GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — LUCIEN GODEAUX, *Recherches sur les surfaces de genres un (deuxième note).* Note présentée par M. ȚIȚEICA, M.A.R., dans la séance du 19 juin 1914.

1. Considérons une surface F, de genres un ($p_a = P_4 = 1$) possédant deux transformations birationnelles involutives en elle-même, T_1, T_2, permutables, dont l'une, T_1, engendre une involution I'_2, d'ordre deux et de genres un. Nous nous proposons de déterminer la nature des involutions I''_2, I'''_2, d'ordres deux, engendrées respectivement par T_2 et par $T_3 = T_1T_2 = T_2T_1$.

Rappelons que deux cas sont connus:

a. I''_2 est de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) et I'''_2 est rationnelle ($p_a = P_2 = 0$) [1].

Dans ce cas, si l'on désigne par $\alpha_i(x,y) = 0$ $(i = 1,2,3,4)$ les équations des quatre côtés d'un quadrilatère complet, et par $f(x,y) = 0$ l'équation d'une courbe du huitième ordre ayant des points quadruples en deux sommets opposés du quadrilatère et des points doubles aux quatre autres sommets, la surface F a pour équations

$$z_2 = f(x,y), u^2 = \alpha_1(x,y,) \alpha_2(x,y) \alpha_3(x,y) \alpha_4(x,y).$$

b. I''_2et I'''_2 sont toutes deux rationnelles ($p_a = P_2 = 0$). Nous

[1]) **L. Godeaux,** Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un *(Rend. R. Accad. Lincei,* 1° sem. 1914).

avons déterminé toutes les surfaces F répondant à ces conditions dans notre première note [1].

Nous aurons par conséquent à examiner les cas suivants;

I. L'involution I_2'' est de genres un, l'involution I_2''' rationnelle;

II. Les involutions I_2'', I_2''' sont toutes deux de genres un;

III. L'involution I_2'' est de genres un, l'involution I_2''' de genres zéro et de bigenre un;

IV. Les involutions I_2'', I_2''' sont toutes deux de genres zéro et de bigenre un.

Nous désignerons par Φ_1, Φ_2, Φ_3 des surfaces représentant respectivement les involutions I_2', I_2'', I_2''', par Φ une surface représentant l'involution I_4 engendrée par T_1, T_2, T_3. Φ_1 sera toujours de genres un.

Sur chacune des surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3 nous avons une involution d'ordre deux (transformée de l'involution I_4 existant sur F) dont Φ est une surface représentative.

2. Cas I. *La surface* Φ_2 *est de genres un* ($p_a = P_4 = 1$) *et la surface* Φ_3 *est rationnelle* ($p_a = P_2 = o$).

La surface Φ est rationnelle et l'involution d'ordre deux existant sur la surface rationnelle Φ_3 ne peut avoir qu'un nombre fini de points de coïncidence. En effet, à un de ces points correspondent sur F, deux points de coïncidence soit pour I_2', soit pour I_2'', soit pour ces deux involutions (les deux points sont alors confondus); d'autre part, chacune des involutions I_2', I_2'', a huit points de coïncidence [2].

Remarquons que les huit points de coïncidence de I_2' ne peuvent tous coïncider avec les huit points de coïncidence de I_2'', car ces deux involutions seraient identiques. Il y a

(1) **L. Godeaux,** Recherches sur les surfaces de genres un. (Ce *Bulletin*, tome II).

(2) **L. Godeaux.** Mémoire sur les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un. (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, à l'impression).

par conséquent plus de quatre points de coïncidence pour l'involution d'ordre deux existant sur Φ_3. Mais d'après une formule que nous avons établie récemment, ce nombre doit être égal à quatre [1]. Nous arrivons donc à une absurdité, ce qui prouve que le premier cas ne peut se présenter.

3. Cas II. *Les surfaces Φ_2, Φ_3 sont toutes deux de genres un* ($p_a = P_4 = 1$).

Chacune des involutions I_2', I_2'', I_2''' existant sur F a huit points de coïncidence. Supposons qu'il y ait ε points de coïncidence à la fois pour I_2', I_2'' (et par suite pour I_2'''). Il est évident que ε est pair, car un point de coïncidence de l'une des trois involutions est transporté par les deux autres en un même point de coïncidence de la première (ce point coïncide dans ε cas avec le point dont on est parti).

L'involution d'ordre deux existant sur Φ_1 et dont Φ est une surface représentative, possède $\varepsilon + \frac{1}{2}(8-\varepsilon)$ points de coïncidence. Or, si une involution appartenant à une surface de genres un ne possède qu'un nombre fini de points de coïncidence, ce nombre est huit (et alors l'involution est de genres un) ou zéro (et alors elle est de genres zéro et de bigenre un) [2]. On doit donc avoir $\varepsilon + \frac{1}{2}(8-\varepsilon) = 8$ ou *o*. Dans la deuxième hypothèse, on a $\varepsilon = 8$, ce qui est absurde, puisque alors les trois involutions coïncideraient. On doit donc avoir $\varepsilon = 0$.

On en conclut que Φ est de genres un et que, dans la correspondance (1,4) liant cette surface à F, il y a douze points de diramation (simple).

En répétant un raisonnement déjà fait bien des fois au

---

(1) **L. Godeaux,** Mémoire sur les surfaces algébriques doubles douées d'un nombre fini de points de diramation. *(Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* à l'impression).

(2) **L. Godeaux,** Sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique. *(Mémoires de la Société des Sciences du Hainaut, 1913).*

cours de nos recherches sur les involutions, on voit que l'on peut prendre pour modèle projestif de Φ une surface d'ordre 2π-2, à sections hyperplanes de genres $\pi(\geqslant 2)$, de S_π, possédant douze points doubles coniques.

Il existe effectivement des surfaces F possédant trois involutions telles que I_2', I_2'', I_2'''. On en construit aisément un exemple.

Considérons le plan double de genres un:

$$z^2=ay^6+bx^6+cy^4x^2+dy^4+ey^2x^4+fx^4+gy^2x^2+hy^2+kx^2+l.$$

Les trois transformations:

$$\begin{array}{ll} (T_1) & x'=-x, y'=-y, z'=z; \\ (T_2) & x'=-x, y'=y, z'=-z; \\ (T_3) & x'=x, y'=-y, z'=-z; \end{array}$$

sont deux-à-deux permutables et engendrent respectivement des involutions d'ordre deux et de genres un. Ensembles, elles engendrent une involution d'ordre quatre et de genres un.

4. Cas III. *La surface Φ_2 est de genres un ($p_a=P_4=1$) et la surface Φ_3 de genres zéro et de bigenre un ($p_a=P_3=0$, $P_2=1$).*

Les involutions I_2', I_2'' ont chacune huit points de coïncidence, l'involution I_2''' en est au contraire dépourvue. Par suite, un point ne saurait être à la fois une coïncidence pour I_2' et I_2'', car il le serait également pour I_2'''. On en conclut que l'involution d'ordre deux appartenant à Φ_3 et dont Φ est une image, possède huit points de coïncidence. Appliquons à la correspondance (1, 2) entre Φ et Φ_3 la formule que nous avons établie récemment [1], on a:

$$8=4\ (l-p_a)$$

p_a étant le genre arithmétique de Φ. Çela est imposible, car Φ est régulière et son genre arithmétique ne peut

(1) Mémoire sur les surfaces doubles. . . . . . *(loc. cit.)*

donc être négatif. Le cas III ne peut donc pas se présenter.

5. Cas IV. *Les surfaces Φ_2, Φ_3 sont toutes deux de genres zéro et de bigenre un* ($p_a = P_3 = o$, $P_2 = 1$).

L'involution I'_2 possède huit points de coïncidence, les involutions I''_2, I'''_2 n'en possèdent aucun.

L'involution d'ordre deux appartenant à Φ_2 (ou Φ_3) possède quatre points de coïncidence et par suite, Φ est une surface de genres zéro et de bigenre un (1). On vérifie du reste aussi que l'involution d'ordre deux appartenant à Φ_1 ne possède aucun point de coïncidence.

La surface Φ représentant une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres zéro et de bigenre un, on peut la ramener, ainsi que nous l'avons démontré (2), à un plan double dont la courbe de diramation, d'ordre huit, est formée de:

a. Deux cubiques se touchant en deux points et de leurs deux tangentes en ces points, ces deux droites se recontrant en un point commun aux deux cubiques; ou de

b. Une conique et une quartique bitangentes, et de leurs deux tangentes aux points de contact, ces droites se recontrant en un point double de la quartique.

Soient $\alpha_1(x,y)=o, \alpha_2(x,y)=o$ les équations des deux droites intervenant dans la courbe de diramation du plan double Φ, $\beta_1(x,y)=o$, $\beta_2=(x,y)=o$ les équations des deux courbes.

Plaçons-nous dans le premier cas (β_1 et β_2 sont d'ordre trois). La surface Φ_1 est représentée par

$$z^2 = \beta_1(x,y)\,\beta_2(x,y), \qquad n^2 = \alpha_1(x,y)\,\alpha_2(x,y),$$

les surfaces Φ_2, Φ_3 respectivement par

---

(1) **L. Godeaux,** Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = o$, $P_6 = 1$. (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1913 tome XLI).

(2) Mémoire sur les surfaces double. . . . . . (*loc. cit.*)

$$(\Phi_2) \quad z^2 = \alpha_1(x,y)\,\beta_1(x,y), \quad n^2 = \alpha_2(x,y)\,\beta_2(x,y),$$
$$(\Phi_3) \quad z^2 = \alpha_1(x,y)\,\beta_2(x,y), \quad n^2 = \alpha_2(x,y)\,\beta_1(x,y).$$

Enfin, F sera représentée par

$$z^2 = \beta_1\beta_2, \quad n^2 = \alpha_1\beta_1, \quad v^2 = \alpha_2\beta_2.$$

Plaçons-nous dans le deuxième cas (β_1 d'ordre deux, β_2 d'ordre quatre). Nous avons cette fois:

$$\begin{array}{ll} (\Phi_1) & z^2 = \beta_1\beta_2, \quad n^2 = \alpha_1\alpha_2. \\ (\Phi_2) & z^2 = \alpha_1\alpha_2\beta_1, \quad n^2 = \beta_2, \\ (\Phi_3) & z^2 = \beta_1, \quad n^2 = \alpha_1\alpha_2\beta_2, \\ (\mathrm{F}) & z^2 = \beta_1, \quad n^2 = \beta_2, \quad v^2 = \alpha_1\alpha_2. \end{array}$$

6. En résumé, nous arrivons au théorème suivant:

Si une surface de genres un possède deux transformations birationnelles involutives permutables en elle-même, dont le produit doit engendrer une involution de venres un, ces deux transformations engendrent des ingolutions qui sont:

1. *Toutes deux rationnelles; ou*
2. *Toutes deux de genres un; ou*
3. *Toutes deux de genres zéro et de bigenre un; ou*
4. *L'une rationnelle, l'autre de genres zéro et de bigenre un.*