GÉOMÈTRIE ALGÉBRIQUE.—**Lucien Godeaux**, *Sur des surfaces algébriques liées à une courbe de genre trois* (troisième note). Note présentée par M. Hepites, M.A.R., dans la séance du 14 avril 1916.

1. — Nous avons vu que la surface F image des couples de points non ordonnés de la quartique

$$a x^4 + b x^2 y + c x y^3 + d x + e y^2, \qquad (1)$$

de genre trois, possède une involution d'ordre trois et une involution d'ordre six, douées chacune d'un nombre fini de points de coïncidence [1]. Indiquons respectivement par I_3, I_6 ces involutions.

La transformation

$$\tau = \begin{pmatrix} x & \varepsilon y \\ x & y \end{pmatrix},$$

où $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ engendre, sur la courbe (1), une involution d'ordre trois, elliptique, possédant deux points de coïncidence. Par suite, I_3 possède, sur F, trois points de coïncidence. On voit facilement que l'involution I_6, qui est composée avec les involutions I_3 et Φ[2], possède:

(2) Nous conservons les notations de nos premières notes.

a. Un point de coïncidence sextuple (pour Φ et I_3);
b. Deux points de coïncidence triple (pour I_3);
c. 27 pointes de coïncidence double (pour Φ).

Les points de coïncidence de I_3 sont communs à ∞^1 courbes canoniques de F et ces courbes ont en l'un de ces points [image du couple formé par les deux points de coïncidence de l'involution située sur la courbe (1)] un point double. Les tangentes à ces courbes canoniques en ces troits points sont nécessairement variables, puisque le degré du système canonique de F est 6. On en déduit que les points de coïncidence de I_3 ne sont pas des points de coïncidence parfaite.

2.—On établit alors, par des raisonnements que nous avons déjà eu l'occasion de faire souvent, que l'on peut prendre, *pour surface image de* I_6 *la surface* Ψ, *de*

(1) Voir nos deux notes précédentes parues dans le tome IV de ce recueil.

S_4, *d'ordre 9, à sections hyperplanes de genre 7, possédant:*

a. *Un point double biplanaire formé d'une suite de trois points doubles infiniment voisins successifs dont le dernier est conique.* C'est le point de diramation sextuple;

b. *Un point double biplanaire ordinaire* (point de diramation triple).

c. 9 *points doubles coniques* (points de diramation double);

Cette surface a les genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 2$, $P_2 = 3$ $P_3 = 5$, . . . $P_i = \frac{1}{2} i (i-1) + 2 \quad (i > 1)$. On peut ajouter *qu'elle possède une droite triple*. M. ENRIQUES (*Rend. R. Accad. Lincei, 1897*) a, en effet, démontré qu'une surface de genres $p_a = p_g = 1, p^{(1)} = 2$, peut toujours se ramener à une surface tricanonique, de S_4, possédant une droite double ou triple selon que les g_3^1 découpées par les courbes tricanoniques sur la courbe canonique ont un point fixe ou non. C'est le deuxième cas qui se présente ici.

3. — *La surface* Ψ^*, *image de l'involution* I_3, *a les genres* $p_g = 1$, $p_a = 0$, $p^{(1)} = 3$, $P_2 = 3$, $P_3 = 7$, ... $P_i = i(i-1) + 1 \quad (i > 1)$.

On en conclut que le système tricanonique de Ψ^* est simple et que par suite on peut prendre, pour modèle projectif de cette surface, *une surface d'ordre 18*, S_6, *à sections hyperplanes de genre 13, possédant trois points doubles biplanaires ordinaires* (qui sont les trois points de diramation).

Front Belge, 16 mars 1916.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE.—LUCIEN **GODEAUX**, *Sur des surfaces algébriques liées à une courbe de genres trois* (quatrième note). Note présentée par M. **HEPITES**, M.A.R., dans la séance du 5 mai 1916.

1.– La courbe d'ordre 4 et de genre 3

$$\varphi\ (x, y) \equiv x^3 y + f_4 (y), \qquad \text{(A)}$$

où f_4 est le simbole d'un polynôme du quatrième degré, est transformée en elle-même par l'homographie de période 3

$$\left(x' = \varepsilon\, x,\ y' = y,\ \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right).$$

Cette homographie engendre sur A[1] une involution γ'_3, rationnelle, cyclique, possédant cinq points unis, à savoir, Q_0 $(x = \infty, y = o)$, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, $[x = o, f_4(y) = o]$. On a d'ailleurs:

$$4Q_0 \equiv Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

et ces deux groupes appartiennent à la série canonique de A.

2.—Considérons la surface F qui représente les couples de points de la courbe A. Ainsi que nous l'avons montré (deuxième note), F possède outre l'involution Φ d'ordre 2, une involution cyclique, I'_3, d'orde 3 et une involution I'_6 composée avec Φ et I'_3.

Appelons P_{ik} le point de F image du couple $Q_i\, Q_k$. L'involution I'_3 possède quinze points de coïncidence. Par l'examen des courbes H et C passant par ces points, on voit que:

a. Les points P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34} sont des points de coïncidence parfaite;

---

(1) Nous conservons les notations de nos premières notes, parues dans ce *Bulletin*, t. IV, N^os^ 6, 8 et 9.

b. Les points $P_{00}, P_{11}, P_{22}, P_{33}, P_{44}, P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04}$ sont des points de coïncidence non parfaite, c'est-à-dire que dans le voisinage d'un de ces points il y a deux points de coïncidence pour I'_3 et deux seulement.

A une courbe canonique C de F correspond sur une surface Ψ' image de I'_3, une courbe C' de genre 7 et de degré 6 possèdant 6 points doubles variables. C'est donc de genre et degré virtuels 13 et 18. Si π_a désigne le genre arithmétique de Ψ', $|C'|$ *a*, d'après le théorème de Reimann-Roch, la dimension $r \geqslant \pi_a + 18 - 13 + 1 \geqslant 6$. On disignera par Ψ' la surface obtenue en rapportant projectivement les courbes C' aux hyperplans d'un S_r.

3.—À I'_6 corespond, sur la surface Φ, une involution cyclique I''_3 d'ordre 3. En opérant, partant du système canonique de Φ, comme on a opéré pour I'_3 sur F, on construit une surface Ψ'', nécessairement régulière, image de I'_6 (ou I''_3). Cette surface appartient à un espace linéaire à $\pi'_a + 3$ dimensions, π'_a désignant son genre numérique; l'ordre de cette surface est égal à 9 et ses sections hyperplanes sont de genre 7.

On a certainement $\pi'_a < 3$, sans quoi le système canonique de F serait composé avec I'_3, ce qui n'a pas lieu. Par conséquant, le système $|\Gamma|$, sur Ψ' n'est pas composé avec l'involution qui correspond, sur cette surface à l'involution d'ordre 2, Φ, de F. En d'autre termes, Ψ' est, en général, simple.

4.—La surface Ψ'' possède:

a. Six points triples coniques qui sont des points de diramation triple correspondant aux points de coïncidence $P_{12}, \ldots\ldots P_{34}$ et qui sont équivalents, chacun, à une courbe rationnelle de degré -3.

b. 9 points doubles biplanaires ordinaires, points de diramation correspondants à $P_{00}, \ldots\ldots P_{04}$.

Remarquons que les courbes équivalentes aux six points a. sont rencontrées chacune en un point par les courbes canoniques de Ψ', par suite, ces courbes ont pour transformées, sur F, les courbes C passant par P_{12}, ... P_{34}. On en conclut que:

La surface Ψ' *a les genres* $p_g=p_a=2$, $p^{(1)}=1$ *et on peut toujours ramener cette surface à une surface d'ordre 18, à section de genre 13, de* S_8, *possédant six points triples coniques à cônes tangents rationnels et neuf points doubles biplanaires ordinaires.*

5.—D'une manière analogue, et en remarquant que P_{00} est un points de coïncidence à la fois pour Φ et I_3', on établit le théorème suivante:

La surface Ψ'' *a les genres* $p_g=p_a=2$, $p^{(1)}=1$, *et on peut toujours prendre, comme modèle projectif de cette surface, une surface d'ordre 9, à sections de genre 7, de* S_5, *possédant un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins deux points doubles succesifs dont le dernier est conique; trois points triples coniques à cônes tangents rationnels; quatre points doubles biplanaires ordinaires et enfin neuf points doubles.*

Front Belge, 26 mars 1916.