Bulletin de la Classe des sciences

Variétés algébriques contenant une involution cyclique n'ayant que des points unis de première espèce (seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé
Comportement des variétés canoniques aux points de diramation d'une variété image d'une involution cyclique ne possédant que des points unis de première espèce appartenant à une variété algébrique à n dimensions.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques contenant une involution cyclique n'ayant que des points unis de première espèce (seconde note),

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Comportement des variétés canoniques aux points de diramation d'une variété image d'une involution cyclique ne possédant que des points unis de première espèce appartenant à une variété algébrique à n dimensions.

Dans notre première note (¹), nous avons construit une variété normale Ω représentant une involution cyclique d'ordre premier p ne possédant qu'un nombre fini de points unis de première espèce appartenant à une variété algébrique V à n dimensions, les points de diramation étant isolés sur la variété Ω. Nous avons démontré que ces points de diramation sont multiples d'ordre p^{n-1}, le cône tangent en un de ces points ayant pour sections hyperplanes des variétés de Veronese généralisées (représentant les hypersurfaces d'ordre p d'un espace linéaire à $n - 1$ dimensions). Nous avons considéré ensuite les singularités aux points de diramation des variétés canoniques de la variété Ω. Ce dernier point doit être précisé et même en partie rectifié. C'est l'objet de cette note.

Nous considérons des variétés à n dimensions particulières, transformées en elles-mêmes par une homographie biaxiale cyclique H dont la période est un nombre premier p. Nous construisons la variété

[1] La première note est parue dans le Bulletin de l'Académie en 1968, pp. 1139-1146.

Ω représentant l'involution d'ordre p appartenant à une telle variété, involution qui d'après sa définition, possède un nombre fini de points unis de première espèce. En partant de l'hypothèse que les variétés canoniques de Ω ont le même comportement en chacun des points de diramation, nous montrons que ces points sont multiples d'ordre $(p-\mu)p^{n-2}$, $\mu-1$ étant le reste de la division de n par p. La démonstration que nous donnons n'est pas applicable au cas d'une involution du troisième ordre appartenant à une variété plongée dans un espace à cinq dimensions; nous examinons ce cas séparément. Nous examinons aussi le cas $p=5$, la variété appartenant également à un espace à cinq dimensions; il donne une variété Ω qu'il nous a paru intéressant d'étudier.

Il s'agit sans doute ici de cas particuliers, mais il semble probable que les propriétés obtenues sont vraies dans le cas général, comme nous espérons pouvoir le démontrer prochainement.

1. Soit dans un espace $S_{2\nu+1}$ à $2\nu+1$ dimensions, une homographie biaxiale cyclique H dont la période est un nombre premier p et dont les axes sont deux espaces σ_1, σ_2 à ν dimensions. Nous désignerons par $y_0, y_1, \ldots, y_\nu$ les coordonnées des points de σ_1 et par $z_0, z_1, \ldots, z_\nu$ celles des points de σ_2. De plus, nous représenterons symboliquement par $\varphi_m\psi_n$ une forme de degré m en y dont les coefficients sont des formes de degré n en z. Nous poserons $\varphi_0=1$, $\psi_0=1$.

Considérons les équations au nombre de ν,

$$\varphi_p+\psi_p=0, \tag{1}$$

linéairement indépendantes. Nous supposons $\nu>1$. Les variétés qu'elles représentent ont en commun une variété V à $\nu+1$ dimensions. L'homographie H ayant pour équations

$$\rho y_i'=y_i,\ \rho z_i'=\varepsilon z_i, \qquad (i=0, 1\ldots,\nu)$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, transforme en elle-même la variété V et sur cette variété, l'homographie H détermine une involution I d'ordre p. Cette involution présente $2p^\nu$ points unis, p^ν dans chacun des espaces σ_1, σ_2. Ces points unis sont de première espèce, car l'espace à $\nu+1$ dimensions tangent à V en un des points unis situé dans σ_1 par exemple, projette de ce point l'espace σ_2.

Dans le cas général, où nous nous placerons, la variété V est privée de singularités et ses variétés canoniques sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $\nu p - (2\nu + 2) = \nu(p - 2) - 2$. Pour notre objet cet ordre doit être positif et nous supposerons donc

$$(p - 2) > 2.$$

Nous devons donc supposer $p > 2$ et d'autre part, si $\nu = 2$, $p > 3$. Nous avons considéré le cas $p = 2$ dans notre note qui paraitra dans l'*Archivium Mathematicum* de Brno. Le cas $\nu = 2$, $p = 3$ sera traité plus loin.

Désignons par Ω la variété à $\nu + 1$ dimensions image de l'involution I. Notre but est de déterminer les singularités des variétés canoniques de Ω aux points de diramation de cette variété.

2. Appelons G les variétés canoniques de V. Le système $|\,G\,|$ est découpé par les hypersurfaces d'ordre $\nu(p - 2) - 2$ dont il faut défalquer celles qui passent par V. La dimension de G est donc

$$\binom{\nu p - 1}{2\nu + 1} - \nu\binom{p + 2\nu + 1}{2\nu + 1} - 1.$$

Le systéme $|\,G\,|$ contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution I. Le système canonique de la variété Ω correspond à un de ces systèmes et précisément à celui de ces systèmes dont le comportement aux points unis est le même. Un tel système comprend les variétés représentées par les équations

$$\varphi_{\nu(p-2)-2-i}\psi_i = 0, \psi_{\nu(p-2)-2-i}\varphi_i = 0$$

lorsque i et $\nu\,(p - 2) - 2 - i$ sont congrus par rapport au module p.

Posons

$$\nu + 1 = \lambda p + \mu, (0 < \mu \leqslant p).$$

Nous devons avoir

$$2p - 2\mu \equiv 2i, (\mathrm{mod.}\ p)$$

d'où $i = p - \mu$.

Le fait qu'il existe une seule valeur de i montre que parmi les p systèmes appartenant à l'involution I et compris dans $|\,G\,|$, il en est un seul formé de variétés ayant la même multiplicité aux points unis. C'est le système découpé par les hypersurfaces

$$\varphi_{n-p+\mu}\psi_{p-\mu} + \dots + \varphi_{p-\mu}\psi_{n-p+\mu} = 0.$$

où nous avons posé $n = \nu(p - 2) - 2$.

Les variétés canoniques de V correspondant aux variétés canoniques de Ω passent $p - \mu$ fois par les points unis de l'involution I.

3. Les variétés $\varphi_p + \psi_p = 0$ dépendent de

$$r + 1 = 2\binom{\nu + p}{\nu}$$

paramètres. Rapportons projectivement ces hypersurfaces aux hyperplans d'un espace à r dimensions, S_r. Il correspond à l'espace $S_{2\nu+1}$ une variété W à $2\nu + 1$ dimensions lieu des droites s'appuyant sur deux variétés de Veronese généralisées Ψ_1, Ψ_2 situées dans des espaces Σ_1, Σ_2 à $\binom{\nu + p}{\nu} - 1$ dimensions ne se rencontrant pas. La variété Ψ_1, d'ordre p^ν, est obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans de Σ_1 les variétés d'ordre p de l'espace σ_1 et la variété Ψ_2 est obtenue d'une manière analogue en partant de σ_2. L'ordre de la variété W est $p^{2\nu}$ et les variétés Ψ_1, Ψ_2 sont multiples d'ordre p^ν pour cette variété.

A un groupe de p points de $S_{2\nu+1}$ transformé en soi par H correspond un point de W.

Aux variétés (1) correspondent ν hyperplans linéairement indépendants de S_r coupant la variété W suivant la variété Ω image de I. Cette variété appartient donc à un espace à $r - \nu$ dimensions.

La variété Ω rencontre chacune des variétés Ψ_1, Ψ_2 en p points qui sont multiples d'ordre p^ν pour la variété. On retrouve ainsi la propriété établie dans notre première note, à savoir que les points de diramation sont multiples d'ordre p^ν pour la variété Ω (Dans notre première note, la variété V était à $n = \nu + 1$ dimensions). De plus, le cône tangent en un point de diramation A' situé sur Ψ_1 par exemple projette de ce point la variété Ψ_2.

4. Appelons G_0 les variétés de $|G|$ transformées des variétés canoniques de Ω.

Soient A un point uni de l'involution I situé par exemple sur σ_1 et A' le point de diramation de Ω correspondant. Les variétés G_0 ont un point multiple d'ordre $p - \mu$ en A. L'espace linéaire à $\nu + 1$ dimensions tangent en A à la variété V projette de ce point l'espace σ_2. Cet espace contient le cône tangent en A à une variété G_0 et par conséquent ce cône rencontre l'espace σ_2 suivant une hypersurface d'ordre $p - \mu$. Aux hypersurfaces d'ordre p de σ_2 correspondent projectivement les cônes d'ordre p de sommet A'. A une hypersurface d'ordre $p - \mu$ correspond donc un cône d'ordre $(p - \mu)p^{\nu-1}$ de sommet A'. On voit donc que

Les variétés canoniques de la variété Ω ont un point multiple d'ordre $(p - \mu)p^{\nu-1}$ *un chaque point de diramation* $(0 < \mu \leqslant p)$.

La multiplicité des points de diramation pour les variétés canoniques de Ω dépend donc non seulement de p mais aussi de la dimension $\nu + 1$ de la variété. Cette multiplicité peut prendre toutes les valeurs de 0 à $p - 1$.

Pour $\mu = p$, la variété V a une dimension multiple de p et inversement, si la dimension de V est multiple de p, on a $\mu = p$ et les variétés canoniques de Ω ne passent pas par les points de diramation.

Si $\mu = p - 1$, les variétés canoniques de Ω passent simplement par les points de diramation.

Observons que si i est différent de $p - \mu$, les variétés G découpées par les hypersurfaces

$$\varphi_{\nu(p-2)-2-i}\psi_i = 0, \varphi_i\psi_{\nu(p-2)-2-i} = 0$$

appartiennent à des systèmes composés au moyen de l'involution I. et qui ont même dimension.

5. Nous nous occuperons maintenant du cas $\nu = 2$, $p = 3$.

Partons de la variété V de l'espace S_5 représentée par les équations

$$\varphi_6 + \varphi_3\psi_3 + \psi_6 = 0, \varphi'_3 + \psi'_3 = 0.$$

Elle est d'ordre 18, transformée en elle-même par l'homographie H et l'involution I possède 36 points unis, 18 dans chacun des plans σ_1, σ_2.

Les surfaces canoniques sont découpées sur V par les hypersurfaces cubiques et celles qui correspondent aux surfaces canoniques de la variété Ω sont découpées par les hypersurfaces

$$\varphi''_3 + \psi''_3 = 0.$$

Ces surfaces, que nous désignerons par G_0, ne passent pas par les points unis de I.

Le degré du système | G | est $\omega_0 = 18.3^3 = 486$.

Une courbe commune à deux surfaces G a l'ordre $18.3^2 = 162$ et sa série canonique est découpée par les hypersurfaces d'ordre 9. Elle a donc l'ordre 2.729 et le genre de la courbe est donc $\omega_1 = 730$.

Les courbes canoniques d'une surface G sont découpées par les hypersurfaces du sixième ordre ne contenant pas la surface. On a donc $p_a = \omega_2 = 350$.

Le genre arithmétique de la variété V est $P_a = 55$.

La variété V et les surfaces G étant régulières, on doit avoir (Severi)

$$2P_a = \omega_0 - \omega_1 + \omega_2 + 4,$$

ce qui est une identité.

Appelons Γ_0 les surfaces qui correspondent sur Ω aux surfaces G_0, Le système $|\Gamma_0|$ n'a pas pour point-base les points de diramation.

Le degré du système $|\Gamma_0|$ est $\omega'_0 = 162$.

Le genre ω'_1 de la courbe intersection de deux surfaces Γ_0 est donné par la formule de Zeuthen $3(\omega'_1 - 1) = \omega_1 - 1$, d'où $\omega'_1 = 244$.

Entre le genre arithmétique $p_a = \omega_2$ d'une surface G_0 et celui p'_a de la surface Γ_0 homologue, on a la relation

$$p_a + 1 = 3(p'_a + 1),$$

d'où
$$p'_a = \omega'_2 = 116.$$

Le genre arithmétique P'_a de Ω est donné par la formule

$$2P'_2 = \omega'_0 - \omega'_1 + \omega'_2 + 4,$$

d'où $P'_a = 19$, ce qui est bien le nombre des surfaces G_0 linéairement indépendantes.

6. Pour obtenir un modèle projectif de la variété Ω, rapportons projectivement les variétés $\varphi''_3 + \psi''_3 = 0$ aux hyperplans d'un espace S_{19} à 19 dimensions. Aux groupes de l'involution cubique engendrée par H dans l'espace S_5 correspondent les points d'une variété W_5^{81} lieu des droites s'appuyant sur une surface Ψ_1 d'ordre 9 représentant dans un espace Σ_1 à 9 dimensions, les cubiques planes du plan σ_1 et sur une surface Ψ_2 représentant dans un espace Σ_2 à 9 dimensions les cubiques du plan σ_2.

A la variété V correspond la section Ω d'ordre 162 de ω_5^{81} par un hyperplan et une hyperquadrique. La variété Ω rencontre les surfaces Ψ_1,

Ψ_2 chacune en 18 points qui sont multiples d'ordre 9 pour Ω. Le cône tangent en un de ces points appartenant par exemple à Ψ_1 projette de ce point la surface Ψ_2.

Les sections hyperplanes de la variété Ω sont les surfaces canoniques de la variété.

Remarquons en passant que la variété à 4 dimensions section de la variété W_5^{81} par une hyperquadrique possède une variété canonique d'ordre zéro, le système de ses sections hyperplanes étant son propre adjoint.

8. Considérons le cas $\nu = 2, p = 5$, la variété V ayant pour équations

$$\varphi_5 + \psi_5 = 0, \varphi'_5 + \psi'_5 = 0.$$

Sur la variété V, d'ordre 25, l'homographie H engendre une involution I d'ordre cinq possèdant 50 points unis, 25 dans chacun des plans σ_1, σ_2.

Les surfaces canoniques G de V sont découpées par les hypersurfaces du quatrième ordre et par conséquent, la variété V étant complètement régulière, son genre arithmétique est $P_a = 126$. Les surfaces G ne passent pas par les points unis de I.

Le degré du système $| G |$ est $\omega_0 = 1600$.

La série canonique de la courbe intersection de deux surfaces G est découpée par les hypersurfaces d'ordre 12 et par conséquent a l'ordre 4800. Le genre de la courbe est donc $\omega_1 = 2401$.

Les courbes canoniques sont découpées sur une surface G par les hypersurfaces d'ordre 8 dont il faut défalquer celles qui contiennent V. On a donc $\omega_2 = p_a = 1049$.

La relation

$$2P_a = \omega_0 - \omega_1 + \omega_2 + 4$$

est une identité.

Les surfaces canoniques de la variété Ω correspondent aux surfaces G_0 découpées sur V par les hypersurfaces.

$$\varphi_2\psi_2 = 0$$

et ont des points doubles coniques aux 50 points unis de I. Soient Γ_0 les surfaces canoniques de Ω, homologues des surfaces G_0.

Le degré de $| G_0 |$ étant 1200, celui de $| \Gamma'_0 |$ est $\omega'_0 = 240$.

Une courbe (G_0, G_0) intersection de deux surfaces G_0 a des points quadruples aux points unis et sa série canonique est découpée par des hypersurfaces d'ordre 12 ayant des points doubles aux points unis. En effet, ces hypersurfaces doivent découper sur la courbe (G_0, G_0) la transformée de la série canonique de la courbe (Γ_0, Γ_0) homologue augmentée des points unis de l'involution. Or, sur chaque branche de la courbe (G_0, G_0) en un point uni A se trouvent quatre points unis infiniment voisins successifs de A. On en conclut que les hypersurfaces d'ordre 12 coupent la courbe suivant une série d'ordre 4400. D'après la formule de Zeuthen, le genre de la courbe intersection de deux surfaces Γ_0 est donné par

$$10(\omega_1' - 1) + 800 = 4600,$$

d'où $\omega_1' = 361$.

Les adjointes à la surface G_0 sont découpées par les hypersurfaces $\varphi_4 \psi_4 = 0$ dont il faut défalquer celles qui contiennent G_0. Le genre arithmétique d'une surface Γ_0 est donc $\omega_2' = p_a' = 189$.

Le genre arithmétique P_a' de Ω est $P_a' = 36$, puisque le système bicanonique de Ω correspond aux sections de V par les hypersurfaces $\varphi_4 \psi_4 = 0$.

La relation

$$2P_2' = \omega_0' - \omega_1' + \omega_2' + 4$$

est une identité.

8. On peut obtenir une image projective de la variété Ω en utilisant le même procédé que plus haut (n° 3). Rapportons projectivement les hypersurfaces $\varphi_5'' + \psi_5'' = 0$ aux hyperplans d'un espace S_{39} à 39 dimensions. Il correspond aux groupes de l'involution engendrée par H dans l'espace S_5 une variété W à cinq dimensions d'ordre 25^2, intersection de deux cônes projetant des espaces Σ_1, Σ_2 à 19 dimensions des surfaces de Veronese généralisées Ψ_1, Ψ_2 représentant les courbes du cinquième ordre respectivement des plans σ_1, σ_2. La variété Ω est la section de W par un espace linéaire à 37 dimensions.

En élevant à la cinquième puissance les deux membres de l'équation $\varphi_2\psi_2 = 0$, on obtient dans S_{39} une hypersurface du quatrième ordre passant deux fois par chacun des espaces Σ_1, Σ_2 et ayant un contact du quatrième ordre avec la variété Ω en chaque point d'intersection. La variété de contact est une variété canonique de Ω.

On peut obtenir un autre modèle projectif de Ω de la manière suivante:

Observons tout d'abord qu'une hypersurface $\varphi_2\psi_2 = 0$ est un lieu de droites s'appuyant sur les plans σ_1, σ_2. Rapportons projectivement ces hypersurfaces aux hyperplans d'un espace S_{35} à 35 dimensions. Nous obtenons une variété W′ dont les points représentent les droites s'appuyant sur les plans σ_1, σ_2 et qui a par suite quatre dimensions. C'est une variété de Segre généralisée d'ordre 96([1]).

Pour obtenir l'équation de l'hypersurface découpant la variété Ω sur W′ posons

$$X_{ijkl} = y_i y_j z_k z_l, \quad (i + j \leqslant 2, k + l \leqslant 2)$$

et observons que des équations de V on déduit

$$\varphi_5(X_{00kl}, X_{01kl}, X_{02kl})\psi'_5(X_{ij00}, X_{ij10}, X_{ij20}) -$$

$$- \varphi'_5(X_{00kl}, X_{01kl}, X_{02kl})\psi_5(X_{ijo0}, X_{ij01}, X_{ij20}) = 0,$$

ce qui revient à introduire les coordonnées des points de S_{35} dans l'équation

$$y_0 z_0[\varphi_5(y)\psi'_5(z) - \varphi'_5(y)\psi_5(z)] = 0.$$

On obtient une hypersurface qui rencontre W′ suivant une variété d'ordre 288 qui comprend deux variétés de Segre généralisées d'ordre 24 obtenues en partant de l'équation $\varphi_2\psi_2 = 0$ où l'on pose successivement $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$. Le restant de l'intersection est la variété Ω d'ordre 288 — 2.24 = 240. Ses sections hyperplanes sont ses variétés canoniques.

Aux points de diramation correspondent 50 quadriques ne se rencontrant pas deux à deux.

On remarquera que la variété Ω qui vient d'être construite représente également l'involution du cinquième ordre engendré par H sur la variété

$$\varphi_5 - \psi_5 = 0, \varphi'_5 - \psi'_5 = 0.$$

Liège, le 6 février 1969.

[1] Voir notre note *Sur les variétés de Segre généralisées* (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège, 1948, pp. 20-24).