \lambda_y\lambda_z^{\nu} = 0.$$

les coefficients étant variables.

Les variétés canoniques sont découpées sur V par les hypersurfaces d'ordre

$$\nu(\nu+1) - (2\nu+2) = \mu.$$

Ces hypersurfaces forment $\nu + 1$ systèmes linéaires appartenant à l'involution I et dont les équations sont respectivement

$$\lambda_y^{\mu} + \lambda_y^{\mu-(\nu+1)}\lambda_z^{\nu+1} + \ldots + \lambda_z^{\mu} = 0,$$

$$\lambda_y^{\mu-1}\lambda_z + \lambda_y^{\mu-\nu-2}\lambda_z^{\nu+2} + \ldots + \lambda_y^{\nu}\lambda_z^{\mu-\nu} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_y^{\mu-\nu}\lambda_z^{\nu} + \lambda_y^{\mu-(2\nu+1)}\lambda_z^{2\nu+1} + \ldots + \lambda_y\lambda_z^{\mu-1} = 0.$$

De ces systèmes seul le premier est formé d'hypersurfaces ayant les mêmes multiplicités aux points unis de σ_1 et de σ_2. Cette multiplicité est zéro et le système est le transformé du système canonique de la variété image Ω de l'involution I. Ces variétés ne passent donc pas par les points de diramation.

Liège, le 27 mars 1969.